

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 1. CARICA ELETTRICA, FORZA DI COULOMB E CAMPO ELETTROSTATICO

#### Carica elettrica

La carica elettrica è espressione di una proprietà intrinseca della materia ed è la grandezza fisica responsabile delle interazioni elettriche. Le cariche elettriche possono essere positive (protoni) e negative (elettroni). I corpi in natura sono generalmente neutri, ovvero hanno lo stesso numero di cariche positive e negative; se un corpo è elettricamente carico può esserlo positivamente (mancanza di elettroni) o negativamente (eccesso di elettroni).

I corpi macroscopici si possono suddividere in isolanti, nei quali la carica elettronica non è libera di muoversi; conduttori, in cui gli elettroni (detti di conduzione) si possono muovere liberamente attraverso il corpo, e semiconduttori, in cui le cariche si possono muovere sotto determinate condizioni. I corpi isolanti si possono caricare elettricamente per strofinio (triboelettricità), acquistando o cedendo elettroni ad un altro corpo (a seconda della posizione relativa nella serie triboelettrica). I conduttori si possono caricare elettricamente per strofinio solo se opportunamente isolati dall'ambiente circostante.

La carica elettrica ha le seguenti proprietà, dedotte sulla base di evidenze sperimentali:

- (i) cariche dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono;
- (ii) la carica elettrica è quantizzata, ovvero i valori assunti dalla carica elettrica sono multipli interi di una quantità minima indivisibile, pari in modulo alla carica dell'elettrone (o del protone), indicata con  $e$  [quantizzazione della carica elettrica]. I modelli teorici e le evidenze sperimentali più recenti prevedono anche l'esistenza di particelle con carica frazionaria, i quark (con carica  $-1/3 e$  oppure  $+2/3 e$ ), che tuttavia non sono fino ad oggi mai stati osservati come particelle libere;
- (iii) la carica elettrica si conserva in un sistema isolato, il quale cioè non ha scambi di materia attraverso la frontiera o superficie che lo delimita [conservazione della carica elettrica];
- (iv) La carica elettrica è un invariante, cioè non dipende dal sistema di riferimento ovvero dallo stato di moto del corpo o della particella che possiede la carica [invarianza della carica elettrica].

L'unità di misura della carica elettrica nel sistema internazionale (SI) è il coulomb (C), che è definito in termini dell'unità di misura intensità di corrente elettrica. Quest'ultima rappresenta la grandezza primaria per la descrizione dei fenomeni elettromagnetici nel Sistema Internazionale (SI). Il coulomb è definito come la carica che attraversa in 1 secondo la sezione trasversale di un conduttore quando l'intensità di corrente elettrica in esso è pari a 1 ampère.

L'elettrone ha carica negativa data (in modulo) da:  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ .

La carica positiva del protone è pari, in modulo, a quella dell'elettrone.

#### Forza di Coulomb

Il modulo della forza  $F$  che si esercita tra due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  poste a distanza  $r$  nel vuoto è data dalla forza di Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove la costante  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$  è detta costante dielettrica del vuoto. Nella materia la forza elettrostatica tra cariche diminuisce ed  $\epsilon_0$  è sostituita dalla costante dielettrica (assoluta) del mezzo  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , dove  $\epsilon_r > 1$  è la costante dielettrica relativa (adimensionale) che dipende dal materiale.

La forza di Coulomb tra due cariche puntiformi ha natura vettoriale, agisce lungo la congiungente le due cariche, cioè è una forza centrale (e conservativa), è inversamente proporzionale alla loro distanza  $r$  ed è attrattiva se le cariche hanno segno diverso o repulsiva se hanno lo stesso segno. La forza che una carica  $q_1$  esercita su una carica  $q_2$ ,  $\vec{F}_{12}$ , è quindi data da:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

con  $\vec{u}_r$  versore diretto da  $q_1$  a  $q_2$ . Se in una regione di spazio sono presenti  $n$  cariche, vale il principio di sovrapposizione, per cui la forza  $\vec{F}_i$  agente sulla carica  $i$ -esima è pari alla somma vettoriale di tutte le forze dovute all'interazione coulombiana della carica  $i$ -esima con le  $(n-1)$  cariche restanti; la forza di Coulomb tra ciascuna coppia di cariche non è modificata dalla presenza di tutte le altre:

$$\vec{F}_i = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ki}^2} \vec{u}_{rki} \quad \text{con } k \neq i$$

con  $r_{ki}$  distanza tra  $q_k$  a  $q_i$  e  $\vec{u}_{rki}$  versore diretto da  $q_k$  a  $q_i$ .

### Campo elettrostatico

In ogni punto  $P$  dello spazio si può definire un campo elettrostatico  $\vec{E}(P)$  come la forza, dovuta a tutte le cariche (sorgenti) presenti, agente su una carica sonda  $q$  molto piccola (al limite, tendente a zero), divisa per la carica sonda stessa, ovvero la forza totale agente su una carica unitaria posta in  $P$ :

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

con  $r_i$  distanza tra  $q_i$  e  $q$  e  $\vec{u}_i$  versore diretto da  $q_i$  a  $q$ . Le cariche che generano il campo elettrostatico sono dette cariche sorgenti. Il campo elettrostatico prodotto da una singola carica puntiforme ha direzione radiale.

Anche per il campo elettrostatico vale il principio di sovrapposizione: il campo elettrostatico prodotto da un insieme di cariche è dato dalla somma vettoriale dei campi prodotti dalle singole cariche.

Nel caso di distribuzione continua di carica (sorgente), la sommatoria è sostituita da un integrale vettoriale esteso a tutta la distribuzione di carica:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}.$$

In questo caso  $\vec{u}$  è un il versore diretto dall'elemento di carica  $dq$  al punto  $P$  in cui si vuole calcolare il campo.

Per una distribuzione volumetrica di carica elettrica si ha che  $dq = \rho dV$  ( $\rho$  = densità volumetrica di carica, unità di misura  $C/m^3$ ;  $dV$  elemento infinitesimo di volume); per una distribuzione superficiale  $dq = \sigma dS$  ( $\sigma$  = densità superficiale di carica, unità di misura  $C/m^2$ ;  $dS$  elemento infinitesimo di superficie); per una distribuzione lineare  $dq = \lambda dl$  ( $\lambda$  = densità lineare di carica, unità di misura  $C/m$ ;  $dl$  elemento infinitesimo di lunghezza).

L'unità di misura del campo elettrico nel SI è Newton/Coulomb (N/C) [oppure Volt/metro (V/m)]. Le proprietà del campo elettrostatico sono descrivibili mediante una rappresentazione grafica, le linee di forza del campo elettrostatico, definite come quelle linee orientate tangenti in ogni punto al campo elettrostatico  $\vec{E}$ , il cui verso è concorde a quello del campo stesso. Esse hanno le seguenti proprietà:

- per ogni punto passa una sola linea di forza, ovvero le linee di forza non si intersecano mai;
- le linee di forza originano dalle cariche sorgenti positive e terminano su quelle negative; se al finito vi sono cariche di un solo segno, esse terminano all'infinito;
- le linee di forza si addensano ovvero sono più fitte dove il campo elettrostatico è più intenso (nello spazio tridimensionale il numero di linee per unità di superficie è proporzionale all'intensità del campo elettrostatico).

Il moto di una particella di massa  $m$  e carica  $q$  in un campo elettrostatico  $\vec{E}$  è descritto dalla seconda legge della dinamica di Newton, essendo nota in ogni punto la forza che agisce sulla particella  $\vec{F} = q\vec{E}$ :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q\vec{E}}{m}.$$

Nella precedente equazione  $\vec{r}$  è il vettore posizione che congiunge l'origine degli assi alla particella. Nel caso di campo elettrostatico uniforme l'accelerazione è costante e il moto ha almeno una componente uniformemente accelerata.



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 2. INTERAZIONI FONDAMENTALI, STRUTTURA ELETTRICA DELLA MATERIA

In natura esistono quattro tipi di interazioni fondamentali:

- Interazione gravitazionale, responsabile di gran parte dei fenomeni che governano su scala macroscopica l'universo, come il moto dei pianeti e delle stelle. Il raggio d'azione  $r$  è infinito e la dipendenza varia come  $1/r^2$ . La forza di interazione gravitazionale è espressa dalla legge di Newton:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La precedente espressione rappresenta il modulo della forza gravitazionale, che è diretta lungo la congiungente i centri di massa ed è sempre attrattiva;  $m_1, m_2$  sono le masse dei corpi,  $r$  la distanza tra i centri di massa,  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  la costante universale di gravitazione.

- Interazione elettromagnetica, responsabile dei fenomeni elettromagnetici, chimici e biologici. La struttura e le proprietà della materia dipendono in gran parte da essa. Il raggio d'azione  $r$  è infinito e la dipendenza varia come  $1/r^2$ . La forza di interazione elettrica (in modulo) è espressa dalla legge di Coulomb:

$$F_e = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

con  $q_1, q_2$  cariche elettriche puntiformi,  $r$  distanza tra le cariche elettriche,  $K = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$  costante di Coulomb. La forza di Coulomb è diretta lungo la congiungente le cariche elettriche e può essere sia attrattiva (cariche di segno opposto) che repulsiva (cariche dello stesso segno). Si rileva che ambedue le interazioni gravitazionale ed elettrica hanno uguale forma funzionale e, in particolare, uguale dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza.

- Interazione nucleare debole, responsabile del decadimento radioattivo beta del nucleo e di altri processi di decadimento delle particelle elementari. Il suo raggio d'azione è straordinariamente piccolo, dell'ordine di  $10^{-18} \text{ m}$ .

- Interazione nucleare forte, responsabile della struttura del nucleo atomico. Tale forza agisce solo a distanze piccolissime (dell'ordine di  $10^{-15} \text{ m}$ ) e si esercita tra nucleoni (neutroni e protoni) per formare il nucleo dell'atomo e tra quark per formare gli adroni (tra cui neutrone e protone).

La materia che ci circonda è formata da particelle elementari, che possono essere suddivise in leptoni (particelle non soggette a interazione nucleare forte) e adroni (particelle soggette a interazione nucleare forte):

- i leptoni sono sei, di cui stabili solo due, l'elettrone e il neutrino elettronico.
- gli adroni costituiscono una vasta classe di particelle, tutte formate da combinazioni di particelle elementari dette quark (ne esistono di 6 tipi diversi). Tra gli adroni stabili vi sono il protone (carica  $+e$ ), formato da due quark *up* (carica  $+2/3 e$ ) e un quark *down* (carica  $-1/3 e$ ), e il neutrone (carica nulla), formato da un quark *up* e due quark *down*.

La materia stabile è essenzialmente costituita da:

- quark, che si aggregano per formare protoni (massa  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$  kg; carica  $+e = 1.6 \times 10^{-19}$  C) e neutroni (massa  $m_n \sim 1.67 \times 10^{-27}$  kg; carica nulla)
- elettroni (massa  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  kg, carica  $-e$ ).

I tre costituenti stabili (protoni, neutroni, elettroni) si aggregano per formare gli atomi. Un atomo è costituito da un nucleo atomico, formato da protoni e neutroni tra cui si esercita l'interazione nucleare forte. Attorno al nucleo orbitano un certo numero di elettroni, eguale al numero dei protoni, sotto l'azione della interazione elettromagnetica (attrattiva) tra protoni ed elettroni. L'atomo è elettricamente neutro. La struttura degli orbitali atomici è stabilita dalle leggi della meccanica quantistica.

L'atomo di ciascun elemento è individuato da due numeri:

- numero atomico  $Z$ , pari al numero di protoni (o di elettroni);
- numero di massa  $A = Z + N$ , somma del numero di protoni  $Z$  e di neutroni  $N$  che formano il nucleo.

Le proprietà di massa di un atomo sono determinate da  $A$ , in quanto il 99% della massa di un atomo è concentrata nel nucleo (la massa dell'elettrone è 1840 volte più piccola di quella del protone e del neutrone). Il raggio del nucleo atomico è dato da  $R \sim R_0 A^{1/3}$  con  $R_0 = 1.2 \times 10^{-15}$  m. La dimensione degli atomi è data dal raggio medio degli orbitali elettronici, enormemente più grande del raggio nucleare, che individua lo spazio nel quale si muovono gli elettroni, dell'ordine di  $R_a = 10^{-10}$  m. Di fatto la materia è in massima parte "vuota".

Nella materia gli atomi possono essere isolati (gas atomici), aggregati in molecole (gas molecolari, liquidi, solidi), o formare strutture cristalline (solidi). Le proprietà elettriche della materia dipendono dal modo in cui gli atomi si aggregano.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 3. FLUSSO DEL CAMPO ELETROSTATICO E LEGGE DI GAUSS

#### Flusso del campo eletrostatico

La legge di Gauss per l'elettrostatica è una delle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo (costituisce una delle quattro equazioni di Maxwell) ed è uno strumento molto utile per il calcolo di campi eletrostatici prodotti da distribuzioni continue di carica in particolari condizioni di simmetria (sferica, cilindrica, piana).

Per enunciare la legge di Gauss è necessario introdurre il concetto di flusso di un campo vettoriale (in questo caso, il campo eletrostatico).

Il flusso elementare del campo eletrostatico  $\vec{E}$  (più in generale, di qualsiasi campo vettoriale) attraverso un elemento di superficie orientata  $\vec{u}_n d\Sigma$  è definito come il prodotto scalare del campo per l'elemento di superficie ( $\vec{u}_n$  è il versore normale all'elemento di superficie):

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$

Il flusso del campo  $\vec{E}$  attraverso una superficie qualsiasi  $\Sigma$  è dato dall'integrale del flusso elementare esteso a tutta la superficie:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$

Se la superficie è piana e il campo eletrostatico è uniforme nello spazio, il flusso del campo eletrostatico è pari al semplice prodotto scalare del campo per la superficie.

In generale, il flusso del campo elettrico è proporzionale al numero di linee di forza che attraversano la superficie. Fissato il campo, tanto più la superficie è orientata in modo da intercettare le sue linee di forza, tanto maggiore è il flusso. Il flusso massimo si ha con l'elemento di superficie ortogonale al campo, ovvero con le linee di forza del campo parallele alla sua normale.

Se la superficie è chiusa, per convenzione si assume il versore normale  $\vec{u}_n$  uscente in ogni punto dalla superficie. In tal caso il flusso attraverso la superficie chiusa rappresenta la somma algebrica del flusso uscente positivo (campo  $\vec{E}$  concorde con la normale) ed entrante (campo  $\vec{E}$  discorde con la normale).

#### La legge di Gauss

La legge di Gauss si può dimostrare rigorosamente a partire dalla espressione della forza di Coulomb prodotta da una carica puntiforme ed è ad essa equivalente. In tale dimostrazione gioca un ruolo essenziale il fatto che la forza di Coulomb dipenda esattamente dall'inverso del quadrato della distanza dalla carica che la genera. La legge di Gauss afferma che il flusso del campo eletrostatico  $\vec{E}$  attraverso una superficie chiusa prodotto da una distribuzione qualsiasi di carica è pari alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie  $\sum q_{\text{int}}$  diviso per  $\epsilon_0$ :

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

La superficie chiusa attraverso la quale si calcola il flusso del campo elettrostatico prende anche il nome di superficie gaussiana. Le superfici gaussiane sono entità geometriche, e non coincidono in generale con superfici fisiche di un oggetto materiale. Nei materiali conduttori in condizioni statiche il campo elettrostatico deve essere nullo (altrimenti le cariche si muoverebbero). Essendo il campo nullo ovunque all'interno, per la legge di Gauss è nullo il flusso del campo calcolato attraverso qualsiasi superficie gaussiana interna al conduttore, è di conseguenza nulla la carica interna alla superficie gaussiana e pertanto le cariche in eccesso si possono distribuire solo sulla superficie esterna del conduttore.

