APPENDICE C

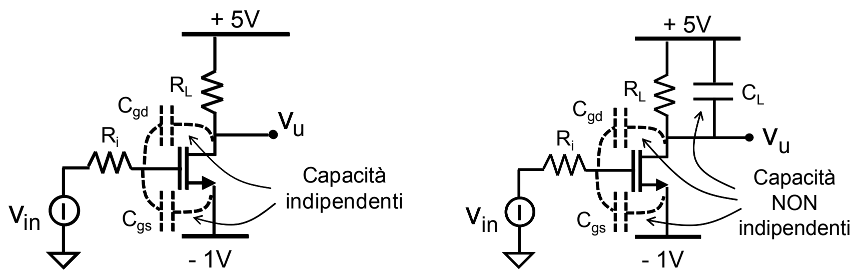
METODO SINTETICO PER IL CALCOLO DEI POLI REALI DI UNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- **Capacità indipendenti**
- **Capacità non interagenti.**
- **Capacità interagenti.**
- **Metodo sintetico per il calcolo di poli interagenti.**
- **Caso di coefficiente b con addendi uguali.**

I poli di una rete concorrono a determinare la velocità con cui essa risponde al segnale forzante. La determinazione dei poli, ed in particolare del polo a più bassa frequenza, è quindi una delle più importanti operazioni da compiersi nell'analisi di un circuito. Spesso i circuiti hanno un numero cospicuo di elementi reattivi, tipicamente condensatori, **indipendenti.** Questo si traduce nella presenza di un numero cospicuo di poli nella funzione di trasferimento, che risulta quindi laboriosa da ricavare.

Capacità indipendenti

Il numero di *poli di una rete* è pari al numero di elementi reattivi **indipendenti**

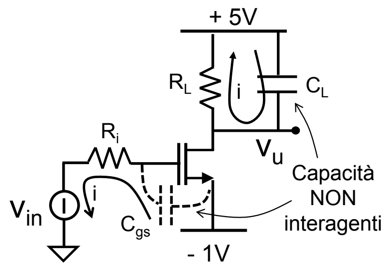


$T(s) = \dfrac{v_u(s)}{v_{in}(s)}$ con due poli. $T(s) = \dfrac{v_u(s)}{v_{in}(s)}$ con ancora due poli.

Le 3 capacità della figura a destra NON sono tutte indipendenti perché solo in due di esse è possibile scegliere la carica sui piatti (o la tensione ai capi). Una volta fatto ciò, infatti, la terza capacità ha la carica (o la tensione) vincolata, cioè non più definibile liberamente dall'utente, ed è perciò **dipendente** delle altre scelte. Un caso tipico di capacità NON indipendenti è quando le capacità stanno in serie tra loro su una maglia con un generatore di tensione esterno.

- Capacità non interagenti.

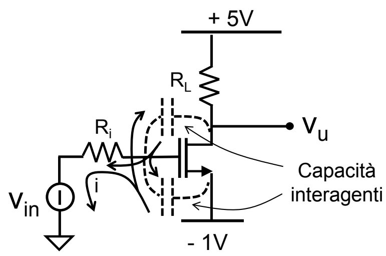
La frequenza caratteristica dei poli è facilmente ottenibile se gli elementi reattivi indipendenti *non interagiscono tra di loro*: se in una rete ci sono condensatori indipendenti, essi sono **non interagenti** se la corrente di scarica di ciascuno di essi non fluisce attraverso l'altro o, equivalentemente, se l'impedenza vista da ognuno di essi non comprende altre capacità. In questo caso, la ***costante di tempo*** di ciascun polo *è pari al prodotto della singola capacità per la resistenza totale vista in parallelo dai suoi morsetti*, come nell'esempio seguente:



$$T(s) = \frac{v_u(s)}{v_{in}(s)} = \frac{-g_m R_L}{(1 + sR_i C_{gs}) \cdot (1 + sR_L C_L)} \tag{C.1}$$

- Capacità interagenti.

