

12

COMPORTAMENTO IN FREQUENZA DEI CIRCUITI REAZIONATI

- 12.1 *Introduzione*
- 12.2 *Condensatori nel ramo $F(s)$ di reazione*
 - 12.2.1 Esempio di un guadagno ideale con un solo polo
 - 12.3.1 Esempio di un guadagno ideale con solo zero
- 12.3 *Condensatori nel ramo $A(s)$ di andata*
 - 12.3.1 La rappresentazione compatta di Bode
- 12.4 *La rappresentazione nel piano complesso*
 - 12.4.1 Luogo delle radici: caso di 1 polo in $G_{loop}(s)$
 - 12.4.2 Luogo delle radici: caso generale
 - 12.4.3 Regole di tracciamento del luogo
- 12.5 *Rumore RMS in un circuito retroazionato*
- 12.6 *Condizioni di stabilità*
 - 12.6.1 Stabilità e luogo delle radici
 - 12.6.2 Il criterio di stabilità di Bode
 - 12.6.3 Differenze tra uso del diagramma di Bode e del luogo delle radici
- 12.7 *Stabilità e tecniche di compensazione*
 - 12.7.1 Stabilizzazione in frequenza con modifica dei poli
 - 12.7.2 Stabilizzazione in frequenza con reti sfasatrici
- 12.8 *Effetto sulla stabilità di carichi capacitivi*
 - 12.8.1 Effetto di un carico capacitivo in uscita
 - 12.8.2 Effetto di un carico capacitivo in ingresso
- 12.9 *Instabilità utili: l'oscillatore sinusoidale*
- 12.10 *Il ritardo di propagazione del segnale lungo l'anello*

12.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente ci si è limitati a considerare il comportamento degli amplificatori reazionati in un intervallo di frequenze in cui la funzione di trasferimento sia indipendente dalla frequenza, indicato come *centro banda* o *media frequenza*. Estendiamo ora l'analisi al caso in cui nel circuito siano presenti degli elementi reattivi (condensatori ed induttori) e si voglia esplorare il comportamento del circuito su tutto lo spettro delle frequenze.

In un circuito retroazionato (Fig.12.1), gli elementi reattivi possono trovarsi nel ramo di andata, $A(s)$, oppure nel ramo di retroazione, $F(s)$, oppure in entrambe le posizioni. Poiché non abbiamo mai veramente distinto in un circuito quale fosse il ramo di andata e quale fosse il ramo di retroazione (e continuiamo a pensare che non sia necessario!), la frase precedente potrebbe essere riscritta dicendo che

- i) gli elementi reattivi possono manifestarsi già completamente nel guadagno ideale del circuito (ed in questo caso starebbero nel ramo $F(s)$ di retroazione, come indicatoci dalla equazione (11.4)), oppure
- ii) gli elementi reattivi possono manifestarsi esclusivamente nel guadagno reale senza essere presenti nel guadagno ideale (ed in questo caso starebbero nel ramo $A(s)$ di andata), oppure
- iii) gli elementi reattivi possono annidarsi in entrambe le posizioni e quindi manifestarsi in parte già nel guadagno ideale ed in parte nel guadagno reale.

In questo capitolo analizzeremo in dettaglio tutte queste situazioni ed affineremo gli strumenti logici e matematici per comprendere il comportamento in frequenza di un circuito retroazionato qualunque sia il suo grado di complessità.

Rifletteremo anche sul fatto che la presenza di elementi reattivi può rendere addirittura instabile un circuito. Per intuire questo aspetto ricordiamoci che un amplificatore è stato classificato come reazionato negativamente quando il segno del suo guadagno d'anello a media frequenza è negativo. Questa condizione esprime il fatto che il segnale di reazione, f , ritorna al nodo sommatore in

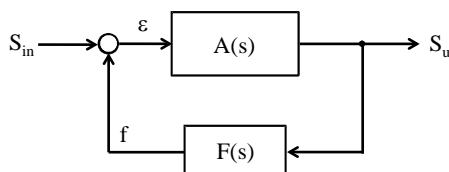


Fig. 12.1 *Schema della reazione con i blocchi di andata e di retroazione genericamente funzione della frequenza.*

controfase con il segnale s_{in} applicato (Fig.11.2a), e si oppone alla variazione del segnale di comando, ε , dell'amplificatore d'andata $A(s)$. Quando nello stadio di andata e/o in quello di reazione sono presenti degli elementi reattivi, lo sfasamento addizionale da loro introdotto può essere tale che il segnale di reazione ritorni al nodo sommatore in fase con il segnale applicato e la reazione diventi positiva. Se il guadagno d'anello a questa frequenza è maggiore di uno, il segnale è anche amplificato nel procedere lungo l'anello e quindi il sistema diventa instabile. In questo caso già solo il rumore dei componenti elettronici innescerebbe la divergenza della variabile di uscita del circuito la cui ampiezza continuerebbe ad aumentare fino a che gli elementi attivi non saturano.

Sarà proprio lo studio del guadagno d'anello a permettere di definire le proprietà di stabilità del sistema.

12.2 CONDENSATORI NEL RAMO $F(s)$ DI REAZIONE

Come primo caso di studio della risposta in frequenza di un circuito reazionato, analizziamo quello in cui sia presente solo una capacità posta nel ramo di reazione. In questa situazione, il polo che inevitabilmente dovrà essere presente nel circuito comparirà direttamente già nella funzione di *trasferimento ideale*.

12.2.1 Esempio di un guadagno ideale con un solo polo

A titolo di esempio consideriamo i due circuiti della Fig.12.2, differenti nel dettaglio circuitale ma identici nella **funzione di trasferimento ideale** tra ingresso ed uscita, pari a :

$$\frac{v_{in}}{R_1} = - \frac{v_u}{R_2 \parallel (1/sC)} \quad \Rightarrow \quad G_{id}(s) = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sCR_2} \quad (12.1)$$

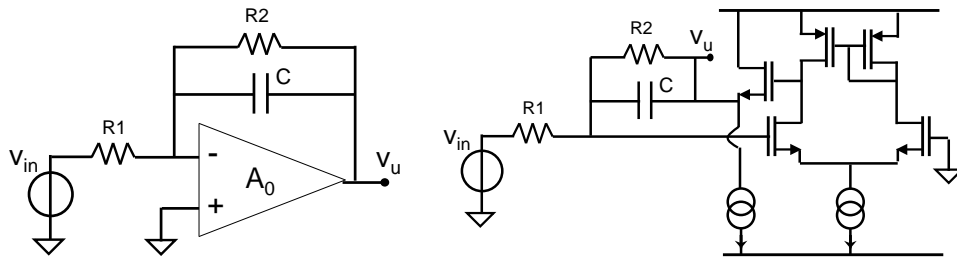


Fig. 12.2 Esempi di circuiti retroazionati in cui compare un solo condensatore nel ramo di retroazione. Il guadagno ideale dei due circuiti è identico.

La corrispondente rappresentazione spettrale del modulo e della fase è riportata nella Fig.12.3, in cui è visualizzata la posizione del polo del circuito retroazionato idealmente (il solo presente perché il circuito ha un solo elemento conservativo) alla frequenza:

$$f_p|_{id} = \frac{1}{2\pi \cdot CR_2} \quad (12.2)$$

che definisce la banda passante del circuito nel caso ideale.

Per capire quanto tale risultato sia estendibile al caso reale, proviamo ad analizzare con attenzione il **guadagno di anello del circuito**. Limitandoci per semplicità al circuito a sinistra della Fig.12.2, esso vale:

$$G_{loop}(s) = -\frac{R_1 \cdot A_0}{\frac{R_2}{1+sCR_2} + R_1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot A_0 \cdot \frac{1+sCR_2}{1+sCR_1 \parallel R_2}$$

Esso è riportato, in modulo e fase, nella Fig.12.4. Il grafico ci dice che, se A_0 è sufficientemente grande, G_{loop} pur variando di valore con la frequenza rimane sempre molto elevato assicurando quindi una forte retroazione nel circuito a tutte le frequenze. Questo ci consente di concludere che *il **guadagno reale del circuito** si dovrà mantenere molto simile al guadagno ideale trovato prima (Fig.12.3) in tutto l'intervallo di frequenze*, e quindi che il circuito reale avrà effettivamente un polo ad una frequenza molto prossima alla (12.2).

Inoltre, l'andamento della fase di $G_{loop}(s)$ della Fig.12.4 mostra che essa rimane confinata tra -180° e -90° e quindi ci assicura che mai il segnale riportato all'ingresso dal ramo di reazione possa comporsi in perfetta fase con il segnale v_{in} da dare un effetto simile ad una retroazione positiva, assicurandoci che il circuito sarà sempre stabile.

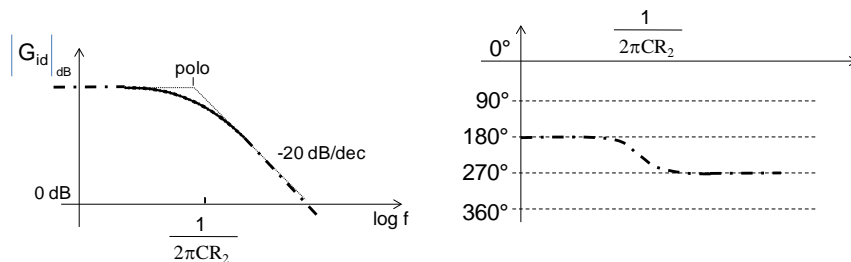


Fig. 12.3 Andamento in frequenza del modulo del **guadagno ideale** e dello sfasamento tra il segnale di ingresso e di uscita dei circuiti retroazionati della Fig.12.2.

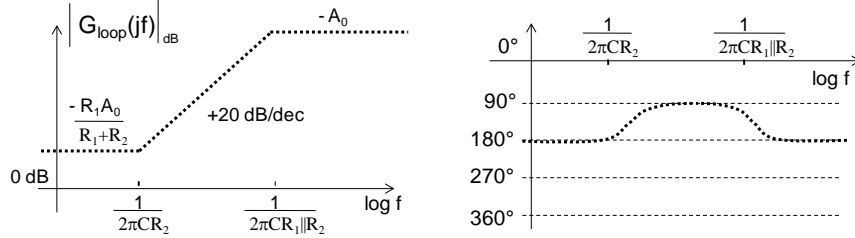


Fig. 12.4 Andamento in frequenza del **guadagno d'anello**, $G_{loop}(s)$, del circuito retroazionato a sinistra nella Fig.12.2. Poiché $G_{loop}(f)$ è sempre in modulo molto elevato, il circuito sarà sempre ben reazionato e quindi si comporterà in maniera simile all'ideale per tutte le frequenze.

Se si volesse proprio essere precisi si potrebbe effettuare il calcolo analitico della funzione di trasferimento con il bilancio di correnti e di tensioni del circuito della Fig.12.2:

$$\begin{cases} \frac{v_{in} - v^-}{R_1} = \frac{v^- - v_u}{R_2} \\ v_u = -A_0 \cdot v^- \end{cases} \Rightarrow G(s) = -\frac{A_0 \cdot R_2}{R_2 + R_1(1 + A_0)} \cdot \frac{1}{1 + sC \frac{R_1 R_2 (1 + A_0)}{R_2 + R_1(1 + A_0)}} \quad (12.3)$$

Essa ci fornisce precisamente il polo reale del circuito a:

$$f_p = \frac{1}{2\pi C \frac{R_1 R_2 (1 + A_0)}{R_2 + R_1(1 + A_0)}} \quad (12.4)$$

Per $A_0 \gg 1$ il risultato converge al valore stimato in (12.2). Nel paragrafo §12.5 vedremo una tecnica generale ed efficace per ricavare con precisione il polo (12.4) di un circuito retroazionato senza bisogno di svolgere il bilancio ai nodi come fatto ora.

12.2.2 Esempio di un guadagno ideale con solo zero

Un secondo esempio può aiutare a capire ulteriori aspetti del comportamento in frequenza di un circuito retroazionato. Consideriamo i circuiti della Fig.12.5, anch'essi differenti nel dettaglio circuitale ma identici nella **funzione di trasferimento ideale** tra ingresso ed uscita, che vale:

$$\frac{v_{in}}{\frac{R_2}{1+sCR_2}} \cdot \left(R_3 + \frac{R_2}{1+sCR_2} \right) = v_u \quad \rightarrow \quad \boxed{G_{id}(s) = \frac{R_3 + R_2}{R_2} \cdot (1 + sCR_2 \parallel R_3)} \quad (12.5)$$

Nonostante la presenza di una capacità, il guadagno ideale non presenta alcun polo! Il grafico di $G_{id}(s)$ nella Fig.12.6 in alto evidenzia questo aspetto in cui all'aumentare della frequenza del segnale di ingresso la corrente prodotta in C aumenta e quindi aumenta la caduta di tensione ai capi di R_3 e quindi la tensione dell'uscita.

Per capire dove stia il polo, che inevitabilmente ci deve essere, calcoliamo e rappresentiamo il **guadagno d'anello del circuito**:

$$G_{loop}(s) = -A_0 \frac{R_1}{R_2 + R_3} \cdot \frac{1}{1 + sCR_2 \parallel R_3}$$

il cui diagramma di Bode del modulo è riportato nella Fig.12.6 in centro. Il diagramma del modulo di $G_{loop}(f)$ ci dice che per un ampio intervallo di frequenze, dalla continua fino alla frequenza f_p indicata nella figura (ottenuta con il prodotto Guadagno x Banda),

$$f_p \cong \frac{1}{2\pi CR_2 \parallel R_3} \cdot \frac{R_2 A_0}{R_2 + R_3} = \frac{1}{2\pi C R_3 / A_0} \quad (12.6)$$

il valore del guadagno di anello $G_{loop}(s)$ si mantiene elevato, sicuramente maggiore

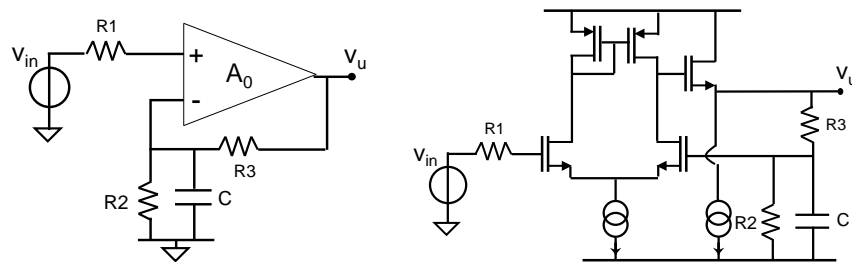


Fig. 12.5 Esempi di circuiti retroazionati in cui compare un solo condensatore nel ramo di retroazione. Il guadagno ideale dei due circuiti è identico.

di 1, assicurando a tutte queste frequenze una forte reazione e quindi un comportamento “quasi ideale”. Fino alla frequenza f_p ci aspettiamo quindi che il guadagno reale segua quello ideale già calcolato. Dalla frequenza f_p in avanti invece il circuito risulta non più retroazionato e quindi si discosterà dalla curva di G_{id} . In particolare alle frequenze superiori a f_p (quando cioè il guadagno di anello è inferiore a 1) l'ingresso invertente dell'operazionale (v-) sarà sostanzialmente a massa (la retroazione non riporta più segnale in v- a compensare il segnale applicato a v+) e quindi il trasferimento tra ingresso ed uscita tenderà a diventare costante e pari a A_0 .

Usando queste considerazioni, si può tracciare il **guadagno reale** come nella Fig.12.6 in basso, in cui si evidenzia come il circuito retroazionato in realtà debba avere un polo ad un valore prossimo a f_p trovato guardando $G_{loop}(s)$.

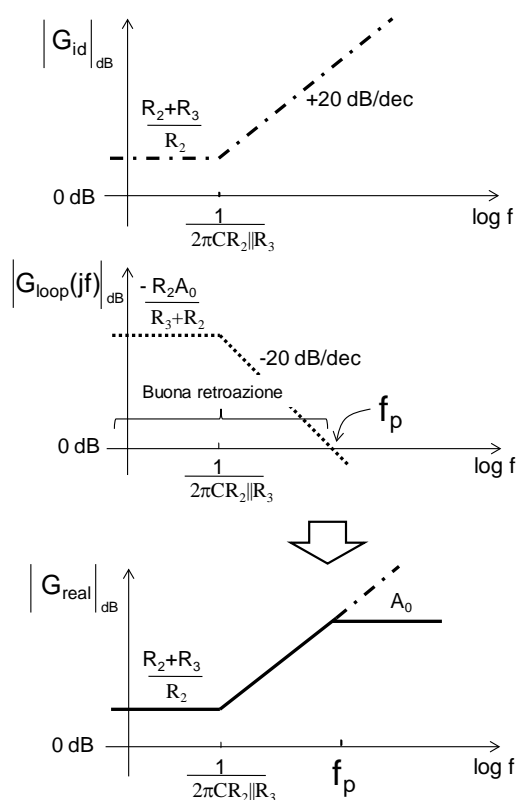


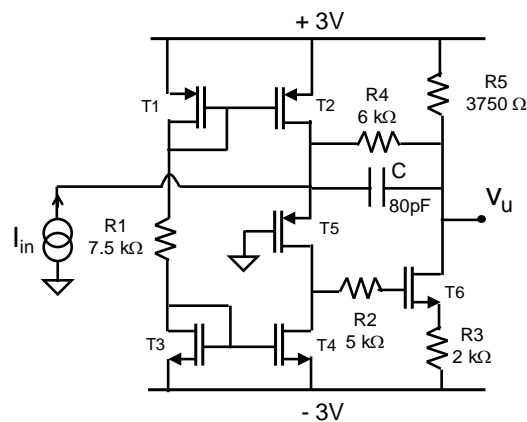
Fig. 12.6 Andamento in frequenza del guadagno ideale (grafico in alto) del circuito a sinistra nella Fig.12.5, del suo guadagno di anello (grafico in mezzo) e stima del suo guadagno reale (grafico in basso).

Si può ottenere conferma dei risultati appena raggiunti facendo il calcolo analitico della funzione di trasferimento del circuito oppure applicando il metodo del luogo delle radici per il calcolo del polo esatto del circuito retroazionato come impareremo a fare nel §12.4.

Da questi due esempi concludiamo che *quando la capacità sta nel ramo di retroazione, il solo calcolo di $G_{id}(s)$ e di $G_{loop}(s)$ permettono di ottenere un'ottima stima e comprensione dell'effettiva funzione di trasferimento in frequenza di un circuito retroazionato. Essa sarà praticamente coincidente con il guadagno ideale fintanto che G_{loop} rimane elevato (>1).*

E 12.1 L'amplificatore a transresistenza disegnato sotto ha tutti i MOSFET con $V_T=0.5V$, $k=400\mu A/V^2$ e $V_a=\infty$.

- Calcolare il valore della tensione V_u di polarizzazione dell'uscita
- Calcolare il trasferimento ideale v_u/i_{in} a bassa frequenza del circuito e rappresentarlo graficamente in un diagramma di Bode.
- Calcolare l'andamento del guadagno di anello del circuito in funzione della frequenza e trarre le dovute conclusioni circa la banda passante del circuito reale.



- I transistori T1, T2, T3 e T4 formano un generatore di corrente a specchio di $400\mu A$. La medesima corrente scorrerà necessariamente anche in T5 e quindi in R4 non potrà scorrere corrente, cosicché ai capi di R5 risulteranno esserci 1.5V. La corrente in T6 sarà quindi di $400\mu A$ e la tensione al suo gate è a -0.7V.

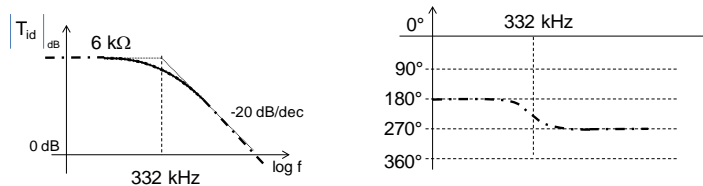
$V_u=1.5V$. Tutti i transistori risultano funzionare nella loro zona di funzionamento corretta. Tutti i transistori mostrano una $g_m=800\mu A/V$.

b) La corrente di segnale i_{in} fa inizialmente salire la tensione del Source di T5; una parte di i_{in} scorrerà così in T5 facendo alzare la tensione al Gate di T6. Questo provoca un aumento della corrente in T6 che proviene da R4 ed R5. Nell'ipotesi di G_{loop} elevato, il circuito tende a richiamare da $R4||C$ tutta la corrente disponibile con i_{in} . In T5 continuerà a scorrerne solo quella frazione piccolissima necessaria a

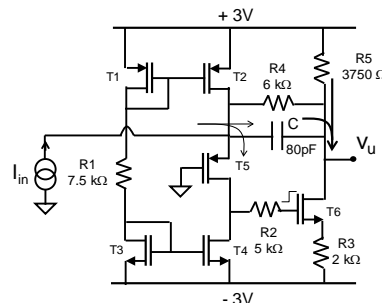
sostenere il meccanismo, e quindi il Source di T5 a regime si sposterà in tensione di pochissimo, ininfluente ai fini dei calcoli (terra virtuale). Ne consegue che V_u sarà immediatamente calcolabile come la tensione ai capi di $R4||C$ e cioè pari a :

$$v_u(s) = i_{in}(s) \frac{R_4}{1 + sR_4C}$$

Tale funzione di trasferimento ideale è rappresentata nei seguenti diagrammi di Bode:

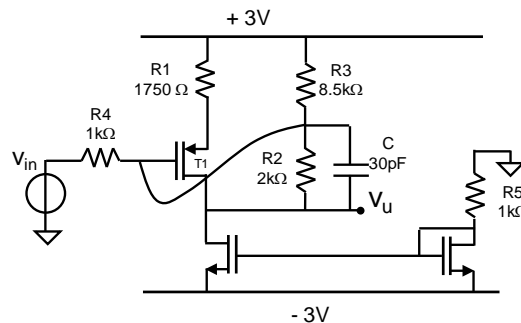


c) Controllo ora in quale intervallo di frequenze il circuito sia veramente ben retroazionato. Calcolo quindi il guadagno dell'anello. Esso risulta essere infinito (!) a tutte le frequenze grazie al Gate di T6 in serie alla corrente di segnale proveniente da T5. Possiamo quindi concludere che questo circuito è praticamente ideale nel suo comportamento e che quindi la sua banda passante sarà proprio pari al valore di 332kHz trovato prima.



E 12.2 Si consideri l'amplificatore disegnato sotto avente tutti i MOSFET con $|V_T|=0.6V$, $|k|=800\mu A/V^2$ e $V_a=\infty$

- Calcolare la tensione dell'uscita in assenza di segnale.
- Calcolare il guadagno ideale v_u/v_{in} del circuito e rappresentarlo graficamente in un diagramma di Bode.
- Calcolare l'andamento del guadagno di anello del circuito in funzione della frequenza e trarre le dovute conclusioni circa il comportamento del circuito stesso e della sua banda passante.

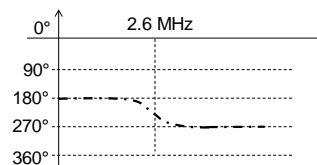
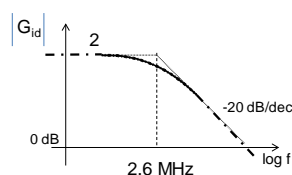
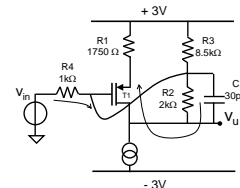


a) Lo specchio porta circa 1.15mA, il transistore di ingresso circa 800μA e quindi $V_u \approx 0V$. Tutti i transistori sono ben polarizzati. $g_m = 1.6mA/V$.

b) A fronte di un segnale v_{in} positivo, il circuito reagisce richiamando corrente da $R2||C$ e mantenendo la tensione del gate di T1 sostanzialmente ferma.

Il guadagno ideale è quindi pari a :

$$G_{id} = \frac{v_u(s)}{v_{in}(s)} = -\frac{R_2}{R_4} \frac{1}{1 + sR_2C}$$



c) Il guadagno di anello risulta essere $G_{loop}(s) = -R_3||R_4 \frac{1}{\frac{1}{g_m} + R_1} \approx -0.4$ e

quindi, benchè indipendente dalla frequenza, molto piccolo! L'andamento reale del circuito sarà pertanto molto diverso da come previsto nel caso ideale, e ci imporrà di rianalizzare il circuito in maniera totale come una normale rete elettrica essendo la retroazione inesistente. Oppure si può cercare di aumentare la forza della retroazione apportando qualche modifica al circuito. Voi che modifica proporreste per renderlo meglio retroazionato ? Non è facile avere un elevato guadagno di anello con un solo transistore !