E' possibile esprimere la legge di Gauss anche in forma locale, sia calcolando il flusso del campo  $\vec{E}$  attraverso un volumetto elementare contenente una densità di carica  $\rho$ , sia utilizzando il teorema della divergenza. In base a tale teorema si può scrivere:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{n} d\Sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{E} d\tau$$

essendo  $\tau$  il volume racchiuso dalla superficie chiusa  $\Sigma$  attraverso la quale è calcolato il flusso.

La legge di Gauss, esprimendo la carica interna termini di densità di carica  $\rho$ , è data da:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau .$$

Uguagliando le due relazioni si ottiene la legge di Gauss in forma locale:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La legge di Gauss in forma locale esprime formalmente che le sorgenti del campo elettrostatico, da cui escono o in cui convergono le linee di forza, sono le cariche elettriche.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 4. POTENZIALE ELETTROSTATICO

Il campo elettrostatico è un campo conservativo e pertanto il lavoro compiuto dalle forze del campo non dipende dal percorso. Questa affermazione si può dimostrare a partire dal campo elettrostatico  $\vec{E}_Q$  generato da una carica puntiforme  $Q$  e calcolando il lavoro del campo per spostare da  $A$  a  $B$  una carica unitaria lungo una qualsiasi linea  $\gamma$ , che risulta dato da:

$$\int_A^B \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

dove  $r$  rappresenta la distanza tra la carica  $Q$  sorgente del campo ed il punto generico. Tale integrale non dipende dalla linea  $\gamma$ , ma solo dal punto di partenza  $A$  e da quello di arrivo  $B$ . Si può pertanto introdurre una funzione scalare del punto, detta potenziale (generato da  $Q$ ), data da:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C$$

con  $C$  costante arbitraria. Si ottiene pertanto che:

$$\int_A^B \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

La funzione potenziale è definita a meno di una costante. La grandezza fisicamente significativa è la differenza di potenziale tra due punti nello spazio. Scelto il punto  $A$  come riferimento per il potenziale, in qualsiasi altro punto  $P$  distante  $r$  dalla carica sorgente, il potenziale è dato da:

$$V(r) = - \int_A^P \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} + V_A$$

Se la sorgente del campo è tutta al finito, è opportuno assumere pari a zero il potenziale all'infinito. Il potenziale nel generico punto  $P(r)$  diventa pari a:

$$V_P(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}_Q \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Si può estendere tale relazione al caso più generale di una qualsiasi distribuzione discreta o continua di cariche sulla base del principio di sovrapposizione. Ad es., nel caso discreto si ha:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

con  $V_A = \sum_i V_{i,A}$  e  $V_B = \sum_i V_{i,B}$ .

Se tutte le sorgenti del campo sono al finito, si può generalizzare la relazione prima ottenuta per il campo generato da una singola carica al caso del potenziale generato da una generica distribuzione di cariche. Il potenziale nel punto  $P(r)$  è dato da:

$$V_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

nel caso di sorgenti discrete  $Q_i$ , ed è pari a:

$$V_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

nel caso di una distribuzione continua di carica con densità  $\rho$  nel volume  $\tau$ . Il potenziale all'infinito è assunto pari a zero e  $|\vec{r} - \vec{r}_i|$  e  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  sono le distanze della singola sorgente rispettivamente discreta o continua dal punto  $P(r)$  in cui calcolare il potenziale.

La differenza di potenziale tra due punti A e B è pari al lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per spostare in modo quasi-statico una carica unitaria da A a B, cambiato di segno; alternativamente, si può dire che la differenza di potenziale è anche uguale al lavoro delle forze esterne per spostare in modo quasi-statico da A a B una carica unitaria nel campo elettrostatico. Poiché lo spostamento della carica nel campo elettrostatico avviene in modo quasi-statico, in ogni punto la forza elettrostatica è uguale e contraria alla forza esterna,  $q\vec{E} = -\vec{F}_{ext}$ . Conseguentemente il lavoro totale di tutte le forze agenti sulla carica è nullo:

$$L_{AB} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_A - V_B = \frac{L^{ext}}{q}$$

L'unità di misura del potenziale è il Volt (V), definito come Volt=Joule/Coulomb.

Il campo elettrostatico è conservativo, ed è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- Esiste una funzione potenziale  $V$  la cui variazione (cambiata di segno)  $V_A - V_B$  è pari al lavoro compiuto dal campo per spostare la carica unitaria da A a B.
  - Il lavoro compiuto dalle forze del campo non dipende dal percorso.
  - Il lavoro compiuto dalle forze del campo lungo un cammino chiuso è nullo ( $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ).
  - Il lavoro elementare su una carica unitaria  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$  è un differenziale esatto, ovvero rappresenta il differenziale della funzione potenziale.
- I precedenti enunciati sono equivalenti, ovvero da ciascuno di essi è possibile ricavare tutti gli altri.

Il potenziale generato nello spazio nel punto P da una carica puntiforme  $q$  è dato da:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

dove  $r$  è la distanza di P dalla carica  $q$ .

Un dipolo è costituito da due cariche uguali in modulo e opposte in segno,  $+q$  e  $-q$ , separate da una piccola distanza  $d$ . Per tale coppia di cariche si definisce il vettore momento di dipolo  $\vec{p}$  dato da:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

con  $\vec{d}$  vettore congiungente le due cariche diretto dalla carica negativa verso quella positiva.

Il potenziale generato nello spazio nel punto P (lontano dalle cariche) da un dipolo elettrico è dato da:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

dove  $r \gg d$  è la distanza di P dal punto O sull'asse del dipolo equidistante dalle due cariche (baricentro delle due cariche) e  $\vec{u}_r$  il versore diretto da O verso P.

In generale, si può sempre esprimere il potenziale generato da un sistema di cariche discreto o continuo in P (lontano dalla distribuzione) come sviluppo in serie di multipoli:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right)$$

con  $r$  distanza del punto P dal baricentro del sistema di cariche. Il primo termine,  $K_0$ , è pari alla carica netta totale (termine di monopolio); il secondo termine  $K_1$  è il termine di dipolo elettrico; il terzo termine  $K_2$  è quello di quadrupolo elettrico. Da osservare che i termini successivi al primo diminuiscono con potenze crescenti dell'inverso della distanza.



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 5. ENERGIA POTENZIALE ELETROSTATICA

La variazione di energia potenziale elettrostatica è definita come il lavoro fatto dalle forze del campo elettrostatico (generato da una carica sorgente o da una distribuzione di cariche sorgenti) per spostare una carica  $q$  dal punto di partenza A al punto di arrivo B, cambiato di segno; alternativamente, può essere definita come il lavoro fatto da una forza esterna (uguale ed opposta a quella del campo elettrostatico) per spostare la carica  $q$  nel campo elettrostatico dal punto A al punto B. Rifacendosi alla definizione di differenza di potenziale (lavoro fatto delle forze esterne per spostare la carica unitaria in un campo elettrostatico da A a B), risulta:

$$\int_A^B \delta L^{ext} = L_{AB}^{ext} = q(V_B - V_A) = (U_E)_A - (U_E)_B.$$

Si definisce l'energia potenziale elettrostatica come

$$U_E = qV.$$

L'energia potenziale elettrostatica (configurazionale) di un sistema di cariche si determina sommando il lavoro fatto dalle forze esterne per costruire la distribuzione, portando dall'infinito (potenziale nullo) ciascuna carica nella sua posizione finale.

Si trova che:

$$U_E = L^{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(\vec{r}_i)$$

dove  $V_i(\vec{r}_i)$  è il potenziale prodotto da tutte le cariche ad esclusione della i-esima. Estendo al caso di una distribuzione continua di carica si ottiene:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') d\tau.$$

Nel caso di corpi conduttori, poiché il potenziale  $V$  è costante in tutto il conduttore, si può estrarre dall'argomento dell'integrale, che diventa uguale alla carica totale sul conduttore, ottenendo:

$$U_E = \frac{1}{2} VQ$$

dove  $V$  è il potenziale (costante) e  $Q$  la carica totale sul conduttore

Per una particella con carica  $q$  libera di muoversi nel campo elettrostatico  $\vec{E}$  (ovvero in assenza di forze esterne) si può scrivere, per il teorema dell'energia cinetica o delle forze vive:

$$\delta L^{tot} = \delta E_k.$$

Essendo  $\delta L^{tot} = q\vec{E} \cdot \vec{dl} = -qdV = -dU_E$ , risulta:

$$-dU_E = \delta E_k \Rightarrow \delta(U_E + E_k) = 0 \Rightarrow U_E + E_k = \text{costante}.$$

Le somma dell'energia potenziale elettrostatica e di quella cinetica di una particella carica libera di muoversi in un campo elettrostatico si conserva.

Per una particella che si muove nel campo elettrostatico si conserva la somma di energia potenziale e cinetica, ovvero si conserva l'energia totale della particella. Per questo motivo il campo elettrostatico è detto conservativo. Una particella con carica positiva in un campo elettrostatico si muove da punti a potenziale maggiore verso punti a potenziale minore; se la carica è negativa, si muove da punti a potenziale minore a punti a potenziale maggiore.

L'energia cinetica acquisita da una carica che si muove liberamente attraverso la differenza di potenziale  $\Delta V$  è pari a  $q\Delta V$ . Se la carica è quella dell'elettrone che si muove attraverso la differenza di potenziale di 1 V, l'energia acquisita è pari a 1 elettronvolt (eV), una unità di misura dell'energia molto usata in fisica atomica e nucleare (anche se non appartiene al sistema internazionale):

$$1 e \times 1 V = 1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Joule.}$$

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 6. RELAZIONI TRA CAMPO ELETROSTATICO E POTENZIALE

Esistono importanti relazioni che legano localmente il campo elettrostatico al potenziale.

1) Il campo elettrostatico è pari al gradiente del potenziale cambiato di segno. Dalla relazione:  $\vec{E} \cdot \vec{dl} = -dV$ , esprimendo il campo elettrostatico in coordinate cartesiane e la variazione infinitesima di potenziale in termini di differenziale totale della funzione potenziale  $V=V(x,y,z)$ , si ottiene:

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

da cui si deduce che le tre componenti cartesiane del campo elettrostatico sono date dalle derivate parziali del potenziale nelle direzioni degli assi  $x, y, z$ :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ricordando che le componenti cartesiane dell'operatore gradiente sono date dalle derivate parziali rispetto ad  $x, y, e z$ , ovvero  $\text{grad } V \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ , si deduce che il campo elettrostatico è uguale al gradiente del potenziale, cambiato di segno (relazione locale tra campo e potenziale):

$$\vec{E} = -\text{grad } V.$$

Il campo elettrostatico è quindi legato alla derivata direzionale del potenziale e la sua direzione è quella di massimo accrescimento della funzione potenziale, con verso opposto (da potenziale più alto a potenziale più basso).

2) Una superficie nello spazio sulla quale il potenziale è costante, data dall'equazione  $V = \text{cost}$ , è detta superficie equipotenziale. L'orientazione nello spazio della terna cartesiana di riferimento è arbitraria. La componente del campo elettrostatico lungo una qualsiasi direzione  $l$  è pertanto data dalla derivata parziale del potenziale lungo tale direzione, cioè è pari alla derivata direzionale  $E_l = -\frac{\partial V}{\partial l}$ . Preso un punto generico  $P$  su una superficie equipotenziale, per ogni spostamento  $dl$  arbitrario a partire da  $P$  sulla superficie equipotenziale, essendo  $V$  costante, risulta:

$$E_l = -\frac{\partial V}{\partial l} = 0$$

Il campo elettrostatico è quindi sempre ortogonale a qualsiasi superficie equipotenziale, non avendo componenti  $E_l$  che giacciono sulla superficie equipotenziale.

3) Il campo elettrostatico è irrotazionale (ha rotore nullo). Questa relazione locale (equivalente alla relazione integrale per cui la circuitazione del campo lungo una linea chiusa è nulla) deriva da una nota identità vettoriale  $\text{rot} (\text{grad } f) \equiv 0$  (che si può verificare esprimendo gli operatori in coordinate cartesiane e utilizzando il t. di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde parziali miste). Si ottiene quindi che:

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot} (-\text{grad } V) = 0.$$

4) Combinando la legge di Gauss in forma locale con la relazione che lega campo elettrostatico e potenziale si ottiene una relazione che lega il potenziale alla densità di carica  $\rho$  (x,y,z), detta equazione di Poisson:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dove si è introdotto l'operatore nabla ponendo  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

La soluzione dell'equazione di Poisson, se la distribuzione di carica è tutta al finito, è nota ed è data da  $V(r) = V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau$ .

Se ci sono cariche all'infinito, per trovare il potenziale è invece necessario integrare direttamente l'equazione di Poisson con le opportune condizioni al contorno.

5) Nello spazio vuoto, in assenza di cariche,  $\rho=0$  e l'equazione di Poisson si trasforma nella equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

L'equazione di Laplace è particolarmente importante in elettrostatica quando non si conoscono le posizioni o la distribuzione delle cariche e non si può quindi usare l'equazione di Poisson. Per ricavare il potenziale ovunque in una regione di spazio priva di cariche si integra l'equazione di Laplace utilizzando le condizioni al contorno assegnate (problema di Dirichlet se è assegnato il potenziale sulla superficie di contorno; problema di Neumann se è assegnata la derivata normale del potenziale sulla superficie di contorno). Le soluzioni dell'equazione di Laplace (dette funzioni armoniche) non hanno massimi o minimi forti; questo vuol dire che nello spazio vuoto non esistono posizioni di equilibrio stabile per una carica elettrica.

6) Condizioni di raccordo per il campo elettrostatico.

Si dimostra che, in presenza di uno strato superficiale di carica (ad es., alla superficie di un conduttore), la componente del campo elettrostatico normale alla superficie di carica presenta una discontinuità nell'attraversare lo strato (applicando la legge di Gauss), mentre la componente tangente allo strato di carica si conserva (considerando la irrotationalità del campo  $\vec{E}$ ). Pertanto:

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \quad E_{t2} = E_{t1}.$$

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 7. CAMPO ELETTROSTATICO NEI CONDUTTORI E INDUZIONE ELETTROSTATICA

I conduttori consentono alle cariche elettriche di spostarsi al loro interno. Una importante classe di conduttori sono i metalli, dove le cariche - gli elettroni di conduzione - sono libere di muoversi ma restano confinate all'interno del conduttore a causa della barriera di potenziale presente alla superficie del metallo. Vi sono anche conduttori costituiti da liquidi in cui le cariche libere di muoversi sono ioni negativi e positivi, e da gas, in cui le cariche libere sono prevalentemente elettroni e ioni positivi.

In condizioni di equilibrio elettrostatico, il campo  $\vec{E}$  all'interno di un conduttore metallico è ovunque nullo. Se così non fosse, le cariche presenti (elettroni) si muoverebbero sotto l'azione delle forze del campo, contrariamente all'ipotesi di equilibrio elettrostatico.

Poiché  $\vec{E}$  è nullo ovunque nel volume del conduttore, il flusso del campo  $\vec{E}$  attraverso una qualsiasi superficie chiusa contenuta nel conduttore è sempre nullo. Consegue, per la legge di Gauss, che non può esservi carica (in eccesso) all'interno di un conduttore metallico all'equilibrio elettrostatico. Se pertanto si deposita carica elettrica in un conduttore, la carica si distribuisce solo sulla sua superficie.

Si definisce induzione elettrostatica il fenomeno per cui le cariche libere di muoversi nel conduttore (elettroni), in presenza di un qualsiasi campo elettrostatico esterno in cui si trovi il conduttore, si ridistribuiscono sulla sua superficie (in tempi brevissimi, femtosecondi) in modo da annullare il campo elettrostatico nel conduttore. Le cariche che, a seguito di tale fenomeno, si localizzano sulla superficie del conduttore, sono dette cariche indotte.

