Ripartiamo dal nostro problema modello:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \geq 1 \end{cases}$$

Ora non abbiamo un modo per trattare $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$. Allora dobbiamo riformulare il problema per abbassare l'ordine delle derivate. Moltiplichiamo per una funzione di test $g(x) \in C([0,1])$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} g(x) - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} g(x) = f(x,t) g(x)$$

Integriamo lungo il contorno $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} g(x) dx - \int_0^1 \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} g(x) dx = \int_0^1 f(x,t) g(x) dx$$

Alleggeriamo la notazione:

- $u = u(x,t)$
- $u'' = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$
- $u' = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$
- $f = f(x,t)$
- $g = g(x)$

Applichiamo la formula di integrazioni per parti, con lo scopo di abbassare il grado della derivata seconda, in modo da poter richiedere una funzione di minore regolarità:

$$-\mu \int_0^1 u'' g dx = -\mu \int_0^1 u' g' dx - [u' g]_0^1$$

Siccome $u$ è nota dalle condizioni ai limiti, posso scegliere la funzione $g$ in modo che si annulli agli estremi di $[0,1]$, annullando il contributo ai termini al bordo.

Manteniamo la derivata temporale esplicita per far capire che la discretizzazione effettuata da ora sarà solo spaziale. Sostituendo all'integrazione iniziale:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\, g\, dx - \mu \int_0^1 u' g' dx = \int_0^1 f\, g\, dx$$

Allora lo spazio delle funzioni di test V dovrà essere tale che

$$\text{se } g \in V \text{ allora } g(0) = g(1) = 0$$

Allora si deve notare che la funzione $u$ (la temperatura, la soluzione del problema), essendo nulla al bordo, va cercata nello stesso spazio $V$.

**Ma che requisiti di regolarità devono rispettare le funzioni di $V$?**

Si noti che se le funzioni $u$ e $g$ appartenessero a $C^1([0,1])$, allora $u', g' \in C^0([0,1])$. Ma purtroppo le soluzioni fisiche potrebbero non essere derivabili con continuità. **Dobbiamo richiedere regolarità inferiore**.

**Che spazio scegliere?**

Dato che si richiede che $\int_0^1 u'g'dx$ sia ben definito, la richiesta minima sulle derivate $u'$ e $g'$ è che il prodotto $u'g'$ stia in $L^1(0,1)$:

$$L^1 = \{v : (0,1) \to \mathbb{R} \ t.c \ \int_0^1 |v(x)| \, dx < +\infty\}$$

Sappiamo che se $f_1^2$ e $f_2^2$ sono integrabili, allora anche il prodotto $f_1 f_2$ è integrabile. Perciò ci basta chiedere che $f_1, f_2 \in L^2(0,1)$ e di conseguenza $f_1 f_2 \in L^1(0,1)$.

Ritornando alla forma di prima:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\, g\, dx - \mu \int_0^1 u'\, g'\, dx = \int_0^1 f\, g\, dx, \quad \forall g \in V$$

Vediamo che per rendere gli integrali ben definiti basta richiedere funzioni a quadrato integrabile aventi derivata a quadrato integrabile. Definiamo lo *spazio di Sobolev*:

$$H^1(0,1) = \{v \in L^2(0,1) : v' \in L^2(0,1)\}$$

Allora non ci resta che definire lo spazio delle funzioni di test $V$ come:

$$V = H_0^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$$

**Ipotesi**

Supponiamo che $f \in L^2(0,1)$, allora tutti gli integrali hanno senso.

Siamo così riusciti a ricondurci ad un problema integrale risolvibile. Il problema differenziale di partenza:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \geq 1 \end{cases}$$

Si traduce nel **trovare** $u \in V = H_0^1(0,1)$ **tale che:**

$$\int_0^1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\, g\, dx - \mu \int_0^1 u'\, g'\, dx = \int_0^1 f\, g\, dx, \quad \forall g \in V$$

Abbiamo così imposto condizioni solo sulla derivata prima di $u$, perciò posso trovare anche soluzioni non sufficientemente regolari, ossia $u \notin C^2([0,1])$.

## Divergenze con differenze finite

Qui ci accorgiamo che avendo riformulato il problema ora richiediamo una soluzione $u(x,t)$ meno regolare di quanto invece si richiedeva con il metodo delle differenze finite, poiché per avere la derivata seconda approssimata bisogna richiedere che la funzione $u(x,t) \in C^1([0,1])$.

## Discretizzazione spaziale

Ora l'obiettivo è approssimare il problema integrale in un problema a dimensione finita, perciò dividiamo $[0,1]$ in $n \geq 2$ sottointervalli $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ di ampiezza $h_j = x_{j+1} - x_j$, con $j = 0, ..., n-1$.

Poniamo il passo $h = max(h_j)$. Ora considereremo $u_h$ e $g_h$ le approssimazioni finite di $u$ e $g$.