12.3 CONDENSATORI NEL RAMO DI ANDATA A(s)

Vediamo ora come analizzare un circuito retroazionato in cui i condensatori siano presenti nel solo ramo di andata A(s), cioè il caso in cui il guadagno ideale non abbia poli e zeri. Per semplicità, iniziamo ad analizzare il caso generale illustrato nella Fig.12.7, in cui si abbia un circuito reazionato con un solo polo nel ramo di andata, senza zeri e costituito da blocchi di andata e di reazione unidirezionali. Ci poniamo l'obiettivo di ricavare la funzione di trasferimento reale G(s) del circuito.

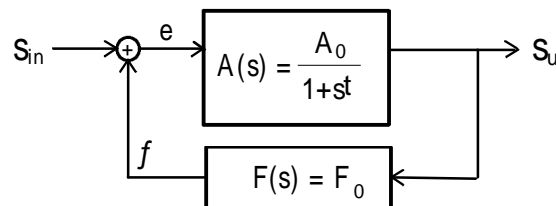


Fig. 12.7 Sistema reazionato a singolo polo.

L'espressione analitica di G(s), già vista in (11.1), è:

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)} = \frac{\frac{A_0}{1 + s\tau}}{1 - \frac{A_0 F_0}{1 + s\tau}} = \frac{A_0}{1 - A_0 F_0} \cdot \frac{1}{1 + s \frac{\tau}{1 - A_0 F_0}} \quad (12.7)$$

Nell'ipotesi di reazione negativa¹, per cui $A_0 F_0 < 0$, la (12.7) ci permette di riflettere su due risultati estremamente interessanti:

i) la **riduzione dell'amplificazione a bassa frequenza** del circuito rispetto a quanto si otterrebbe (G_{nr}) in assenza della reazione:

$$G_{nr}(0) = A_0 \rightarrow G(0) = \frac{A_0}{1 - G_{loop}(0)}$$

Questo risultato ci era già noto: quando retroazioniamo un circuito il suo guadagno diminuisce proprio del fattore $(1 - G_{loop})$. Contemporaneamente però si ha anche

¹ Come già visto nel §11.3 se il circuito fosse reazionato positivamente ed $A_0 F_0 > 1$, il polo sarebbe reale positivo ed il circuito instabile. Se $0 < A_0 F_0 < 1$ si avrebbe un aumento del trasferimento massimo rispetto al valore A_0 ma una riduzione della banda.

ii) un **aumento della banda passante** dovuto allo spostamento del polo:

$$f_{nr|-3dB} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau} \quad \rightarrow \quad f_{-3dB} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\tau}{1-G_{loop}(0)}} \quad (12.8)$$

sempre in ragione della quantità $1-G_{loop}(0)$.

La Fig.12.8 mostra il diagramma di Bode del guadagno ideale del circuito retroazionato (costante indipendente dalla frequenza e pari a $1/F_0$), la risposta del solo amplificatore di andata $A(s)$ (con il suo polo alla frequenza $1/2\pi\tau$), il guadagno di anello G_{loop} del circuito che mostra anch'esso ovviamente lo stesso polo $1/2\pi\tau$ dello stadio di andata, ma che risulta avere un guadagno a bassa frequenza più basso della risposta di $A(s)$ per via della partizione con F_0 . Questo fa sì che la curva tagli l'asse a 0dB (punto f_p del grafico) ad una frequenza un po' più

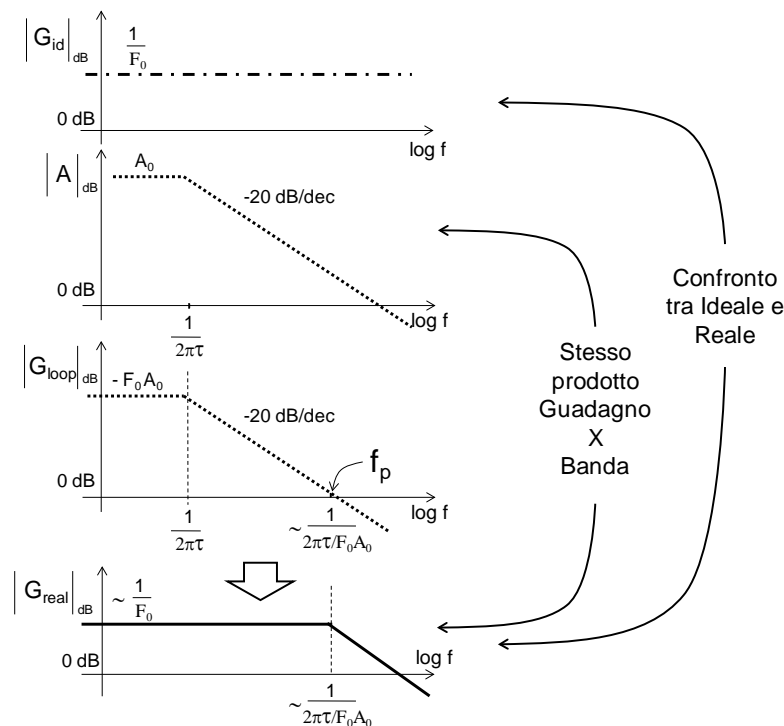


Fig. 12.8 Sistema reazionato a singolo polo come quello della Fig.12.7: guadagno ideale, G_{id} ; guadagno dello stadio di andata, $A(s)$; guadagno di anello, $G_{loop}(s)$; guadagno ideale, $G_{id}(s)$. Si noti come la banda del circuito reazionato sia aumentata rispetto a quella del solo stadio di andata.

bassa di quanto avvenga in $A(s)$. Infine la Fig.12.8 mostra la stima dell'andamento del guadagno reale, che è simile a G_{id} fino alla frequenza in cui il circuito è sufficientemente reazionato e poi degrada come lo stadio di andata.

Anche in questo caso quindi in cui la capacità sta nel ramo di andata, concludiamo che il solo calcolo di $G_{id}(s)$ e di $G_{loop}(s)$ permettono di ottenere un'ottima stima e comprensione dell'effettiva funzione di trasferimento di un circuito retroazionato. Essa sarà praticamente coincidente con il guadagno ideale fintanto che G_{loop} rimane elevato (>1).

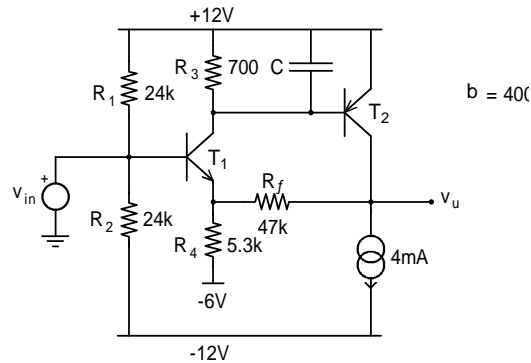
Si noti anche come in un sistema retroazionato a singolo polo di questo tipo, il prodotto *Guadagno x Banda* (*Gain Bandwidth Product - GBWP*) resti costante qualunque sia il valore di $G_{loop}(0)$, come può essere desunto dall'ultimo grafico di Fig.12.8 oppure moltiplicando la (12.7) per la (12.8):

$$GBWP = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \tau / A_0 F_0} = \frac{A_0}{2\pi \cdot \tau}$$

Questo ci dice che le prestazioni di un circuito reazionato, in particolare se si realizzano con OpAmp, hanno un limite (in guadagno e/o in banda) oltre cui non si può andare comunque si vari il guadagno d'anello. Per questo i produttori di amplificatori operazionali forniscono il valore di GBWP dei loro OpAmp in modo da guidare la scelta verso quello che riesca a soddisfare meglio le esigenze di progetto.

Da ultimo si rifletta sul fatto che, poichè l'anello dispone di un solo polo, lo sfasamento che il segnale subisce nel percorrerlo è al massimo (per frequenze molto più grandi di quella corrispondente al polo stesso) di $180^\circ + 90^\circ$ (180° sono dovuti alla inversione necessaria per avere retroazione negativa!). Il sistema, per le considerazioni fatte nell'introduzione, è quindi sempre stabile. Questa conclusione è desumibile anche dall'ultimo grafico della Fig.12.8: il fatto che il guadagno d'anello tagli l'asse a 0dB con una pendenza massima di 20dB/dec assicura uno sfasamento addizionale massimo di 90° e quindi la stabilità del circuito.

E 12.3 Dimensionare la capacità C posta in parallelo alla resistenza R_3 del seguente circuito, affinché il polo del circuito sia alla frequenza di 25MHz. Si trascurino nella discussione gli elementi reattivi dei transistori.



Trascurando gli elementi reattivi dei transistori, il sistema è a singolo polo. Il guadagno d'anello è

$$G_{\text{loop}}(s) = - \frac{R_3 \parallel \frac{1}{sC}}{R_3 \parallel \frac{1}{sC} + \frac{\beta_2}{g_{m2}}} \cdot \beta_2 \cdot \frac{R_4}{R_4 + \frac{1}{g_{m1}}} = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1}{1 + sC(R_3 \parallel \frac{\beta_2}{g_{m2}})}$$

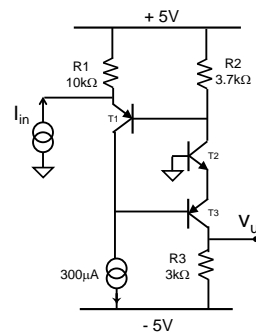
dove $G_{\text{loop}}(0) = -87$. Poiché si vuole che il polo p^* del circuito retroazionato sia alla frequenza di 25MHz, si dovrà dimensionare C affinché il polo p del guadagno di anello sia ad una frequenza 88 volte minore. Imponendo questa condizione si trova $C = 1\text{nF}$.

E12.4 Considerare il circuito della figura accanto (già visto in E11.25) in cui i BJT abbiano $\beta = 300$ e $V_a = \infty$. Dopo averlo polarizzato ed averne indagato il funzionamento ideale:

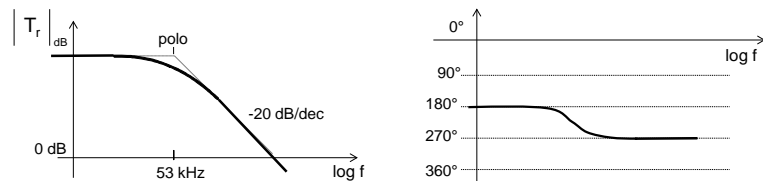
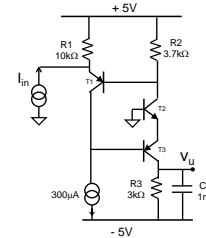
- disegnare i diagrammi di Bode del trasferimento del circuito quando è presente una $C = 1\text{nF}$ in parallelo a R_3 .
- disegnare i diagrammi di Bode del trasferimento del circuito quando è presente una $C = 1\text{nF}$ in parallelo a R_2 .

a) Il trasferimento ideale del circuito è:

$$T(s) = \frac{v_u(s)}{i_{\text{in}}(s)} = -R_1 \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{1}{1 + sCR_3}$$



Esso presenta un polo alla frequenza $f_p=53\text{kHz}$. Tuttavia si noti che la capacità C NON fa parte dell'anello. Per convincersene basta fare il calcolo di $G_{\text{loop}}(s)$ e verificare che la capacità C non compare nell'espressione dell'anello: $G_{\text{loop}}(s)=-110$. La resistenza vista dalla capacità C quindi non viene modificata dall'anello di cui non ne fa parte, e quindi il polo del trasferimento è fisso ed indipendente da G_{loop} :

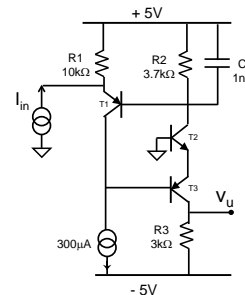


b) Pur essendoci ancora solo una capacità, la situazione ora è completamente diversa da sopra. Il trasferimento ideale del circuito infatti è:

$$T(s) = \frac{v_u(s)}{i_{in}(s)} = -R_1 \frac{R_3}{R_2} \cdot (1 + sCR_2)$$

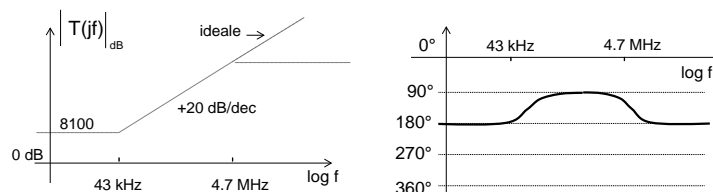
Esso presenta uno zero alla frequenza $f_p=43\text{kHz}$ e nessun polo. Poiché il circuito ha una capacità, ci dovrà essere un polo nella funzione di trasferimento reale e questo viene calcolato ricavando $G_{\text{loop}}(s)$:

$$G_{\text{loop}}(s) = -110 \cdot \frac{1}{1 + sC(R_2 \parallel (\beta/g_m + \beta R_1))}$$



Poiché $\tau = C(R_2 \parallel (\beta/g_m + \beta R_1)) = 3.7 \mu\text{s}$, il polo di G_{loop}

si trova a $f \approx 44\text{kHz}$ ed il guadagno d'anello taglia l'asse a 0dB circa alla frequenza $f_p=4.7\text{MHz}$. Il diagramma di Bode del trasferimento risulta quindi:



La banda passante, cioè l'intervallo di frequenze in cui è opportuno usare questo circuito, dipende dall'applicazione: i) da DC a 43kHz il circuito è ben reazionato e con transresistenza costante pari a 8100 Ω; ii) da 43kHz a 4.7MHz il circuito è ben reazionato e si comporta da derivatore ideale; iii) sopra i 4.7MHz il circuito non è più retroazionato, ha transresistenza elevata (~900kΩ) ed è improbabile che lo si usi: che senso avrebbe fare un circuito retroazionato ed usarlo quando non lo è più !

12.3.1 La rappresentazione compatta di Bode

Molti produttori di Amplificatori Operazionali sono soliti nei loro Data Sheet sovrapporre i grafici della Fig.12.8 in un unico grafico, come mostrato nella Fig.12.9. Essa riporta:

- i) l'andamento del modulo del guadagno di andata $A(j\omega)$,
- ii) l'andamento del trasferimento reale del circuito reazionato $G(j\omega)$ e
- iii) l'andamento del trasferimento ideale $-1/F_0$.

La distanza tra la curva di $A(j\omega)$ e quella di $G(j\omega)$ è ricavabile dalla (12.7)

$$20 \cdot \log|A(j\omega)| - 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log|1 - G_{loop}(j\omega)| \quad (12.9)$$

e quindi rappresenta quantitativamente l'entità della reazione. Il trasferimento ideale può essere tracciato utilizzando la (11.8) e la (12.9)

$$20 \cdot \log\left|\frac{1}{F_0}\right| = 20 \cdot \log|A(j\omega)| - 20 \cdot \log|G_{loop}(j\omega)| \quad (12.10)$$

A bassa frequenza, quando $|G_{loop}(j\omega)| \gg 1$, il trasferimento reale coincide praticamente con quello ideale, $G(j\omega) \cong -1/F_0$. Aumentando la frequenza diminuisce $|G_{loop}(j\omega)|$, $G(j\omega)$ si scosta sempre di più da $-1/F_0$ e tende a $A(j\omega)$. La frequenza a cui $A(j\omega)$ attraversa la retta $1/F_0$ è la frequenza a cui $|G_{loop}(j\omega)| = 1$. Per $\omega \rightarrow \infty$ la curva di $G(j\omega)$ e quella di $A(j\omega)$ si sovrappongono, come ci si attende dalla (12.7)

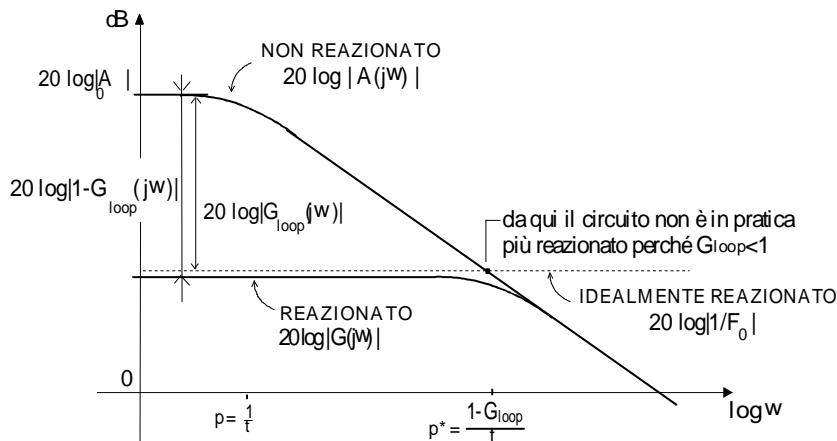
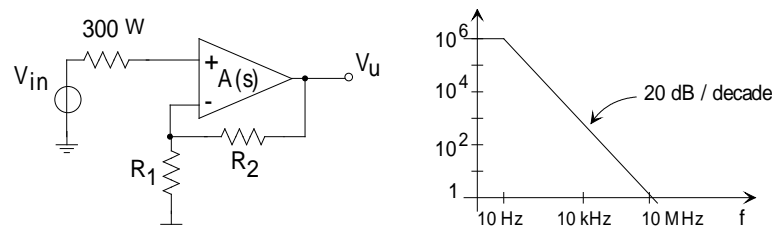


Fig. 12.9 *Rappresentazione compatta di un sistema reazionato negativamente avente un singolo polo nello stadio di andata, $A(s)$. Essa riassume i 4 grafici della Fig.12.8.*

per $|G_{loop}(j\omega)| \rightarrow 0$. La Fig.12.9 sintetizza questi aspetti ed evidenzia come:

- un aumento di $G_{loop}(0)$ comporti un aumento della frequenza del polo p^* del circuito reazionato (punto di intersezione della retta $1/F_0$ con la curva $A(j\omega)$);
- solo in un ben definito intervallo di frequenze, dove $|G_{loop}(j\omega)| \gg 1$, il circuito è ben reazionato e quindi il trasferimento del sistema non è influenzato dalle tolleranze e dalle variazioni degli elementi attivi presenti nel blocco d'andata ma dipende dai soli elementi che realizzano il blocco di reazione. Questo intervallo è tanto più esteso quanto meglio è reazionato il circuito. Alla frequenza del polo p^* (f_p di Fig.12.8) del circuito reazionato gli effetti della retroazione si sono ormai esauriti quasi completamente essendo $G_{loop}(p^*) = -1$ ed il trasferimento torna ad essere influenzato dal blocco d'andata.

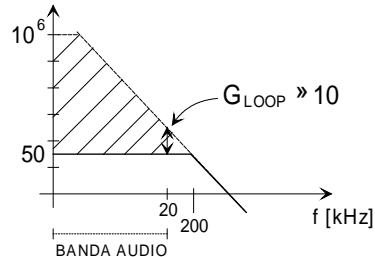
E 12.5 Calcolare il massimo guadagno che si può ottenere in banda audio (20Hz-20kHz) dall'amplificatore in figura, utilizzando un operazionale con polo dominante a 10Hz, guadagno in continua di 120dB e quindi $GBWP=10MHz$. Si progetti il circuito in modo che su tutta la banda considerata la retroazione sia sufficientemente forte ($G_{loop} > 10$ per $f \leq 20kHz$) da garantire buona stabilità.



Indichiamo con $1/\tau$ la pulsazione corrispondente al polo dominante (10Hz) dell'amplificatore operazionale. La reazione deve essere tale da estendere la banda passante del circuito dagli iniziali 10Hz, quando non è reazionato (ad esempio $R_2 = \infty$), ad almeno 20kHz come richiesto per le applicazioni audio. Volendo che a 20kHz il guadagno di anello sia almeno di 10, occorre porre il polo del circuito reazionato una decade oltre in frequenza. Tenendo presente il comportamento in frequenza dell'operazionale in cui il prodotto Guadagno-Banda rimane costante ed aiutandosi con la rappresentazione grafica di Bode, si ottiene un guadagno massimo ottenibile di 50 (34dB), realizzabile ad esempio con $R_1 = 1k\Omega$ e $R_2 = 49k\Omega$. Il circuito è stabile perchè il guadagno d'anello

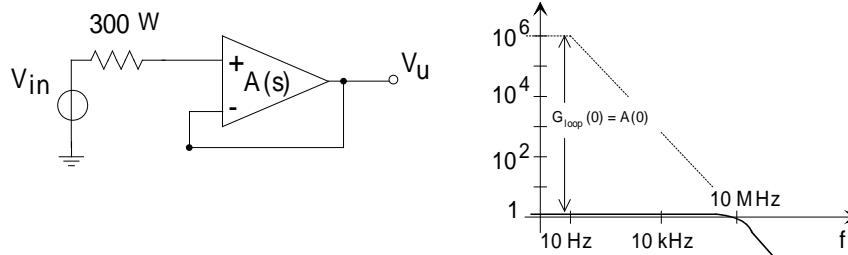
$$G_{loop}(s) = A_o \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + s\tau}$$

corrispondente alla parte tratteggiata nella figura, taglia l'asse a 0dB con una pendenza di 20dB/dec. Il grafico mostra anche, frequenza per frequenza, l'entità della reazione.



E 12.6 *Quale è la massima banda passante ottenibile da un circuito che impieghi l'operazionale dell'E.12.5, ed in quale configurazione?*

In un sistema a singolo polo, o anche in un sistema più complesso ma ben approssimabile in uno a singolo polo (amplificatori compensati in frequenza), la massima banda utilizzabile è proprio la GBWP, ottenuta quando il sistema guadagna 1 cioè quando la reazione è totale ($G_{loop}(0)=A(0)$). Nel caso in esame la banda massima è di 10MHz, ottenibile nella seguente configurazione a Buffer



Dato il suo interesse pratico, il valore di GBWP viene ben messo in risalto nei data-sheet dei costruttori e costituisce uno dei più importanti elementi di giudizio nella scelta di un operazionale.

12.4 LA RAPPRESENTAZIONE NEL PIANO COMPLESSO

In maniera indipendente da dove stia la capacità nel circuito, se cioè sia posta nel ramo di retroazione $F(s)$ oppure nel ramo di andata $A(s)$, l'effetto della retroazione nel determinare il polo del circuito può essere evidenziato e precisamente calcolato facendo riferimento al piano complesso, detto anche piano di Gauss. Per capire ciò, si rifletta sul fatto che i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ di un circuito reazionato dovranno essere le radici dell'equazione a denominatore della (12.7):

$$G(s) = \frac{A(s)}{1-A(s)F(s)} \rightarrow \boxed{1 - G_{\text{loop}}(s) = 0} \quad (12.11)$$

Ci aspettiamo quindi che basti la sola conoscenza di $G_{\text{loop}}(s)$ per calcolare con precisione i poli di un circuito retroazionato !

12.4.1 Luogo delle radici : caso di 1 polo in $G_{\text{loop}}(s)$

Nel caso di $G_{\text{loop}}(s)$ con un solo polo:

$$G_{\text{loop}}(s) = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1}{1 + s\tau}$$

la condizione (12.11) si esplicita come:

$$G_{\text{loop}}(s) = \frac{G_{\text{loop}}(0)}{\tau} \cdot \frac{1}{s - (-1/\tau)} = 1$$

in cui si è evidenziato il polo $p = -1/\tau$ del guadagno d'anello. L'equazione (12.11) è complessa nella variabile $s = \alpha + j\omega$ e pertanto è risolta quando sono contemporaneamente soddisfatte le due condizioni

$$\arg[G_{\text{loop}}(s)] = \arg[1] = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (12.12a)$$

$$|G_{\text{loop}}(s)| = 1 \quad (12.12b)$$

Nel nostro caso di un solo polo, sostituendo l'espressione di $G_{\text{loop}}(s)$ nella prima si ottiene:

$$\arg\left[\frac{G_{\text{loop}}(0)}{\tau}\right] - \arg\left[s - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right] = 0^\circ$$

Come si vede nella Fig.12.10, il primo termine vale 180° perché è l'argomento di un numero reale negativo ($G_{\text{loop}}(0) < 0$ quando la reazione è negativa), mentre il

secondo termine corrisponde all'angolo formato con l'asse orizzontale dal segmento congiungente un punto s del piano a $p=-1/\tau$:

$$180^\circ - \arg \left[s - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \right] = 0^\circ$$

Per soddisfare l'equazione questo angolo deve essere di 180° . Perciò è facile rendersi conto che il **luogo dei poli** del circuito reazionato (detto anche **luogo delle radici** dell'equazione (12.11)), cioè dei punti s che soddisfano la (12.12a), è costituito da tutti i punti dell'asse reale posti a sinistra di $p=(-1/\tau)$, rappresentato dalla linea marcata nella Fig.12.11.