L'induzione elettrostatica si dice totale se tutte le linee di forza che originano dalle cariche sorgenti del campo esterno al conduttore terminano sulle cariche indotte. In tal caso la carica indotta totale sul conduttore è pari in modulo ed opposta in segno a quella esterna.

Un conduttore cavo è detto schermo elettrostatico. In un conduttore cavo la carica indotta si localizza solo sulla superficie esterna; la superficie interna è priva di carica ed il campo  $\vec{E}$  è nullo ovunque nel conduttore e nella cavità interna (si dimostra utilizzando la legge di Gauss e la irrotationalità di  $\vec{E}$ ). Ponendo il conduttore cavo in un qualsiasi campo elettrostatico esterno, ad es. avvicinando una carica elettrica, avviene una ridistribuzione di carica sulla sua superficie esterna per induzione elettrostatica, ma il campo resta nullo nella cavità interna. Analogamente, se si pone una carica nella cavità interna e la si sposta non si modifica la distribuzione di carica che si localizza sulla superficie esterna, e quindi non varia il campo elettrostatico esterno.

Alla superficie di un conduttore dalla parte esterna il campo  $\vec{E}$  è sempre ortogonale alla superficie del conduttore. Se esistesse una componente tangente alla superficie si avrebbe moto di cariche in contrasto con l'ipotesi di equilibrio elettrostatico.

Teorema di Coulomb. Applicando la legge di Gauss ad un cilindretto di altezza infinitesima e basi parallele alla superficie, con una base nel conduttore (dove il campo  $\vec{E}$  è nullo) e l'altra sopra la superficie (dove il campo è ortogonale alla superficie) si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

con  $\sigma$  densità di carica superficiale e  $\vec{u}_n$  versore normale alla superficie, diretto verso l'esterno. E' possibile dare una interpretazione fisica al teorema di Coulomb, mostrando che il campo alla superficie del conduttore nel punto P è la somma di due contributi, dovuti l'uno alla densità superficiale di carica in una areola attorno a P (cariche vicine), e l'altro a tutte le altre cariche sulla superficie del conduttore (cariche lontane). I due contributi, ciascuno pari a  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  in modulo, si sommano all'esterno della superficie del conduttore ( $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$ ) e si elidono all'interno ( $\vec{E} = 0$ ).

Pressione elettrostatica. Le cariche alla superficie di un conduttore tendono ad essere espulse, causa la forza elettrostatica di Coulomb esercitata su di esse da tutte le altre (repulsione elettrostatica). Prendendo una piccola porzione di superficie  $\Delta S$ , la forza esercitata su di essa dal campo generato dalle cariche lontane è sempre diretta verso l'esterno ed è data da:

$$\vec{F}_{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S \vec{u}_n$$

per cui la pressione elettrostatica (indipendente dal segno della carica) è pari a:

$$p_{el} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 8. POTENZIALE E CAPACITÀ NEI CONDUTTORI

#### Capacità di un conduttore isolato

Presi due punti qualsiasi A e B in un conduttore, con A appartenente alla superficie del conduttore, risulta:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

essendo  $\vec{E}$  ovunque nullo. La superficie del conduttore è quindi equipotenziale (considerando un punto B sulla superficie) e inoltre l'intero conduttore ha potenziale pari a quello della sua superficie (assumendo B all'interno del conduttore).

Per un conduttore isolato carico è possibile mostrare che la carica complessiva localizzata sulla sua superficie e il suo potenziale sono proporzionali. Risulta infatti che la carica totale  $Q$  è data da:

$$Q = \int_S \sigma dS$$

con  $\sigma$  carica superficiale e  $S$  superficie del conduttore. Il potenziale può essere calcolato in un qualsiasi suo punto interno  $P$  mediante l'espressione:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(assumendo  $V=0$  a distanza infinita dal conduttore), dove  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  rappresenta la distanza tra il generico elemento di carica superficiale ed il punto  $P$  nel conduttore. Vale inoltre la condizione  $V(P) = \text{costante}$  ovunque all'interno del conduttore e sulla superficie  $S$ . Assegnato un valore di potenziale  $\bar{V}$  al conduttore, la distribuzione di carica superficiale  $\sigma(\vec{r}')$  è univocamente determinata per l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace (considerando nella regione di spazio compresa tra la superficie del conduttore e l'infinito la soluzione che ha come condizioni al contorno potenziale nullo all'infinito e potenziale pari a  $\bar{V}$  sulla superficie del conduttore). Dalle due equazioni sopra riportate, è evidente che carica totale  $Q$  sul conduttore e potenziale  $V$  sono proporzionali. Infatti, se si moltiplica per una costante  $\lambda$  la funzione potenziale in ogni suo punto,  $V' = \lambda V$ ,  $V'$  risulta anch'essa soluzione dell'equazione di Laplace  $\nabla^2 V' = \lambda \nabla^2 V = 0$ . La derivata normale del potenziale, ovvero il campo elettrostatico sulla superficie esterna del conduttore, e quindi la densità di carica  $\sigma$  sul conduttore, risultano moltiplicati per la stessa costante  $\lambda$ ; consegue che anche la carica complessiva è moltiplicata per la stessa costante,  $Q' = \lambda Q$ . Carica e potenziale risultano pertanto proporzionali.

Il coefficiente di proporzionalità tra carica e potenziale,  $C$ , prende il nome di capacità del conduttore (isolato):

$$C = \frac{Q}{V}$$

e dipende solo dalla geometria del conduttore.

L'unità di misura della capacità nel Sistema Internazionale è il Farad (F), con Farad = Coulomb/Volt. La capacità di 1 Farad è molto elevata e normalmente si adoperano suoi sottomultipli.

Il calcolo della capacità di un conduttore isolato, sulla base della definizione, richiede di assegnare una carica complessiva  $Q$  al conduttore e di calcolarne il potenziale. Il problema è complesso in generale (bisogna conoscere la distribuzione superficiale di carica) e può essere risolto facilmente solo in particolari condizioni di simmetria. Ad esempio, il potenziale di una sfera conduttrice può

essere facilmente calcolato nel suo centro, essendo costante la distanza dalla densità di carica superficiale che è uniforme su tutta la superficie, e risulta pari a  $Q/4\pi\epsilon_0 R$ , essendo  $Q$  la carica sulla sfera ed  $R$  il suo raggio. La capacità di una sfera isolata è pertanto:

$$C_{sfera} = Q/V_{sfera} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

### Condensatore

Consideriamo un sistema di due conduttori con forma e posizione relativa arbitrarie e fissate. Si supponga di assegnare la carica  $Q_i$  su ciascun conduttore. Si dimostra, estendendo il ragionamento prima fatto relativamente alla relazione tra carica e potenziale per il conduttore isolato, che il potenziale  $V_i$  di ciascun conduttore risulta:

$$V_i = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} Q_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

La soluzione del precedente sistema di equazioni lineari esiste (garantita dalla fisica del problema!) ed è unica per l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace. I coefficienti  $\beta_{ij}$  sono detti coefficienti di potenziale e dipendono solo dai parametri geometrici del sistema di conduttori. Il determinante dei coefficienti  $\det\{\beta_{ij}\}$  del sistema lineare sopra riportato è pertanto diverso da zero ed il sistema è invertibile, esprimendo le cariche totali sui conduttori in funzione dei potenziali ad essi assegnati:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} V_j \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

I coefficienti  $\alpha_{ij}$  sono detti coefficienti di capacità o coefficienti di induzione (dipendono solo dalla geometria). La matrice dei coefficienti di capacità  $\{\alpha_{ij}\}$  è data dalla matrice inversa dei coefficienti di potenziale  $\{\beta_{ij}\}^{-1}$ . Le due matrici risultano inoltre simmetriche. In particolare si dimostra:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta_{ji}; \quad \beta_{ij} > 0; \quad \beta_{ii} > \beta_{ij}; \\ \alpha_{ij} &= \alpha_{ji}; \quad \alpha_{ij} < 0; \quad \alpha_{ii} > 0. \end{aligned}$$

Se si considerano due corpi tra i quali vi è induzione elettrostatica completa ( $Q = Q_1 = -Q_2$ ), il precedente sistema diventa:

$$\begin{aligned} V_1 &= \beta_{11}Q - \beta_{12}Q \\ V_2 &= \beta_{21}Q - \beta_{22}Q \end{aligned}$$

Si ottiene quindi  $\Delta V = V_1 - V_2 = (\beta_{11} - \beta_{12} - \beta_{21} + \beta_{22})Q$  da cui:

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right| = \frac{1}{\beta_{11} - \beta_{12} - \beta_{21} + \beta_{22}}.$$

Il condensatore è formato da una coppia di conduttori (armature) tra i quali vi è induzione totale completa. La sua capacità, data dalla precedente espressione in termini di coefficienti di potenziale, si calcola nella pratica imponendo un valore di carica e ricavando la differenza di potenziale tra le armature. Geometrie notevoli sono il condensatore sferico, il condensatore piano, il condensatore cilindrico. Risulta:

$$C_{sferrico} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 R_2} = \frac{\epsilon_0 \bar{S}}{d}$$

$$C_{piano} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$C_{cilindro} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(1 + \frac{d}{R_1})} \cong \frac{\epsilon_0 \hat{S}}{d} \quad (R_2 = R_1 + d)$$

dove  $R_1$  e  $R_2$  sono i raggi della armatura interna e esterna,  $d$  la distanza tra le armature,  $h$  la lunghezza del condensatore cilindrico,  $\bar{S}$  una superficie intermedia tra le due armature del condensatore sferico,  $S$  la superficie delle armature del condensatore piano,  $\hat{S}$  la superficie dell'armatura interna del condensatore cilindrico; si è assunto inoltre  $d \ll R_{1,2}$ .

### Condensatori in serie e in parallelo

Più condensatori possono essere collegati in serie o parallelo. Si può mostrare che nel collegamento in parallelo tra più condensatori si ottiene una capacità equivalente data da:

$$C_{parallelo} = \sum_{i=1}^N C_i;$$

e che, nel caso di collegamento in serie, la capacità equivalente risulta data da:

$$\frac{1}{C_{serie}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}.$$

### Energia potenziale elettrostatica

L'energia potenziale elettrostatica di un conduttore isolato carico si determina calcolando il lavoro fatto dalle forze esterne per portare la carica finale sul conduttore, spostando via via quantità di carica elementare  $\delta q$  dall'infinito ( $V(\infty) = 0$ ) sul conduttore a potenziale  $V$ , potenziale che dipende a sua volta dalla carica presente sul conduttore,  $V = q/C$ . Il lavoro complessivo si calcola integrando l'espressione del lavoro elementare fino al valore della carica finale  $Q$ :

$$U_E = L^{ext} = \int_0^Q \frac{q \delta q}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

L'energia potenziale elettrostatica di un condensatore carico si determina calcolando il lavoro elementare fatto dalle forze esterne per trasferire la carica tra le due armature, spostando quindi una carica elementare  $\delta q$  attraverso la differenza di potenziale  $\Delta V = q/C$  tra le armature e integrando fino al valore della carica finale:

$$U_E = L^{ext} = \int_0^Q \frac{q \delta q}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2.$$

Considerando il caso specifico del condensatore piano (ma il risultato che si ottiene è del tutto generale) risulta che l'energia potenziale elettrostatica è esprimibile come:

$$U_E = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (Sd) E^2$$

ed è proporzionale al quadrato del campo elettrostatico. Poiché il campo elettrostatico è presente solo tra le armature del condensatore, l'energia potenziale elettrostatica risulta immagazzinata all'interno del condensatore, dove è presente un campo elettrostatico.

Dividendo per il volume  $Sd$  del condensatore si trova la densità di energia potenziale elettrostatica:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Generalizzando il risultato precedente, si può affermare che ad ogni campo elettrostatico  $\vec{E}$  comunque generato è associata una densità di energia potenziale elettrostatica pari a  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ .

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 9. ELETTROSTATICA NEI DIELETTRICI

#### Fenomenologia

I dielettrici (o isolanti) sono materiali nei quali le cariche non sono libere di muoversi, come nei metalli, ma sono vincolate alle loro posizioni di equilibrio attorno alle quali possono subire, in presenza di un campo elettrostatico, piccolissimi spostamenti.

Inserendo un dielettrico all'interno di un condensatore con carica  $Q$  isolato si osserva sperimentalmente:

- 1) una diminuzione della differenza di potenziale  $\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r}$ , essendo  $\Delta V_0$  la differenza di potenziale tra le armature in vuoto;
- 2) una diminuzione dello stesso fattore del modulo del campo elettrostatico  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ , essendo  $E_0$  il campo elettrostatico nel condensatore nel vuoto;
- 3) un aumento dello stesso fattore della capacità  $C = C_0 \epsilon_r$ , essendo la carica  $Q$  costante e diminuendo la differenza di potenziale  $\Delta V$ .

La costante  $\epsilon_r > 1$ , adimensionale, è detta costante dielettrica relativa. I suoi valori variano da  $\epsilon_r = 1.0006$  per l'aria, a  $\epsilon_r = 4-7$  per il vetro, fino a  $\epsilon_r = 80$  per l'acqua.

#### Descrizione microscopica della polarizzazione

La presenza di un campo elettrostatico genera nel dielettrico il fenomeno della polarizzazione, dovuta a due possibili meccanismi. A seguito di tale fenomeno gli atomi/molecole del materiale acquisiscono un momento di dipolo nella direzione del campo.

Polarizzazione per deformazione. Questo meccanismo riguarda tutti i dielettrici. In ciascun atomo del materiale i baricentri delle cariche positive (protoni) e negative (elettroni), coincidenti in assenza di campo elettrostatico, in presenza di  $\vec{E}$  si separano, dando origine ad un momento di dipolo atomico  $\vec{p}$ , parallelo ed equiverso con  $\vec{E}$ . L'espressione di  $\vec{p}$  si può ricavare con un semplice modello di atomo costituito da una carica positiva  $q$  puntiforme situata al centro di una sfera di carica negativa con densità volumetrica di carica costante e carica totale  $-q$  (atomo di idrogeno). In presenza di campo elettrostatico, la posizione di equilibrio della carica positiva non coincide più con il baricentro della distribuzione di carica negativa. Lo spostamento si ricava eguagliando la forza del campo  $q\vec{E}$  a quella attrattiva di Coulomb che tende a riportare la carica positiva verso il baricentro della carica negativa. Dopo aver calcolato lo spostamento tra carica positiva e baricentro della carica negativa, moltiplicando per la carica  $q$ , si ottiene per il momento di dipolo atomico:

$$\vec{p} = \alpha_d \vec{E}$$

dove la costante di proporzionalità  $\alpha_d = 4\pi\epsilon_0 R_a^3 \cong 10^{-40} \text{ Fm}^2$  è detta polarizzabilità elettronica per deformazione.