Quando invece i due elementi reattivi interagiscono, la corrente di scarica di ciascuno di essi fluisce anche attraverso l'altro (o equivalentemente l'impedenza vista ai capi di ciascuna capacità comprende anche l'altra), come ad esempio nel circuito seguente.



La funzione di trasferimento in questo caso contiene l'informazione dei due poli in modo meno esplicito rispetto all'esempio di (C.1).

A titolo di esempio si consideri la "semplice" rete RC-RC della Fig.C1 in cui si hanno 2 capacità indipendenti ed interagenti che concorrono entrambe a definire la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita. Questa, calcolata con l'analisi nodale impostando il bilancio:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{in} - e}{R_1} = \dfrac{e}{1/sC_1} + \dfrac{e}{R_2 + 1/sC_2} \\ \dfrac{e}{R_2 + 1/sC_2} \cdot \dfrac{1}{sC_2} = v_u \end{cases} \tag{C.2}$$

assume la forma:

$$T(s)=\frac{v_u(s)}{v_{in}(s)}=\frac{1}{s^2(C_1C_2R_1R_2)+s[C_1R_1+C_2(R_1+R_2)]+1} \tag{C.3}$$

Risolvendo il denominatore,

$$as^2+bs+1=0$$

si ottengono i poli precisi del circuito:

$$p_L=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad p_H=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{C.4}$$

dove quindi i valori dei due poli sono ricavati utilizzando in modo più articolato che in (C.1) tutti i coefficienti dell'espressione di 2° grado. Nell'ipotesi che R1=1kΩ, R2=50kΩ, C1=0.1pF, C2=1pF, i poli sarebbero a f_L= 3.18MHz e f_H=1.6GHz

Metodo sintetico per il calcolo di poli interagenti.

La domanda che ci poniamo ora è se ci sia un modo per giungere allo stesso risultato (o perlomeno ad una sua ragionevole approssimazione) in modo più sintetico di quanto non sia l'analisi nodale del circuito come fatto in (C.2). Quest'ultima infatti, nel caso di circuiti a transistore o in generale di circuiti a molte capacità, può essere effettivamente complicata. E' ben vero che il tracciamento dei diagrammi di Bode e la stessa analisi simbolica delle reti possono essere svolti da programmi di calcolo, oggi disponibili anche su tablet, ma resta molto utile avere un metodo sintetico e veloce per giungere ad avere una idea quantitativa della risposta di un circuito prima di affrontare il progetto con l'ausilio del computer.

Partiamo notando che le radici di una equazione di secondo grado, come quella a denominatore della (C.3) :

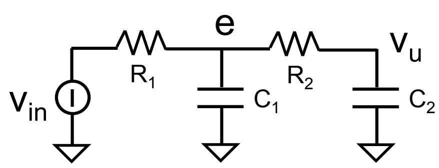


Fig. C.1 *Rete RC-RC come esempio di circuito con 2 capacità indipendenti ed interagenti.*

$$as^2 + bs + 1 = 0 \tag{C.5}$$

sottostanno alle seguenti due relazioni caratteristiche

$$p_L + p_H = -\frac{b}{a}; \qquad p_L \cdot p_H = \frac{1}{a} \ . \tag{C.6}$$

Se le radici (i poli della nostra funzione di trasferimento), p_L e p_H, sono sufficientemente diverse tra loro, ovvero $|p_H|>>|p_L|$, allora dalla prima delle (C.6) si ha

$$p_H \cong -\frac{b}{a} \tag{C.7}$$

e quindi dalla seconda delle (C.6)

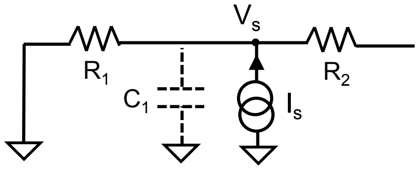
$$p_L = \frac{1}{a \cdot p_H} \cong -\frac{1}{b} \tag{C.8}$$

Scopriamo quindi che l'informazione di uno dei due poli, quello a frequenza più bassa, p_L, (in generale il più importante da conoscere in un circuito elettronico) è sostanzialmente concentrata nel termine "b" della (C.3) cioè nel coefficiente del termine di primo grado dell'equazione del denominatore della funzione di trasferimento.
Poiché il termine "b" è così importante, vediamo se si riesce a ricavarlo in maniera sintetica.