L'effettiva posizione del polo p^* del circuito retroazionato è quella che soddisfa anche la condizione (12.12b) sul modulo

$$|G_{loop}(0)| \cdot \left| \frac{1}{\tau} \right| \frac{1}{|s - (-1/\tau)|} = 1$$

dove

- $|1/\tau|$ corrisponde alla distanza tra il punto $p=-1/\tau$ e l'origine degli assi (vedi Fig.12.11);
- il denominatore $|s - (-1/\tau)|$ individua la distanza tra il generico punto s del luogo ed il punto $(-1/\tau)$. Il valore di “ s ” che soddisfa all'equazione dei moduli (polo p^* del circuito reazionato) si troverà perciò ad una distanza da $p=-1/\tau$ pari a

$$\left| s - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \right| = \left| -\frac{1}{\tau} \right| \cdot |G_{loop}(0)|$$

e quindi in una posizione assoluta rispetto all'origine degli assi pari a:

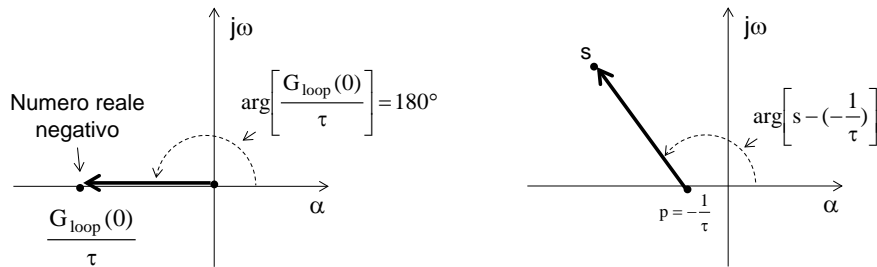


Fig. 12.10 *Rappresentazione sul piano complesso di un numero reale negativo (sinistra) e della differenza tra un numero complesso “ s ” generico ed il polo p del guadagno di anello G_{loop} del circuito.*

$$p^* = \left| s - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \right| + \left| -\frac{1}{\tau} \right| = \left| -\frac{1}{\tau} \right| \cdot (1 + |G_{loop}(0)|)$$

Nella Fig.12.11 sono riportati il polo p del guadagno di anello del circuito ed il polo p^* del circuito reazionato, entrambi reali e negativi. Quest'ultimo al variare di $G_{loop}(0)$ assume un valore tra quelli sull'asse reale alla sinistra di p . Maggiore è $|G_{loop}(0)|$, maggiore è la frequenza del polo del circuito retroazionato, e quindi la sua banda. Per $G_{loop}(0)=0$ i due poli coincidono evidenziando il fatto che il circuito smette di essere reazionato.

Concludendo, all'aumentare di $|G_{loop}(0)|$, che è il *parametro di taratura* della curva, *il luogo delle radici ha origine dal polo di $G_{loop}(s)$ e giunge allo zero di $G_{loop}(s)$, in questo caso posto all'infinito*; si può dire che il luogo è respinto dai poli ed è attratto dagli zeri. Un fissato valore di $|G_{loop}(0)|$ determina un punto esatto sul luogo che corrisponde al polo del circuito reazionato con quel $G_{loop}(0)$. Nel caso del luogo della Fig.12.11, il polo del circuito reazionato è sempre reale e negativo, evidenziando un circuito sempre stabile che risponde ad una sollecitazione all'ingresso con una risposta che tende monotonicamente al valore corrispondente in uscita.

L'aspetto interessante della rappresentazione sul piano complesso è che il calcolo preciso del polo del circuito reazionato presuppone **la sola conoscenza della funzione $G_{loop}(s)$** , calcolabile direttamente in ogni circuito retroazionato, senza necessità di individuare ed isolare $A(s)$ od $F(s)$. Il prossimo paragrafo ha lo scopo di generalizzare il metodo al caso di circuiti a molti poli e zeri.

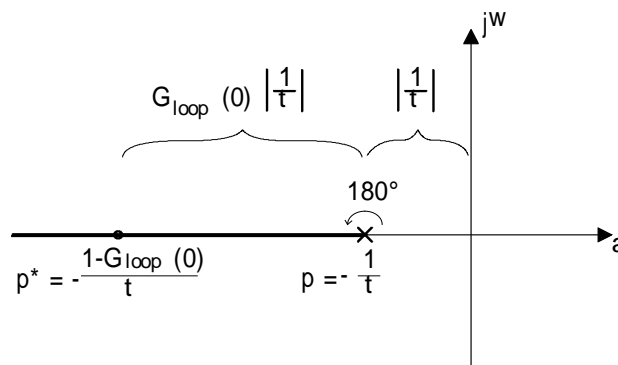
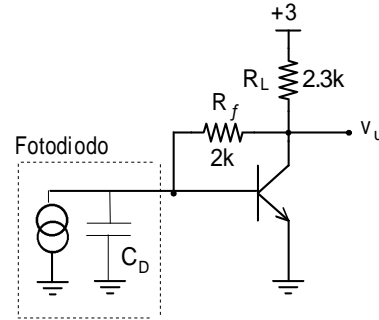


Fig. 12.11 La linea marcata rappresenta sul piano complesso le possibili soluzioni (radici) dell'equazione (12.12a). Evidenziati ci sono il polo p del guadagno di anello G_{loop} del circuito ed il polo p^* del circuito reazionato $G(s)$.

- E 12.7** Discutere il comportamento in frequenza del ricevitore a transimpedenza per comunicazioni in fibra ottica della figura seguente, in cui il fotodiodo è rappresentato dal generatore equivalente di corrente di segnale e dalla capacità $C_D=3\text{pF}$. Si adotti l'ipotesi semplificativa di trascurare la capacità C_μ del transistor, avente $f_T=4\text{GHz}$ e $\beta=100$. In particolare:
- calcolare il guadagno di anello in funzione della frequenza, indicando sul piano complesso la posizione del polo;
 - tracciare il corrispondente luogo delle radici;
 - individuare sul luogo il punto in cui si colloca il polo del circuito reazionato ad anello chiuso;
 - stimare il massimo bit-rate sostenibile da tale circuito in una comunicazione digitale.



(a) - Valutata la polarizzazione ($V_U \cong +0.7\text{V}$, $I_C \cong 1\text{mA}$) ed il trasferimento ideale del circuito ($T_{id} = -R_f = -2\text{k}\Omega$), dall'espressione della f_T si ricava il valore della capacità di diffusione del transistor, $C_\pi = 1.6\text{pF}$. In generale può essere utile evidenziare sullo schema elettrico del circuito questa capacità *interna* al dispositivo attivo. In questo caso C_D e C_π sono in parallelo tra loro e danno una capacità complessiva al nodo di ingresso di $C = 4.6\text{pF}$. Il guadagno di anello è :

$$G_{\text{loop}}(s) = - \frac{R_L g_m}{R_L + R_f + \frac{\beta}{g_m} \parallel \frac{1}{sC}} \cdot \frac{\beta}{g_m} \parallel \frac{1}{sC}.$$

che può essere riscritta nella forma

$$G_{\text{loop}}(s) = - \frac{\beta R_L}{\frac{\beta}{g_m} + R_L + R_f} \cdot \frac{1}{1 + sC \frac{\frac{\beta}{g_m} (R_L + R_f)}{\frac{\beta}{g_m} + R_L + R_f}} = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1}{1 + s\tau}.$$

in cui $G_{\text{loop}}(0) = -34$ e $\tau = 7.3\text{ns}$ definisce un polo reale negativo della funzione $G_{\text{loop}}(s)$ a $p = -1/\tau = -138\text{Mrad/s}$ (22 MHz). Il polo di $G_{\text{loop}}(s)$ è indicato con il simbolo "x" nel piano di Gauss della figura (non in scala) seguente



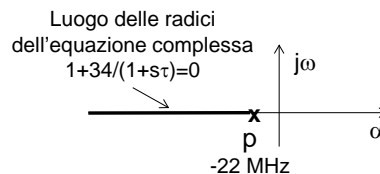
Per quanto visto nel §12.3 ci aspettiamo che il T_{id} si estenda fino a circa 750MHz. Vediamo con precisione il valore di questo polo nel prossimo punto.

(b) - I poli della funzione di trasferimento del circuito retroazionato $G(s)$ corrispondono ai valori di s che soddisfano alle due equazioni

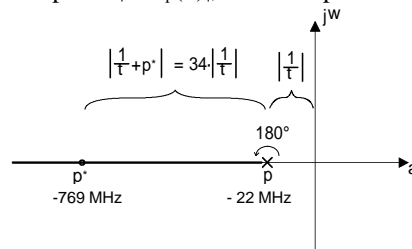
$$\left| -34 \cdot \frac{1}{1+s\tau} \right| = 1$$

$$\arg \left[-\frac{34}{\tau} \right] - \arg \left[s - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \right] = \pm k \cdot 360^\circ$$

L'ultima delle due è l'equazione del luogo delle radici, che si estende dal polo p fino all'infinito lungo l'asse reale negativo. La risposta del circuito ad un segnale di ingresso a gradino sarà quindi sempre monotona, ovvero priva di oscillazioni, poiché il polo è sempre reale negativo.



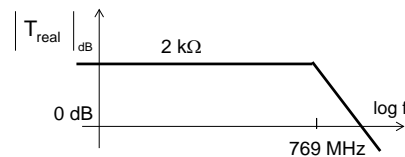
(c) - L'effettiva posizione del polo p^* del circuito retroazionato, determinata imponendo la condizione sul modulo, può essere trovata procedendo per via analitica, ma anche in modo grafico. Infatti il numeratore della espressione individua la distanza tra il generico punto s del luogo ed il polo $p = -22$ MHz. Il denominatore corrisponde invece alla distanza tra il punto p e l'origine degli assi. Il polo p^* del circuito reazionato si troverà perciò dove il rapporto tra le due distanze è pari a 34, cioè pari a $|G_{loop}(0)|$, come è riportato nella figura.



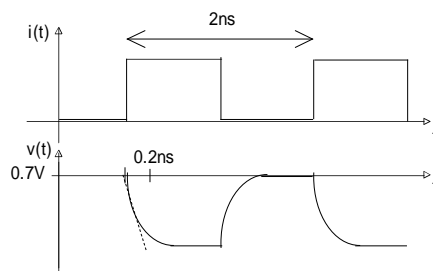
Si noti come la costruzione grafica è fatta relativamente a $|1/\tau|$, che quindi assume la funzione di unità di misura. La distanza $|1/\tau|$ può essere dunque scelta arbitrariamente, pari ad esempio ad un centimetro o ad un quadretto del foglio del quaderno. Il polo del circuito retroazionato è pari così a

$$p^* = -\frac{1 - G_{loop}(0)}{\tau} = -\frac{35}{\tau} = -769 \text{ MHz}$$

che ne definisce la banda passante. L'elevata banda può essere interpretata circuitualmente per via sintetica. Infatti, all'aumentare del guadagno d'anello, il nodo sulla Base del transistor diventa una terra virtuale sempre migliore. Quindi la tensione ai capi delle capacità tende a variare sempre meno, escludendo le capacità stesse dal cammino di trasferimento del segnale che è invece richiamato attraverso R_f , ovvero attraverso la rete di reazione che non ha limitazioni in frequenza. Il diagramma di Bode del trasferimento del circuito è quindi :

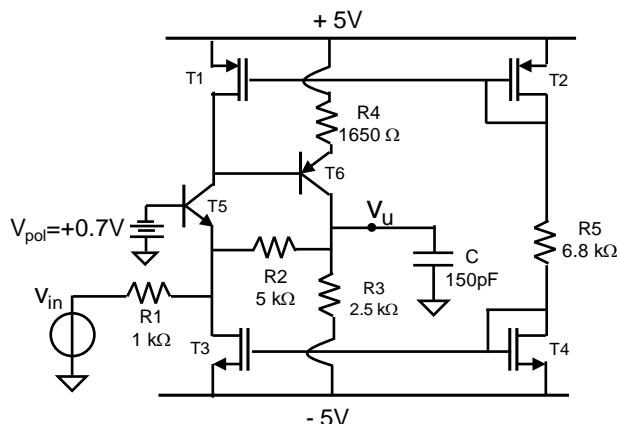


(d) - Se in ingresso fosse applicato un segnale a gradino di corrente, la tensione di uscita risponderebbe con una costante di tempo pari a $\tau=0.2\text{ ns}$. La massima frequenza di impulsi di corrente in ingresso che dia una corrispondente sequenza di impulsi di tensione riconoscibili in uscita è quindi quella con un periodo di circa 2 ns (500 Mbit/s), in modo da permettere al gradino in uscita di giungere molto vicino al valore asintotico sia sul fronte positivo che su quello negativo.



E 12.8

Analizzare il comportamento dell'amplificatore accanto i cui BJT abbiano $\beta=300$ e $V_a=\infty$ ed i cui MOSFET abbiano $V_T=0.6V$, $k=1mA/V^2$ e $V_a=\infty$:



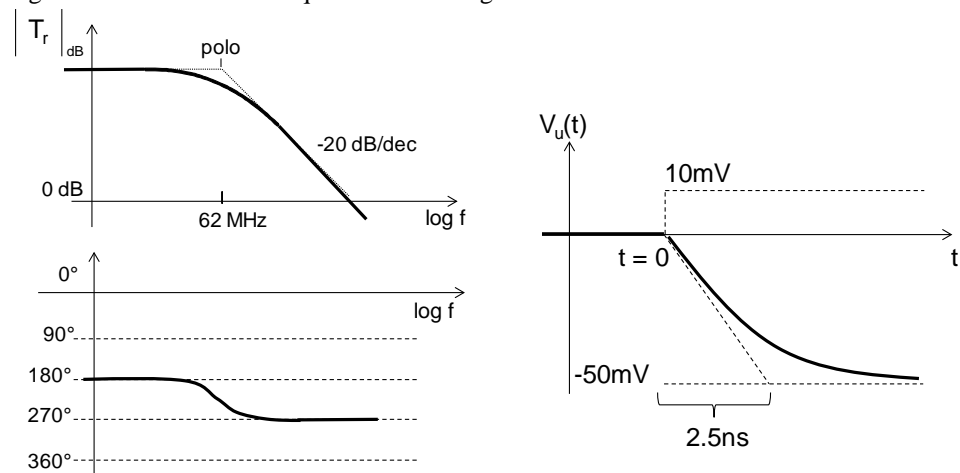
- Calcolare il valore della corrente di Collettore di T5 e stimare la tensione Vu di polarizzazione dell'uscita
- Calcolare il guadagno ideale del circuito V_u/V_{in} .
- Calcolare il guadagno di anello del circuito a bassa frequenza.
- Disegnare l'andamento in frequenza del modulo e della fase della funzione di trasferimento del circuito.
- Disegnare l'andamento nel tempo della tensione Vu quando in ingresso viene applicata un gradino positivo di tensione ampio $V_{in}=10mV$.

- La polarizzazione, dettata da R5 e dallo specchio T1, T2, T3 e T4 impone in T5 una corrente di 1mA. Poiché la corrente in R2 è circa pari alla corrente di base di T6, inizialmente la consideriamo molto piccola. Pertanto $V_u=0V$ e $I_{T6}=2mA$. In effetti a posteriori verifico che Vu al più starebbe a circa -30mV.
- $G_{id}=-5$. Importante notare che il guadagno ideale non dipende né da R3 né da C !
- Gloop=-97 a bassa frequenza.
- Per calcolare il polo del circuito, che come visto è retroazionato, si potrebbe calcolare il Guadagno dell'anello del circuito e seguire la strada descritta nelle pagine precedenti. Tuttavia in questo caso, in cui cioè la capacità è collegata ad un nodo dell'anello con l'altro capo a massa, non dovrebbe sfuggire che un'alternativa possa essere quella di calcolare la resistenza vista dalla capacità. Essa in questo caso coincide con la resistenza di uscita del circuito. Essa, come noto dal CAP.11, è pari a :

$$R_{out} = \frac{R_{out}|_{Noretr}}{(1 - Gloop)} = \frac{1666}{98} = 17\Omega$$

Pertanto $\tau = 17\Omega \times 150\text{pF} = 2.5\text{ns}$, equivalenti a $f_p = 62\text{MHz}$.

I grafici richiesti risultano quindi essere i seguenti:



Verificate che con il luogo delle radici sareste arrivati allo stesso risultato !

12.4.2 Luogo delle radici : caso generale

In generale un circuito reazionato contiene più di un elemento reattivo e quindi la sua analisi in frequenza comporta la ricerca di più di un polo ed eventualmente anche di zeri. Ricordando la (12.11)

$$1 - G_{\text{loop}}(s) = 0 \quad (12.11)$$

si parte quindi dal calcolo dell'espressione del guadagno d'anello, che avrà la forma generale seguente:

$$G_{\text{loop}}(s) = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{(1 \pm s\tau_{z1})(1 \pm s\tau_{z2}) \dots (1 \pm s\tau_{zm})}{(1 + s\tau_{p1})(1 + s\tau_{p2}) \dots (1 + s\tau_{pn})} \quad (12.13)$$

dove il segno del guadagno d'anello in continua, $G_{\text{loop}}(0)^2$ coincide con il segno della reazione, nel nostro caso sempre negativo. Si ricordi che i poli del guadagno d'anello sono tutti con parte reale negativa, mentre gli zeri di $G_{\text{loop}}(s)$ possono essere sia nel semipiano sinistro che in quello destro. L'equazione (12.11) diventa:

$$(1 + s\tau_{p1})(1 + s\tau_{p2}) \dots (1 + s\tau_{pn}) - G_{\text{loop}}(0) [(1 \pm s\tau_{z1})(1 \pm s\tau_{z2}) \dots (1 \pm s\tau_{zm})] = 0$$

Questa espressione consente di identificare immediatamente i poli del sistema in due situazioni limite :

- per $G_{\text{loop}}(0) \rightarrow 0$ ovvero in assenza di reazione, i poli del circuito retroazionato sono dati da $(1 + s\tau_{p1})(1 + s\tau_{p2}) \dots (1 + s\tau_{pn}) = 0$, cioè coincidono con i poli di $G_{\text{loop}}(s)$;
- per $G_{\text{loop}}(0) \rightarrow \infty$ i poli di $G(s)$ sono dati da $(1 \pm s\tau_{z1})(1 \pm s\tau_{z2}) \dots (1 \pm s\tau_{zm}) = 0$, cioè tendono agli zeri di $G_{\text{loop}}(s)$.

All'aumentare di $G_{\text{loop}}(0)$, e quindi dell'intensità della reazione, i poli del circuito retroazionato (soluzioni della (12.11)) si spostano nel piano complesso, allontanandosi dai poli di $G_{\text{loop}}(s)$ per giungere ai suoi zeri, al finito o all'infinito. Il numero degli zeri all'infinito è pari alla differenza tra il numero dei poli ed il numero degli zeri al finito.

² $G_{\text{loop}}(0)$ è non nullo purché non abbia zeri nell'origine ($s=0$). In pratica, nei circuiti di nostro interesse, $G_{\text{loop}}(0)$ non è nullo se nell'amplificatore d'andata non ci sono condensatori di disaccoppiamento.

Per determinare la posizione esatta dei poli è necessario risolvere l'equazione complessa (12.11), cioè trovare quei valori di s che soddisfano contemporaneamente alle condizioni

$$|G_{\text{loop}}(s)| = 1 \quad (12.14a)$$

$$\arg[G_{\text{loop}}(s)] = \arg[1] = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ. \quad (12.14b)$$

Si noti che mentre la soluzione della (12.14a) dipende dal valore del fattore di intensità $G_{\text{loop}}(0)$, la (12.14b), essendo una relazione sulle fasi, è influenzata solo dal segno di $G_{\text{loop}}(0)$. Quindi è opportuno iniziare a risolvere per prima la (12.14b) così da individuare sul piano complesso il luogo di punti, detto **luogo delle radici**, delle possibili soluzioni che può essere tracciato conoscendo solo la posizione delle singolarità di $G_{\text{loop}}(s)$ ed il segno della reazione ma indipendentemente dalla sua intensità. Il valore numerico di $G_{\text{loop}}(0)$ viene usato come parametro per risolvere la seconda equazione (12.14°). La reazione è negativa, per cui $G_{\text{loop}}(0)$ è negativo. Un fissato valore di $|G_{\text{loop}}(0)|$ determina un punto esatto sul luogo che corrisponde al polo del circuito reazionato con quel $G_{\text{loop}}(0)$.

Nel caso di più poli e zeri nel guadagno di anello, il luogo delle radici nasce ancora nel semipiano sinistro (i poli di $G_{\text{loop}}(s)$ sono sempre nel semipiano sinistro) ma può avere alcuni suoi rami che, estendendosi nel piano complesso, raggiungano anche il semipiano destro. Questo è il caso ad esempio del luogo riportato nella Fig.12.12, relativo ad un circuito con due poli nel guadagno d'anello

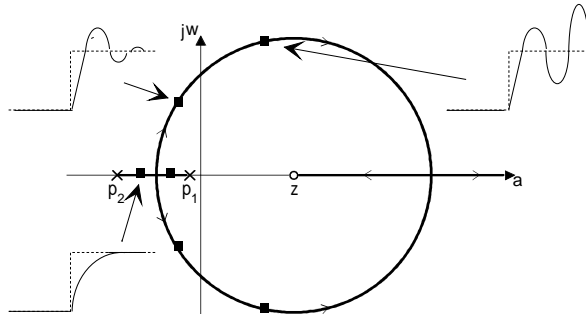


Fig. 12.12 *Luogo delle radici di un sistema reazionato negativamente avente un guadagno di anello con due poli nel semipiano sinistro ed uno zero nel semipiano destro.*

ed uno zero nel semipiano destro. Al variare del parametro di taratura $|G_{loop}(0)|$ i poli del circuito reazionato non solo possono diventare complessi coniugati ma addirittura avere parte reale positiva. Nel primo caso la risposta del circuito ad una sollecitazione a gradino tenderà al valore asintotico con una oscillazione smorzata di frequenza pari al coefficiente della parte immaginaria dei poli complessi coniugati; nel secondo caso, l'oscillazione in uscita sarà addirittura divergente e porterà alla saturazione dell'uscita ed al conseguente non funzionamento del circuito. Utilizzando la (12.14a) è possibile determinare il valore massimo di $|G_{loop}(0)|$ per cui tutti i poli restano nel semipiano sinistro, garantendo la stabilità del sistema.

12.4.3 Regole di tracciamento del luogo

Quando si ha a che fare con tanti poli e zeri può non essere immediato tracciare il luogo delle radici, cioè individuare l'insieme dei punti s del piano di Gauss che soddisfano alla relazione (12.14b). E' comodo a tal fine riscrivere la (12.13) nella forma:

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}\dots\tau_{zm}}{\tau_{p1}\tau_{p2}\dots\tau_{pn}} \cdot \frac{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{z1}}\right)\right)\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{z2}}\right)\right)\dots\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{zm}}\right)\right)}{\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p1}}\right)\right)\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{p2}}\right)\right)\dots\left(s - \left(-\frac{1}{\tau_{pn}}\right)\right)}$$

Pertanto, si potrebbe pensare di operare individuando per tentativi i punti s del piano complesso tali che la somma degli angoli formati con l'asse orizzontale dai vettori congiungenti s con gli zeri di $G_{loop}(s)$, diminuita della somma degli angoli formati con l'asse orizzontale dai vettori congiungenti s con i poli di $G_{loop}(s)$, sia pari a $0^\circ \pm k360^\circ$ o $180^\circ \pm k360^\circ$ a seconda che γ

$$\gamma = G_{loop}(0) \cdot \frac{\tau_{z1}\tau_{z2}\dots\tau_{zm}}{\tau_{p1}\tau_{p2}\dots\tau_{pn}}$$

sia un numero reale positivo o negativo. Se dal punto di vista concettuale questo modo di procedere è corretto, nella pratica, all'aumentare del numero dei poli e degli zeri, si incontrano crescenti difficoltà.