Polarizzazione per orientamento. Questo meccanismo riguarda solo i dielettrici con molecole già dotate di momento di dipolo proprio. In assenza di campo elettrostatico i singoli dipoli molecolari hanno orientazione casuale per il moto di agitazione termica e la loro somma vettoriale in un

volumetto piccolo a piacere (purché contenga un numero sufficiente di molecole) è nulla. In presenza di  $\vec{E}$  su ciascun dipolo agisce un momento meccanico dato da:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

che tende ad orientare tutti i dipoli parallelamente al campo  $\vec{E}$ . Questo fenomeno è però contrastato dall'agitazione termica, che orienta i dipoli in modo casuale. L'energia potenziale eletrostatica di un dipolo in un campo uniforme  $\vec{E}$  è data da:

$$U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos\vartheta$$

e dipende dall'angolo  $\vartheta$  che il dipolo forma con il campo. Secondo la statistica di Boltzman, il numero di dipoli con energia potenziale compresa tra  $U_E$  e  $U_E + dU_E$ , ovvero con angolo solido compreso tra  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$  (il problema ha simmetria cilindrica rispetto alla direzione di  $\vec{E}$ ), è proporzionale a  $e^{-\frac{U_E}{kT}}$ . Il valor medio del momento di dipolo  $\langle \vec{p} \rangle$  nella direzione del campo  $\vec{E}$  si ottiene moltiplicando la componente del generico momento di dipolo nella direzione del campo ( $p \cos\vartheta$ ) per la probabilità che il momento di dipolo abbia orientazione compresa tra  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$ , e integrando su tutti i possibili angoli  $\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ). Risulta:

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{p^2}{3kT} \vec{E} = \alpha_o \vec{E},$$

dove  $\alpha_o = \frac{p^2}{3kT}$  è la polarizzabilità elettronica per orientamento. A temperatura ambiente, per T=300 K, risulta che  $\alpha_o \approx 10^{-39} \text{ Fm}^2$ , circa un fattore 10 superiore a  $\alpha_d$ . Quando presente, la polarizzazione per orientamento è quindi dominante rispetto a quella per deformazione. In generale, indicando con  $\vec{p}$  il momento di dipolo atomico/molecolare, si può scrivere che:

$$\vec{p} = (\alpha_o + \alpha_d) \vec{E} = \alpha \vec{E},$$

ovvero il momento di dipolo in un dielettrico risulta in ogni caso proporzionale al campo eletrostatico presente nel dielettrico.

### Descrizione macroscopica della polarizzazione

Preso un volumetto  $\Delta\tau$ , contenente un numero di atomi/molecole statisticamente significativo, si definisce densità di polarizzazione il vettore:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta\tau} = \frac{n_{\Delta\tau}}{\Delta\tau} \vec{p} = N\alpha \vec{E}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli  $n_{\Delta\tau}$  dipoli contenuti in  $\Delta\tau$  e valutata per  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ;  $N$  rappresenta il numero di dipoli per unità di volume. L'unità di misura della densità di polarizzazione è  $[P] = \text{C/m}^2$ .

Per campi eletrostatici non troppo intensi ( $< 10^5\text{-}10^6 \text{ V/m}$ ) la polarizzabilità è indipendente dal modulo del campo  $\vec{E}$  e il dielettrico si dice lineare ( $P$  proporzionale a  $E$ ).

Se il materiale è isotropo la direzione di  $\vec{P}$  è parallela a quella di  $\vec{E}$  ed il dielettrico si dice isotropo (se il dielettrico è anisotropo il legame tra i due vettori è di tipo tensoriale).

Se la polarizzazione  $\vec{P}$  è uniforme in tutto il volume del materiale (ad es. perché è uniforme la sua densità), il dielettrico si dice omogeneo.

Un dielettrico lineare, isotropo e omogeneo si dice normale.

Consideriamo un cilindro di materiale dielettrico, lineare, isotropo e omogeneo, inserito all'interno di un condensatore piano, con un campo  $\vec{E}$  nel dielettrico parallelo alla generatrice del cilindro. Nel volume del cilindro, gli spostamenti di cariche positive dovuti alla polarizzazione sono neutralizzati da quelli delle cariche negative, e non si genera densità di carica di polarizzazione. Sulle due basi si può invece assumere (a livello di modello) la presenza di due cariche di polarizzazione  $q_p^+$  e  $q_p^-$ , uguali ed opposte (il dielettrico resta globalmente neutro), con densità di carica superficiale  $\sigma_p^+$  e  $\sigma_p^-$ .

Applicando la legge di Gauss ad una superficie cilindrica chiusa che contenga una interfaccia conduttore-dielettrico, essendo nullo il campo nel conduttore, si ricava una relazione tra il campo  $E$  nel dielettrico e le densità superficiali di carica libera  $\sigma$  e di carica di polarizzazione  $\sigma_p$ :

$$E = \frac{|\sigma| - |\sigma_p|}{\epsilon_0}$$

Essendo  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ , si ha anche che

$$|\sigma_p| = |\sigma| \frac{\chi}{\epsilon_r}$$

dove la costante adimensionale  $\chi = \epsilon_r - 1 (> 0)$  è definita come suscettività dielettrica.

Considerando l'intero cilindro con carica di polarizzazione sulle due basi pari a  $|q_p|$ , si può ad esso associare un momento di dipolo macroscopico con modulo pari a

$$p_{cilindro} = |q_p| d = |\sigma_p| Sd,$$

dove  $S$  è la superficie di base e  $d$  la lunghezza del cilindro. Consegue, essendo  $Sd$  il volume del cilindro:

$$P = \frac{|\sigma_p| Sd}{Sd} = |\sigma_p|$$

ed anche, utilizzando la relazione tra densità di carica di polarizzazione e di carica libera:

$$P = |\sigma_p| = |\sigma| \frac{\chi}{\epsilon_r} = \epsilon_0 \chi E,$$

relazione che vale anche vettorialmente,  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ , essendo il dielettrico isotropo. Confrontando l'espressione trovata con la definizione di densità di polarizzazione si ottiene una relazione tra grandezze macroscopiche e microscopiche (suscettività dielettrica e costante dielettrica; polarizzabilità e densità atomica):

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = N\alpha \vec{E} \rightarrow \chi = \frac{N\alpha}{\epsilon_0};$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}.$$

Tale relazione vale per gas rarefatti. Per i solidi la relazione è più complessa (relazione di Clausius-Mossotti):

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0})}.$$

Considerando ora un cilindro con base obliqua con versore normale alla base  $\vec{u}_n$ , la densità superficiale di carica di polarizzazione diminuisce in quanto è aumentata la superficie di base, dovendosi conservare la neutralità della carica. Si può facilmente mostrare che risulta:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$$

Se il dielettrico è omogeneo, considerando una superficie chiusa  $\Sigma$ , risulta  $\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$  perché la carica di polarizzazione totale deve essere nulla. Se il dielettrico è non omogeneo, compare anche una densità di carica di polarizzazione di volume  $\rho_p$  e pertanto, nel caso più generale, per la conservazione della carica elettrica:

$$\oint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{u}_n d\Sigma + \int_{\tau} \rho_p d\tau = 0$$

con  $\tau$  volume racchiuso da  $\Sigma$  interno o al più coincidente con quello del dielettrico. Applicando alla precedente relazione il teorema della divergenza, si ha:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_p .$$

In generale, applicando la legge di Gauss (locale) al campo  $\vec{E}$  nel dielettrico si può scrivere:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$$

da cui, esprimendo la densità di carica di polarizzazione in funzione di  $\vec{P}$ , si ottiene:

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

con  $\rho$  densità di carica libera. Introducendo il vettore spostamento elettrico  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  si ha:

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

ovvero il vettore  $\vec{D}$  dipende solo dalle cariche libere e rappresenta pertanto un utile campo ausiliario per la trattazione dell'elettrostatica nei dielettrici. Il legame tra  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  è di semplice proporzionalità:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \text{ nel vuoto;}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \text{ nel dielettrico. La costante } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \text{ prende il nome di costante dielettrica assoluta del materiale.}$$

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 10. CORRENTE ELETTRICA NEI CONDUTTORI IN REGIME STAZIONARIO

#### Corrente elettrica ed equazione di continuità

La corrente elettrica in un mezzo conduttore è costituita dallo spostamento ordinato di cariche all'interno del mezzo. Nei conduttori metallici, le cariche libere di muoversi sono gli elettroni liberi o di conduzione, il cui numero è dell'ordine di grandezza della densità atomica nel metallo (ad esempio, nel rame la densità di elettroni è pari a circa  $8 \times 10^{22}$  elettroni/cm<sup>3</sup>).

Se il conduttore è immerso in un campo elettrico i portatori di carica subiscono una forza che li spinge tutti a muoversi nella direzione del campo con verso dipendente dal segno della carica; il moto collettivo è caratterizzato da una velocità di deriva  $\vec{v}_d$  ( $\approx 10^3$  m/s).

Si definisce intensità di corrente attraverso la superficie  $S$  (orientata) di un conduttore il rapporto tra la quantità di carica  $dQ$  che attraversa la superficie  $S$  e l'intervallo di tempo  $dt$ :

$$i = \left( \frac{dQ}{dt} \right)_S.$$

Il verso della corrente è per convenzione assunto uguale a quello delle cariche positive. E' una evidenza sperimentale che, ai fini elettrici, il moto di una carica positiva in un dato verso è equivalente a quello di una carica negativa che si muove in verso opposto.

L'intensità di corrente è nel sistema internazionale SI una grandezza fondamentale e la sua unità di misura è l'Ampère (A) [il Coulomb è quindi una grandezza derivata,  $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}$ ].

Si definisce il vettore densità di corrente  $\vec{j}$  come:

$$\vec{j} = Nq\vec{v}_d$$

dove  $N$  è il numero di portatori per unità di volume,  $q$  la carica del portatore e  $\vec{v}_d$  la loro comune velocità di deriva. Se vi sono portatori di segno opposto:

$$\vec{j} = N^+ q^+ \vec{v}_d^+ + N^- q^- \vec{v}_d^- = \rho^+ \vec{v}_d^+ + \rho^- \vec{v}_d^-$$

dove  $\rho$  rappresenta la densità di carica (libera).

Risulta che la corrente attraverso una superficie  $S$  (con normale  $\vec{u}_n$ ) del conduttore è legata al vettore densità di corrente dalla relazione:

$$i = \int_S \vec{j} \cdot \vec{u}_n dS$$

da cui si deduce che il modulo di  $\vec{j}$  rappresenta il rapporto tra l'intensità di corrente  $i$  nel conduttore e la sezione del conduttore normale al flusso di portatori.

Per una qualsiasi porzione di conduttore delimitata dalla superficie  $S_c$  chiusa il principio di conservazione della carica elettrica è espresso mediante la seguente relazione integrale:

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{S_c} + \int_{S_c} \vec{j} \cdot \vec{u}_n dS.$$

Questa relazione, mediante il teorema della divergenza, si trasforma nell'equazione di continuità della corrente:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

In regime stazionario le grandezze non dipendono dal tempo, per cui la densità di carica è costante e pertanto:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

ovvero il flusso di  $\vec{j}$  attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo ( $\vec{j}$  è solenoidale e le sue linee di campo sono chiuse). Consegue che: (i) in regime stazionario  $\vec{j}$  è parallelo alla superficie del conduttore, che costituisce un tubo di flusso; (ii) la intensità di corrente  $i$  è la stessa in ogni sezione del conduttore; (iii) la somma algebrica delle correnti entranti in nodo è nulla (legge di Kirchhoff ai nodi).

### Legge di Ohm

Il legame tra la differenza di potenziale  $\Delta V$  (positiva) ai capi di un conduttore metallico e la corrente che lo attraversa è dato dalla legge di Ohm (sperimentale):

$$\Delta V = Ri$$

dove  $R$ , coefficiente positivo, è la resistenza elettrica, la cui unità di misura è derivata da quelle di potenziale e di corrente, Volt/Ampère = Ohm ( $\Omega$ ).  $R$  dipende dal materiale, dalla geometria e dalla temperatura. Per un conduttore cilindrico di sezione trasversale  $S$  e lunghezza  $l$  si ha:

$$R = \rho_R \frac{l}{S}$$

dove  $\rho_R$  è la resistività del metallo, che dipende dal materiale e dalla temperatura. La dipendenza dalla temperatura è data da ( $T_0$  è una temperatura di riferimento, solitamente 300 K):

$$\rho_R(T) = \rho_R(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)].$$

Il valore di  $\rho_R$  per i metalli è molto piccolo, dell'ordine di  $10^{-8} \Omega\text{m}$ ; per i semiconduttori varia tra 1 e  $10^3 \Omega\text{m}$ ; per gli isolanti può variare da  $10^{10}$  a  $10^{17} \Omega\text{m}$ .

Il coefficiente di temperatura  $\alpha$  è positivo per i metalli e negativo per i semiconduttori ( $\alpha \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ). La legge di Ohm può essere espressa in forma locale, riferendosi ad un elemento di conduttore di lunghezza infinitesima  $dl$ . Si ottiene un legame tra campo elettrico e vettore densità di corrente:

$$\vec{E} = \rho_R \vec{j} ; \vec{j} = \frac{1}{\rho_R} \vec{E} = \sigma_c \vec{E}$$

dove  $\sigma_c$  è la condutività o conducibilità del materiale. I conduttori per i quali si ha una relazione lineare tra densità di corrente e campo elettrico, come i metalli, sono detti ohmici. Più in generale, includendo anche conduttori non metallici, la relazione può essere non lineare  $\vec{j} = f(\vec{E})$ .

### Modello di Lorentz della conduzione nei metalli

Il modello classico della conduzione nei metalli di Drude e Lorentz fornisce una interpretazione fisica della legge di Ohm. Le assunzioni del modello sono le seguenti. In assenza di campo elettrostatico nel conduttore: (i) gli elettroni si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità estremamente elevata ( $v_{th} = 10^6 \text{ m/s}$ ); (ii) nel loro moto subiscono continue interazioni (urti) con gli ioni del reticolo; (iii) dopo ogni urto l'elettrone perde memoria di direzione e verso che aveva prima dell'urto, ovvero considerando più urti successivi si ha una distribuzione casuale e isotropa della velocità vettoriale, e pertanto (mediando su più urti) non vi è flusso netto di carica, cioè una corrente, in alcuna direzione. In presenza di un campo  $\vec{E}$  nel conduttore: (i) sui portatori di carica agisce una forza (forza di Coulomb) e ciascun elettrone acquista una accelerazione  $\vec{a} = -e\vec{E}/m_e$  nella direzione del campo, in verso opposto ad esso ( $e$  carica ed  $m_e$  massa dell'elettrone); (ii) alla distribuzione casuale ed isotropa delle velocità si sovrappone una velocità di deriva  $\vec{v}_d$  uguale per

ciascun elettrone, molto piccola in modulo rispetto alla velocità termica  $v_{th}$ , per cui il tempo medio  $\tau$  tra due urti successivi (che dipende da  $v_{th}$ ) resta inalterato.

Se  $\vec{v}_{1,i}$  è la velocità subito dopo l'urto i-esimo e  $\vec{v}_{2,i}$  quella prima dell'urto successivo si ha:

$$\vec{v}_{2,i} = \vec{v}_{1,i} - \frac{e\vec{E}}{m_e} t_i$$

dove  $t_i$  è il tempo occorso tra i due urti. Mediando su numero  $N$  elevato di urti successivi possiamo definire la velocità di deriva  $\vec{v}_d$  come la velocità media dell'elettrone prima dell'urto:

$$\vec{v}_d = \langle \vec{v}_{2,i} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{1,i} - \frac{1}{N} \frac{e\vec{E}}{m_e} \sum_{i=1}^N t_i = - \frac{e\vec{E}}{m_e} \tau$$

essendo  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{1,i} = 0$  a causa della distribuzione casuale ed isotropa delle velocità dopo l'urto, ed avendo definito il tempo medio tra due urti  $\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$ . Si ottiene quindi una velocità di deriva costante e uguale per tutti i portatori, proporzionale alla forza agente, ovvero al campo  $\vec{E}$ . Risulta:

$$\vec{j} = N(-e)\vec{v}_d = \frac{Ne^2\tau}{m_e} \vec{E} = \sigma_c \vec{E}$$

da cui, per confronto con la legge di Ohm locale, si può correlare la conduttività  $\sigma_c$  (parametro macroscopico) ai parametri microscopici del materiale. Nel caso più generale di portatori di carica di entrambi i segni le condutività dovute alle due specie di portatori si sommano (il verso di  $\vec{j}$  non dipende dal segno della carica ed è sempre concorde con il campo  $\vec{E}$ ):

$$\sigma_c = \frac{N_+ q_+^2 \tau_+}{m_+} + \frac{N_- q_-^2 \tau_-}{m_-}.$$

### Effetto termico della corrente

L'effetto termico della corrente o effetto Joule è un fenomeno dissipativo. Quando in un conduttore fluisce corrente, il campo  $\vec{E}$  compie un lavoro sui portatori di carica, accelerando gli elettroni tra un urto e il successivo (con aumento della loro energia cinetica). Nell'urto (di tipo anelastico) gli elettroni cedono l'incremento di energia cinetica al reticolo. L'energia cinetica media degli elettroni quindi non aumenta, e il lavoro compiuto dal campo elettrico viene assorbito negli urti dal reticolo cristallino, per cui l'energia interna del conduttore aumenta. Di conseguenza aumenta la temperatura del conduttore, che in virtù della differenza di temperatura rispetto all'ambiente circostante in cui è immerso, cede l'incremento di energia interna sotto forma di calore. E' questo il fenomeno noto come effetto Joule. In altre parole, il lavoro compiuto dal campo elettrico serve per vincere la resistenza (viscosa) opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni.