Il ***coefficiente b del termine di primo grado*** è esattamente pari alla *somma delle costanti di tempo associate a ciascun condensatore quando gli altri condensatori sono stati rimossi:*

$$b = \sum_{j=1}^{n} C_j R_j \ . \tag{C.9}$$

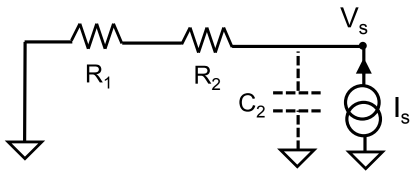
Per valutare la **resistenza vista in parallelo da C_1** quando $C_2=0$ (C_2 aperta) si deve pensare di applicare nella posizione del condensatore un segnale sonda di corrente e di valutare la tensione che si sviluppa ai suoi capi:



Nel caso specifico, si ottiene semplicemente R_1 e quindi l'addendo associato alla capacità C_1 è

$$\tau_{b1} = R_1 C_1 = 100\text{ps} \tag{C.10}$$

Per valutare la **resistenza vista in parallelo da C_2** quando C_1=0 (C_1 aperta), si deve pensare di applicare nella posizione del condensatore C_2 un segnale sonda di corrente e di valutare la tensione che si sviluppa ai suoi capi:



Nel caso specifico, si ottiene (R_1+R_2) e quindi l'addendo associato alla capacità C_2 è

$$\tau_{b2} = (R_1 + R_2) \cdot C_2 = 51\text{ns} \tag{C.11}$$

Il coefficiente del termine di 1° grado al denominatore della (C.3) è effettivamente la somma di queste due costanti di tempo, come indicato dalla (C.9):

$$b = R_1 C_1 + (R_1 + R_2) \cdot C_2 = 100\text{ps}+51\text{ns} = 51.1\text{ns} \tag{C.12}$$

Non è questa la sede per dimostrarlo, ma il risultato trovato è di validità generale: ***qualunque sia l'ordine del denominatore, cioè qualunque sia il numero di elementi conservativi (capacità o induttanze) indipendenti ed interagenti nel circuito, il coefficiente del termine di primo grado del denominatore della funzione di trasferimento è dato da***

$$b = \sum_{j=1}^{n} C_j R_j \ . \tag{C.9}$$

Se ci fermassimo qui e calcolassimo il polo del circuito della Fig.C1 sfruttando la relazione (C.8)

$$p_L = \frac{1}{a \cdot p_H} \cong -\frac{1}{b}$$

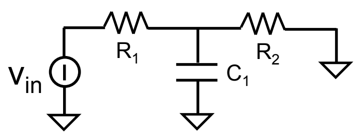
troveremmo f_L=3.12MHz. Questo valore va confrontato con il valore esatto trovato prima (f_L= 3.18MHz) risultandone molto vicino !

Pertanto possiamo dire che il ***polo prevalente del circuito*** (cioè la radice a più bassa frequenza dell'equazione di secondo grado al denominatore della (C.3)), è ben stimato da:

$$p_L \cong -\frac{1}{b} \tag{C.8}$$

Il risultato è tanto più preciso quanto più i due poli abbiano frequenze caratteristiche distanti tra loro (una decade è già più che sufficiente per un risultato molto preciso). Potremmo concludere che stimare il polo prevalente di un circuito anche complesso in cui varie capacità interagiscono tra di loro è relativamente facile!