Riassumiamo quindi nel seguito alcune regole, facilmente dimostrabili, che aiutano a tracciare correttamente il luogo di un circuito retroazionato negativamente.

- Il luogo è costituito da tanti rami quanti sono i poli di $G_{loop}(s)$. Ogni ramo rappresenta il movimento di un polo del circuito reazionato al variare del parametro di taratura $|G_{loop}(0)|$.
- I rami del luogo delle radici hanno un verso di percorrenza diretto dai poli della funzione $G_{loop}(s)$ (per $G_{loop}(0)=0$) ai suoi zeri (per $G_{loop}(0)=\infty$). Gli zeri non presenti al finito sono all'infinito. Ad essi il ramo del luogo tende asintoticamente.
- Se gli zeri sono tutti a parte reale negativa, appartengono al luogo i tratti di asse reale alla sinistra di un numero dispari di singolarità. Se c'è un numero dispari di zeri a parte reale positiva appartengono al luogo i tratti di asse reale che sono alla sinistra di un numero nullo o pari di singolarità.
- Le direzioni degli asintoti, ovvero gli angoli φ da essi formati con l'asse reale del piano di Gauss, soddisfano alla relazione:

$$\arg[\gamma] + (m - n)\varphi = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ \quad (12.15)$$

Infatti, rispetto ai punti all'infinito del piano di Gauss visti sotto l'angolo φ (la direzione dell'asintoto), tutti gli m zeri al finito contribuiscono ad uno sfasamento pari ad $m\varphi$, mentre gli n poli determinano uno sfasamento $-n\varphi$. Per esempio se $\gamma < 0$ e si hanno 3 poli ed 1 zero, $(m-n)=-2$, e, dalla (12.15), la direzione degli asintoti è:

$$\varphi = \frac{180^\circ \pm k \cdot 360^\circ}{2} = \begin{matrix} 90^\circ & (\text{per } k = 0) \\ 270^\circ (-90^\circ) & (\text{per } k = 1) \end{matrix}.$$

Se invece $G_{loop}(s)$ ha solo 3 poli, $(m-n)=-3$ e $\gamma < 0$, per cui si ha:

$$\varphi = \frac{180^\circ \pm k \cdot 360^\circ}{3} = \begin{matrix} 60^\circ & (\text{per } k = 0) \\ 180^\circ & (\text{per } k = 1 \text{ con segno } +) \\ -60^\circ & (\text{per } k = 1 \text{ con segno } -) \end{matrix}$$

- il punto di incontro degli asintoti sull'asse reale è soluzione dell'equazione

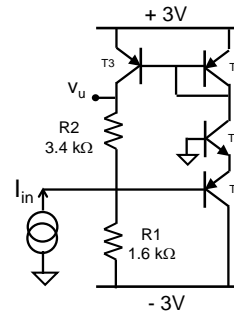
$$p_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n - m} \quad (12.16)$$

- Se le singolarità sono tutte reali, il luogo si allontana dall'asse reale in corrispondenza di punti di diramazione, la cui ascissa p_d soddisfa l'equazione

$$\sum_i \frac{1}{p_d - p_i} - \sum_j \frac{1}{p_d - z_j} = 0 \quad (12.17)$$

E 12.9 Considerare il circuito retroazionato qui sotto, i cui BJT hanno $\beta=250$, $V_A=\infty$ e $C_{bc}=1\text{pF}$ dei soli due transistori T1 e T2. All other capacitances are zero.

- Calcolare il valore stazionario di V_u .
- Calcolare il trasferimento ideale $T_{id}=v_u/i_{in}$.
- Calcolare il trasferimento reale tra i_{in} e v_u del circuito e disegnarne in un diagramma quotato l'andamento del modulo e della fase
- Disegnare l'andamento nel tempo del segnale $v_u(t)$ a fronte di un gradino negativo di corrente in ingresso di $i_{in}=-10\mu\text{A}$.



a) La tensione del nodo di ingresso risulta essere di -1.4V. Quindi la corrente nei due rami dello specchio è di 1mA e $V_u=+2\text{V}$ ($1/g_m=25\Omega$).

b) La corrente I_{in} inizialmente scorrerebbe in R1 e nella base del BJT, facendo alzare la tensione all'ingresso. La corrente nella base attiverebbe una corrente di segnale di collettore verso l'alto che verrebbe specchiata sull'ingresso. Nell'ipotesi di G_{loop} grandissimo, la corrente specchiata tenderebbe a i) abbassare la tensione all'ingresso, contrastando l'iniziale suo innalzamento; ii) richiamare verso l'alto la corrente I_{in} che quindi non scorrerebbe più né in R1 né in T1. Ne segue che il trasferimento ideale sarebbe $T_{id}=v_u/i_{in}=-R_2=-3.4\text{k}\Omega$, costante a tutte le frequenze perché le capacità non si trovano lungo il percorso ideale della corrente di segnale.

c) Per vedere fino a quale frequenza il circuito si comporta effettivamente come spiegato sopra, andiamo a calcolare i poli del circuito risolvendo l'equazione

$$1-G_{loop}(s)=0.$$

L'analisi ci porta alla seguente espressione di $G_{loop}(s)$:

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{1}{1+s\tau_1} \cdot \frac{1}{1+s\tau_2}$$

$$\text{in cui } G_{loop}(0) = -\frac{R_1 \cdot \beta}{R_1 + 2\beta/g_m} = -28 \text{ e}$$

$$f_1 = -1/2\pi \cdot \tau_1 = -1/2\pi \cdot C(R_1 \parallel 2\beta/g_m) = -112\text{MHz},$$

$$f_2 = -1/2\pi \cdot \tau_2 = -1/2\pi \cdot C(1/g_m \parallel \beta/g_m) = -6.4\text{GHz}.$$

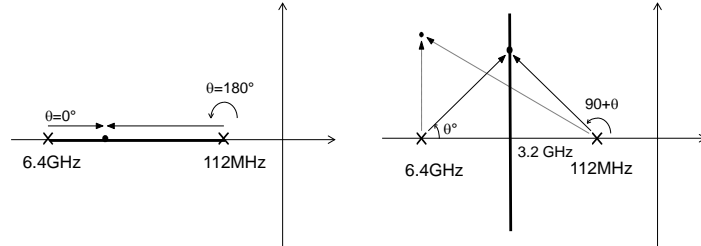
Conviene riscrivere il guadagno di anello nella forma

$$G_{loop}(s) = \frac{G_{loop}(0)}{2\pi \cdot \tau_1 \cdot 2\pi \cdot \tau_2} \cdot \frac{1}{\left(s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right) \left(s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right)}$$

dove il termine $G_{loop}(0)f_1f_2$ è negativo. L'equazione sugli argomenti ci dice che i punti del luogo devono soddisfare l'equazione

$$\arg\{G_{loop}(0) \cdot f_1 \cdot f_2\} - \arg\left\{s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right\} - \arg\left\{s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right\} = 0^\circ \pm k \cdot 360^\circ.$$

È facile verificare che i punti del luogo sono i) nel tratto compreso tra f_1 e f_2 oppure ii) lungo i due asintoti che si dipartono dal punto medio del segmento tra i due poli. Infatti solo per l'asse del segmento gli angoli formati dai due vettori congiungenti il punto s con i due poli e l'asse reale orientato positivamente sono sempre supplementari.



I due poli f_1^* e f_2^* del circuito retroazionato avente $|G_{loop}(0)|=-28$ sono i punti del luogo per cui è soddisfatta anche la relazione dei moduli :

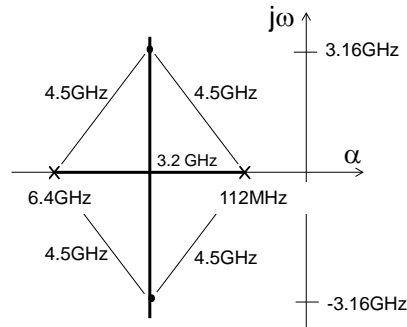
$$\begin{aligned} |G_{loop}(0)| \cdot |f_1| \cdot |f_2| &= \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right| \cdot \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right| \\ 2 \cdot 10^{19} &= \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_1}\right)\right| \cdot \left|s - \left(-\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2}\right)\right| \end{aligned}$$

Essa può essere interpretata graficamente individuando, a destra, il prodotto tra le distanze di un punto s del luogo con i due poli del guadagno di anello ed a sinistra, il prodotto tra le distanze di questi due poli dall'origine del piano moltiplicate per $G_{loop}(0)$. I due poli p_1^* e p_2^* sono i due punti del luogo che, separatamente, soddisfano l'equazione.

Per capire se i poli sono reali e distinti (cioè stanno sull'asse reale) oppure se sono complessi coniugati, si può calcolare subito quale sarebbe il valore di $G_{loop}(0)$ per averli coincidenti nel punto di diramazione. In questo caso la relazione sarebbe

$$G_{\text{loop}}(0) = \frac{3.2\text{GHz} \cdot 3.2\text{GHz}}{112\text{MHz} \cdot 6.4\text{GHz}} = -14$$

che fornisce $G_{\text{loop}}(0) = -14$. Poiché nel nostro caso $G_{\text{loop}}(0)$ è 28 (quindi maggiore), i 2 poli del circuito retroazionato dovranno necessariamente trovarsi nei due rami verticali. Poiché la lunghezza dei due segmenti $|p_1^* - (-1/2\pi \cdot \tau_1)|$ e $|p_1^* - (-1/2\pi \cdot \tau_2)|$ è la stessa, i poli devono soddisfare la relazione $|s - (-1/2\pi \cdot \tau)| = \sqrt{2 \cdot 10^{19}} = 4.5\text{GHz}$. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli si ottengono i due poli complessi coniugati del circuito retroazionato di partenza



$$p_{1,2}^* = 3.2\text{GHz} \pm j 3.16\text{GHz}$$

Per passare dai dati del circuito ottenuti sul piano complesso al diagramma di Bode del trasferimento reale dobbiamo calcolare

i) il modulo dei due poli, che definisce la frequenza di riferimento sul diagramma di Bode :

$$f = \sqrt{(3.2\text{GHz})^2 + (3.16\text{GHz})^2} \cong 4.6\text{GHz}$$

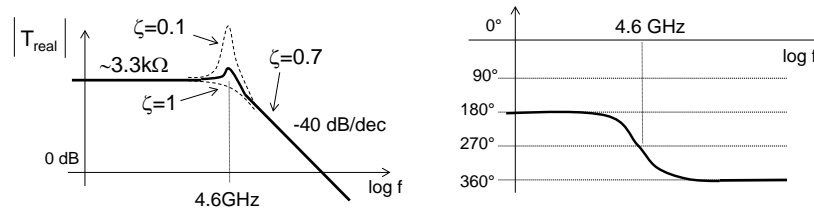
e ii) l'entità della risonanza, ζ , che definisce quanto ci si discosta da una funzione di trasferimento con due poli reali coincidenti ($\zeta=1$):

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{3.2\text{GHz}}{\sqrt{(3.2\text{GHz})^2 + (3.16\text{GHz})^2}} \cong 0.7$$

e iii) il valore del trasferimento reale a bassa frequenza :

$$T_{\text{real}} = -3.4\text{k}\Omega \cdot \frac{28}{29} = -3.28\text{k}\Omega$$

Si ottengono così i seguenti Diagrammi di Bode del trasferimento:

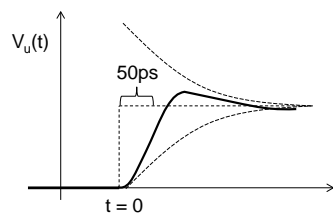


Se il circuito avesse in ingresso delle sinusoidi attorno ai 4.6GHz, queste verrebbero amplificate un po' di più rispetto a quelle a frequenze più piccole. La presenza di due poli si manifesta con una veloce diminuzione del guadagno (pendenza di -40dB/dec) per le sinusoidi alle alte frequenze.

(d) Quando si dà un gradino di corrente all'ingresso (cioè quando si sollecitano tutte le frequenze dello spettro) il circuito reagisce mostrando la sua risposta di vibrazione libera :

$$v_u(t) = 32.8 \text{ mV} \cdot e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Essa quindi sarà oscillatoria alla frequenza di $f = \omega/2\pi = 3.16 \text{ GHz}$ (quindi con periodo di 316ps) e smorzata in ampiezza con una $\tau = 1/\alpha = 50 \text{ ps}$. Per disegnarne l'andamento nel tempo devo quindi concludere che in circa 5τ vedrò meno di un periodo di oscillazione:



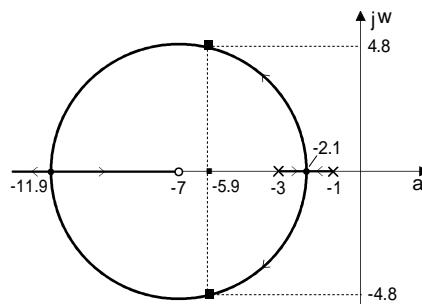
Il segnale di uscita mostra quindi una sovraoscillazione smorzata di circa il 10% maggiore del valore asintotico.

E12.10 Disegnare il luogo delle radici del circuito reazionato il cui guadagno di anello contiene uno zero:

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{(1 - s\tau_z)}{(1 - s\tau_{p1})(1 - s\tau_{p2})}$$

dove $G_{loop}(0) = -18$, $p_1 = -10 \text{ Mrad/s}$, $p_2 = -30 \text{ Mrad/s}$ e $z = -70 \text{ Mrad/s}$. Si determini inoltre la posizione dei poli ad anello chiuso.

Tutte le singolarità sono nel semipiano sinistro, quindi il parametro di taratura γ ha segno concorde con quello di $G_{loop}(0)$. I tratti di asse reale che appartengono al luogo sono quelli alla sinistra di un numero dispari di singolarità: in questo caso il segmento tra i due poli p_1 e p_2 ed il ramo a sinistra dello zero che si estende fino all'infinito. I due rami del luogo si staccano dall'asse reale ed invadono il piano di Gauss. Ci sono quindi dei valori di $G_{loop}(0)$ in corrispondenza dei quali i poli del circuito retroazionato sono complessi coniugati determinando una risposta oscillante smorzata.



Per facilitare l'analisi del luogo, giova ricavare sia la posizione dei due punti di diramazione, in corrispondenza dei quali il luogo lascia l'asse reale, che il corrispondente valore di $G_{loop}(0)$. Per fare questo si può utilizzare l'equazione (8.12), oppure si utilizza direttamente l'equazione esplicita del luogo

$$\frac{|s - p_1| \cdot |s - p_2|}{|s - z|} = |\gamma| = |G_{loop}(0)| \cdot \left| \frac{p_1 p_2}{z} \right|$$

che può essere risolta lasciando $|G_{loop}(0)|$ indicato, e ricercando i punti dei tratti di asse reale per cui l'equazione ha due radici coincidenti. È facile verificare che l'equazione diventa

$$-\frac{(s - p_1)(s - p_2)}{(s - z)} = -|G_{loop}(0)| \cdot \frac{p_1 p_2}{z}$$

Ovvero, si ottiene

$$s^2 - s \left[p_1 + p_2 + |G_{loop}(0)| \cdot \frac{p_1 p_2}{z} \right] + p_1 p_2 (1 + |G_{loop}(0)|) = 0$$

Imponendo che le due soluzioni s_1 e s_2 siano reali e coincidenti, si ottiene

$$\left[p_1 + p_2 + |G_{loop}(0)| \cdot \frac{p_1 p_2}{z} \right]^2 = 4[p_1 p_2 (1 + |G_{loop}(0)|)]$$

Esprimendo per esempio p_1 , p_2 e z in unità $|p_1|=1$, come indicato nella figura, si ottiene l'equazione di secondo grado nell'incognita $|G_{loop}(0)|$

$$|G_{loop}(0)|^2 - 46.7|G_{loop}(0)| + 21.8 = 0$$

che ha come radici i due valori di $G_{loop}(0)$ (-0.47 e -46.2) per i quali i due poli del circuito reazionato sono reali e coincidenti. Il valore di questi poli è ora ottenuto risolvendo l'equazione del luogo con i valori di $G_{loop}(0)$ appena determinati. Si trova $s_1 = -2.1|p_1|$ e $s_2 = -11.9|p_1|$.

Essendo $G_{loop}(0) = -18$, il circuito in esame avrà due poli complessi coniugati. I loro valori, nelle unità di misura della figura, sono pari a

$$p_{1,2}^* = -5.9 \pm j4.8$$

Essi determinano risposte non monotone ma oscillanti alla frequenza di 7.6MHz e smorzate con costante di tempo pari a 17ns.

Il luogo si trova sempre all'interno della zona di piano limitata dalle bisettrici dei 4 quadranti, e quindi le sovraelongazioni del segnale di uscita non superano mai il 10% del valore asintotico, qualunque sia $G_{loop}(0)$. Si noti come per $G_{loop}(0) = \infty$ i due poli tendano agli zeri, uno al finito e l'altro all'infinito. Inoltre la forma del luogo varia al variare della posizione dello zero. Quando lo zero è lontano dalla coppia di poli, il luogo invade molto il piano di Gauss con conseguenti problemi di sovraelongazione. Uno zero vicino al polo, invece, ne compensa l'effetto e rende il luogo sempre più simile a quello di un circuito con un solo polo.

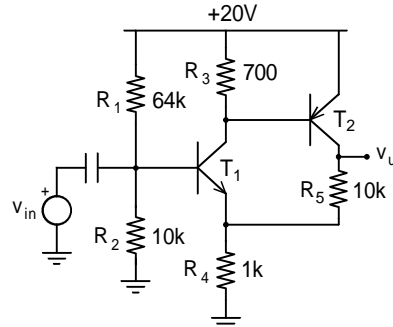
E12.11 Si consideri il circuito reazionato in figura, in cui il transistor npn ha $f_T=5\text{GHz}$ e $\beta=100$ e quello pnp ha $f_T=500\text{MHz}$ e $\beta=100$.

a) Studiarne la polarizzazione e determinarne il trasferimento ideale.

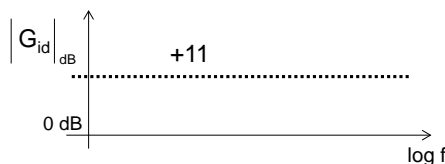
b) Supponendo di poter trascurare le capacità C_μ tra Base e Collettore di ciascun transistor, determinare il guadagno d'anello del circuito.

c) Tracciare il luogo delle radici e determinare i poli del circuito. La risposta del circuito ad un segnale a gradino è monotona?

d) Rimuovere l'ipotesi semplificativa relativa alle capacità C_μ valutando l'effetto della presenza di capacità $C_\mu=2\text{pF}$ tra Base e Collettore di ciascun transistor. Si supponga che le capacità di diffusione dei due componenti attivi conservino lo stesso valore determinato in precedenza.



(a) - Il circuito è un amplificatore di tensione reazionato negativamente. I due transistori si polarizzano con circa la stessa corrente $I_C \cong 1\text{mA}$ ed hanno $1/g_{m1} \cong 1/g_{m2} \cong 25\Omega$. Il trasferimento ideale è pari a $G_{id} = (1 + R_5/R_4) = 11$. Il circuito avrà due poli determinati dalle due capacità di diffusione $C_{\pi 1} = 1.3\text{pF}$ e $C_{\pi 2} = 12.7\text{pF}$.



(b) - Per valutare il guadagno d'anello si può pensare di rompere l'anello sul Collettore del transistor T_1 , come mostrato nella figura sotto. Così si ottiene

$$G_{\text{loop}}(s) = \frac{i_u(s)}{i_s(s)} = \frac{-R R' g_{m1} g_{m2}}{(1 + s R' C_{\pi 1})(1 + s R C_{\pi 2})} = \frac{G_{\text{loop}}(0)}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)}$$

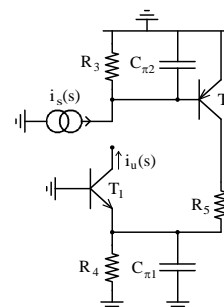
dove $R = R_3 \parallel \frac{\beta}{g_{m2}} = 550\Omega$ e $R' = R_4 \parallel \frac{1}{g_{m1}} = 25\Omega$

e dove $G_{\text{loop}}(0) = -R R' g_{m1} g_{m2} = -22$ ed i poli del guadagno d'anello sono

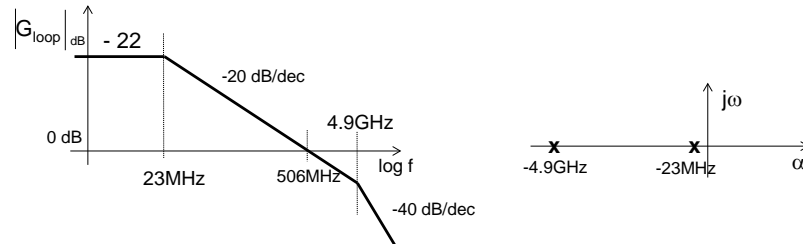
$$p_1 = -1/\tau_1 = -30 \text{ Grad/s} (4.9\text{GHz}, \tau_1 = R' C_{\pi 1} = 32\text{ps})$$

$$p_2 = -1/\tau_2 = -140 \text{ Mrad/s} (23\text{MHz}, \tau_2 = R C_{\pi 2} = 7\text{ns})$$

Si noti come un polo sia essenzialmente alla f_T del



transistore T_1 e l'altro sia dominante.



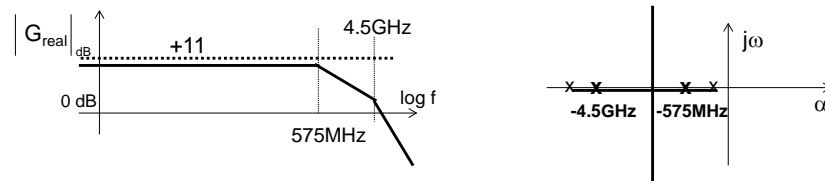
(c) - Poiché la funzione $G_{loop}(s)$, con le semplificazioni fatte, ha due poli e nessuno zero, il luogo delle radici del circuito è analogo a quello dell'esercizio E 8.5. I poli p_1 e p_2 del guadagno d'anello sono l'uno a frequenza 210 volte maggiore dell'altro.

Ad anello chiuso i due poli del circuito reazionato si portano in posizioni, lungo il luogo, tali che

$$\left| s + \frac{1}{\tau_1} \right| \cdot \left| s + \frac{1}{\tau_2} \right| = 22 \left| \frac{1}{\tau_1} \right| \cdot \left| \frac{1}{\tau_2} \right|$$

Prendendo come unità di misura, sul grafico, il valore $|1/\tau_1|$, distanza di p_1 dall'origine degli assi, il punto di diramazione del luogo sta a ≈ 2.45 GHz. Se i poli del circuito reazionato fossero coincidenti nel punto di diramazione, il circuito avrebbe dovuto avere $G_{loop}(0) = -53$. Poiché è solo di 22 se ne deduce che i due poli p_1^* e p_2^* sono reali e distinti pari (risolvendo l'equazione per via grafica) a

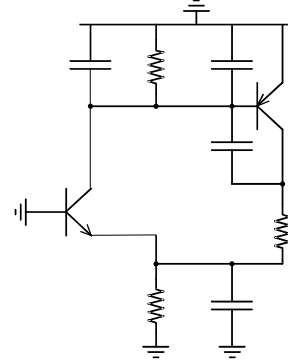
$$p_1^* \cong 575 \text{ MHz} \quad \text{e} \quad p_2^* \cong 4.5 \text{ GHz}.$$



Per la presenza di questi due poli reali abbastanza distanziati tra loro, la risposta del circuito reazionato ad un segnale di ingresso a gradino è monotona, con costante di tempo dettata dal polo più lento e pari a 300 ps. Si noti come, fintanto che i due poli del circuito reazionato non hanno raggiunto il punto di diramazione, il sistema ha un comportamento simile ad un circuito a singolo polo in cui il polo prevalente p_1 diventa più veloce in ragione circa del fattore $(1 - G_{loop}(0))$. Quello più veloce diventa invece più lento solo di qualche decina di percento!

(d) - La presenza delle capacità C_{μ} dei transistori bipolari aggiunge singolarità all'espressione del guadagno d'anello.