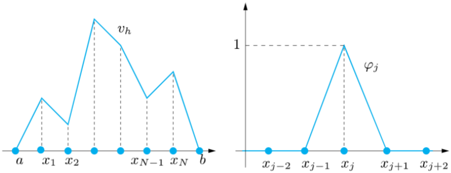
## Obiettivo

Trovare un sottospazio di dimensione finita $V_h$ di $V = H_0^1(0,1)$.

E' proprio dalla scelta del sottospazio che deriva il nome di elementi finiti.

Notiamo che le funzioni di $H_0^1(0,1)$ sono continue, allora possiamo considerare lo spazio delle funzioni globalmente continue in $[0,1]$ che ristrette all'intervallino $I_j$ sono polinomi di grado $\leq k$.

Ad esempio per k=1, la loro forma è:



Lo spazio di queste funzioni è chiamato

$$X_h^k(0,1) = \{v_h \in C^0([0,1]) : v_{h|I_j} \in \mathbb{P}_k, \forall I_j \in [0,1]\}$$

dove

- h è l'ampiezza di ogni intervallino
- $\mathbb{P}_k$ è lo spazio di polinomi di grado $\leq k$.

Gli spazi $X_h^k(0,1)$ sono tutti sottospazi di $H_0^1(0,1)$ in quanto sono costituiti da funzioni derivabili tranne che al più in un numero finito di punti (i vertici dei triangoli). Essi forniscono scelte possibili dello spazio $V_h$, pur di incorporare opportunamente le condizioni al bordo.

## Elementi finiti

Si dicono dunque elementi finiti proprio le funzioni dello spazio:

$$V_h(0,1) = X_h^{k,0}(0,1) = \{v_h \in X_h^k : v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

dove la dimensione di $V_h(0,1)$ è $N = nk - 1$, appunto finita.

Sono caratterizzati da:

- l'intervallo di definizione
- lo spazio dei polinomi scelti per costruire la base $\varphi_j$
- i coefficienti che moltiplicano i polinomi di forma

Siamo partiti da :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \leq x \geq 1 \end{cases}$$

Riformulando:

$$\int_0^1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\, g\, dx - \mu \int_0^1 u'\, g'\, dx = \int_0^1 f\, g\, dx, \quad \forall g \in V$$

Il problema che dobbiamo risolvere si traduce, grazie allo spazio degli elementi finiti, nel trovare $u(x_h, t) = u_h \in V_h$ tale che:

$$\int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial t}\, g_h\, dx - \mu \int_0^1 u_h'\, g_h'\, dx = \int_0^1 f\, g_h\, dx, \quad \forall g_h \in V_h$$

dove

- $u(x,0) = u_{h,0} = u^0$ valore iniziale
- $g_h \in V_h$

Siamo così giunti ad una semi-discretizzazione (solo spaziale) del problema.

Bene ora non ci resta che vedere come si costruiscono $g_h$ e $u_h$ mediante l'approssimazione per elementi finiti.

**Discretizzazione per elementi finiti**

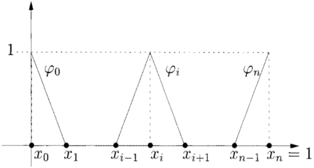
Indichiamo con $\varphi_j$ per $j = 0, ..., N$ una base di $V_h$, allora basta che siano queste a soddisfare il problema integrale approssimato. Ogni funzione di $V_h$, quindi anche $u_h$ e $g_h$, sono combinazione lineare delle funzioni della base.

Qui sta la potenza del metodo degli elementi finiti: invece di cercare una generica funzione $u$, cerchiamo la base di $V_h$ che ricostruisce $u$.

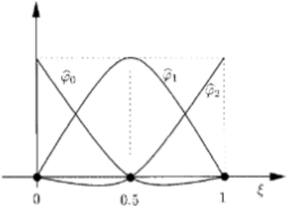
## Che tipo di funzioni possono essere base per $V_h(0,1)$?

E' costituito da funzioni globalmente continue in [0,1], perciò ci concentreremo su due casi:

- $k = 1$, funzioni continue e lineari a tratti nell'intervallino $I_j$

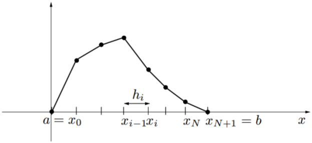



- $k = 2$, funzioni polinomiali a tratti di grado 2



Con opportune combinazioni lineari delle funzioni di forma in ogni $I_j$ riusciamo a ricostruire localmente il valore della funzione. Per farlo globalmente basta combinare linearmente per $N = nk - 1$ volte in $[0, 1]$.

Ad esempio nel caso $k = 1$ sommandole lungo $[0, 1]$ e "scalate" per opportuni coefficienti la funzione costruita potrebbe essere:




Da qui notiamo che abbiamo suddiviso una generica funzione in n intervallini e ricostruita mediante la somma di n elementi finiti (ognuno vive nel proprio intervallo).