Il ***secondo polo del circuito*** starà ad una frequenza più elevata di p_L appena trovato. Se si conoscesse il termine "a" della (C.3), il calcolo sarebbe immediato e preciso, come abbiamo visto all'inizio, ma per questo dovremmo risolvere il sistema (C.2). Una via alternativa per calcolare il successivo polo è quella di confrontare i valori di (C.10) e di (C.11), cioè degli addendi del termine b. Il maggiore tra essi definisce la costante di tempo più lenta e quindi indica la capacità (tra le due presenti nel nostro esempio) che più facilmente interverrà a frequenza più bassa. Volendo esplorare le frequenze più alte, questa capacità sarà quindi considerabile come già intervenuta.
Nel nostro esempio è la capacità C_2 quella che determina la costante di tempo più lenta e che quindi contribuisce maggiormente al polo a più bassa frequenza. Pertanto non ci resta che farla effettivamente intervenire, cortocircuitandola nel circuito della Fig.C.1. Si otterrà così un "nuovo circuito", nel nostro esempio il seguente:



che avrà ora solo l'altra capacità, C_1. Il problema è quindi stato abbassato di un grado ed è diventato ora un semplice problema ad una sola capacità di facilissima soluzione benché valido solo per frequenze elevate. Si noti che la capacità C_1 ora vede un insieme di resistenze ai suoi capi in generale diverso da quello calcolato prima. La nuova costante di tempo che interverrà a queste alte frequenze sarà quindi data dal prodotto della rimanente capacità con la resistenza vista in questa nuova situazione, nel nostro esempio data da:

$$\tau_H = \left(R_1 \| R_2\right) \cdot C_1 \; = 98\text{ps}$$

Essa indicherà il secondo polo del nostro circuito, a frequenza maggiore del primo, e pari in questo caso a f_H=1.62GHz, da confrontarsi con il valore esatto trovato all'inizio e pari a f_H= 1.6GHz !
Questo esempio indica come, operando in questo modo semplice ed intuitivo, si raggiungono risultati molto vicino ai valori veri dei due poli, ottenibili eventualmente in un secondo tempo con esattezza utilizzando un simulatore circuitale.

Il circuito della Fig.C.1 soddisfa effettivamente la condizione di validità di alcune semplificazioni che ci hanno guidato lungo questo cammino, precisamente quella che i due poli del circuito siano distanti tra di loro, come effettivamente scopriamo essere alla fine del procedimento.

Caso di coefficiente b con addendi uguali.

Cosa succederebbe se i due valori di (C.10) e di (C.11) che compongono il termine "b" fossero, nel caso più sfortunato, uguali tra loro e quindi non fosse naturale eliminarne uno perché intervenente prima ?

A tal fine facciamo riferimento al circuito della Fig.C.2, simile al precedente eccetto che nel valore di C1=51pF. In questo caso si ottiene

$$\tau_{b1} = R_1 C_1 = 51\text{ns} \qquad\qquad \tau_{b2} = (R_1 + R_2)\cdot C_2 = 51\text{ns}$$

Il coefficiente del termine di 1° grado al denominatore della (C.3), somma di queste due costanti di tempo, sarebbe quindi :

$$b = R_1 C_1 + (R_1 + R_2)\cdot C_2 = 102 \text{ ns}$$

a cui corrisponderebbe un ***polo prevalente*** stimato alla frequenza f_L≅1.56MHz, da confrontarsi con il valore reale f_L=2.7MHz ottenuto dalla (C.4). L'errore in questo caso c'è ma è comunque piccolo (inferiore della metà) e permette con questa prima

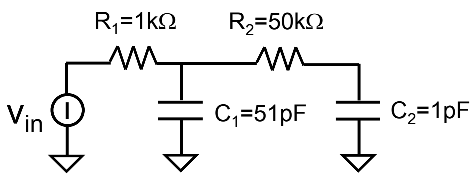
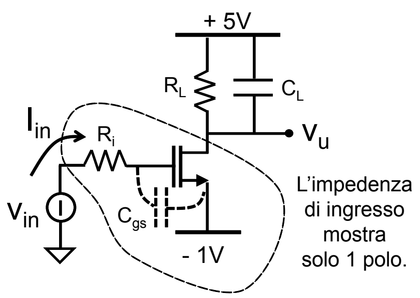


Fig. C.2 *Rete RC-RC con valori dei componenti tali da portare ad addendi uguali nel coefficiente b.*

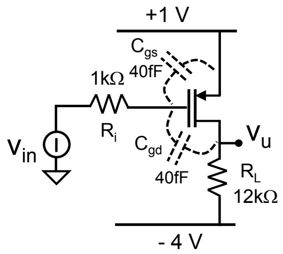
stima di centrare l'ordine di grandezza con ottima stima.