Il lavoro elementare  $dL$  compiuto dal campo per spostare una carica  $dq$  attraverso la differenza di potenziale  $\Delta V$  è pari a  $dL = dq\Delta V = idt \Delta V$ . La potenza dissipata, utilizzando la legge di Ohm, è data da:

$$W = \frac{dL}{dt} = i\Delta V = Ri^2 = \Delta V^2/R.$$

Considerando un volumetto di conduttore  $d\tau = \Delta S dl$ , l'analogia relazione locale è data da:

$$dL = dq\vec{E} \cdot d\vec{l} = Nqd\tau \vec{E} \cdot \vec{v}_d dt = \vec{j} \cdot \vec{E} dt$$

da cui si ricava la potenza dissipata per unità di volume nel conduttore:

$$w = \frac{dL}{dt d\tau} = \frac{W}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \rho_c i^2.$$

## Generatore di forza elettromotrice

Il vettore  $\vec{j}$  in regime stazionario è solenoidale, per cui il tubo di flusso di  $\vec{j}$  (il circuito elettrico) deve essere un percorso chiuso. Il campo elettrostatico  $\vec{E}$  nel conduttore, essendo irrotazionale e pertanto conservativo, non è in grado di compiere lavoro lungo un percorso chiuso ( $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ).

Per avere passaggio di corrente è necessario inserire nel circuito un componente attivo, detto generatore (genera le forze in grado di far circolare le cariche). Nel seguito si considerano i generatori di forza elettromotrice (o di tensione).

Un generatore di tensione è un dispositivo al cui interno sono presenti forze di natura non elettrica (ad es. meccanica, chimica) non conservative. Tali forze agiscono sulle cariche libere presenti, separando le cariche positive da quelle negative. Esiste pertanto all'interno del generatore un campo elettromotore  $\vec{E}_m$  che agisce sulle cariche, spostandole, a seconda del segno, verso i due poli del generatore, rispettivamente positivo e negativo. Il campo elettromotore, presente nel generatore e diretto dalle cariche negative verso quelle positive, in condizione di equilibrio è bilanciato dal campo elettrostatico  $\vec{E}_s$  che si viene a generare a seguito della separazione delle cariche, diretto in verso opposto, per cui risulta, nel generatore,  $\vec{E}_s + \vec{E}_m = 0$ .

Si definisce forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  il lavoro fatto dal campo elettromotore per spostare la carica unitaria positiva dal morsetto negativo B a quello positivo A all'interno del generatore:

$$\mathcal{E} = \int_{B,int}^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

Collegando i due morsetti A (positivo) e B (negativo) esternamente mediante un conduttore risulta, essendo  $\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$  ed essendo  $\vec{E}_m$  nullo al di fuori del generatore:

$$\oint (\vec{E}_m + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{B,int}^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

dove la linea lungo la quale si calcola l'integrale circolare è coincidente con il circuito e passa all'interno del generatore. La forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  è pertanto anche uguale al lavoro compiuto dal campo elettromotore per far circolare una carica unitaria attraverso il circuito chiuso.

A morsetti aperti, si ha che la forza elettromotrice è pari alla differenza di potenziale tra i due morsetti del generatore:

$$\int_{B,int}^A (\vec{E}_m + \vec{E}_s) \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \int_{B,int}^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \int_{B,int}^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = - \int_{B,ext}^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_A - V_B.$$

Se un generatore reale è collegato ad un circuito esterno di resistenza  $R$ , la differenza di potenziale ai morsetti del generatore e la corrente nel circuito variano al variare di  $R$ . Questo comportamento è dovuto alla presenza di una resistenza interna distribuita  $r \neq 0$  nel generatore, che provoca una caduta di tensione all'interno del generatore, la cui tensione ai morsetti diminuisce linearmente all'aumentare della corrente nel circuito:

$$\Delta V = V_A - V_B = Ri = \mathcal{E} - ri.$$

In un generatore ideale  $r=0$  e, di conseguenza,  $\Delta V = \mathcal{E} = Ri$  indipendentemente dalla corrente circolante (ovvero indipendentemente dal valore di  $R$ ).

La potenza dissipata in un circuito con resistenza  $R$  collegato ad un generatore reale di forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  è pari a

$$W = \mathcal{E}i = (R + r)i^2$$

### **Resistori in serie e parallelo. Leggi di Kirchhoff**

In un circuito elettrico a parametri concentrati si assume che la resistenza sia localizzata in specifici componenti, detti resistori, che hanno comportamento ohmico.

Per un collegamento in serie di più resistori si ricava, applicando l'equazione di continuità della corrente e la legge di Ohm, che la resistenza complessiva ai terminali è pari a:

$$R_{serie} = \sum_i R_i.$$

Per un collegamento in parallelo di più resistori, si ricava analogamente che la resistenza risultante ai terminali è pari a:

$$\frac{1}{R_{paral.}} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Per determinare correnti e tensioni in circuiti con più rami (ovvero per "risolvere" il circuito), contenenti elementi passivi (ad es., resistori) ed attivi (generatori) si utilizzano la legge di Ohm e le leggi di Kirchhoff alle maglie ed ai nodi (la maglia è un insieme di rami di una rete che forma un percorso chiuso; il nodo è il punto di confluenza di tre o più rami).

La legge di Kirchhoff alle maglie discende direttamente dalla irrotationalità del campo elettrostatico lungo un qualsiasi percorso chiuso (maglia) del circuito. Ricordando infatti che la circuitazione del campo elettrostatico lungo la maglia è nulla,  $\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$ , e che all'interno del generatore,  $\int_{B,int}^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = - \int_{B,int}^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\mathcal{E}$ , si ottiene:

$$-\sum_i \mathcal{E}_i + \sum_i \Delta V_i = 0 \Rightarrow \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i \Delta V_i = \sum_i (R_i + r_i) i.$$

La legge di Kirchhoff alle maglie afferma che la somma algebrica delle forze elettromotrici ( $\mathcal{E}_i$  positiva se concorde con il verso di percorrenza della maglia) è pari alla somma delle differenze di potenziale ai morsetti dei resistori presenti nella maglia, comprese le eventuali resistenze interne dei generatori (nel caso di generatori non ideali).

La legge di Kirchhoff ai nodi discende dall'equazione di continuità della corrente in regime stazionario. Presa una qualsiasi superficie chiusa S con il nodo al suo interno,  $\int_{S \text{ chiusa}} \vec{j} \cdot \vec{u}_n dS = 0$ , da cui consegue, essendo  $S_k$  la superficie intersezione del conduttore k-esimo con la superficie chiusa S:

$$\sum_k (\int_{S_k} \vec{j}_k \cdot \vec{u}_n dS) = 0 \Rightarrow \sum_k i_k = 0 \Rightarrow \sum i_{\text{entranti}} = \sum i_{\text{uscenti}}.$$

La legge di Kirchhoff ai nodi afferma che la somma algebrica delle correnti (positive quelle uscenti, negative quelle entranti) confluenti nel nodo è pari a zero, ovvero che la somma delle correnti uscenti è pari a quella delle correnti entranti.



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 11. MAGNETOSTATICA NEL VUOTO

#### Forza di Coulomb magnetica

Lo studio dei fenomeni magnetici inizia nell'antichità con le osservazioni sul comportamento dei magneti naturali (magnetite, combinazione di ossidi di ferro  $\text{FeO} \bullet \text{Fe}_2\text{O}_3$ )

Le prime osservazioni sperimentali scientifiche, nella seconda metà del 1700, stabiliscono che:

- (i) i magneti naturali presentano sempre due distinti poli di uguale intensità, detti nord (in quanto un ago magnetico si orienta con tale polo diretto verso il polo Nord geografico) e sud.
- (ii) Come per le cariche elettriche, poli uguali si respingono, poli diversi si attraggono.
- (iii) Non è possibile isolare i poli, mediante suddivisione fisica del magnete in magneti via via più piccoli.
- (iv) La forza che si esercita a distanza nel vuoto tra due poli magnetici (forza di Coulomb magnetica) può essere espressa in modulo come:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_1 p_2}{r^2}$$

dove  $p_{1,2}$  ( $\text{A}\cdot\text{m}$ ) sono le intensità dei due poli e la costante  $\mu_0$  ( $\text{N}/(\text{A}^2)$ ) è la permeabilità magnetica del vuoto. È possibile stabilire anche direzione e verso della forza magnetica nello spazio, utilizzando sottilissimi aghi magnetici sonda. In presenza di un magnete esterno, essi si allineano lungo la retta di azione della forza magnetica, con il loro polo sud diretto verso il polo nord del magnete. Si può pertanto introdurre euristicamente per il magnete il concetto di campo magnetico, considerando la forza agente su un magnete sonda con intensità del polo unitaria.

Nella prima metà del 1800 importanti osservazioni sperimentali stabiliscono che:

- (i) cariche in movimento (correnti elettriche) generano campi magnetici;
- (ii) su cariche in movimento in campi magnetici esterni agiscono forze.

#### Forza di Lorentz

Su una carica  $q$  che si muove con velocità  $\vec{v}$  in una zona di spazio in cui è presente un campo magnetico  $\vec{B}$  (ad es., generato da un magnete) si esercita una forza magnetica  $\vec{F}_m$  (forza di Lorentz) data dalla relazione vettoriale:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

E' importante osservare che la forza di Lorentz è sempre ortogonale sia al campo magnetico che al vettore velocità. In particolare, essendo  $\vec{F}_m$  ortogonale a  $\vec{v}$ , la forza di Lorentz non è in grado di compiere lavoro sulla carica ( $dL = \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = \vec{F}_m \cdot \vec{v} dt = 0$ )

Tramite questa relazione è possibile dare una definizione operativa di campo magnetico misurandone il modulo,  $B = \frac{F_{max}}{|q|v}$ . Dimensionalmente risulta  $B = \text{N s}/(\text{A m}) = \text{Tesla (T)}$ .

#### Campo magnetico prodotto da correnti stazionarie – 1° formula elementare di Laplace

Il campo magnetico  $\vec{dB}$  prodotto nel generico punto  $P$  da un elemento di circuito  $d\vec{l}$  percorso da corrente  $i$  è dato da (prima formula elementare di Laplace):

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\overrightarrow{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore congiungente l'elemento  $\overrightarrow{dl}$  (che ha lo stesso verso di  $i$ ), con il punto P. Da questa relazione, verificabile sperimentalmente solo considerando un circuito chiuso, si ottiene il campo magnetico  $\vec{B}$ , generato dal circuito percorso da corrente  $i$ , come somma di tutti i suoi contributi elementari:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\Gamma} \frac{\overrightarrow{dl} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\Gamma} \frac{\overrightarrow{dl} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

dove la linea  $\Gamma$  rappresenta il percorso chiuso del conduttore.

A partire da tale relazione è possibile calcolare il campo prodotto da un filo rettilineo con lunghezza tendente a infinito. Si osserva (applicando le regole del prodotto vettoriale) che il vettore  $\vec{B}$  giace su piani ortogonali al filo ed ha direzione tangenziale rispetto a circonferenze con centro sul filo. Il suo modulo, che dipende solo dalla distanza  $d$  dal filo, si ottiene integrando sull'intera lunghezza del filo i contributi elementari di ciascun elemento infinitesimo (legge di Biot e Savart) ed è dato da:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{d}$$

Il campo magnetico prodotto da una singola carica in movimento può essere ricavato dalla prima formula elementare di Laplace. Essa infatti pone in relazione il campo  $\overrightarrow{dB}$  generato in un punto P dello spazio con la corrente  $i$  che scorre in un elemento infinitesimo di circuito, ovvero con le cariche in moto ordinato con velocità  $\vec{v}_d$  presenti nel volume elementare di conduttore considerato. Dividendo tale campo per il numero totale di portatori di carica presenti nel volumetto di conduttore, si ricava il campo magnetico prodotto dalla singola carica in movimento nel conduttore. Generalizzando il risultato trovato a qualsiasi carica in moto con velocità  $\vec{v}$  si ottiene:

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore congiungente la carica  $q$  con il punto P in cui si calcola il campo. Tale relazione vale per velocità  $v \ll c$  e mette in evidenza come il campo magnetico dipenda in generale dal sistema di riferimento. Mentre un osservatore in quiete misura un campo magnetico che si ottiene tramite la precedente relazione, in un sistema di riferimento inerziale in moto con velocità  $\vec{v}$  uguale a quella della carica un osservatore non misura alcun campo magnetico, in quanto vede la carica ferma.

### Forze agenti su conduttori percorsi da correnti – 2° formula elementare di Laplace

All'interno di un conduttore percorso da corrente  $i$ , su ogni portatore di carica  $q$  in moto con velocità di deriva  $\vec{v}_d$  agisce la forza di Lorentz. Considerando un tratto di conduttore di lunghezza  $dl$  e sezione  $\Delta S$ , si ricava (seconda formula elementare di Laplace):

$$\overrightarrow{dF} = (N\Delta S dl) q \vec{v}_d \times \vec{B} = dl (\Delta S \vec{j}) \times \vec{B} = i \overrightarrow{dl} \times \vec{B}.$$

Tale relazione, integrata sulla lunghezza finita del tratto  $\Gamma$  di conduttore percorso da corrente  $i$ , fornisce la forza magnetica agente su di esso:

$$\vec{F} = i \int_{\Gamma} \overrightarrow{dl} \times \vec{B}.$$

Tra due circuiti percorsi da correnti stazionarie  $i_1$  e  $i_2$  si esercita una forza, dovuta all'interazione della corrente circolante in un circuito con il campo magnetico prodotto dall'altro. Utilizzando le due formule elementari di Laplace, si ricava che la forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata dal primo circuito (tramite il campo magnetico  $\vec{B}_1$  prodotto) sul secondo è data da:

$$\vec{F}_{12} = i_2 \oint_{\Gamma_2} \vec{dl}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 \oint_{\Gamma_2} \vec{dl}_2 \times \oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{\vec{dl}_1 \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 i_1 \oint_{\Gamma_2} \vec{dl}_2 \times \oint_{\Gamma_1} \frac{\vec{dl}_1 \times \vec{r}}{r^3}.$$

Per la terza legge della dinamica la forza  $\vec{F}_{21}$  esercitata dal secondo circuito sul primo è uguale ed opposta,  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .

In particolari condizioni di geometria il calcolo può essere semplificato. Ad esempio, la forza tra due conduttori rettilinei paralleli molto lunghi percorsi da correnti  $i_1, i_2$  e posti a distanza  $d$  può essere determinata utilizzando la legge di Biot e Savart per il calcolo del campo  $\vec{B}_1$  prodotto,  $B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$ . Poiché tale campo è uguale in tutti i punti del secondo filo, che ha distanza  $d$  costante dal primo, si ricava che la forza su un tratto  $l_2$  del secondo conduttore è pari a:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{l_2}{d}$$

e risulta (come si deduce utilizzando le regole del prodotto vettoriale) attrattiva se le correnti sono equiverte, repulsiva se hanno verso opposto. La forza  $f_l$  per unità di lunghezza tra i due conduttori è quindi pari a:

$$f_l = \frac{F}{l_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_1 i_2}{d}.$$

La relazione sopra ricavata è utilizzata per la definizione dell'unità di misura della grandezza fondamentale dell'elettromagnetismo (Ampère, unità di misura della intensità di corrente elettrica): 1 A è l'intensità di corrente che circolando in due fili rettilinei paralleli posti nel vuoto a distanza di 1 m l'uno dall'altro produce su ciascuno di essi una forza per unità di lunghezza pari a  $2 \times 10^{-7}$  N/m.

### Legge di Ampère

La legge di Ampère è una importante relazione che lega la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa alla corrente  $i$  che circola nel circuito concatenato con tale linea (due linee chiuse sono concatenate quando non possono essere sfilate l'una dall'altra):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i^{(c)}$$

dove  $i^{(c)}$  è la corrente concatenata alla linea  $\Gamma$ . Se la linea  $\Gamma$  concatena più circuiti percorsi dalle correnti  $i_k$ , la legge di Ampère si generalizza all'insieme delle correnti concatenate:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_k i_k^{(c)}$$

dove le correnti si sommano algebricamente, ciascuna con il proprio segno (secondo il proprio verso).

Una dimostrazione semplificata della legge di Ampère considera che il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito, che giace su piani ortogonali al filo, è diretto tangenzialmente rispetto ad una qualsiasi circonferenza con centro nel filo ed ha modulo dato dalla legge di Biot e Savart, pari

a  $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$ . Calcolando la circuitazione lungo una qualsiasi linea chiusa che concatene il filo, anche non piana, si verifica facilmente che il suo valore è pari a  $\mu_0 i$  (per la dimostrazione conviene esprimere  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$  utilizzando un sistema di coordinate cilindriche con origine sul filo); se al contrario la linea non concatene il filo, è immediato constatare che la circuitazione è nulla. Questo risultato è valido anche se il circuito concatenato non è un filo rettilineo infinito ma un circuito di geometria qualsiasi. La legge di Ampère ha una corrispondente formulazione locale, che si ottiene applicando il teorema di Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = \mu_0 i^{(c)} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{u}_n dS$$

da cui si ricava:

$$\text{rot } \vec{B} := \mu_0 \vec{j}.$$

In particolari condizioni di simmetria la legge di Ampère può essere utilizzata per il calcolo del modulo del campo magnetico, note le correnti nei circuiti. Ad es., un solenoide infinito (molto lungo), gode di invarianza rotazionale attorno all'asse del solenoide e di invarianza traslazionale lungo il suo asse. A valle di alcune considerazioni preliminari che utilizzano la legge di Ampère e la solenoidalità di  $\vec{B}$  per mostrare che l'unica componente di  $\vec{B}$  è quella parallela all'asse del solenoide, ed è diversa da zero solo al suo interno), si ricava per il campo magnetico all'interno del solenoide:

$$B = \mu_0 n i$$

essendo  $n$  il numero di spire per unità di lunghezza e avendo scelto una circuitazione rettangolare con un lato  $l$  parallelo all'asse del solenoide ed interno ad esso e l'altro parallelo ed esterno (concatenante una corrente totale pari a  $N_s i$ ;  $n=N_s/l$ ). Si osserva che il campo magnetico, nell'attraversare la superficie del solenoide, subisce una discontinuità  $\Delta B = \pm \mu_0 n i$ . Questa discontinuità è sempre presente ogniqualvolta  $\vec{B}$  attraversa una distribuzione superficiale di corrente (ad es., un piano di corrente).

### Sorgenti del campo magnetico

Da quanto sopra esposto, in particolare dalla prima formula elementare di Laplace, è evidente che le sorgenti dei campi magnetici sono le correnti, ovvero le cariche in movimento. Anche nel caso di magneti naturali, dove fenomenologicamente si possono considerare i poli magnetici come sorgenti del campo magnetico, una analisi a livello microscopico mostra come il campo magnetico generato sia legato alle correnti atomiche nel materiale.

E' possibile dimostrare, utilizzando alcune identità vettoriali (partendo ad es. dalla prima formula di Laplace), che il campo magnetico generato da una corrente è solenoidale, ovvero che vale, ovunque nello spazio, la relazione (legge di Gauss per il magnetismo):

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Nei magneti naturali, d'altronde, si è già osservato che non è possibile separare i due poli magnetici. Poiché la forza magnetica è legata ai poli da una relazione di proporzionalità inversa al quadrato della distanza (legge di Coulomb per il magnetismo), ragionamenti analoghi a quelli fatti in elettrostatica portano a concludere che il flusso del campo magnetico attraverso qualsiasi superficie chiusa contenente poli magnetici è sempre nullo, proprio perché i poli si presentano sempre a coppie (nord-sud) non separabili.

Per il campo  $\vec{B}$ , sia nel vuoto che nella materia, valgono quindi sempre le relazioni (in forma integrale e locale):

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

dove  $S$  è una qualsiasi superficie chiusa. Essendo solenoidale, le linee di flusso di  $\vec{B}$  sono linee chiuse.

### Moto di cariche in campi magnetici

Su una carica in movimento con velocità  $\vec{v}$  in un campo elettrostatico e magnetico agiscono le forze del campo  $\vec{E}$  e quelle dovute al campo  $\vec{B}$ , che si sommano vettorialmente. In generale risulta:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Integrando l'equazione del moto con le condizioni iniziali si può ricavare la traiettoria della particella carica. Un caso di particolare interesse è quando la carica  $q$  è iniettata in una regione di spazio in cui è presente solo un campo magnetico, con velocità  $\vec{v}$  ortogonale a  $\vec{B}$ . Uguagliando l'accelerazione prodotta dalla forza di Lorentz ( $qvB/m$ ) con quella centripeta ( $v^2/R$ ) si ricava il raggio  $R$  della traiettoria circolare su cui si muove la carica. Se il campo  $\vec{B}$  è sufficientemente esteso nello spazio, la particella carica si muove di moto circolare uniforme con raggio:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

proporzionale alla velocità  $v$ . Il periodo di rotazione  $T = 2\pi R/v$  risulta indipendente dalla velocità, così come lo è la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

Questo tipo di moto ha particolare rilevanza per il funzionamento di alcuni acceleratori di particelle cariche, detti ciclotroni. Un ciclotrone è formato da due cavità semicilindriche metalliche a forma di D affacciate, immerse in un campo magnetico  $\vec{B}$  assiale. Tra le due cavità è applicata una differenza di potenziale sinusoidale,  $\Delta V = \Delta V_0 \cos \omega_{RF} t$ , con  $\omega_{RF}$  pulsazione del segnale di tensione a radiofrequenza. Lo ione di massa  $m$  e carica  $q$  è generato al centro della struttura e, accelerato attraverso la differenza di potenziale  $\Delta V_0$ , entra in una delle due cavità dove, in presenza di  $\vec{B}$ , si muove di moto circolare uniforme compiendo una semicirconferenza di raggio  $R_1 = \frac{mv_1}{qB}$ , dove  $v_1 = (\frac{2q\Delta V_0}{m})^{1/2}$ . Se, al termine del percorso semicircolare, trova la differenza di potenziale invertita, è di nuovo accelerato dal campo elettrico e iniettato nell'altra cavità con velocità  $v_2 = \sqrt{2}(\frac{2q\Delta V_0}{m})^{1/2}$ , dove si muove su una semicirconferenza di raggio  $R_2 = \frac{mv_2}{qB} > R_1$ . Poiché il periodo di rotazione e la velocità angolare sono indipendenti dalla velocità lineare  $v$ , il tempo di percorrenza della semicirconferenza è sempre lo stesso, indipendentemente dalla velocità lineare e dal raggio. Se la differenza di potenziale è invertita con frequenza pari a quella con cui lo ione percorre la semicirconferenza, ad ogni semigiro subirà un aumento di velocità lineare, fino a quando, raggiunto un raggio pari a quello massimo  $R_{Max}$ , sarà estratto tangenzialmente. La condizione di sincronismo è data da:

$$\omega_{RF} = \omega_c = \frac{qB}{m}$$

e la quantità  $\frac{qB}{m}$  viene anche detta pulsazione di ciclotrone (per il particolare ione). Risulta inoltre che la massima velocità è legata al raggio massimo  $R_{Max}$ , oltre che al valore del campo  $B$ :

$$v_{Max} = \frac{qBR_{Max}}{m}.$$

Conseguono la massima energia cinetica  $K_{Max} = \frac{(qBR_{Max})^2}{2m}$  e il numero di giri effettuato dallo ione, pari a  $N_g = \frac{K_{Max}}{2q\Delta V_0} = \frac{q(BR_{Max})^2}{4m\Delta V_0}$ . Le massime energie a cui si riesce ad accelerare un protone sono dell'ordine di 20 MeV. All'aumentare della velocità diventano infatti importanti le variazioni della massa, che modificano la frequenza di ciclotrone (diminuisce), facendo perdere il sincronismo. Si può tener conto di questo effetto modificando nel tempo la frequenza  $\omega_{RF}$  o modulando radialmente l'intensità del campo magnetico  $B$ ; in questo modo si possono accelerare i protoni fino a circa 500 MeV.

### **Effetto Hall**

L'effetto Hall si ha quando un conduttore, percorso da corrente  $i$  stazionaria, è immerso in un campo  $\vec{B}$  ortogonale alla direzione della corrente. Se si considera un conduttore a forma di nastro sottile (con sezione rettangolare) percorso da corrente nel verso di  $\vec{u}_y$ , e un campo  $\vec{B}$  orientato come  $\vec{u}_z$  ortogonale al lato più lungo della sezione rettangolare (orientato come  $\vec{u}_x$ ), la forza di Lorentz sui portatori di carica genera un campo elettromotore pari a  $\vec{E}_m = \frac{JB}{Nq}\vec{u}_x$ , dove  $N$  è il numero di portatori per unità di volume nel filo e  $q$  la carica (dotata di segno) del singolo portatore. Se la conduzione è dovuta a portatori con carica positiva, questi saranno spinti verso il bordo di destra del nastro; se la conduzione è dovuta a portatori con carica negativa, come nei metalli, gli elettroni saranno spinti verso il bordo di destra e sul bordo di sinistra si avrà un accumulo di cariche positive. All'equilibrio, in condizioni stazionarie, il campo elettromotore sarà bilanciato da un campo eletrostatico  $\vec{E}_s$  eguale e contrario:

$$\vec{E}_s = -\vec{E}_m = -\frac{JB}{Nq}\vec{u}_x.$$

La differenza di potenziale di Hall tra i due bordi del nastro largo  $d$ , scegliendo come potenziale di riferimento quello del bordo sinistro in  $x=0$ , è pari a:

$$\Delta V_H = \frac{JBd}{Nq}.$$

Dal segno della tensione di Hall è possibile stabilire il segno dei portatori di carica (positivo o negativo). Inoltre tale effetto può essere sfruttato per realizzare sonde per la misura di campo magnetico, noto il coefficiente di proporzionalità tra tensione di Hall e campo magnetico, ovvero note le caratteristiche del nastro ed il valore di corrente in esso circolante.

### **Equivalenza tra una spira circolare percorsa da corrente e un ago magnetico**

L'equivalenza tra spire percorse da corrente e aghi magnetici, valida agli effetti esterni, consiste nel dimostrare che: (i) spira e ago generano lo stesso campo magnetico; (ii) spira e ago, immersi in un campo magnetico esterno, sono soggetti alla stessa forza e allo stesso momento meccanico.

Per la dimostrazione del punto (i) si calcola il campo magnetico sull'asse della spira, da confrontare con quello prodotto dall'ago magnetico lungo il suo asse. E' opportuno introdurre il momento magnetico della spira  $\vec{m}_s$ , vettore il cui modulo è dato dal prodotto della corrente  $i$  per la superficie

$S$  della spira, diretto come l'asse della spira con verso legato a quello della corrente circolante dalla regola della mano destra (corrente orientata come le dita, momento orientato come il pollice):

$$\vec{m}_s = i S \vec{u}_z$$

e il momento magnetico dell'ago  $\vec{m}_a$ , definito come il prodotto dell'intensità del polo  $p$  per la distanza  $l$  tra i poli, orientato come l'ago (che assumiamo verticale) dal polo sud al polo nord:

$$\vec{m}_a = p l \vec{u}_z.$$

Il campo magnetico lungo l'asse della spira di raggio  $R$  a distanza  $d$  dal centro si calcola a partire dalla prima formula di Laplace, sommando tutti i contributi elementari  $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\overrightarrow{dl} \times \overrightarrow{u_r}}{R^2 + d^2}$  e riconoscendo che le componenti del campo magnetico ortogonali all'asse si annullano a coppie se si considerano elementi di corrente simmetrici lungo la spira circolare. Il campo risultante è dato da:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_s}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \vec{u}_z \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_s}{d^3} \vec{u}_z$$

dove l'ultima approssimazione vale per  $d \gg R$ .

Per l'ago magnetico, sommando i campi prodotti dai due poli (di segno opposto), prendendo come origine il punto di mezzo tra i due poli, si ha a distanza  $d \gg R$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{p}{(d - \frac{l}{2})^2} - \frac{p}{(d + \frac{l}{2})^2} \right] \vec{u}_z \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{pl}{d^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_a}{d^3} \vec{u}_z$$

Dal confronto tra le due espressioni si ricava l'uguaglianza tra i campi magnetici generati, a parità di valore del dipolo magnetico ( $m_s = m_a$ ).