Ci si accorge che $C_{\mu 1}$ è in parallelo a $C_{\pi 2}$ ed il numero dei poli del guadagno d'anello è solo tre. Si noti inoltre che, pur con la presenza della capacità $C_{\pi 1}$, l'impedenza sul Collettore T_2 è praticamente costante con la frequenza e pari al valore della resistenza R_5 . Infatti a bassa frequenza, sul Collettore di T_2 si ha una resistenza $R_5 + 1/g_{m1} = 10025\Omega$, mentre a frequenze elevate, quando $C_{\pi 1}$ è intervenuta, essa è di $R_5 = 10k\Omega$. Pertanto, il comportamento in frequenza del transistor T_2 è ben approssimabile a quello di un Emettitore comune con semplice carico resistivo in Collettore. Di conseguenza, $G_{loop}(s)$ ha i due poli dello stadio Emettitore comune di T_2 , lo zero con parte reale positiva associato a $C_{\mu 2}$ ed il polo determinato da $C_{\pi 1}$



$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{(1 - s\tau_z)}{(1 + s\tau'_1)(1 + s\tau'_2)(1 + s\tau'_3)}$$

con $G_{loop}(0) = -22$ e con

$$\tau_z \cong C_{\mu 2} / g_{m2} = 50\text{ps}$$

$$\tau'_1 \cong (R_3 \parallel \beta / g_{m2}) \cdot (C_{\pi 2} + C_{\mu 1}) + \left(R_5 + \frac{1}{g_{m1}} \parallel R_4 \right) C_{\mu 2} + (1 + g_{m2} R_5) \cdot (R_3 \parallel \beta / g_{m2}) C_{\mu 2} = 460\text{ns}$$

$$\tau'_2 \cong \left(R_3 \parallel \frac{1}{g_{m2}} \parallel R_5 \right) \cdot (C_{\pi 2} + C_{\mu 1}) = 0.1\text{ns}$$

$$\tau'_3 \cong R C_{\pi 1} = 32\text{ps}$$

a cui corrispondono:

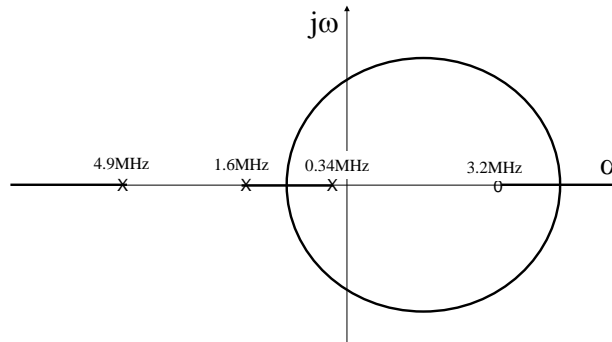
$$p_z = 1/\tau_z = 20 \text{ Grad/s (3.2 GHz)}$$

$$p'_1 = -1/\tau'_1 = -2.1 \text{ Mrad/s (340 kHz)}$$

$$p'_2 = -1/\tau'_2 = -10 \text{ Grad/s (1.6 MHz)}$$

$$p'_3 = -1/\tau'_3 = -30 \text{ Grad/s (4.9 GHz)}.$$

Per la presenza dello zero nel semipiano destro, il termine $(1 - s\tau_z)$ al numeratore del $G_{loop}(s)$ diventa $(-\tau_z)(s - (1/\tau_z))$ e quindi cambia il segno del termine numerico che contiene $G_{loop}(0)$. E' facile verificare graficamente che il luogo delle radici ha l'andamento schematizzato nella figura seguente



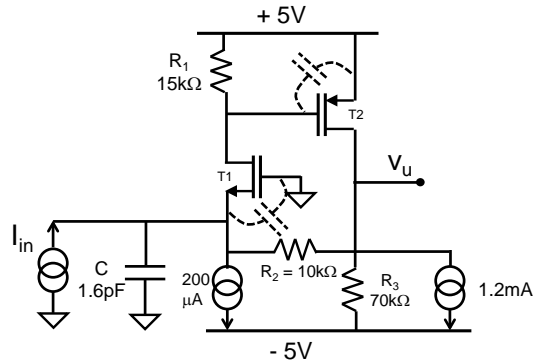
Si noti come il tratto tra p'_1 e p'_2 sia simile al luogo disegnato in precedenza. La differenza sostanziale è che la forte amplificazione della capacità $C_{\mu 2}$ per il guadagno dello stadio Emittitore comune T_2 (effetto Miller) determina una significativa diminuzione della frequenza del primo polo rispetto a quanto valutato trascurando le capacità C_{μ} . La presenza dello zero nel semipiano destro e delle singolarità a più alta frequenza portano il luogo ad incurvarsi verso il semipiano destro. L'ascissa dei punti di diramazione può essere ottenuta applicando la (8.12) e trascurando il termine dovuto allo zero ed al polo a frequenza più alta, perchè molto più grandi di p_d . In pratica il punto di diramazione è ancora alla frequenza intermedia tra p'_1 e p'_2 , e pari a circa 0.97MHz. I due poli più lenti del circuito reazionato sarebbero reali e coincidenti con il punto p_{d1} se $G_{loop}(0) = -0.8$. Il valore $G_{loop}(0) = -22$ ci dice che ci saranno 2 poli complessi coniugati con valori

$$P_1 \cong 1 \text{ MHz} + j 3.1 \text{ MHz}$$

$$P_2 \cong 1 \text{ MHz} - j 3.1 \text{ MHz}$$

ed un polo molto veloce a $P_3 \cong 5 \text{ GHz}$ evidenziando un circuito molto più lento di quando non si considera C_{μ} . Provate a verificare che il luogo entra nel semipiano destro per $G_{loop}(0) \cong -7000$, quindi ad un valore molto lontano dall'attuale.

- E12.12** Considerare l'amplificatore della figura accanto, in cui i MOSFET abbiano $V_T=0.5V$, $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=200\mu A/V^2$, $V_a=\infty$. Il circuito era già stato studiato nel E.11.31 a cui si rimanda per la polarizzazione ed in generale per il suo comportamento su segnale.
- Considerare ora il caso che i due MOSFET abbiano $C_{gs}=0.3pF$ e $C_{gd}=0$ e che in parallelo al generatore di segnale I_{in} ci sia una capacità da $C=1.6pF$.
- a) Verificare che così facendo i due poli del $G_{loop}(s)$ vengano praticamente a coincidere.
- b) Calcolare i poli del circuito retroazionato e disegnarne i diagrammi di Bode del modulo e della fase.

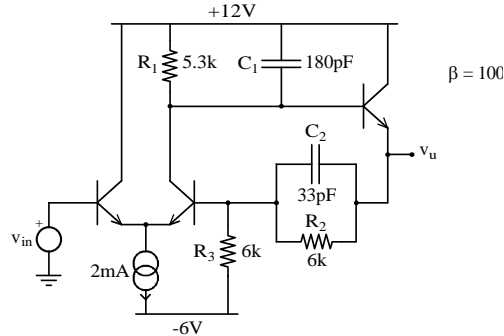


- (a) – In effetti i due poli del $G_{loop}(s)$ stanno a $\tau_2=R_1\cdot C_{gs2}=4.5ns$ e $\tau_1=(1/g_{m1})\|(R_2+R_3)\cdot(C_{gs1}+C)=4.6ns$, praticamente coincidenti.
- (b) corrente in tutti i transistori è pari ad 1mA, quindi $1/g_m=25\Omega$. Se il guadagno d'anello dell'amplificatore fosse infinito, il segnale erogato dal generatore forzante sarebbe trasferito integralmente ai capi di R_3 ed il trasferimento ideale dello stadio sarebbe

E12.13

Si valuti il comportamento in frequenza dell'amplificatore accanto ($\beta=100$) in cui si trascurino le capacità parassite dei transistori bipolari. A tal fine:

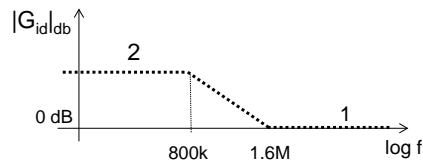
- determinare il trasferimento ideale del circuito;
- determinare l'espressione del guadagno d'anello;
- tracciare il luogo delle radici e determinare la reale posizione dei poli del circuito.



(a) - La corrente in tutti i transistori è pari ad 1mA, quindi $1/g_m=25\Omega$. Se il guadagno d'anello dell'amplificatore fosse infinito, il segnale erogato dal generatore forzante sarebbe trasferito integralmente ai capi di R_3 ed il trasferimento ideale dello stadio sarebbe

$$G_{id}(s) = \frac{v_u(s)}{v_{in}(s)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \cdot \frac{1 + sC_2R_2}{1 + sC_2R_2} R_3$$

Il circuito è quindi un esempio di circuito in cui una capacità (C_2) già si manifesta nel guadagno ideale. In particolare, il trasferimento ideale a bassa frequenza sarebbe pari a 2 e quello ad alta frequenza a 1, con un polo a circa 800kHz ed uno zero a circa 1.6MHz.



(b) - Per determinare il guadagno d'anello, si può pensare di partire a percorrere l'anello dal Collettore del transistor di destra dello stadio differenziale con un segnale sonda di corrente. La presenza dei due condensatori C_1 e C_2 fa sì che la funzione $G_{loop}(s)$ abbia due poli. Inoltre, in corrispondenza del valore complesso $s=-1/R_2C_2$, il guadagno d'anello ha anche uno zero perchè, per $s=-1/R_2C_2$ l'impedenza della rete $R_2||C_2$ diverge e quindi il segnale di corrente, che ritorna al punto da cui era partito, si annulla. Perciò

$$G_{loop}(s) = G_{loop}(0) \cdot \frac{1 + sR_2C_2}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

dove

$$G_{\text{loop}}(0) = -\frac{\beta \cdot R_3}{R_3 + 2\beta/g_m} \cdot \frac{R_1}{(R_2 + R_3 \parallel 2\beta/g_m)} \cong -33.$$

I due condensatori sono indipendenti ma interagenti. Infatti parte della corrente di scarica di C_1 , iniettata nella Base del Follower, fluisce anche attraverso la rete R_2, C_2 . Conviene quindi calcolare il termine b dell'equazione di secondo grado :

$$b = C_1 \left\{ R_1 \parallel \left[\frac{\beta}{g_m} + \beta \left(R_2 + R_3 \parallel \frac{2\beta}{g_m} \right) \right] \right\} + C_2 \left[R_2 \parallel \left(R_3 \parallel \frac{2\beta}{g_m} + \frac{1}{g_m} + \frac{R_1}{\beta} \right) \right]$$

Facendo i calcoli si ottiene $b = 948\text{ns} + 62\text{ns} \cong 1\mu\text{s}$ a cui corrisponde il polo a frequenza più bassa a 160kHz.

La costante di tempo del polo a frequenza più alta sarà ottenuta cortocircuitando C_1 e varrà :

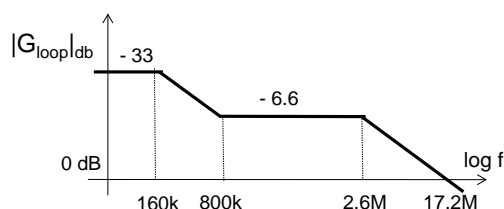
$$b = C_2 \left[R_2 \parallel \left(R_3 \parallel \frac{2\beta}{g_m} + \frac{1}{g_m} \right) \right] \cong 61\text{ns} \quad (2.6\text{MHz})$$

Poiché le due costanti di tempo ottenute sono molto diverse l'una dall'altra, questa stima è accurata. Quindi, il guadagno d'anello ha due poli ed uno zero:

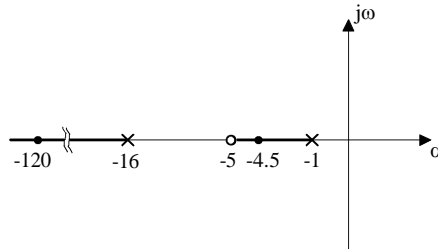
$$p_1 \cong -1/\tau_1 = -1 \text{ Mrad/s} \quad (f_1 = 160\text{kHz})$$

$$z_1 = -1/\tau_z = -5 \text{ Mrad/s} \quad (f_z = 800\text{kHz})$$

$$p_2 = -1/\tau_2 = -16 \text{ Mrad/s} \quad (f_2 = 2.6\text{MHz}) .$$



(c) – Riporto i 3 punti nel piano complesso nel semipiano sinistro. Per comodità scelgo come unità di misura i Mrad/s !. Trovo che fanno parte del luogo tutti i tratti di asse reale alla sinistra dei due poli di G_{loop} . Il luogo, disegnato nella figura seguente, è costituito da due rami (essendo due i poli) che si chiudono sugli zeri, uno al finito l'altro all'infinito.



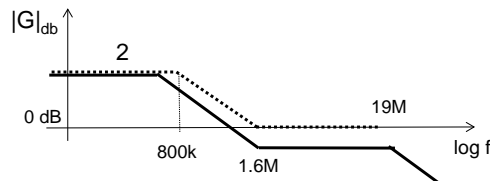
Giacché nessun ramo del luogo entra nel semipiano destro, il sistema è intrinsecamente stabile e la risposta ad una qualunque causa forzante è certamente monotona per qualunque valore di $G_{loop}(0)$. Per tarare il luogo si procede a determinare i punti del luogo per cui vale la condizione

$$|G_{loop}(0)| \cdot \frac{\left| \frac{1}{\tau_1} \right| \cdot \left| \frac{1}{\tau_2} \right|}{\left| \frac{1}{\tau_z} \right|} = \frac{\left| s - \left(-\frac{1}{\tau_1} \right) \right| \cdot \left| s - \left(-\frac{1}{\tau_2} \right) \right|}{\left| s - \left(-\frac{1}{\tau_z} \right) \right|}$$

Per risolvere l'equazione, si può procedere per tentativi, scegliendo un primo valore di S e valutando a quale valore di $G_{loop}(0)$ corrisponderebbe. Ad esempio se $S=4\text{Mrad/s}$, il $G_{loop}(0)$ risultante sarebbe di -11.3 . Poiché nel nostro caso $G_{loop}(0)=-33$, S dovrà stare ancora più a sinistra verso lo zero. Scegliendo $S=-4.6\text{Mrad/s}$ si trova $G_{loop}(0)=-32$, ottima approssimazione. In modo analogo si opera nell'altro ramo del luogo, dove si trova $S=-120\text{Mrad/s}$.

Pertanto i due poli del circuito retroazionato stanno a $p_1^*=-4.6\text{Mrad/s}$ (732kHz) e $p_2^*=-120\text{Mrad/s}$ (19MHz).

Il diagramma del guadagno reale si discosta quindi poco da quello ideale a bassa frequenza ed aggiunge un polo ad alta frequenza (quando il G_{loop} diventa circa unitario).

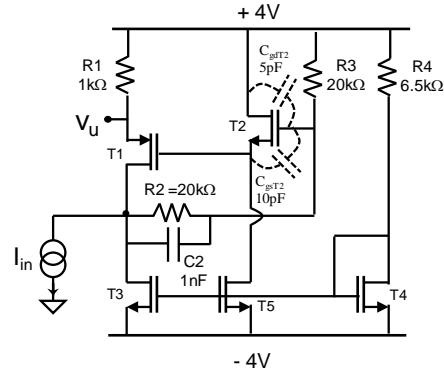


Notare che lo zero del guadagno reale rimane identico a quello del guadagno ideale. Per verificarlo basta inserire le espressioni del $G_{id}(s)$ e di $G_{loop}(s)$ trovate nell'espressione

$$G(s) = G_{id}(s) \cdot \frac{-G_{loop}(s)}{1 - G_{loop}(s)}.$$

E12.14 Nel circuito della figura accanto i MOSFET hanno $V_T=1V$, $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=4mA/V^2$ e $V_a=\infty$. Si faccia riferimento all'esercizio E11.11 per la polarizzazione ed il guadagno ideale dello stesso circuito.

- Disegnare l'andamento in frequenza del modulo e della fase della funzione di trasferimento REALE del circuito nell'ipotesi in cui, oltre alla capacità C_2 , siano presenti le capacità parassite $C_{gsT2}=10pF$ e $C_{gdT2}=5pF$ del solo il transistor T_2 .
- Immaginare ora di aggiungere una capacità $C_1=2nF$ in parallelo all'uscita. Disegnare innanzitutto l'andamento in frequenza del trasferimento ideale del circuito e confrontarlo con l'andamento reale.



(a) Il circuito ha un trasferimento V_u/I_{in} ideale piatto in frequenza e pari a $-R_1$ ($-1k\Omega$). Poiché nell'amplificatore di andata vi sono delle capacità, mi aspetto che il trasferimento **reale** non segua questo andamento piatto indipendente dalla frequenza ma presenti poli e/o zeri. Per calcolare i poli reali del circuito mi servo del calcolo del guadagno di anello e della relativa elaborazione con il luogo delle radici.

Nel calcolare il $G_{loop}(s)$ rifletto sul fatto che :

- La capacità C_2 non dovrebbe comparire nell'espressione. Infatti esco da T_1 con un generatore di corrente, a cui R_2 e C_2 sono posti in serie. Pertanto la corrente nell'anello attraverserà il parallelo di R_2 e C_2 comunque e sempre, qualunque ne siano i valori. Una impedenza in serie ad un generatore di corrente non entra mai nella funzione di trasferimento! (Se volessi fare i conti formalmente scoprirei che R_2 e C_2 introducono sia un polo che uno zero alle stesse frequenze !)
- La capacità C_{gs} non dovrebbe comparire nell'espressione di $G_{loop}(s)$. Infatti T_2 è un ottimo follower (non riusciremo mai a fare meglio di così, con un generatore di corrente al Source ed un carico infinito a valle!) per cui la tensione al Source segue perfettamente quella al Gate e quindi la tensione ai capi tra Gate e Source (dove c'è la capacità) non cambierà mai. La C_{gs} non dovrà quindi mai modificare la carica sui suoi piatti e pertanto sarà "invisibile" (Se volessi fare i conti formalmente scoprirei che C_{gs} introdurrebbe sia un polo che uno zero alle stesse frequenze !)

A questo punto mi rimane solo C_{gd} , che vede solo R_3 ai suoi capi (attenzione a

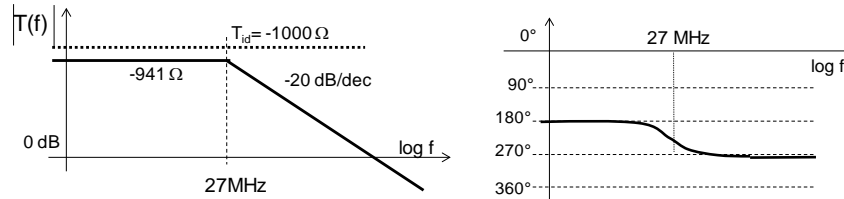
non aggiungere anche R2, in serie alla quale c'è una resistenza infinita data dai due collettori di T1 e T3).

Pertanto:

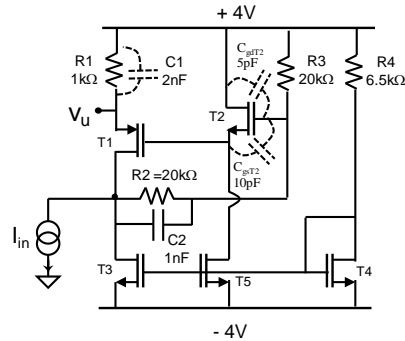
$$G_{loop}(s) = - \frac{R3}{R1+1/gm1} \frac{1}{(1+sC_{gd}R3)} = -16 \frac{1}{(1+sC_{gd}R3)}$$

dove $1/2\pi C_{gd}R3=1.6\text{MHz}$.

Il circuito retroazionato, con un solo polo nel guadagno di anello, avrà quindi il polo ad una frequenza $f_p=(1-G_{loop})\times 1.6\text{MHz}=27\text{MHz}$. Il diagramma di Bode diventa perciò il seguente :



c) Il circuito da analizzare è ora il seguente:



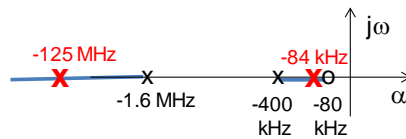
il cui trasferimento ideale (tutta la corrente I_{in} è fornita da T1 grazie al lavoro della retroazione) ha l'espressione :

$$T_{id}(s) = \frac{V_u}{I_{in}} = -R1 \frac{1}{(1 + sC_1R_1)}$$

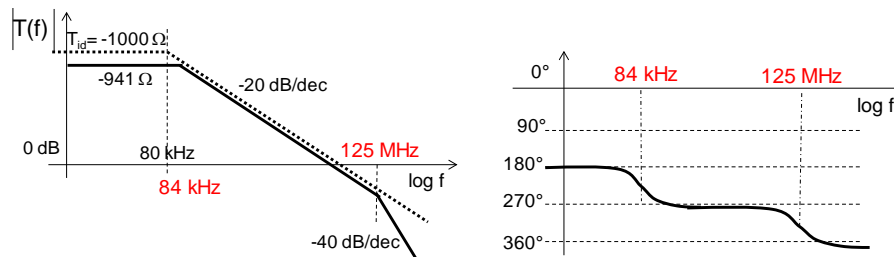
Il comportamento reale dipende dal guadagno d'anello che ora è cambiato rispetto a prima ed è diventato:

$$G_{loop}(s) = - \frac{R3}{R1+1/gm1} \frac{1}{(1+sC_{gd}R3)} \frac{(1+sC_1R1)}{(1+sC_1R1\|1/gm1)}$$

in cui al polo precedentemente trovato $f_{p1}=1.6\text{MHz}$ si aggiunge un secondo polo a $f_{p2}=400\text{kHz}$ ed uno zero $f_z=80\text{kHz}$. Il corrispondente luogo delle radici è quindi il seguente:

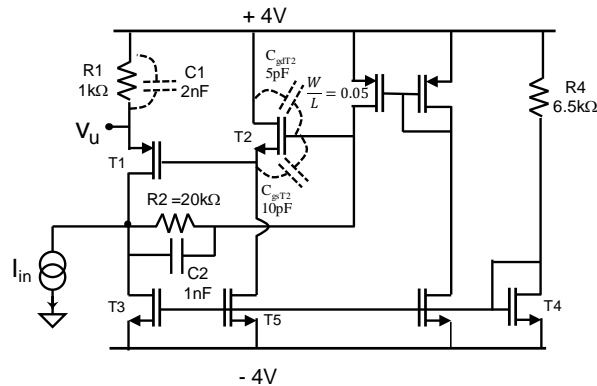


Tarando il luogo si trovano i due valori dei due poli del circuito retroazionato alle frequenze $f_{p1}=84\text{kHz}$ e $f_{p2}=125\text{MHz}$, i quali portano a tracciare il seguente diagramma di Bode del trasferimento reale:



E12.15

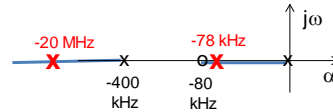
Considerare ora il circuito seguente, simile a quello visto nell'esercizio precedente eccetto che per lo specchio in alto (il cui MOSFET di sinistra ha W/L venti volte più piccolo di quello di destra).



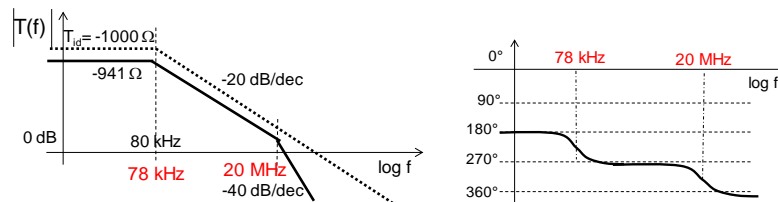
Dopo esservi convinti che la polarizzazione dei due circuiti sia uguale,

- Calcolare il guadagno ideale del nuovo circuito;
- Calcolarne il trasferimento reale e disegnarne i nuovi diagrammi di Bode. Commentare il confronto con il risultato dell'esercizio precedente.

- Il trasferimento ideale è lo stesso di prima.
- La modifica circuitale comporta due effetti: i) il $G_{loop}(0) = -\infty$ perché lo specchio ha sostituito la resistenza $R3$ con una impedenza infinita; ii) il polo introdotto da C_{gd} ha ora una costante di tempo infinita e quindi si posiziona nell'origine del piano complesso quando tracciamo il luogo. Pertanto il nuovo luogo delle radici sarà come accanto.