Il ***secondo polo del circuito*** starà ad una frequenza più elevata di p_L. Per calcolarne il valore siamo in difficoltà con il confronto dei due addendi che costituiscono il termine b, perché uguali. Sembra indifferente cortocircuitare una piuttosto che l'altra delle due capacità per ricavare il "nuovo circuito" per il calcolo del polo ad alta frequenza. Così in effetti è, ed è facilmente verificabile. In entrambi i casi infatti si ottiene $f_H \cong 3.2MHz$ da confrontarsi il valore esatto $f_H=3.6MHz$ calcolata con (C.4).
Anche in questo caso circuitale che sembrava inizialmente sfavorevole otteniamo in modo semplice ottime stime dei poli!

Attenzione! Non necessariamente tutti i poli presenti in un circuito "appaiono" nella funzione di trasferimento. Ad esempio, l'impedenza di ingresso del seguente circuito avrà solo un polo, nonostante la presenza di due condensatori nel circuito complessivo!



E C.1 *Calcolare la funzione di trasferimento del seguente circuito in cui il MOSFET ha $k=1mA/V^2$, $V_T=0.5$ e $V_A=\infty$.*

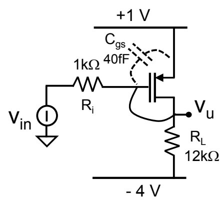


Calcolare i poli annullando il denominatore.
Stimare i poli con il metodo descritto nelle pagine precedenti e commentare il risultato:

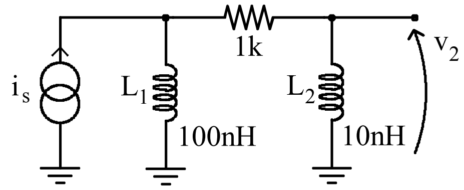
La polarizzazione del circuito porta a $1/g_m=1k\Omega$. Il guadagno a bassa frequenza $G=-g_mR_L=-12$.
La funzione di trasferimento, ottenuta facendo il bilancio di corrente al nodo di Gate ed al nodo di Drain, risulta:

$$\frac{v_u}{v_{in}} = -g_m R_L \frac{1 - sC_{gd}/g_m}{s^2 R_L R_i C_{gd} C_{gs} + s\left[R_i C_{gs} + R_L C_{gd} + R_i C_{gd}(1+g_m R_L)\right] + 1}$$

Le due radici del denominatore (cioè i poli del circuito) risultano quindi a f_L=156MHz e f_H=8.5MHz.
Stimando il polo a bassa frequenza come semplicemente $f_l=-1/2\pi b$ si ottiene f_l=153MHz, ben vicino al vero !
Notando che l'addendo di b con C_{gd} ha la costante di tempo più elevata, immaginiamo C_{gd} intervenire prima di C_{gs} quando andiamo ad esplorare frequenze più elevate di 153MHz. Cortocircuitiamo quindi C_{gd} e troviamo la nuova costante di tempo del circuito così ottenuto, pari a $C_{gs}R_I||R_L||1/g_m$ a cui corrisponde una frequenza f_h=8.3MHz, anch'essa ottima stima del vero !