Per la dimostrazione del punto (ii) si calcolano la forza complessiva che agisce sulla spira e quella che agisce sull'ago immersi in un campo esterno  $\vec{B}_{ext}$ , che si assume per semplicità uniforme. La forza complessiva che agisce sulla spira (seconda formula di Laplace) è nulla, essendo  $\vec{B}_{ext}$  costante:

$$\vec{F} = i \oint_{\Gamma} \overrightarrow{dl} \times \vec{B}_{ext} = (i \oint_{\Gamma} \overrightarrow{dl}) \times \vec{B}_{ext} = 0$$

La forza che agisce sull'ago è anch'essa nulla, essendo i poli magnetici di segno opposto (nord-sud):

$$\vec{F} = p \vec{B}_{ext} - p \vec{B}_{ext} = 0.$$

Sulla spira agisce inoltre un momento meccanico  $\vec{M}$ , che si può calcolare assumendo un campo magnetico esterno orizzontale giacente sul piano del foglio ed una spira quadrata di lati  $a, b$  che ruota intorno ad un asse di simmetria verticale. Sui quattro lati della spira agiscono forze uguali ed opposte sui due lati  $b$  orizzontali (dirette verso l'alto e verso il basso, a risultante nulla), e forze uguali ed opposte sui due lati  $a$ , agenti su un piano orizzontale, che generano un momento meccanico in grado di far ruotare la spira fino alla posizione di equilibrio in cui la sua normale risulta allineata con il campo  $\vec{B}_{ext}$ . Detto  $\vartheta$  l'angolo tra la normale al piano della spira ed il campo  $\vec{B}_{ext}$ , si ricava che:

$$M = Fb \sin\vartheta = iaB_{ext}b \sin\vartheta = m_s B_{ext} \sin\vartheta \Rightarrow \vec{M} = \vec{m}_s \times \vec{B}_{ext}.$$

Anche sull'ago magnetico agisce un momento meccanico dato da:

$$M = pBl \sin\theta = (pl)B \sin\theta = m_a B \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \vec{m}_a \times \vec{B}_{ext} .$$

A parità di momento magnetico ( $m_s = m_a$ ), risultano uguali i momenti meccanici.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 12. MAGNETOSTATICA NEI MEZZI MATERIALI

#### INTERPRETAZIONE FISICA DEL DIAMAGNETISMO E DEL PARAMAGNETISMO NELLA MATERIA

Le proprietà magnetiche della materia sono determinate dalla struttura degli atomi, ed in particolare dal moto degli elettroni. Una semplice modellizzazione si basa sul modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, in cui un elettrone di massa  $m_e$  e carica  $-e$  ruota con traiettoria circolare di raggio  $R$  attorno al nucleo con velocità  $v$  e periodo  $T = 2\pi R/v$ . Il moto dell'elettrone equivale a una spira di corrente che circola in verso opposto a quello di rotazione:

$$i = \frac{e}{T}$$

L'elettrone in rotazione possiede un momento angolare orbitale  $\vec{L}_o$  e un momento magnetico orbitale  $\vec{m}_o$  pari in modulo a:

$$\begin{aligned} L_o &= m_e v R \\ m_o &= \pi R^2 i. \end{aligned}$$

Dalle precedenti equazioni si ricava immediatamente che momento angolare e momento magnetico orbitale dell'elettrone, diretti ortogonalmente al piano di rotazione, sono proporzionali:

$$\vec{m}_o = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_o$$

ed hanno verso opposto a causa del segno negativo della carica dell'elettrone. Il coefficiente di proporzionalità  $-e/2m_e$  prende il nome di fattore giromagnetico.

Poiché l'elettrone, oltre al moto di rotazione attorno al nucleo, ruota anche su se stesso attorno al proprio asse con un moto detto di spin, è possibile definire (in questo caso la teoria classica dà risultati non corretti ed è necessario utilizzare la meccanica quantistica) un momento angolare di spin  $\vec{L}_s$  e un momento magnetico di spin  $\vec{m}_s$ , tra loro legati da una relazione di proporzionalità simile alla precedente:

$$\vec{m}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_s$$

dove il fattore di proporzionalità  $-e/m_e$  (che differisce dal caso orbitale per la mancanza del fattore  $\frac{1}{2}$ ) rappresenta il fattore giromagnetico intrinseco.

In atomi con più elettroni il momento magnetico totale dipende dall'accoppiamento tra i momenti magnetici orbitali e quelli di spin degli elettroni ed è generalmente determinato dai momenti magnetici di spin degli elettroni non accoppiati appartenenti agli orbitali più esterni. A seconda dei casi, gli atomi possono pertanto avere momento magnetico totale uguale a zero (orbitali simmetrici e numero totale di elettroni pari) o momento magnetico totale diverso da zero (orbitali non simmetrici e/o numero totale di elettroni dispari).

Se tuttavia si considera un volumetto infinitesimo di sostanza, che contiene comunque un elevatissimo numero di atomi, a causa dell'orientazione casuale del momento magnetico dei singoli

atomi (nel caso in cui esso sia diverso da zero), il momento magnetico complessivo, dato dalla somma vettoriale di tutti i momenti magnetici atomici, è comunque nullo in ogni caso, indipendentemente dal tipo di atomo. In condizioni normali i materiali non presentano pertanto un momento magnetico proprio a livello macroscopico (con l'eccezione dei materiali ferromagnetici magnetizzati).

In presenza di un campo magnetico esterno, invece, i comportamenti delle sostanze differiscono sostanzialmente a seconda del valore del momento magnetico totale degli atomi che la costituiscono.

(a) atomi con momento magnetico totale nullo (diamagnetismo).

Esaminiamo gli effetti del campo magnetico sul momento magnetico orbitale. La presenza di un campo magnetico esterno  $\vec{B}_{ext}$  produce una forza magnetica (forza di Lorentz) sull'elettrone in rotazione. Se per semplicità assumiamo che la direzione di  $\vec{B}_{ext}$  sia ortogonale al piano di rotazione, tale forza ha direzione radiale, e si somma (se  $\vec{B}_{ext}$  e  $\vec{m}_o$  hanno verso opposto) o si sottrae (se sono equiversi) alla forza centripeta, data dalla forza attrattiva di Coulomb tra elettrone e nucleo. Poiché la forza di Lorentz costituisce una perturbazione della forza centripeta, essenzialmente dovuta alla forza attrattiva coulombiana, si può scrivere:

$$evB_{ext} = \Delta \left( m_e \frac{v^2}{R} \right) = 2m_e v \Delta v / R.$$

Assumendo che il raggio R dell'orbita resti invariato, si ha una variazione della velocità lineare  $\Delta v$  e della velocità angolare  $\Delta\omega$  dell'elettrone (positiva se  $\vec{B}_{ext}$  e  $\vec{m}_o$  hanno verso opposto, negativa se equiversi):

$$\frac{\Delta v}{R} = \Delta\omega = \frac{eB_{ext}}{2m_e}$$

a cui corrisponde una variazione  $\Delta i$  della corrente equivalente ed una variazione  $\Delta\vec{m}_o$  del momento magnetico orbitale che, in ambedue i casi, ha sempre verso opposto a  $\vec{B}_{ext}$ .

Se la direzione del campo magnetico  $\vec{B}_{ext}$  non è ortogonale al piano di rotazione, si può mostrare che si crea un momento meccanico che provoca un moto di precessione dell'asse di rotazione dell'elettrone (ovvero di  $\vec{m}_o$ ) rispetto a  $\vec{B}_{ext}$  con velocità angolare  $\Delta\omega$ . Per questo motivo tale fenomeno prende il nome di precessione di Larmor.

Se consideriamo un materiale omogeneo ed isotropo, le variazioni di momento magnetico di ciascun atomo, tutte uguali e con verso opposto a  $\vec{B}_{ext}$ , si sommano per dare un momento magnetico macroscopico che produce a sua volta un campo magnetico indotto che si oppone a  $\vec{B}_{ext}$ . All'interno del materiale il campo magnetico complessivo diminuisce. Tale fenomeno è denominato diamagnetismo.

(b) atomi con momento magnetico totale diverso da zero (paramagnetismo).

Il momento magnetico totale dei singoli atomi tende ad orientarsi nel campo magnetico esterno, disponendosi parallelamente a  $\vec{B}_{ext}$ . Questo allineamento è contrastato dal moto di agitazione termica, che tende a orientare casualmente i momenti magnetici atomici. Poiché la massima variazione di energia potenziale magnetica  $\Delta U_m$  associata al singolo momento magnetico atomico, tra orientamento perfettamente parallelo e antiparallelo a  $\vec{B}_{ext}$ , è data da  $\Delta U_m = 2mB_{ext} \ll kT$  a temperatura ambiente, solo una piccola frazione dei momenti magnetici atomici risulta orientata,

anche per valori di campo magnetico relativamente elevati. Sommando vettorialmente tali contributi, si produce tuttavia un momento magnetico a livello macroscopico che dà origine ad un campo magnetico indotto nel materiale che si somma a  $\vec{B}_{ext}$ . All'interno del materiale il campo magnetico complessivo aumenta. Tale fenomeno va sotto il nome di paramagnetismo.

Tutti gli atomi, immersi in un campo magnetico esterno, subiscono il fenomeno della precessione di Larmor e pertanto tutte le sostanze hanno un comportamento diamagnetico. Gli effetti del paramagnetismo, presenti negli atomi con momento magnetico proprio diverso da zero, sono tuttavia quantitativamente più rilevanti (circa un fattore dieci) di quelli del diamagnetismo, che può quindi in tal caso essere trascurato.

Le sostanze formate da atomi (o molecole) con momento magnetico diverso da zero sono quindi dette paramagnetiche, ed in esse il campo magnetico totale risulta (lievemente) maggiore di quello esterno in cui sono immerse,  $B > B_{ext}$ .

Le sostanze formate da atomi con momento magnetico nullo sono dette diamagnetiche, ed in esse il campo magnetico totale risulta (lievemente) minore del campo magnetico esterno in cui sono poste,  $B < B_{ext}$ .

#### **MODELLIZZAZIONE DEL MAGNETISMO NELLA MATERIA**

Per trattare dal punto di vista quantitativo su scala macroscopica i fenomeni magnetici nella materia è conveniente introdurre un vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  il cui modulo è pari al rapporto tra il momento magnetico complessivo degli atomi contenuti in un volumetto infinitesimo  $\Delta\tau$  ed il volumetto  $\Delta\tau$ , la cui direzione (per un materiale isotropo) è quella del campo magnetico inducente ed il cui verso è determinato da quello dei momenti magnetici degli atomi (equiverso a  $\vec{B}_{ext}$  per materiali paramagneticci; opposto a  $\vec{B}_{ext}$  per materiali diamagneticci):

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{N \vec{m} \Delta\tau}{\Delta\tau}$$

dove  $N$  è il numero di atomi per unità di volume e  $\vec{m}$  il momento magnetico complessivo del singolo atomo.

Si è già mostrato l'equivalenza tra un ago magnetico ed una spira percorsa da corrente. Il momento magnetico associato a ciascun atomo è pertanto equivalente ad una spira elementare percorsa da corrente e il materiale risulta quindi modellizzabile come un insieme di spire (uguali) percorse da corrente (atomica). Se si considera per semplicità il materiale composto da una serie di piani paralleli successivi con gli orbitali atomici giacenti su tali piani, risulta che le correnti relative ad atomi adiacenti si annullano reciprocamente all'interno del materiale, avendo verso discorde, mentre si sommano i contributi alla corrente relativa agli atomi disposti lungo il bordo del materiale su ciascun piano. Si può pertanto modellizzare la presenza dei momenti magnetici atomici con una serie di spire di corrente (correnti atomiche di magnetizzazione) che scorrono lungo la superficie esterna del materiale. Se ad esempio il materiale ha forma cilindrica, con il vettore magnetizzazione parallelo all'asse del cilindro, le correnti atomiche di magnetizzazione si avvolgono in anelli attorno alla superficie laterale del cilindro. E' importante sottolineare che le correnti di magnetizzazione non sono correnti reali e non sono fisicamente utilizzabili, ma costituiscono un utile strumento di modellizzazione. In presenza di materiali e quindi di correnti atomiche di magnetizzazione la legge della circuitazione di Ampère si modifica di conseguenza, prendendo in considerazione, oltre alle correnti concatenate di conduzione  $i_k^{(c)}$ , anche quelle di magnetizzazione:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( \sum_k i_k^{(c)} + \sum_k i_{at,k}^{(c)} \right)$$

dove  $i_{at,k}^{(c)}$  rappresenta la k-esima corrente atomica di magnetizzazione concatenata con la linea  $\Gamma$ . In forma locale si ottiene dalla precedente relazione (utilizzando il teorema di Stokes):

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{at})$$

con  $\vec{j}_{at}$  densità di corrente atomica di magnetizzazione.

Consideriamo ora in particolare un materiale di forma cilindrica inserito in un solenoide percorso da corrente  $i$ . All'interno del solenoide nel materiale è presente un campo magnetico  $B$ , ed una magnetizzazione  $M$ . Se consideriamo una linea  $\Gamma$  rettangolare con due lati paralleli all'asse del cilindro di cui uno interno e l'altro esterno, applicando la legge di Ampère (come già mostrato per il caso di solenoide nel vuoto) si ottiene:

$$B = \mu_0 (ni + n_{at} i_{at})$$

dove  $n_{at}$  è il numero di spire di corrente di magnetizzazione per unità di lunghezza. Essendo presente una magnetizzazione nel cilindro di materiale (omogeneo), possiamo esprimere il suo momento magnetico complessivo come  $m_{mat} = M\tau = MAh$ , essendo  $\tau, A, h$  rispettivamente il volume, la superficie di base e l'altezza del cilindro di materiale. Il momento magnetico complessivo può anche essere espresso in funzione delle correnti di magnetizzazione  $i_{at}$ , mediante la relazione  $m_{mat} = (Ai_{at})(n_{at}h)$ . Uguagliando le due espressioni, si ricava  $M = n_{at}i_{at}$  e quindi si ottiene:

$$B = \mu_0 (ni \pm M)$$

dove il segno positivo vale per i materiali paramagnetici (le correnti di magnetizzazione hanno lo stesso verso di quelle di conduzione) e quello negativo per i materiali diamagnetici (le correnti di magnetizzazione hanno verso opposto). E' possibile scrivere, anche per il vettore magnetizzazione, una legge simile a quella di Ampère, considerando una circuitazione rettangolare con due lati di lunghezza  $w$  paralleli all'asse del cilindro, uno interno ed uno esterno. Poiché la magnetizzazione è nulla fuori dal materiale, si ricava facilmente:

$$\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{l} = Mw = n_{at} i_{at} w$$

ovvero

$$\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_k i_{at,k}^{(c)} .$$

La equivalente relazione locale (che si ottiene mediante il teorema di Stokes) è data da:

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{at}.$$

La magnetizzazione  $M$  è quindi legata alle sole correnti atomiche di magnetizzazione, mentre il campo magnetico  $B$  nel materiale dipende, in generale, sia dalle correnti di conduzione che da quelle di magnetizzazione. E' conveniente introdurre il vettore  $\vec{H}$  (a volte detto forza magnetica) che dipende esclusivamente dalle correnti di conduzione. Possiamo infatti scrivere:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{at}) = \mu_0 (\vec{j} + \operatorname{rot} \vec{M}),$$

da cui si ricava:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}.$$

Ponendo  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  si ottiene:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

e, in forma integrale

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k i_k^{(c)} .$$

La precedente relazione, nel caso di un materiale cilindrico inserito in un solenoide, fornisce una utile espressione per il modulo del campo  $\vec{H}$ , che risulta legato alle sole correnti di conduzioni:

$$H = ni.$$

Le grandezze  $M$  e  $H$  hanno le stesse dimensioni ( $\text{Am}^{-1}$ ).

Per i materiali paramagnetici e diamagnetici si verifica sperimentalmente che i campi  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  sono proporzionali, oltre che nel vuoto (dove  $\vec{M} = 0$ ), anche nel materiale. Si può quindi scrivere:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

dove  $\mu_r$  è la permeabilità magnetica relativa (adimensionale) e  $\mu = \mu_0 \mu_r$  è la permeabilità magnetica del materiale. Consegue che anche  $\vec{M}$  è proporzionale a  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

con  $\chi_m = \mu_r - 1$  suscettività magnetica del materiale. Per i materiali paramagnetici e diamagnetici, in generale,  $\mu_r$  e  $\chi_m$  sono funzioni del punto, ma non dipendono da  $B$ , ovvero questi materiali sono lineari (se sono anche omogenei,  $\mu_r$  e  $\chi_m$  sono costanti nel materiale). I valori di  $\mu_r$  sono leggermente  $> 1$  ( $\chi_m > 0$ ) per i materiali paramagnetici e leggermente  $< 1$  ( $\chi_m < 0$ ) per i materiali diamagnetici. Alcuni esempi di materiali paramagnetici sono magnesio ( $\chi_{m,Mg} = 1.2 \times 10^{-5}$ ), alluminio ( $\chi_{m,Al} = 2.1 \times 10^{-5}$ ), ossigeno ( $\chi_{m,O_2} = 2 \times 10^{-6}$  alla pressione di 1 bar); alcuni esempi di materiali diamagnetici sono oro ( $\chi_{m,Au} = -3.4 \times 10^{-6}$ ), argento ( $\chi_{m,Ag} = -2.4 \times 10^{-6}$ ), acqua ( $\chi_{m,H_2O} = -9 \times 10^{-6}$ ), idrogeno ( $\chi_{m,H_2} = -2 \times 10^{-9}$ , alla pressione di 1 bar).