Ad esso corrisponde un diagramma di Bode del tipo seguente:



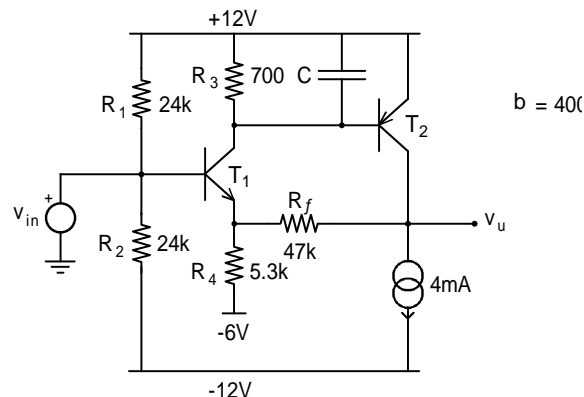
Pur essendo cambiato significativamente il luogo, il circuito viene sempre ad avere un polo prevalente molto vicino a quello calcolabile idealmente (80kHz). Nell'esercizio precedente era di poco maggiore (nel luogo vi arrivavo da sinistra) in questo un poco minore (nel luogo vi arrivo da destra).

12.6 RUMORE RMS IN UN CIRCUITO RETROAZIONATO

La conoscenza dei poli effettivamente presenti in un circuito retroazionato ci permette anche di calcolare l'entità del rumore all'uscita del circuito in termini di valore RMS delle fluttuazioni nel tempo (ciò che abbiamo chiamato nel Cap.8 come “la barba di rumore”). Per fare ciò in effetti dobbiamo semplicemente integrare la densità spettrale di rumore all'uscita, come calcolata nel caso di trasferimento ideale nel Cap.11, sulla banda passante dell'effettivo trasferimento reale.

I successivi esempi potranno chiarire eventuali dubbi.

E12.16 Riprendere il circuito dell'E 12.1, riproposto qui sotto. Scelto il valore di $C=1\text{nF}$ abbiamo visto che il circuito presenta un polo alla frequenza $f=25\text{MHz}$. Si calcoli il valore RMS del rumore in uscita dovuto alle sole due resistenze R_4 ed R_f .



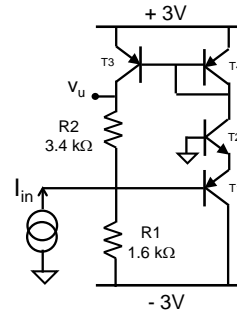
Trascurando gli elementi reattivi dei transistori, il sistema è a singolo polo. Il guadagno d'anello è

$$G_{\text{loop}}(s) = - \frac{R_3 \parallel \frac{1}{sC}}{R_3 \parallel \frac{1}{sC} + \frac{\beta_2}{g_{m2}}} \cdot \beta_2 \cdot \frac{R_4}{R_4 + \frac{1}{g_{m1}}} = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1}{1 + sC(R_3 \parallel \frac{\beta_2}{g_{m2}})}$$

dove $G_{\text{loop}}(0)=-87$. Poiché si vuole che il polo p^* del circuito retroazionato sia alla frequenza di 25MHz, si dovrà dimensionare C affinché il polo p del guadagno di anello sia ad una frequenza 88 volte minore. Imponendo questa condizione si trova $C=1\text{nF}$.

E12.17 Considerare il circuito retroazionato qui sotto, i cui BJT hanno $\beta=250$, $V_A=\infty$ e $C_{bc}=1\text{pF}$ dei soli due transistori T1 e T2. (Consider the following circuit where the BJT have $\beta=250$, $V_A=\infty$ and the capacitances $C_{bc}=1\text{pF}$ of T1 and T2. All other capacitances are zero).

- e) Calcolare il valore stazionario di V_u . (Find the DC value of the output V_u)
- f) Calcolare il trasferimento ideale $T_{id}=v_u/i_{in}$ (Find the ideal transfer $T_{id}=v_u/i_{in}$ of the circuit).
- g) Calcolare il trasferimento reale tra i_{in} e v_u del circuito e disegnarne in un diagramma quotato l'andamento del modulo e della fase (Find the poles of the circuit and draw in a plot the real transfer from input current to output voltage).
- h) Disegnare l'andamento nel tempo del segnale $v_u(t)$ a fronte di un gradino negativo di corrente in ingresso di $i_{in}=-10\mu\text{A}$. (Draw the time evolution of the output voltage $v_u(t)$ when a negative current step $i_{in}=-10\mu\text{A}$ is given to the input).



a) La tensione del nodo di ingresso risulta essere di -1.4V . Quindi la corrente nei due rami dello specchio è di 1mA e $V_u=+2\text{V}$ ($1/g_m=25\Omega$).

b) La corrente I_{in} inizialmente scorrerebbe in $R1$ e nella base del BJT, facendo alzare la tensione all'ingresso. La corrente nella base attiverebbe una corrente di segnale di collettore verso l'alto che verrebbe specchiata sull'ingresso. Nell'ipotesi di G_{loop} grandissimo, la corrente specchiata tenderebbe a i) abbassare la tensione all'ingresso, contrastando l'iniziale suo innalzamento; ii) richiamare verso l'alto la corrente I_{in} che quindi non scorrerebbe più né in $R1$ né in $T1$. Ne segue che il trasferimento ideale sarebbe $T_{id}=v_u/i_{in}=-R2=-3.4\text{k}\Omega$, costante a tutte le frequenze perché le capacità non si trovano lungo il percorso ideale della corrente di segnale.

12.6 CONDIZIONI DI STABILITÀ

12.6.1 Stabilità e luogo delle radici

All'aumentare del guadagno d'anello, e quindi del parametro di taratura γ , i poli di un circuito reazionato possano abbandonare l'asse reale negativo e diventare non solo complessi coniugati ma addirittura avere parte reale positiva. Quest'ultima situazione, che determina l'immediata saturazione del segnale di uscita del circuito a valori prossimi alle alimentazioni a causa della crescente oscillazione, è da evitarsi³ ed è importante sapere quando viene raggiunta. Con riferimento ad esempio al luogo delle radici della Fig.12.9, l'instabilità del sistema è raggiunta quando il luogo attraversa l'asse immaginario. Il valore limite di γ , indicato con γ_m , per cui i poli raggiungono l'asse immaginario è ottenuto risolvendo le equazioni (8.9) con $s=\pm j\bar{\omega}$

$$|G_{\text{loop}}(j\bar{\omega})| = \gamma_m \cdot \left| \frac{1}{(j\bar{\omega} - p_1)(j\bar{\omega} - p_2)(j\bar{\omega} - p_3)} \right| = 1 \quad (12.14a)$$

$$\arg[G_{\text{loop}}(j\bar{\omega})] = 0^\circ \pm k360^\circ \quad (12.14b)$$

Per determinare se il sistema in esame è stabile o meno, si valuta se il parametro di intensità γ del guadagno d'anello è maggiore o minore del valore γ_m .

12.6.2 Il criterio di stabilità di Bode

Una valutazione del grado di stabilità del sistema si può ottenere anche partendo dalla rappresentazione di Bode del guadagno di anello. Infatti le relazioni (12.14) consentono di enunciare in modo differente ma equivalente la condizione di stabilità: se esiste una pulsazione $\bar{\omega}$ per cui il segnale, percorrendo completamente l'anello di reazione, subisce uno sfasamento di un multiplo intero di 360° allora il sistema è passibile di instabilità. Se in corrispondenza della pulsazione $\bar{\omega}$ il modulo del guadagno d'anello è unitario, allora viene sostenuta una oscillazione stazionaria (corrisponde al caso $\gamma=\gamma_m$ nel luogo delle radici, cioè ad una coppia di poli immaginari puri). Se $|G_{\text{loop}}(j\bar{\omega})|<1$ allora l'oscillazione non riesce a sostenersi e si smorza (corrisponde al caso $\gamma<\gamma_m$ in cui i poli del sistema ad

³ L'instaurarsi di oscillazioni in uno stadio amplificante oltre a causarne il funzionamento improprio determina maggiore assorbimento di energia dalle alimentazioni e maggiore dissipazione termica dei componenti. Inoltre le oscillazioni possono essere trasmesse per accoppiamento elettromagnetico ad altre sezioni del circuito determinando malfunzionamenti anche in stadi di per sé perfettamente stabili.

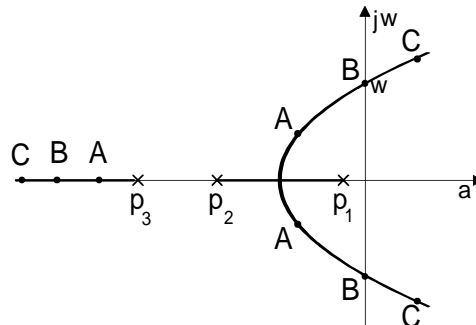


Fig. 12.11 *Luogo delle radici di un circuito con 3 poli reali negativi nel guadagno di anello.*

anello chiuso sono complessi coniugati nel semipiano sinistro e quindi il sistema è ancora stabile). Se invece $|G_{loop}(j\bar{\omega})| > 1$, l'oscillazione si alimenta e corrisponde al caso in cui $\gamma > \gamma_m$ e perciò con poli con parte reale positiva (sistema instabile).

In pratica per valutare il grado di stabilità del sistema si devono analizzare congiuntamente i due diagrammi di Bode del modulo e della fase di $G_{loop}(s)$. La Fig.12.10 riporta schematicamente le tre situazioni che possono verificarsi in un circuito con tre poli al variare di $G_{loop}(0)$, ovvero dell'entità della reazione applicata. Il corrispondente luogo delle radici è quello riportato nella Fig.12.12. Si ricordi che al crescere di $G_{loop}(0)$ si ha un aumento anche del parametro γ .

Nella situazione della Fig.12.12a lo sfasamento globale di 360° è ottenuto ad una frequenza a cui corrisponde un guadagno di anello in modulo inferiore a 1; il sistema è quindi stabile e corrisponde ad un punto nel semipiano sinistro del luogo della Fig.12.11 (ad esempio al punto A). Nella situazione della Fig.12.12b lo sfasamento globale di 360° è ottenuto proprio alla frequenza a cui corrisponde $|G_{loop}| = 1$. Il valore di $G_{loop}(0)$ in questa situazione coincide con il valore γ_m che porta i due poli del circuito reazionato ad essere immaginari puri (punto B nella Fig.12.10). La Fig.12.12c rappresenta infine il caso di un sistema instabile in cui ad uno sfasamento globale lungo l'anello di 360° corrisponde un guadagno ben superiore ad 1, ed equivale ad esempio al punto C nel luogo della Fig.12.11. Si noti come l'aumento di $G_{loop}(0)$ nel passare dalla figura (a) alla (c) sposti la curva del modulo di $G_{loop}(j\omega)$ sempre più in alto, aumentando la pendenza con cui questa taglia l'asse a 0dB. Corrispondentemente sul luogo delle radici aumenta il tratto percorso e viene incrementata la proiezione sull'asse delle frequenze (cioè l'oscillazione) a scapito dello smorzamento (proiezione sull'asse reale negativo).

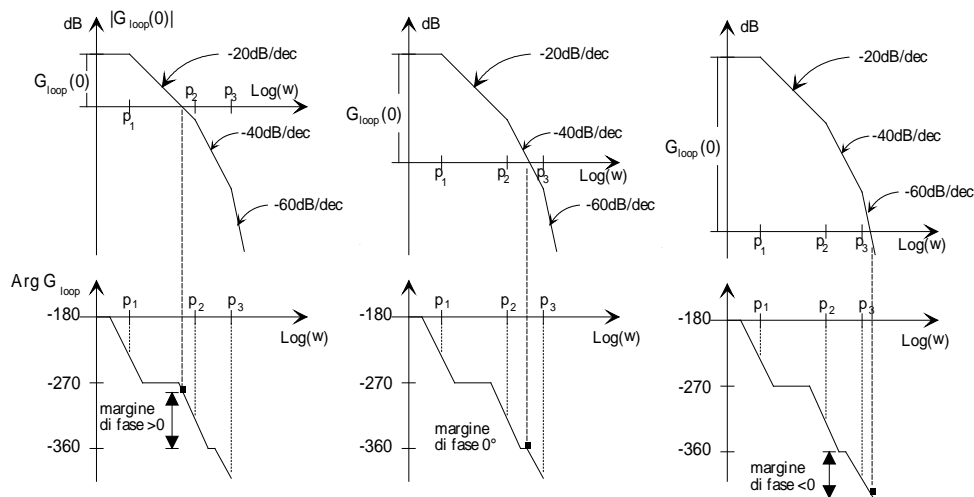


Fig. 12.12 Diagrammi di Bode del modulo e della fase del guadagno di anello di un circuito a tre poli reali negativi e distinti in tre diversi casi di $G_{loop}(0)$.

Dalle considerazioni fatte viene naturale definire le seguenti due quantità per esprimere il grado di stabilità del sistema reazionato:

- il **marginale di guadagno** , pari al valore, espresso in dB, di $|G_{loop}(j\bar{\omega})|$ alla pulsazione $\bar{\omega}$ per cui la fase del guadagno d'anello è 360° . Per avere stabilità il margine di guadagno deve essere inferiore a 0dB.
- il **marginale di fase** , pari al valore di $\arg[G_{loop}(j\omega_0)]$, alla pulsazione ω_0 per cui $|G_{loop}(j\omega)|$ attraversa l'asse a 0dB. Per garantire la stabilità il margine di fase deve essere maggiore di 0° .

E' facile verificare che se il diagramma di Bode del modulo di $G_{loop}(s)$ attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di **-20dB/dec**, qualunque sia il numero e la posizione di singolarità dopo l'intersezione, il margine di fase è sempre positivo e quindi il sistema è sempre **stabile**; se l'attraversamento avviene con pendenza di **-40dB/dec** il sistema è detto **marginalmente stabile** perchè lo sfasamento lungo l'anello alla frequenza di intersezione è prossima a 360° e dipende criticamente dalla posizione e dal numero di poli a frequenza maggiore; se invece l'attraversamento avviene con pendenza di **-60dB/dec** lo sfasamento è sicuramente superiore a 360° ed il circuito reazionato è sicuramente **instabile**. Queste enunciazioni vengono talvolta indicate come **criterio di stabilità di Bode**.

12.6.3 Differenze tra uso del diagramma di Bode e del luogo delle radici

Se è vero che l'instabilità è da evitarsi assolutamente, spesso anche una situazione stabile ma con risposta oscillante smorzata è indesiderata. Nella Fig.8.8 è riportata la risposta ad un gradino del sistema della Fig.8.6 ed 8.7, normalizzata al valore asintotico, quando i poli ad anello chiuso sono sempre nel semipiano sinistro ma nelle tre posizioni (A), (B) e (C) indicate. Per limitare la risposta sovraoscillante e per garantire che, nonostante le tolleranze dei componenti del circuito, la stabilità sia sempre verificata, si richiede in genere che un circuito *non solo sia stabile ma che il suo margine di fase sia maggiore di 45°* oppure, in alternativa, che il parametro γ del luogo delle radici sia tale che i poli ad anello chiuso non escano dalla regione del piano di Gauss compresa tra le due bisettrici dei quadranti. Ciò vuol dire che il fattore di forma ξ , della coppia di poli

$$\xi = -\frac{\text{Re}[p]}{|p|}$$

non deve essere minore di $1/\sqrt{2} = 0.7$. Le sovraelongazioni massime prodotte da una coppia di poli con fattore di forma pari a 0.7 sono infatti pari al 10% del valore asintotico.

Nel caso particolare di un sistema reazionato negativamente in cui il guadagno d'anello non abbia zeri nel semipiano destro ed abbia tre poli distanziati fra loro di almeno una decade, il margine di fase limite di 45° è raggiunto quando l'attraversamento avviene in corrispondenza della pulsazione caratteristica del secondo polo. Infatti, in questo caso la fase del guadagno d'anello alla pulsazione di attraversamento dell'asse a 0dB è in pratica pari alla somma dei 180° di $\arg[\gamma]$, della fase dovuta al polo a più bassa frequenza che è ormai di -90° e del contributo del secondo polo che è -45°.

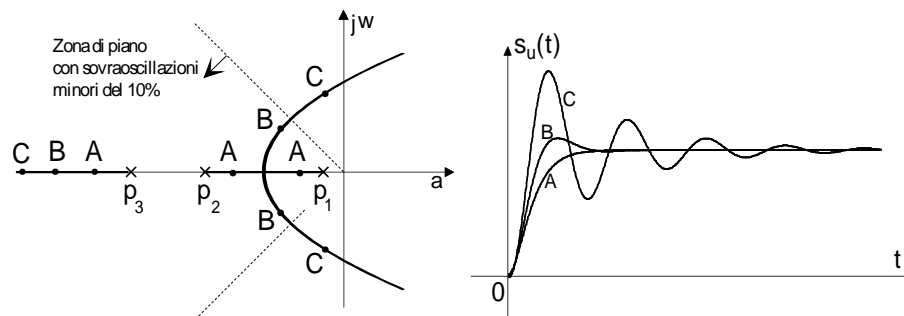


Fig. 12.13 Posizione nel piano complesso dei poli di un circuito reazionato a tre poli e corrispondente risposta al gradino.

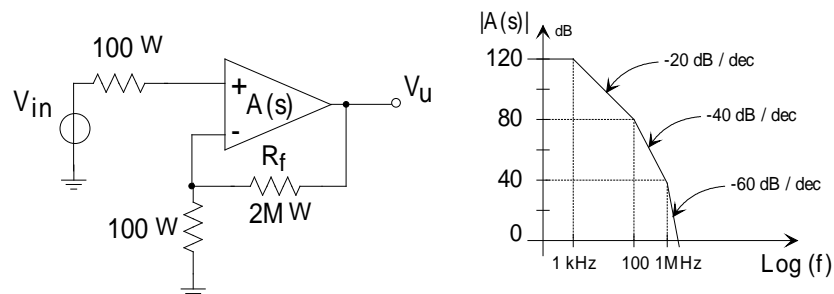
Si noti che richiedere un margine di fase minimo di 45° non corrisponde esattamente a richiedere che le coppie di poli abbiano un fattore di forma minore di $1/\sqrt{2} = 0.7$ (cfr. E8.10). Si tratta di due scelte conservative a cui è necessario riferirsi esplicitamente nel dimensionamento e nella valutazione del margine di stabilità del circuito per evitare confusioni.

L'analisi della stabilità di circuito reazionato con il luogo delle radici è estremamente completa ed efficace. Il luogo infatti visualizza immediatamente la posizione dei poli ad anello chiuso del circuito reazionato ed il progettista può variarne la posizione intervenendo sul valore di γ o di $G_{loop}(0)$. Dal luogo si può ricavare l'andamento nel tempo della risposta del circuito fornendo direttamente l'eventuale frequenza di oscillazione residua (parte immaginaria dei poli) ed il suo smorzamento (parte reale dei poli). Il luogo permette di trattare facilmente anche circuiti aventi poli e zeri nel ramo di reazione e zeri nel semipiano destro.

I diagrammi di Bode di $G_{loop}(s)$ non forniscono direttamente tutto ciò. Purtuttavia essi sono utili soprattutto quando si progettano circuiti con amplificatori operazionali. I diagrammi di Bode degli operazionali infatti, messi a disposizione del progettista dai costruttori, definiscono l'andamento con la frequenza dello stadio di andata del circuito e quindi, se la rete di reazione è puramente resistiva, anche del $G_{loop}(s)$. Il metodo grafico della Fig.8.7 ed i concetti di margine di guadagno e di fase forniscono gli elementi per decidere l'entità di $G_{loop}(0)$ che garantisce la banda passante desiderata. L'uso di questi diagrammi è inoltre diffuso tra chi analizza direttamente, sul banco, i circuiti. Infatti, operativamente è spesso possibile applicare dei segnali sinusoidali a frequenza variabile all'ingresso del circuito tali da annullare la reazione e quindi misurare direttamente l'andamento del modulo e della fase dello stadio di andata.

Ulteriori approfondimenti sul legame esistente tra luogo delle radici, diagramma di Bode, poli del circuito reazionato e risposta nel tempo sono discussi negli esempi che seguono.

- E12.18** Si consideri il semplice amplificatore di tensione non invertente della figura seguente. Si supponga di realizzarlo con un operazionale avente il guadagno $A(s)$, fornito dal costruttore, riportato nella figura.
- Studiarne la funzione di trasferimento, deducendone la stabilità in base ai valori del margine di guadagno e di fase;
 - Dire come cambia la risposta quando si diminuisce il guadagno del circuito sostituendo la resistenza R_f con una da $200k\Omega$ e poi da $10k\Omega$;
 - Commentare l'uso di questo operazionale come buffer.



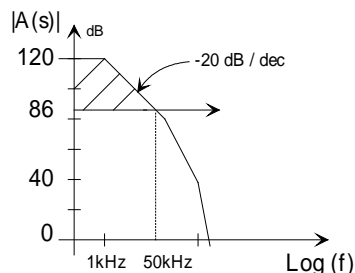
(a) - Il guadagno ideale del circuito è di 20.000 (86dB). Poichè il ramo di reazione non aggiunge singolarità, l'andamento di $G_{loop}(s)$ coincide con quello di $A(s)$ ponendo l'asse a 0dB alla quota di 86dB in modo che

$$G_{loop}(0) = -10^6 \frac{100\Omega}{2M\Omega + 100\Omega} = -50 \text{ (34dB)}$$

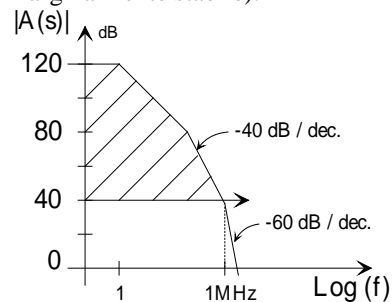
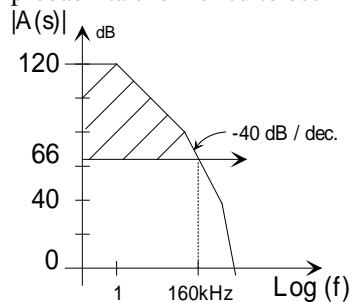
Il guadagno di anello taglia l'asse a 0dB alla frequenza di 50kHz con una pendenza di -20dB/dec. Per quanto visto, questo assicura che il circuito è stabile. Lo sfasamento totale lungo l'anello alla frequenza di 50kHz è infatti solo di

$$-180^\circ - \arctg\left(\frac{50\text{kHz}}{1\text{kHz}}\right) - \arctg\left(\frac{50\text{kHz}}{100\text{kHz}}\right) - \arctg\left(\frac{50\text{kHz}}{1\text{MHz}}\right) = -298^\circ$$

per cui il margine di fase è di 62° , confermando la stabilità.



(b) - Sostituendo $R_f=2M\Omega$ con una resistenza da $200k\Omega$ il guadagno ideale del circuito reazionato diminuisce a 200 (66dB) mentre $G_{loop}(0)$ aumenta a 500 (54dB). Il grafico del guadagno di anello (vedi figura) taglia l'asse a 0dB alla frequenza di circa 160kHz con una pendenza di -40dB/dec. Il margine di fase corrispondente è calcolabile in 23° . Esso indicherebbe stabilità pur con sovraelongazioni considerevoli. Tuttavia, pensando alle tolleranze dei componenti operazionali fornite dai costruttori (mai inferiori al 20%) sia sul guadagno a bassa frequenza che sulla posizione dei poli, ci sono fondate probabilità che il circuito oscilli (circuito marginalmente stabile).



Naturalmente se si fa guadagnare il circuito ancora meno, come avviene scegliendo $R_f=10k\Omega$, il circuito satura immediatamente dopo l'accensione per via dell'innescò di una oscillazione crescente. Questo fatto è annunciato dal valore negativo del margine di fase (-39°) oltre che dall'attraversamento dell'asse a 0dB con una pendenza prossima ormai ai -60dB/dec.

(c) - E' evidente che la configurazione a buffer è assolutamente instabile.

E12.19 Si consideri un circuito reazionato negativamente il cui guadagno d'anello ha solo due poli nel semipiano sinistro. Il rapporto tra le relative frequenze caratteristiche sia $1:n$.

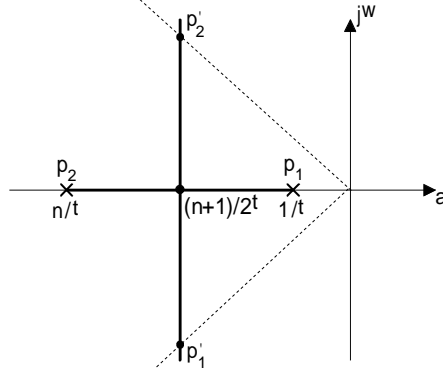
a) Tracciare il luogo delle radici.

b) Determinare il margine di fase che si ha quando i poli del sistema ad anello chiuso sono sulle bisettrici dei quadranti.