## Soluzione

Una volta scelte le funzioni di base $\varphi_j$ la soluzione approssimata $u_h$ si può riscrivere come

$$u_h = \sum_{j=0}^{N} u_j \varphi_j$$

dove gli N coefficienti $u_j$ sono le incognite del problema, trovati loro approssimiamo la temperatura nel problema integrale.

Non ci resta che sostituire quanto trovato nel problema integrale approssimato, considerando la funzione di test come una funzione base in ogni intervallino $I_j$, cioè $g = \varphi_i$ per $i = 0, ..., N$.

Indichiamo con:

- $\varphi_j' = \frac{\partial \varphi_j(x,t)}{\partial x}$
- $\varphi_i' = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}$

Allora sostituendo:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_h}{\partial t} \ \varphi_j \ \varphi_i \ dx + \mu \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j' \ \varphi_i' \ dx = \int_0^1 f \ \varphi_i \ dx$$

per $i = 0, ..., N$.

Siccome i termini $u_j$ sono indipendenti dallo spazio, si può portare dentro l'integrale:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial t} \int_0^1 \varphi_j \ \varphi_i \ dx + \mu \sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \varphi_j' \ \varphi_i' \ dx = \int_0^1 f \ \varphi_i \ dx$$

per $i = 0, ..., N$.

Possiamo raccogliere in un sistema lineare di N equazioni in N incognite $u_j$:

$$\begin{cases} M\,\frac{\partial u(t)}{\partial t} + A_{fe}\,u(t) = f_{fe}(t) & \\ u(x_0,t) = u(x_n,t) = 0 & x_0 = 0, x_n = 1 \\ u(x_h,0) = u^0 & t > 0 \end{cases}$$

dove

- $u = (u_j) = (u_h(x_i,t))$ **incognite**
- $(A_{fe})_{ij} = \mu \int_0^1 \varphi'_j\,\varphi'_i\,dx$ **calcolabile**
- $(f_{fe})_i = \int_0^1 f\,\varphi_i dx$ **calcolabile**
- $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_j\varphi_i dx$, **calcolabile**

Riesplicitiamo la dipendenza dal tempo, perché finora abbiamo solo discretizzato l'intervallo spaziale [0,1].

## Discretizzazione temporale

Suddividiamo l'intervallo temporale in n sottointervalli $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ con passo $\Delta = t_{k+1} - t_k$.

Se consideriamo $u^k = u(t_k)$ dove $t_k$ è il k-esimo instante di tempo della funzione discretizzata con passo di campionamento $\Delta > 0$, approssimiamo la derivata temporale come:

$$M\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + A_{fe}(\theta u^{k+1} + (1-\theta)u^k) = \theta f_{fe}^{k+1} + (1-\theta)f_{fe}^k$$

dove $u^0$ è il valore iniziale.

Notare che M e $A_{fe}$ sono simmetriche e definite positive, quindi il sistema avrà un'unica soluzione.

**Accuratezza del metodo degli elementi finiti**

Pag 431 matematica numerica
Pag 37 modellistica numerica
Pag 388 calcolo scientifico

La struttura di $A_{fe}$ e l'ordine di accuratezza di $u_h$ si basano sulla forma dei polinomi scelti come base e quindi dalla scelta di $V_h$.

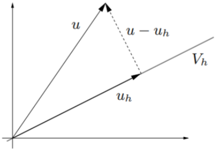
Si può dimostrare che:

- la soluzione del problema integrale approssimato esiste ed è unica
- il metodo degli elementi finiti è stabile, uniformemente rispetto ad h, poichè vale la seguente maggiorazione:

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_V$$

- il metodo è fortemente consistente:

$$-\mu \int_0^1 (u - u_h)\, g_h \, dx = 0, \quad \forall g_h \in V_h$$



Se $\theta \geq 1/2$, il $\theta$-metodo è incondizionatamente stabile per ogni valore positivo di $\Delta t$, mentre se $0 \leq \theta < 1/2$ il $\theta$-metodo è stabile solo se

$$0 < \Delta t \leq \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_{\max}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{fe}})},$$

si veda a tale proposito [Qua16, Cap. 5]. Inoltre, si può dimostrare che esistono due costanti positive $c_1$ e $c_2$, indipendenti da $h$, tali che

$$c_1 h^{-2} \leq \lambda_{\max}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{fe}}) \leq c_2 h^{-2}$$

(per la dimostrazione, si veda [QV94], Sezione 6.3.2). In base a questa proprietà, otteniamo che se $0 \leq \theta < 1/2$ il metodo è stabile solo se

$$0 < \Delta t \leq C_1(\theta) h^2, \tag{9.74}$$

per una opportuna costante $C_1(\theta)$ indipendente da entrambi i parametri $h$ e $\Delta t$.