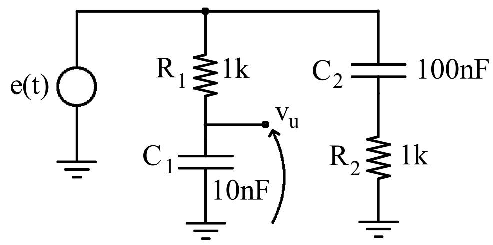


E C.2 *Stimare i poli del seguente circuito:*



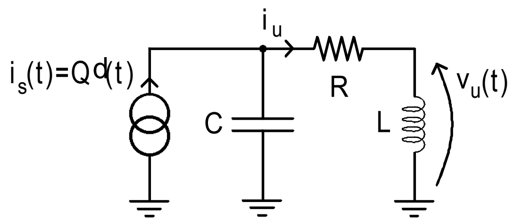
I due induttori non sono indipendenti. Infatti, fissata la corrente che fluisce nel primo, la corrente nel secondo è determinata senza alcun grado di libertà dal bilancio delle correnti al nodo d'ingresso. Quindi la rete deve avere un solo polo la cui costante di tempo dovrà essere $\tau=(L_1+L_2)/R$. Se non avessi notato questa cosa, avrei potuto calcolare il termine b come $b=L_1/R+L_2/R$ da cui $p_L=R/2\pi(L_1+L_2)$. Nella stima del polo a frequenza più alta faccio intervenire l'addendo di b a frequenza più bassa (L_1/R), aprendolo. A quel punto il nuovo "circuito" fornisce un $b=L_2/\infty=0$ suggerendo una frequenza del secondo polo all'infinito. Questo risultato è in accordo con il fatto che il circuito ha un solo polo al finito.

E C.3 *Si consideri il circuito nella figura seguente. Ricavare per via sintetica la funzione di trasferimento* v_u/e.



In questo caso gli elementi reattivi sono indipendenti ma non interagenti. Infatti, cortocircuitato il generatore forzante, è facile verificare che la corrente di scarica di C_1 non fluisce attraverso C_2, ma si richiude sulle armature di C_1 attraverso R_1. Analogamente la corrente di scarica di C_2 non fluisce attraverso C_1. Quindi i poli associati ai due elementi reattivi non si influenzano e sono rispettivamente pari a $1/C_1R_1$ e $1/C_2R_2$. La funzione di trasferimento v_u/e è caratterizzata da un solo polo, quello di C_1. Infatti la rete C_1, R_1 è quella di un integratore approssimato. Essa non è influenzata dal fatto che il generatore di tensione ideale forzi lo stesso segnale in parallelo sia su R_1C_1 che su R_2 e C_2.

E C.3 *Si consideri il seguente circuito, già analizzato accuratamente nell'esercizio E A.10. Verificare che anche in questo caso il termine b può essere ricavato in modo molto semplice e stimare i due poli del circuito e commentarne la condizione di validità.*



Nell'appendice A avevamo ricavato l'espressione della funzione di trasferimento come :

$$T(s) = \frac{v_u(s)}{i_s(s)} = \frac{sL}{s^2 LC + sRC + 1}$$

Il termine b è dato dalla somma della costante di tempo associata alla scarica del condensatore quando l'induttore è un semplice cortocircuito e della costante di scarica dell'induttore quando il condensatore è un circuito aperto. La prima costante di tempo è RC. Per valutare la costante di scarica associata all'induttore, si ricordi che la costante di tempo associata alla scarica di un induttore su una rete resistiva è pari al rapporto L/R_S, dove R_S è la resistenza totale vista in serie all'induttore. In questo caso, giacché il condensatore è considerato un circuito aperto, $R_S=\infty$ e quindi la costante di tempo associata alla scarica dell'induttore è nulla. Pertanto $b=CR+L/\infty=CR$ come effettivamente è.
La stima del primo polo è $p_L \cong -1/RC$.

A frequenze superiori a questa la capacità sarà intervenuta. La stima di p_H è data quindi dall'inverso della costante di scarica dell'induttore quando il condensatore è un cortocircuito. La costante di tempo associata alla scarica di un induttore, quando il condensatore è un corto circuito, è L/R. Quindi la stima di p_H è data da -R/L. Si noti come queste espressioni corrispondano ai rapporti tra i coefficienti del trinomio al denominatore della funzione di trasferimento esatta, già calcolata nell'esercizio E A.10.

Questa stima è ragionevole purché le due radici siano reali distinte e molto diverse tra loro. La condizione $|p_H| >> |p_L|$ si traduce nella condizione $R^2 >> L/C$ che, effettivamente, garantisce che i poli della rete siano reali e distinti (E A.10). Se la precedente diseguaglianza non è verificata, la stima effettuata non è da considerarsi valida e si deve procedere a valutare i poli azzerando il polinomio al denominatore della funzione di trasferimento.