(a) - Il guadagno d'anello ha l'espressione

$$G_{loop}(s) = \frac{n \cdot G_{loop}(0)}{\tau^2} \cdot \frac{1}{(s + 1/\tau)(s + n/\tau)}$$

ed il luogo delle radici è riportato nella figura seguente.



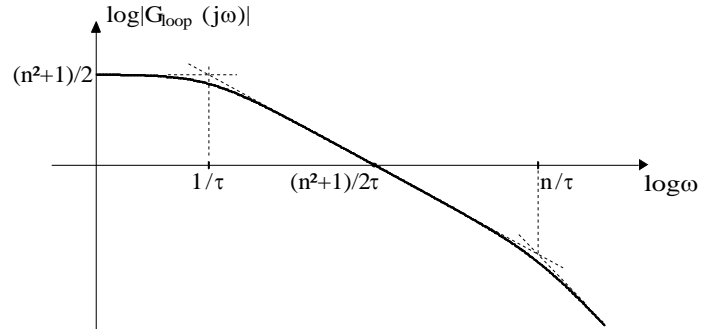
(b) - I punti del luogo che intersecano le bisettrici dei quadranti, p'_1 e p'_2 , hanno ascissa $-(n+1)/2\tau$. Graficamente è facile ricavare il modulo dei vettori congiungenti questi punti con i poli p_1 e p_2 . In particolare

$$|p'_1 + 1/\tau|^2 = |p'_1 + n/\tau|^2 = (n^2 + 1) / 2\tau^2$$

Perché p'_1 e p'_2 siano i poli del sistema ad anello chiuso, il guadagno d'anello in continua deve soddisfare la relazione

$$|G_{\text{loop}}(p'_1)| = |G_{\text{loop}}(p'_2)| = \frac{2 \cdot n}{n^2 + 1} \cdot |G_{\text{loop}}(0)| = 1$$

In questa situazione il diagramma di Bode del guadagno d'anello è



La pulsazione per cui il diagramma attraversa l'asse 0dB è $\omega_0 = (n^2+1)/2n\tau$. Quindi il margine di fase è

$$\Delta\varphi = 180^\circ - \arctg\left(\frac{n^2 + 1}{2 \cdot n}\right) - \arctg\left(\frac{2 \cdot n^2}{n^2 + 1}\right).$$

Se $n \gg 1$, e quindi i poli sono molto separati, il margine di fase tende al valore di 26.6° . Se $n \approx 6$, il margine di fase è di circa 45° .

E12.20 Si riprenda il ricevitore a transimpedenza dell'esercizio E8.1 non trascurando più la capacità tra Base e Collettore che si suppone essere di 2pF .

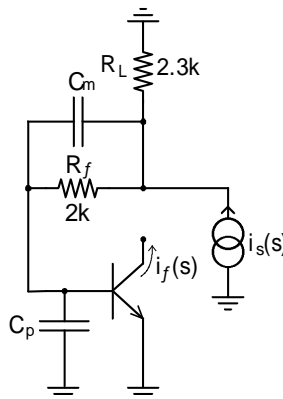
- Discutere l'effetto della modifica sul guadagno ideale;
- calcolare i nuovi poli del circuito e commentarne il comportamento in frequenza;
- tracciare il diagramma di Bode del guadagno d'anello e determinare il margine di fase ed il margine di guadagno;

(a) - La presenza della capacità C_μ altera il trasferimento ideale che diventa

$$G_{id}(s) = -\frac{R_f}{1 + sC_\mu R_f}$$

e mostra come il segnale di corrente dal fotodiodo subisca una integrazione approssimata sulla capacità C_μ .

(b) - La modifica introduce nel guadagno d'anello uno zero ed un ulteriore polo. Supponendo di tagliare l'anello sul Collettore del transistor, si ottiene la configurazione circuitale riportata nella figura seguente



La rete $R_f C_\mu$ introduce uno zero nel guadagno d'anello perché in corrispondenza della pulsazione complessa $-1/\tau_z = 1/R_f C_\mu$, l'impedenza di questa rete diventa infinita e la trasformata di Laplace del segnale che percorre l'anello di reazione si annulla. La frequenza dello zero è $f_z = 40\text{MHz}$. La presenza di due condensatori indipendenti determina due poli le cui costanti di tempo possono essere stimate utilizzando il metodo delle costanti di tempo. La costante di tempo associata al polo più lento è pari circa a

$$\tau_1 = C \cdot \frac{\beta}{g_m} \parallel (R_f + R_L) + C_\mu \cdot R_f \parallel \left(\frac{\beta}{g_m} + R_L \right) = 10.3 \text{ ns}$$

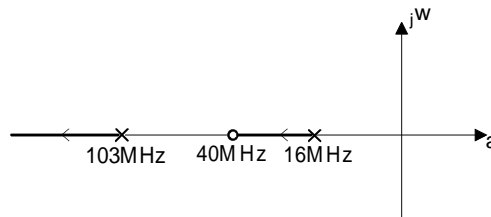
che corrisponde ad un primo polo a frequenza $f_1=16\text{MHz}$. L'inverso della costante di tempo associata al secondo polo è pari circa a

$$1/\tau_2 = 1/\left[C \cdot \left(\frac{\beta}{g_m} \parallel R_L \right) \right] + 1/\left[C_\mu \cdot (R_f \parallel R_L) \right] = 649 \text{ Mrad/s}$$

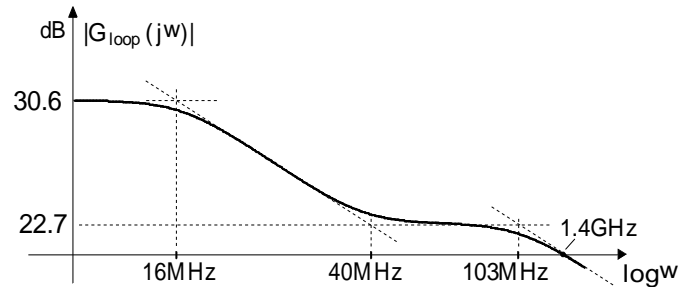
corrispondente ad una frequenza $f_2=103\text{MHz}$. Giacché le due stime sono più distanti di due decadi, esse sono da considerarsi accurate. Quindi l'espressione del guadagno d'anello è

$$G_{\text{loop}}(s) = G_{\text{loop}}(0) \cdot \frac{1 + s\tau_z}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

dove $G_{\text{loop}}(0)=-34$ è stato già ricavato nell'esercizio E 8.1. Il luogo delle radici è riportato nella figura seguente. Il luogo resta sull'asse reale negativo, perciò il sistema è incondizionatamente stabile e non presenta risposte sovraoscillanti a segnali di ingresso a gradino. All'aumentare del guadagno d'anello in continua, il polo a bassa frequenza tende a muoversi verso lo zero. E' facile verificare che il valore di $G_{\text{loop}}(0)$ è sufficiente perché esso ormai raggiunga lo zero del guadagno d'anello (è di circa 39MHz). Anche il secondo polo si sposta verso frequenze più alte ed anche in questo caso la taratura del luogo si semplifica notando che, poichè esso starà ad una frequenza ben maggiore di 103MHz , la distanza tra di esso e lo zero a 40MHz sarà praticamente uguale alla distanza tra di esso ed il polo a 16MHz . Esso va effettivamente a porsi alla frequenza di circa 1.5GHz .



(c) - Il diagramma di Bode del guadagno d'anello è il seguente



Si noti come il guadagno d'anello si avvicini, per frequenze superiori a 40MHz, ad un valore costante pari a $G_{loop}(0)\tau_Z/\tau_1 = 13.6$. Quindi, dopo l'ultimo polo, il diagramma di Bode attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di circa -20dB/decade in corrispondenza della frequenza 1.4GHz ed il sistema si comporta sostanzialmente come un circuito a singolo polo. Il sistema è comunque stabile ed il margine di fase è pari a

$$\Delta\varphi = 180^\circ - \arctg\left(\frac{1.4\text{GHz}}{16\text{MHz}}\right) + \arctg\left(\frac{1.4\text{GHz}}{40\text{MHz}}\right) - \arctg\left(\frac{1.4\text{GHz}}{103\text{MHz}}\right) = 93^\circ.$$

- E12.21** Studiare quanto il comportamento in frequenza del circuito dell'esercizio E8.2 sia influenzato dagli elementi reattivi dei transistori ($f_T=1\text{GHz}$ e $C_\mu=0.5\text{pF}$). In particolare quindi si determini:
- l'espressione del guadagno d'anello;
 - le frequenze dei poli del circuito reazionato;
 - la funzione di trasferimento del circuito;
 - il margine di fase ed il margine di guadagno.

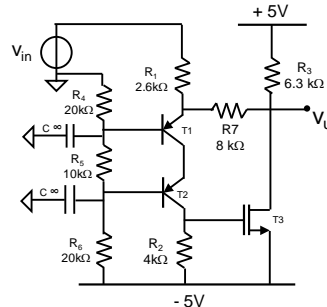
E12.22

Considerare il circuito accanto, in cui il BJT abbia $\beta=300$ e $V_a=\infty$ ed il MOSFET abbia $V_T=1V$, $k=1mA/V^2$ e $V_a=\infty$:

a) Calcolare la tensione dell'uscita V_u in assenza di segnale. (Find V_u when no signal is applied)

b) Calcolare il guadagno ideale tra ingresso ed uscita. (Find the ideal transfer from V_{in} to V_u)

c) Disegnare l'andamento in frequenza del modulo e della fase della funzione di trasferimento REALE del circuito quando si considerino le capacità $C_{gs}=3pF$ e $C_{gd}=2pF$ del solo MOSFET (si suppongano i due BJT infinitamente veloci). (Draw the Bode plots of the real transfer function when the capacitances $C_{gs}=3pF$ e $C_{gd}=2pF$ of the MOSFET alone are taken into account).



a) $V_u \cong -1.3V$, $g_m|_{T1}=20mA/V$ ($1/g_m=50\Omega$); $g_m|_{T3}=2mA/V$ ($1/g_m=500\Omega$);

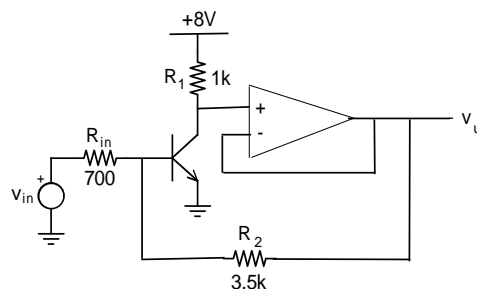
b) La retroazione contrasta ogni spostamento in tensione dell'emettitore di T1. Pertanto viene richiesta una corrente $V_{in}/R1$, tutta richiamata dalla retroazione in R7. Questo comporta che la tensione dell'uscita si muova di $V_u=-R7 \cdot V_{in}/R1$ nel caso di retroazione perfetta.

E12.23

Si consideri il seguente circuito in cui il transistor bipolare abbia $f_T=1GHz$, $\beta=300$ e $C_\mu=2pF$, ed in cui lo stadio operazionale abbia un singolo polo e $GBWP=200MHz$.

(a) Calcolare i poli del circuito reazionato.

(b) Per quale valore di guadagno di anello oscillerebbe?



In assenza di segnale applicato, l'uscita si porta a $V_u=+4.2V$ e nel BJT scorre $I_C=3.8mA$. Il circuito ha un guadagno ideale $G_{id}=-5$. Il guadagno di anello presenta le singolarità proprie del BJT (due poli con parte reale negativa ed uno

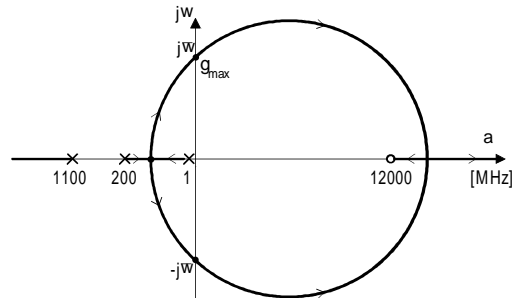
zero reale positivo) ed il polo del disaccoppiatore ad operazionale alla frequenza di 200MHz. Le singolarità citate sono

$$\tau_z = C_\mu \frac{1}{g_m} = 13 \text{ ps} \quad (f_z = 12 \text{ GHz}) \quad \tau_{\text{OP.AMP}} = 0.8 \text{ ns} \quad (f_{p2} = 200 \text{ MHz})$$

$$\tau_L = \left[R_{in} \parallel R_2 \parallel \frac{\beta}{g} \right] \cdot \left[C_\pi + C_\mu (1 - g_m R_1) \right] + C_\mu R_1 = 151 \text{ ns} \quad (f_{p1} = 1 \text{ MHz})$$

$$\tau_H = \left[R_{in} \parallel R_2 \parallel \frac{\beta}{g} \right] \cdot C_\pi C_\mu R_1 / \tau_L = 0.1 \text{ ns} \quad (f_{p3} = 1.1 \text{ GHz})$$

Il luogo è quindi (non in scala)



2.7 STABILITÀ E TECNICHE DI COMPENSAZIONE

Può succedere che un circuito amplificatore, usato come stadio di andata di un circuito reazionato che realizza una definita funzione di trasferimento stabile, dia luogo ad un circuito reazionato instabile se collegato ad una diversa rete di reazione. Infatti la nuova funzione di trasferimento modifica il valore di $G_{loop}(0)$, ovvero del parametro di taratura γ , al punto che il margine di stabilità potrebbe rivelarsi insoddisfacente. In altri casi un circuito reazionato progettato stabile può diventare instabile quando lo si collega ad un carico a forte componente capacitiva o quando viene pilotato da uno stadio a forte componente capacitiva. Questi carichi all'ingresso e/o all'uscita alterano la funzione $G_{loop}(s)$ spostando poli già presenti o eventualmente aggiungendone di nuovi. Sia che si progetti un circuito nuovo sia che si usi un circuito preesistente, è quindi molto consueto essere chiamati ad intervenire sulle singolarità della funzione $G_{loop}(s)$ al fine di rendere il circuito più stabile.

Le modifiche circuitali che si compiono per migliorare o far recuperare la stabilità ad un circuito rispondono a dei criteri generali abbastanza semplici e, al di là della specifica soluzione adottata, possono essere classificate ed illustrate in forma sistematica.

12.7.1 Stabilizzazione in frequenza con modifica dei poli

Si supponga di avere un circuito il cui guadagno di anello abbia l'andamento mostrato nella Fig.8.9a. Esso potrebbe essere instabile perchè attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di -40dB/dec. Per portarlo in condizioni di maggior stabilità si può pensare di intervenire sulle singolarità già esistenti.

Velocizzazione del polo veloce. È innanzitutto evidente che la stabilità sarebbe migliorata se si portasse il polo p_2 a frequenza più elevata. Se ad esempio il secondo polo fosse spostato nella posizione della Fig.8.9b il circuito diventerebbe addirittura sicuramente stabile. L'operazione di rendere un polo più veloce di quanto già non si sia cercato di fare nella fase iniziale del progetto è però spesso difficile. Infatti significa ridurre la resistenza che partecipa al polo, con ciò spesso diminuendo contemporaneamente il guadagno in continua (effetto non sempre accettabile), o ridurre la capacità, spesso già definita quasi unicamente dagli elementi parassiti dei transistori e quindi con pochissimi margini di miglioramento. È facile rendersi conto che, in un progetto ben fatto, un intervento di revisione riesce a spostare il polo più veloce al massimo di un fattore 2 o 3, rispetto magari al fattore 10 o 100 necessario per recuperare stabilità.

Spostamento del polo dominante. Supponiamo quindi che il $G_{loop}(s)$ della Fig.8.9a sia già ciò che si riesce ad ottenere dopo avere spinto alla frequenza più alta

possibile il secondo polo. Una possibilità per rendere stabile il circuito è quella di ridurre la frequenza caratteristica del polo più basso p_1 . Se ad esempio l'arretramento è tale da far avvicinare l'attraversamento dell'asse a 0dB con la posizione del secondo polo (vedi Fig.8.9c) si riottiene un margine di fase di sufficiente sicurezza.

Questa compensazione in frequenza, agendo sul polo dominante, è molto più facile da realizzare perchè richiede solo l'aggiunta di una opportuna capacità nel nodo che già prima ne determinava il polo. In molti amplificatori operazionali in commercio questo intervento viene realizzato fin dalla fase di progetto del circuito integrato. In essi la soluzione spesso adottata è quella di introdurre una capacità di compensazione di qualche decina di pF tra Base e Collettore di uno stadio Emittitore comune. Questa capacità, amplificata per effetto Miller, determina il polo prevalente dell'amplificatore integrato tipicamente con una frequenza di qualche decina di Hz, e fa sì che il secondo polo dello stadio interenga ad una frequenza per cui il guadagno di tensione è ormai già inferiore a 0dB. Gli amplificatori operazionali che adottano questa soluzione sono detti perfettamente *compensati* perchè qualunque rete di reazione si utilizzi (purchè non aggiunga essa stessa poli), il circuito è sempre stabile.

Il prezzo pagato per ottenere stabilità arretrando il polo dominante è

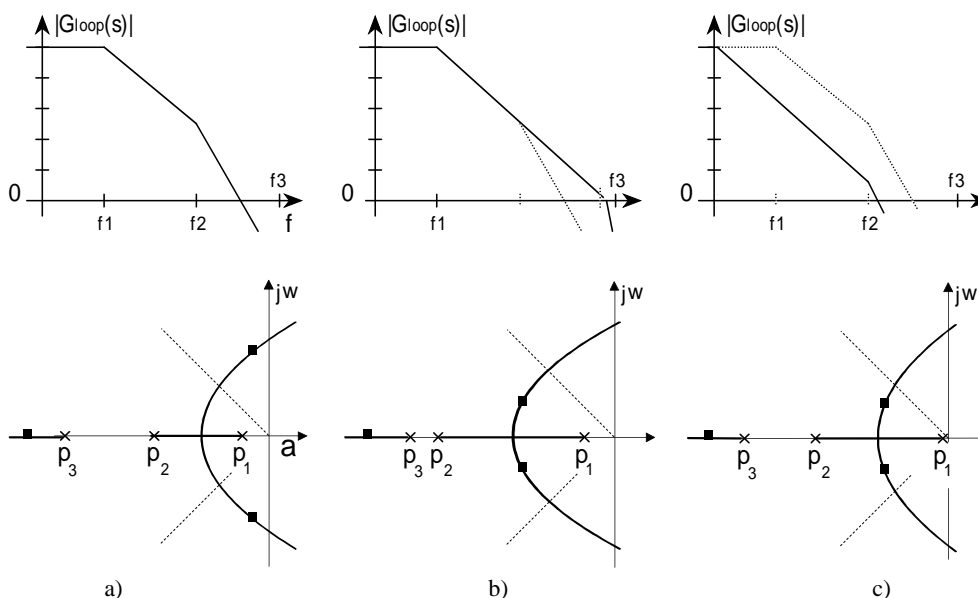


Fig. 12.9 Effetto della modifica dei poli sulla stabilità di un circuito reazionato: (a) situazione di partenza di circuito instabile, (b) velocizzazione di un polo veloce, (c) rallentamento del polo dominante.

evidentemente la riduzione della banda del circuito. Per meglio comprendere questo punto si consideri per esempio la configurazione operativa non invertente studiata negli esercizi E8.3 ed E8.9. Nell'esercizio E8.3 si è utilizzato un operazionale perfettamente compensato con guadagno in continua 120dB e GBWP di 10MHz mentre nell'esercizio E8.9 si è utilizzato un amplificatore non compensato. Se si dovesse realizzare un circuito reazionato che guadagni 20.000, entrambi i circuiti sarebbero stabili. Nel primo caso si sceglierebbe $R_1=100\Omega$ ed $R_2=2M\Omega$, ottenendo $G_{loop}(0)=50$ ed una banda ad anello chiuso di 500Hz. Se si utilizzasse invece l'amplificatore non compensato dell'esercizio E8.9 la banda ad anello chiuso sarebbe ben maggiore e pari a 50kHz. Se però si dovesse realizzare una configurazione con guadagno di tensione 200, mentre nel primo caso non ci sarebbero problemi di stabilità, nel secondo caso non si ha margine di fase sufficiente (cfr. E8.9). Per recuperare un margine di fase di 45° si dovrebbe spostare il primo polo dello stadio a 200Hz, in modo che l'asse a 0dB sia attraversato in corrispondenza della frequenza del secondo polo, riducendo la banda.

Per dare la possibilità al progettista di ottimizzare i requisiti di banda e di stabilità ci sono in commercio degli amplificatori operazionali non compensati che consentono di intervenire all'occorrenza sul valore della capacità di compensazione. In pratica l'integrato ha due piedini fra cui si può inserire una capacità esterna che si pone in parallelo alla capacità di compensazione interna, in modo da ridurre ulteriormente, se necessario, la frequenza del primo polo. Questi componenti sono da impiegare in configurazioni operative con guadagno alto e, in questi casi, consentono di realizzare degli stadi con banda più larga di quanto ottenibile con operazionali compensati. Quando però la amplificazione richiesta diminuisce, ovvero l'entità della reazione aumenta, si deve inserire la capacità esterna per evitare che abbiano margine di fase insufficiente. La banda ad anello chiuso si riduce progressivamente e quindi diminuisce il vantaggio connesso al loro impiego rispetto all'uso dei componenti compensati.

Questi interventi stabilizzatori possono essere altrettanto efficacemente visualizzati nel piano complesso. Lo spostamento dei poli del guadagno di anello non solo modifica la forma del luogo delle radici (nell'esempio della Fig.8.9 essa è poco evidente ma in altri casi può essere più vistosa) ma ne altera anche la taratura. Nella figura si vede come, pur mantenendo invariato il valore di $G_{loop}(0)$, i poli del circuito reazionato si riportano entro il cono di piano a 45° sia quando si aumenta la frequenza del polo p_2 sia quando si diminuisce la frequenza del polo p_1 , congruentemente con quanto visto prima.

12.7.2 Stabilizzazione in frequenza con reti sfasatrici

Se non si ha modo di intervenire sulle singolarità già esistenti si può aggiungere nell'anello una opportuna rete che aggiunge una coppia polo-zero. Si pensi di avere un circuito il cui guadagno di anello abbia di nuovo l'andamento della Fig.8.9a, riportato per comodità nella Fig.8.10a. E' subito evidente che la stabilità non si può migliorare aggiungendo una rete che introduce solo un polo ad esempio alla frequenza f^* magari uguale a quella che risolveva il problema nel caso della Fig.8.9c. Ora infatti l'andamento complessivo sarebbe quello della Fig.8.10b in cui il nuovo polo lento andrebbe ad aggiungersi ai precedenti riducendo addirittura la banda del circuito. Una soluzione potrebbe essere invece quella di introdurre, insieme al polo di prima, anche uno zero di valore esattamente pari al vecchio polo p_1 in modo da annullarne l'effetto ed estendere la banda almeno fino alla frequenza f_2 (Fig.8.10c).

Due circuiti che introducono una coppia polo-zero sono mostrati nella Fig.8.11. Queste reti si dicono generalmente *reti sfasatrici*, poichè esse introducono un sfasamento addizionale nell'anello, dipendente dalla differenza tra la frequenza del polo e quella dello zero. Se la frequenza del polo è minore di quella dello zero, le frequenze più basse subiscono un ritardo di fase che poi diminuisce all'aumentare della frequenza per la presenza dello zero. Questo è il caso della rete della Fig.8.11a, e si parla di *rete posticipatrice*. Se lo zero interviene prima del polo (Fig.8.11b), lo sfasamento introdotto a bassa frequenza è in anticipo e diminuisce, per la presenza del polo, all'aumentare della frequenza. In questo caso si parla di *rete anticipatrice*.

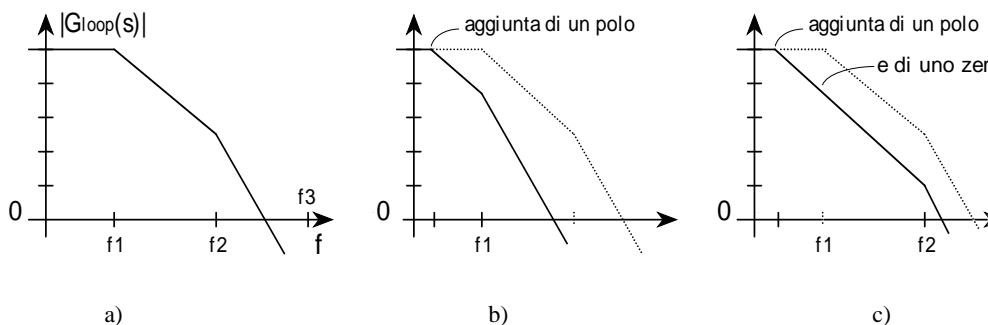


Fig. 12.10 Compensazione in frequenza di un circuito reazionato con introduzione di una rete addizionale: (a) situazione iniziale di circuito instabile, (b) aggiunta di un solo polo alla frequenza f^* , (c) aggiunta di una rete compensatrice polo-zero.

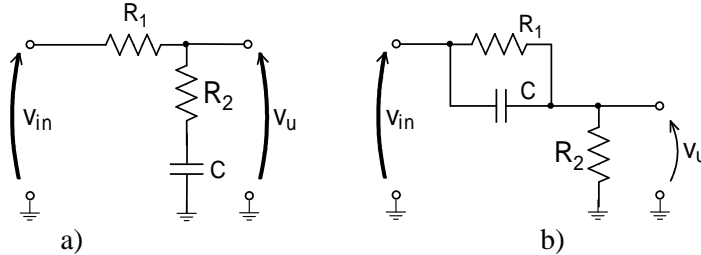


Fig. 12.11 Reti sfasatrici: a) rete posticipatrice di fase e b) rete anticipatrice di fase.

12.8 EFFETTO SULLA STABILITÀ DI CARICHI CAPACITIVI

Si è già preannunciato che un circuito reazionato stabile può diventare instabile quando lo si usa per comandare un carico a forte componente capacitiva o quando viene pilotato da uno stadio a forte componente capacitiva. Questi carichi all'ingresso e/o all'uscita alterano la funzione $G_{\text{loop}}(s)$ spostando poli già presenti o eventualmente aggiungendone di nuovi. Illustriamo alcuni esempi tipici.

12.8.1 Effetto di un carico capacitivo in uscita

Supponiamo di avere progettato un circuito reazionato stabile con un margine di fase di almeno 45° , il cui guadagno di anello abbia l'andamento mostrato nella Fig.8.12a. Per semplicità i 3 poli presenti nell'anello (p_1, p_2, p_3) siano immaginati dovuti agli elementi reattivi del circuito di andata. L'aggiunta di un carico con capacità C_L determina, con la resistenza di uscita dello stadio, un polo nel guadagno di anello alla frequenza

$$f_L = \frac{1}{2\pi C_L [R_0 \parallel R_L \parallel (R_f + R_1)]} \cong \frac{1}{2\pi C_L R_0}$$

che supponiamo vada ad aggiungersi ai precedenti. Fintanto che f_L è più alta di quella di p_2 non ci sono effetti sostanziali sulla stabilità del circuito. Quando invece C_L è tale da portare f_L a frequenze minori di p_2 , allora l'andamento in frequenza di $G_{\text{loop}}(s)$ ne risente anche nell'intervallo di frequenze in cui $|G_{\text{loop}}(j\omega)| > 1$, riducendo il margine di fase o addirittura innescando l'instabilità quando ad esempio si attraversa l'asse a 0dB con una pendenza di -40dB/dec , come nella Fig.8.12b. Se nulla si può fare per ridurre la capacità del carico, bisogna allora intervenire sulla resistenza R_0 riducendola il più possibile, magari inserendo a valle dell'amplificatore un follower con una resistenza di uscita minore.

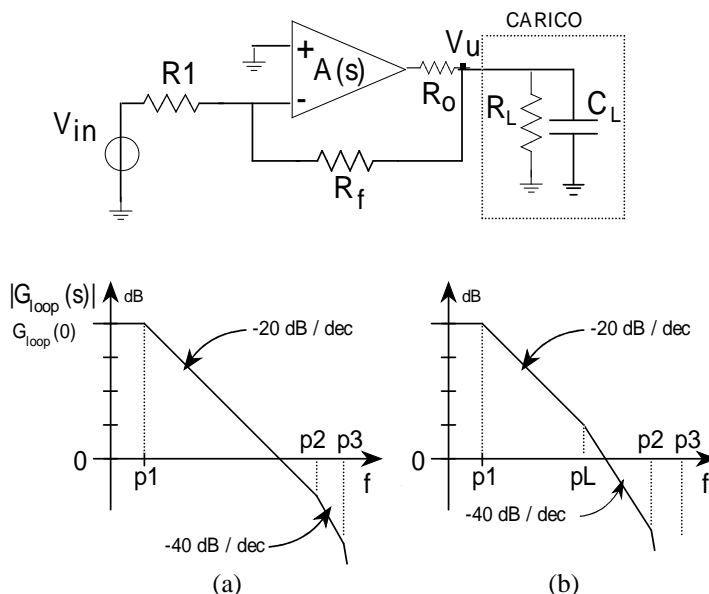


Fig. 12.12 Effetto di un carico capacitivo sulla stabilità di un circuito reazionato: (a) comportamento del guadagno di anello del circuito senza carico; (b) effetto di un carico che introduce un polo ad una frequenza $f_L < f_2$.

Un altro intervento che riduce l'effetto sulla stabilità della capacità di carico è quello di aggiungere una piccola resistenza R_s in serie tra il circuito ed il carico, come mostrato nella Fig.8.13. Essa "isola" il carico dall'anello e rende quest'ultimo meno influenzato da C_L . Spesso sono sufficienti valori di resistenza di poche centinaia di Ohm. Naturalmente questo intervento attua una partizione tra l'amplificatore ed il carico per cui il guadagno di tensione tra il generatore sorgente ed il carico viene diminuito e la sua banda complessiva ridotta.

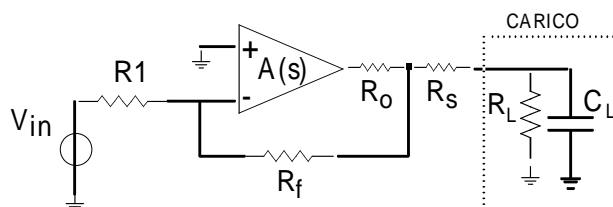


Fig. 12.13 Introduzione della resistenza R_s per ridurre la "visibilità" del carico da parte dell'anello di reazione del circuito.

12.8.2 Effetto di un carico capacitivo in ingresso

Considerazioni analoghe alle precedenti valgono quando si hanno carichi capacitivi in ingresso. Si prenda ad esempio il circuito passa alto della Fig.8.14a e si ponga attenzione alla capacità C_x esistente tra i morsetti dell'operazionale, eventualmente involontariamente aumentata per poca cura nel montaggio. Apparentemente la presenza della capacità C_x non è di alcun rilievo perchè essa è connessa ad un nodo di terra virtuale e quindi non interviene nel trasferimento ideale. La sua presenza ha invece effetto sulla stabilità del circuito perchè la combinazione delle resistenze R_f ed R_1 con C_i e C_x determina un polo aggiuntivo f_L nel $G_{loop}(s)$. Esso non dà effetti significativi fintanto che $f_L > f_2$ (nel caso di circuito con $G_{loop}(s)$ come quello della Fig.8.12a), mentre può introdurre instabilità quando $f_L < f_2$.

Un modo per risolvere il problema è di compensare l'effetto di C_i e C_x aggiungendo una capacità C_f in parallelo a R_f di valore tale che $R_f C_f = R_1 (C_i + C_x)$ in modo da realizzare lungo l'anello una partizione compensata. In altre parole, l'aggiunta di C_f apporta uno zero che esattamente compensa il polo introdotto da $(C_i + C_x)$.

Questo ultimo esempio ci consente di introdurre un'ulteriore precisazione circa gli effetti delle compensazioni. Se l'anello è compensato introducendo reti o elementi opportuni nel blocco di andata, il trasferimento ideale del sistema resta inalterato. Detto in altri termini, si modifica la banda del circuito ma là dove il guadagno d'anello è sufficientemente alto il trasferimento resta pari a $1/F(s)$. Se invece si interviene sul blocco di reazione, si modifica anche $F(s)$ e non è detto che ciò sia accettabile. Per esempio nel caso di Fig.8.16b la funzione di trasferimento $T(s)$ cambia drasticamente andamento a causa dell'introduzione di C_f .

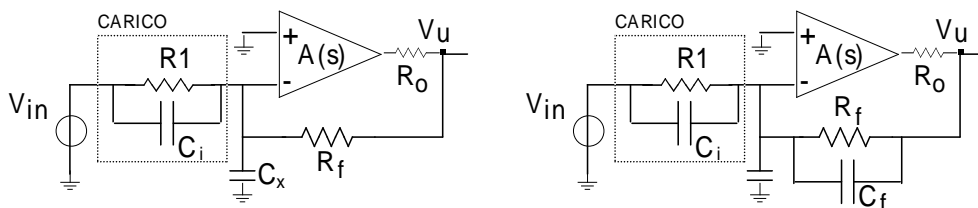


Fig. 12.14 Esempio di un carico di ingresso con componente capacitiva (a) e possibile intervento circuitale per ridurne gli effetti sulla stabilità del circuito reazionato (b).

12.9 INSTABILITÀ UTILI : L'OSCILLATORE SINUSOIDALE

Commentando la Fig.8.6 si è visto come, aumentando opportunamente il valore di γ (cioè di $G_{\text{loop}}(0)$) fino al valore γ_m , i poli del circuito reazionato diventano immaginari puri, con coefficiente ϖ pari al valore dell'intersezione del luogo delle radici con l'asse delle ordinate. Un circuito con due poli immaginari puri reagisce ad una qualunque sollecitazione in ingresso (anche solo il rumore sempre presente in un circuito) con una oscillazione sinusoidale pura di frequenza pari a $\varpi=2\pi f_{\text{osc}}$. L'oscillazione sinusoidale si instaura alla pulsazione ϖ perchè solo a questa pulsazione il guadagno di anello è esattamente pari a 1 e lo sfasamento totale pari a 360° . Queste due condizioni, necessarie per sostenere una oscillazione in un amplificatore reazionato, sono dette **Criterio di Barkhausen**. La situazione descritta è sfruttata tutte le volte che si desidera realizzare un oscillatore armonico a componenti elettronici.

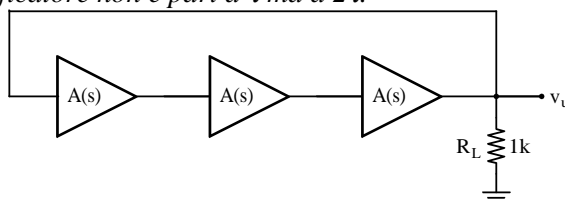
Poichè alla frequenza di oscillazione il guadagno dell'anello è unitario, nessuna delle proprietà stabilizzanti dei circuiti reazionati è più presente. In particolare la stabilità del guadagno del circuito (vedi Eq.(8.1)) è di nuovo affidata unicamente allo stadio di andata e non più stabilizzata dalla rete di reazione. In un oscillatore reale l'ampiezza dell'oscillazione è addirittura fissata dalla saturazione dell'amplificatore stesso.

12.14

Si consideri il circuito schematizzato nella figura seguente, costituito da tre amplificatori di tensione invertenti ed ideali, collegati in cascata e reazionati. Si supponga che la funzione di trasferimento di ciascun amplificatore sia del tipo:

$$A(s) = -\frac{A_0}{1 + s\tau} \quad \text{con } \tau = 27.6 \mu\text{s}.$$

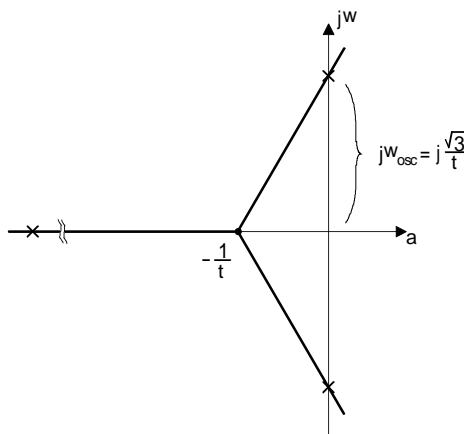
- Disegnare il luogo delle radici.
- Determinare il valore del guadagno di tensione A_0 dell'amplificatore per cui la rete presenta una coppia di poli coniugati immaginari puri e la corrispondente frequenza di oscillazione del circuito.
- Determinare come si modifica il luogo delle radici, e quindi come varia il guadagno di tensione necessario per avere l'oscillazione e la frequenza di oscillazione stessa, se la costante di tempo del polo del primo amplificatore non è pari a τ ma a 2τ .



(a) - Il guadagno di anello del circuito è

$$G_{\text{loop}}(s) = -\frac{A_0^3}{(1 + s\tau)^3},$$

a cui corrisponde il luogo delle radici riportato nella figura seguente:



Aumentando l'amplificazione A_0 , i poli del circuito migrano lungo i tre rami. Un polo rimane reale negativo, con costante di tempo breve. Questo polo si

manifesta solo all'accensione dell'oscillatore, contribuendo unicamente al transitorio iniziale. Gli altri due poli si muovono verso l'asse immaginario.

(b) - La pulsazione di oscillazione corrisponde all'ordinata dei punti in cui il luogo interseca l'asse immaginario. Semplici considerazioni geometriche portano ad ottenere

$$\omega_{osc} = \frac{1}{\tau} \cdot \operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{\tau}.$$

Se $\tau=27.6\mu\text{s}$, la frequenza di oscillazione è $f_{osc}=10\text{kHz}$.

Il guadagno in continua A_0 degli amplificatori, necessario per portare i due poli sull'asse immaginario, si ottiene imponendo che sia soddisfatta la relazione $1-G_{loop}(s)=0$ per $s=j\omega_{osc}$, ovvero

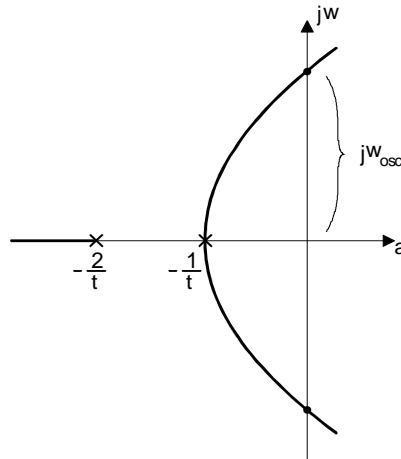
$$|G_{loop}(s)| = \frac{|1/\tau|^3}{|s+1/\tau|^3} \cdot A_0^3 = 1$$

Con riferimento alla costruzione grafica della figura si ottiene $A_0^3=8$, e quindi $A_0=2$. È facile verificare che alla frequenza di oscillazione ogni singolo amplificatore amplifica $A_0/2$

$$|T(j\omega_{osc})| = \frac{A_0}{|1+j\frac{\sqrt{3}}{\tau}\tau|} = \frac{A_0}{2}$$

e che quindi il valore $A_0^3=8$ fa sì che il segnale sinusoidale alla frequenza di oscillazione non subisca attenuazioni nel percorrere tutto l'anello, ma solo uno sfasamento di 360° (180° dovuto al segno della reazione e 180° dovuto ai tre poli).

(c) - Il nuovo luogo delle radici è riportato nella figura seguente.



Applicando la relazione (8.11) si determina l'ascissa del punto in cui i due asintoti si intersecano sull'asse reale, $s = -4/3\tau$. Inoltre, se il luogo deve partire dai poli per procedere verso gli zeri all'infinito, due rami non possono che lasciare l'asse reale in corrispondenza della posizione dei due poli coincidenti. Tuttavia se si utilizza la relazione (8.12) si trova un punto di diramazione per $s = -5/3\tau$. Questa soluzione non è accettabile perché il punto $s = -5/3\tau$ non appartiene ad un tratto di asse reale che fa parte del luogo. La soluzione $p_d = -1/\tau$ non è stata trovata perché se il punto di diramazione coincide con la posizione di qualche polo un denominatore della (8.12) si annulla. Quindi la (8.12) non consente di ottenere queste soluzioni singolari. Per quanto riguarda la nuova pulsazione di oscillazione, ω'_{osc} , essa deve soddisfare la condizione

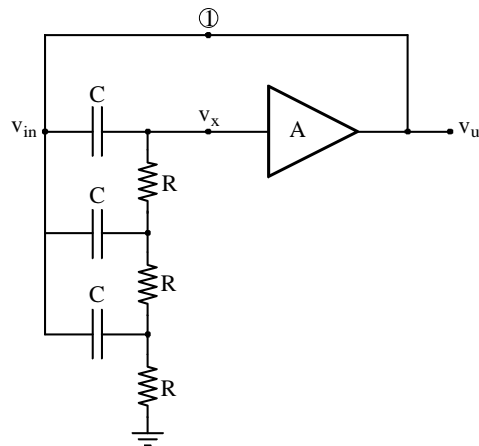
$$2\arctg(\omega'_{osc}\tau) + \arctg(\omega'_{osc}\tau/2) = \pi$$

Si ottiene così $\omega'_{osc} = 2.23/\tau$. L'amplificazione in continua per garantire l'oscillazione deve essere pari non ad 8 ma ad 8.94.

12.15

Si consideri il circuito oscillante riportato nella figura accanto in cui, a valle della rete RC, si ha un disaccoppiatore ideale di tensione con trasferimento $A=0.98$, indipendente dalla frequenza.

Determinare la pulsazione di oscillazione del sistema.



Rompendo l'anello di reazione si verifica che il circuito è reazionato positivamente e si valuta il guadagno d'anello. Disegnando l'andamento dell'ampiezza e della fase del guadagno d'anello si trova che in corrispondenza della pulsazione $\omega_{osc} = \sqrt{6}/RC$ il guadagno d'anello è pari a 1.014 e la fase zero. Quindi il circuito oscilla.

Si noti come in questo circuito si utilizzi una rete passiva per avere una amplificazione di tensione. Infatti, in corrispondenza della suddetta pulsazione, il trasferimento v_x/v_{in} ha modulo pari a 30/29. Una rete passiva non può operare ovviamente una amplificazione di potenza elettrica, ma non c'è alcuna ragione di principio perché non possa determinare una amplificazione di tensione.

12.10 IL RITARDO DI PROPAGAZIONE DEL SEGNALE LUNGO L'ANELLO

Nell'illustrazione del funzionamento dei circuiti reazionati si è utilizzata una *descrizione propagativa*. Si è immaginato che il segnale applicato al circuito si trasmetta all'uscita attraverso il blocco d'andata e che ritorni quindi, attraverso il ramo di reazione, a sottrarsi all'ingresso nel nodo sommatore. Tuttavia, tutti i circuiti analizzati fino ad ora sono stati trattati a variabili concentrate e quindi il ritardo di propagazione lungo i collegamenti è stato sempre trascurato. Si è implicitamente supposto che il segnale percorra l'anello in un tempo infinitesimo. Anche per quanto riguarda il funzionamento degli elementi attivi, si è sempre fatto riferimento ai modelli a parametri concentrati introdotti nei Capitoli 3 e 6, trascurando i ritardi di propagazione finiti che il segnale subisce nell'attraversare i componenti.

In relazione ai circuiti reazionati si deve considerare che un ritardo di propagazione finito del segnale lungo l'anello di reazione determina un contributo addizionale allo sfasamento e quindi potrebbe rendere problematica la stabilità del circuito. Ricordando che ad un ritardo τ corrisponde l'operatore $e^{-s\tau}$ nel dominio della trasformata di Laplace, l'angolo di sfasamento θ , per ogni frequenza ω , è dato da:

$$e^{-s\tau} = e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} \quad \rightarrow \quad \vartheta = \omega\tau . \quad (8.14)$$

Il termine $e^{-\alpha\tau}$ rende conto soltanto di un'eventuale attenuazione presente lungo l'anello. Le (8.14) mettono in evidenza come, per una data pulsazione ω del segnale, lo sfasamento aumenta all'aumentare del tempo di propagazione τ (e quindi della lunghezza del percorso dell'anello). Il tempo τ è dell'ordine della lunghezza del percorso divisa per la velocità della luce nel dielettrico contiguo ai conduttori. Fissate le dimensioni del circuito, lo sfasamento aumenta all'aumentare della frequenza del segnale. Di questo sfasamento se ne può tener conto direttamente in fase di valutazione della fase del guadagno d'anello sommando il contributo $-\omega\tau$ alla fase determinata dai poli e dagli zeri

$$\varphi = \arg[\gamma] + \arg[j\omega - z_1] \dots - \arg[j\omega - p_1] - \omega\tau .$$

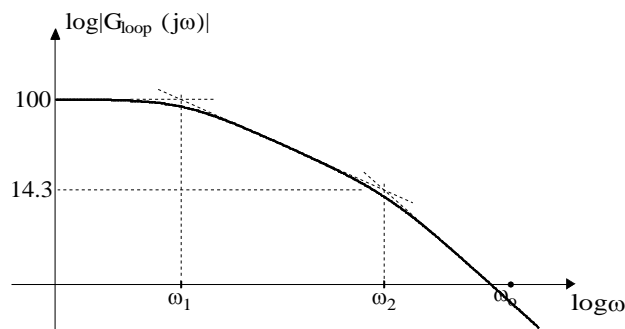
12.16 Si consideri un circuito reazionato con guadagno d'anello dato da:

$$G_{loop}(s) = \frac{G_{loop}(0)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

con $G_{loop}(0) = -100$, $\tau_1 = 70\text{ns}$ e $\tau_2 = 10\text{ns}$.

- Determinare il margine di fase trascurando i ritardi di propagazione.
- Assumendo una velocità di propagazione del segnale di circa 8ns/m , calcolare quale può essere la lunghezza massima dell'anello di reazione del circuito per evitare che il sistema oscilli.

(a) - In figura è riportato l'andamento del modulo del guadagno d'anello. Il primo polo interviene per una pulsazione $\omega_1 = 14.3\text{Mrad/s}$ ($f_1 = 2.3\text{MHz}$), il secondo per $\omega_2 = 100\text{Mrad/s}$ ($f_2 = 15.9\text{MHz}$).



Per pulsazioni comprese tra ω_1 ed ω_2 il prodotto guadagno·banda,

$|G_{loop}(\omega)| \cdot \omega$, è costante. Quindi il guadagno d'anello alla pulsazione ω_2 è pari a $|G_{loop}(\omega)| \cdot \omega_1 / \omega_2 = 14.3$. Invece per pulsazioni superiori ad ω_2 , il diagramma di

Bode ha una pendenza pari a -40dB/decade ed è il prodotto $|G_{loop}(\omega)| \cdot \omega^2$ ad essere costante. Quindi il valore della pulsazione ω_0 , per cui il guadagno d'anello attraversa l'asse a 0dB , è data da

$$\omega_0^2 = |G_{loop}(\omega_2)| \cdot \omega_2^2.$$

Così si ottiene $\omega_0 = 378\text{Mrad/s}$. Non considerando il contributo del ritardo di propagazione, la fase $\varphi(\omega_0)$ del guadagno d'anello è pari a 17° , ovvero a 0.297rad . Il margine di fase si annulla se il ritardo di propagazione, τ , è tale che $\omega_0 \tau = 0.297\text{rad}$. Si trova $\tau = 786\text{ps}$ e la corrispondente lunghezza dell'anello di reazione è 9.8cm . Si noti che se il sistema avesse poli a frequenza più alta, anche ω_0 sarebbe corrispondentemente più alta e le dimensioni massime del circuito diminuirebbero proporzionalmente. Ecco perché i circuiti che operano a

frequenze elevate devono essere realizzati con montaggi compatti o essere integrati sullo stesso substrato di materiale semiconduttore.

12.17 *Il primo circuito elettronico reazionato proposto da H. S. Black era costituito da vari stadi amplificatori in serie e da una rete di reazione. Dato l'uso delle valvole e delle tecniche di montaggio dell'epoca, l'amplificatore di andata occupava tutta una stanza e il ramo di reazione era lungo parecchi metri. Stimare la massima frequenza a cui H.S. Black poteva pensare di far funzionare il suo circuito.*

Supponendo che la lunghezza dell'intero anello di reazione fosse 10m, ed assumendo per la luce la velocità in aria, il ritardo di propagazione del segnale lungo l'anello era certamente maggiore di 33ns. La frequenza per cui questo ritardo corrisponde ad uno sfasamento di -180° è $f_0=16\text{MHz}$.