Con l'introduzione della costante dielettrica relativa  $\mu_r$  le leggi della magnetostatica (formula di Ampère-Laplace; legge di Ampère) rimangono le stesse pur di sostituire la permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$  con quella del materiale  $\mu = \mu_0 \mu_r$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} i \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3};$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r \sum_k i_k^{(c)} .$$

### **FERROMAGNETISMO (CENNI).**

Il ferromagnetismo riguarda una importante classe di materiali (ferro, cobalto, nickel, disporio, gadolinio e alcuni loro composti) per i quali il campo magnetico nel materiale assume valori enormemente maggiori di quelli che normalmente si possono ottenere nel vuoto.

Gli effetti ferromagnetici sono interpretabili correttamente solo utilizzando la meccanica quantistica: esistono interazioni tra gli spin degli elettroni (interazioni di scambio) per cui i momenti magnetici di atomi vicini si allineano accoppiandosi e producendo all'interno del materiale regioni macroscopiche (con dimensioni lineari di decine o centinaia di micron), dette domini di Weiss, che presentano un significativo momento magnetico complessivo. Nei materiali ferromagnetici mai magnetizzati (detti vergini) direzione e verso dei momenti magnetici dei domini di Weiss hanno orientazione casuale, per cui il momento magnetico totale risulta nullo. Inserendo il materiale in un campo magnetico esterno, ad esempio all'interno di un solenoide, i domini di Weiss con momento di dipolo magnetico concorde con il campo magnetico esterno espandono la propria frontiera a discapito degli altri, incrementando il proprio momento magnetico. La magnetizzazione risultante, concorde con il campo magnetico esterno generato dalla corrente che circola nel solenoide, può essere tale da produrre un campo magnetico nel materiale anche migliaia di volte superiore a quello che la stessa corrente genererebbe con il solenoide nel vuoto.

Riducendo e poi azzerando la corrente resta un parziale allineamento dei momenti magnetici del materiale, che diventa così un magnete permanente. Il campo magnetico nel materiale si può azzerare invertendo il senso di circolazione della corrente nel solenoide.

Al di sopra di una certa temperatura, detta temperatura di Curie, il moto di agitazione termica diventa talmente intenso da contrastare le interazioni di scambio che allineano i momenti magnetici, ed il materiale perde il suo carattere ferromagnetico comportandosi come un normale materiale paramagnetico. Per il ferro la temperatura di Curie è pari a 1043 K, ovvero 770 °C.

Per i materiali ferromagnetici, l'andamento di  $B$  in funzione di  $H$  non è lineare, ma dipende dal valore e dal verso della corrente e dalla storia pregressa del materiale. Le curve  $B - H$  presentano pertanto cicli di isteresi e la costante dielettrica relativa  $\mu_r$  varia in funzione di  $H$  e dello specifico ciclo; al di sopra di un certo valore di  $H$ , quando praticamente tutti i momenti magnetici risultano allineati,  $\mu_r$  e  $\chi_m$  diventano costanti. Partendo da un materiale vergine ed aumentando la corrente nel solenoide aumenta  $H$  e, di conseguenza, aumenta (in modo non lineare) il campo  $B$  nel materiale. Si ottiene così la curva di prima magnetizzazione. Facendo diminuire la corrente decrescono  $H$  e  $B$ ; annullando  $H$  resta un campo  $B$  dovuto alla magnetizzazione residua, detto induzione magnetica residua. Invertendo il verso della corrente il campo  $B$  si annulla per un valore negativo di  $H$  detto forza magnetica coercitiva. Invertendo nuovamente la corrente  $H$  torna a crescere, diventando positivo, e la curva di magnetizzazione si chiude completando un ciclo (detto ciclo di isteresi del materiale). I materiali con ciclo di isteresi largo, ovvero con elevati valori di induzione magnetica residua e di forza magnetica coercitiva, sono detti duri (ad esempio, i magneti permanenti). I materiali con ciclo di isteresi stretto, ovvero con comportamento più vicino ad un materiale lineare (ancorché dotato di isteresi) sono detti dolci.

### RIFRAZIONE DELLE LINEE DI FORZA DEL CAMPO MAGNETICO

All'interfaccia tra due materiali con diversa permeabilità magnetica, in assenza di correnti di conduzione, si dimostra facilmente che si conservano la componente normale del campo magnetico  $\vec{B}$  (risulta infatti  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ) e la componente tangente di  $H$  ( $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ , essendo nulle le correnti di conduzione). Ne risulta la relazione che governa la variazione delle linee di forza di  $\vec{B}$  all'interfaccia tra due materiali ( $\vartheta$  è l'angolo che  $\vec{B}$  forma con la normale all'interfaccia):

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta_1}{\operatorname{tg} \vartheta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}.$$

Se il secondo mezzo ha permeabilità magnetica molto più alta del primo (ad esempio, materiale ferromagnetico in aria) le linee di forza di  $\vec{B}$  nel materiale diventano quasi tangenti alla superficie di separazione.



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 13. INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

#### LEGGE DI FARADAY-LENZ

A partire da una serie di osservazioni sperimentali Faraday (contemporaneamente a Lenz) ricavò, nel 1831, la legge dell'induzione elettromagnetica. Le osservazioni sperimentali sono le seguenti:

- a) Moto relativo di un magnete e di un circuito elettrico (spira): avvicinando o allontanando il magnete dalla spira, si osserva una corrente (indotta) nella spira. La corrente si inverte se si invertono i poli del magnete o se si inverte il verso del moto (avvicinamento/allontanamento).
- b) Spira deformabile in presenza di un campo magnetico costante: deformando la spira nel campo magnetico si osserva una corrente (indotta) nella spira stessa.
- c) Spira ferma in presenza di un campo magnetico variabile nel tempo: variando il campo magnetico in funzione del tempo, si osserva una corrente (indotta) nella spira.

Nelle prime due situazioni a) e b), in cui la spira è in moto relativo rispetto al magnete, è possibile ricondurre l'interpretazione del fenomeno (scegliendo opportunamente il sistema di riferimento) alla presenza della forza di Lorentz sui portatori di carica liberi nella spira in movimento, che produce un campo elettromotore responsabile della circolazione della corrente.

Nell'ultimo caso c) in cui la spira è ferma in un campo  $\vec{B}(t)$  variabile, la fenomenologia è totalmente nuova e deve essere interpretata associando un campo elettrico non conservativo (campo elettromotore) al campo magnetico variabile nel tempo.

L'insieme dei fenomeni sopra descritti trova una interpretazione unitaria nella seguente legge dell'induzione elettromagnetica, detta legge di Faraday – Lenz:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS)}{dt}.$$

Nella relazione sopra riportata  $\mathcal{E}_{ind}$  è la forza elettromotrice indotta agente lungo il circuito (la spira) e  $\Phi(\vec{B})$  è il flusso del campo  $\vec{B}$  attraverso una qualsiasi superficie  $S$  che si appoggia alla spira. Quando il circuito o parte di esso sono in moto rispetto al campo magnetico, alcune linee di forza del campo  $\vec{B}$  sono intercettate dalla parte mobile del circuito e la variazione di flusso di  $\vec{B}$  attraverso la spira nel tempo  $dt$  è pari al flusso attraverso la superficie spazzata dal contorno del circuito in  $dt$ , definito per l'appunto flusso "tagliato"; quando il circuito è fisso e varia nel tempo il campo magnetico al suo interno, la variazione di flusso di  $\vec{B}$  nel tempo  $dt$  è dovuta solo alla variazione di campo magnetico (la superficie resta fissa) e si parla in tal caso di variazione di flusso "concatenato". Il segno negativo (legge di Lenz) sta ad indicare che in tutti i casi la corrente indotta ha verso di circolazione tale da generare a sua volta un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso. Ad es, se il magnete si avvicina alla spira, il verso della corrente è tale da indurre un campo magnetico che respinge il magnete.

Significativi esempi di flusso tagliato sono i seguenti:

- 1) Spira (quadrata) che è estratta da un campo magnetico  $\vec{B}$  ortogonale alla spira con velocità  $\vec{v}$ . Si può mostrare che lungo il lato immerso nel campo magnetico ortogonale alla direzione del moto agisce una forza di Lorentz che produce un campo elettromotore  $E_m = vB$ . Tale campo elettromotore genera una forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}_{ind} = vBl$ , dove  $l$  è il lato della spira. Allo stesso risultato si perviene direttamente applicando la legge di Faraday-Lenz. Poiché nella spira (che si suppone abbia resistenza  $R$ ) circola di conseguenza una corrente,

si può verificare che sulla spira agisce una forza  $F = \nu l^2 B^2 / R$  che si oppone al moto della spira. Per poter estrarre la spira dal campo magnetico con velocità  $\vec{\nu}$  costante è necessario quindi applicare una forza uguale e contraria, nella direzione e verso del moto, ed è pertanto richiesta una potenza  $P_F = F\nu = \nu^2 l^2 B^2 / R$  uguale a quella dissipata per effetto Joule dalla corrente circolante nella spira, coerentemente con il principio di conservazione dell'energia.

- 2) Spira (rettangolare) di lati  $a, l$ , ruotante con velocità angolare  $\omega$  costante attorno ad un asse fisso parallelo al lato  $l$  e passante per il suo centro in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme, ortogonale all'asse di rotazione. Detto  $\vartheta = \omega t$  l'angolo formato tra la normale alla spira e il campo  $\vec{B}$ , la forza di Lorentz relativa a ciascuno dei due lati  $l$  paralleli all'asse di rotazione produce un campo elettromotore  $E_m = \nu B \sin \omega t = (a/2)\omega B \sin \omega t$ . Questi due campi elettromotori generano una forza elettromotrice indotta lungo la spira  $\mathcal{E}_{ind} = \omega B (al) \sin \omega t = \omega \Phi_{Max} \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . Allo stesso risultato si perviene applicando direttamente la legge di Faraday-Lenz. Se la spira ha resistenza  $R$ , in essa circola una corrente  $i = \mathcal{E}_{ind}/R = (\mathcal{E}_0/R) \sin \omega t$ . Il campo magnetico esterno esercita sulla spira percorsa da corrente (equivalente ad un momento magnetico) un momento meccanico resistente. Per mantenere la spira in rotazione con velocità angolare costante è necessario applicare un momento meccanico esterno uguale e contrario al momento resistente,  $M_{m,est} = i l a B \sin \omega t$ , che fornisce una potenza  $P = \omega M_{m,est} = i l a \omega B \sin \omega t = (l a \omega B \sin \omega t)^2 / R$ , pari alla potenza dissipata per effetto Joule dalla corrente circolante nella spira. Il dispositivo illustrato rappresenta schematicamente il principio di funzionamento di un alternatore.

E' importante osservare che la legge di Faraday-Lenz vale anche nel caso c) sopra considerato, ossia quando il circuito è fisso e il campo magnetico concatenato è variabile nel tempo. La forza elettromotrice indotta generata dalla presenza di un campo magnetico variabile è in tal caso indipendente dalla presenza fisica del circuito (della spira), ovvero la legge di Faraday-Lenz vale per qualsiasi linea  $\Gamma$  fissa nello spazio che concatena un campo  $\vec{B}$  variabile:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = - \frac{d(\int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS)}{dt}.$$

Nell'integrale di superficie sopra riportato la superficie  $S$  è una qualsiasi superficie che ha come contorno la linea  $\Gamma$ . Esprimendo la forza elettromotrice come circuitazione del campo elettromotore, applicando il teorema di Stokes e derivando sotto al segno di integrale, essendo  $\Gamma$  ed  $S$  fissi, si ottiene:

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E}_m \cdot \vec{u}_n dS = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{u}_n dS,$$

da cui si ricava direttamente, considerando le due ultime uguaglianze,  $\text{rot} \vec{E}_m = - \frac{d\vec{B}}{dt}$ . Questo risultato, ottenuto considerando una superficie fissa (non variabile nel tempo) può essere esteso anche al caso più generale di  $\Gamma$  e  $S$  variabili nel tempo.

Se si considera un generico campo elettrico  $\vec{E}$ , l'eventuale contributo della parte elettrostatica  $\vec{E}_s$  è sempre irrotazionale (ovvero  $\text{rot} \vec{E}_s = 0$ ). Risulta pertanto, per ogni campo elettrico  $\vec{E}$ :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

che costituisce la formulazione locale della legge di Faraday-Lenz. Tale equazione indica che ovunque sia presente nello spazio un campo magnetico variabile nel tempo ad esso è sempre associato un campo elettrico non conservativo (in grado di compiere lavoro lungo una linea chiusa).

### MUTUA E AUTO INDUZIONE

Il campo magnetico è prodotto da una corrente circolante in un circuito. La legge di Faraday-Lenz stabilisce quindi una relazione tra le variazioni di corrente in un circuito e gli effetti (la forza elettromotrice indotta) che si vengono a generare in un altro circuito posto in prossimità. Se assumiamo che le leggi della magnetostatica che legano il campo  $\vec{B}$  alle correnti (cioè la prima formula di Laplace e la legge di Ampère) valgano anche in regime non stazionario e assumiamo quindi  $B \propto i$  (per i materiali ferromagnetici per i quali  $\mu_r = \mu_r(B)$  le considerazioni sono più complesse e non vengono qui analizzate), possiamo esprimere il flusso di  $\vec{B}$  concatenato con il secondo circuito come il prodotto di un fattore dipendente solo dalla geometria dei due circuiti e dalla corrente  $i$  che circola nel primo. Nel vuoto, il flusso del campo  $\vec{B}_1$  generato dalla corrente  $i_1$  che circola nel circuito 1 induce un flusso concatenato con il circuito 2 dato da:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \int_{S_2} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_1 \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{u}_n dS = M_{12} i_1$$

dove  $S_2$  è una qualsiasi superficie che si appoggia al circuito 2,  $d\vec{l}$  l'elemento infinitesimo di circuito 1,  $\vec{r}$  il vettore congiungente  $d\vec{l}$  con il generico elemento di superficie  $dS$  sulla superficie  $S_2$  e  $\vec{u}_n$  il versore normale a  $S_2$  in ogni suo punto. Il coefficiente  $M_{12}$  è detto coefficiente di mutua induzione e dipende solo da fattori geometrici relativi ai due circuiti e dalla permeabilità magnetica del vuoto. Analogamente, il flusso del campo  $\vec{B}_2$  generato dalla corrente  $i_2$  che circola nel circuito 2 induce un flusso concatenato con il circuito 1 dato da:

$$\Phi_1(\vec{B}_2) = M_{21} i_2.$$

Si può mostrare che i due coefficienti di mutua induzione  $M_{12}, M_{21}$  sono uguali e scrivere:

$$M = M_{12} = M_{21}$$

Il coefficiente di mutua induzione si misura nel SI in Weber/Ampère ( $\text{Wb A}^{-1}$ ) essendo il Weber l'unità di misura del flusso del campo magnetico ( $\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{V} \cdot \text{s}$ ). Tale unità di misura prende anche il nome di Henry ( $\text{H}$ ) [ $1\text{H} = 1\text{Wb}/1\text{A} = 1 \Omega \cdot \text{s}$ ].

Considerando la legge di Faraday-Lenz e la definizione di coefficiente di mutua induzione, si ottiene per la forza elettromotrice indotta in un circuito (1) a seguito delle variazioni di corrente in un circuito vicino (2):

$$(\mathcal{E}_{ind})_1 = - \frac{d\Phi_1(\vec{B}_2)}{dt} = -M \frac{di_2}{dt} .$$

Un semplice esempio di circuiti accoppiati mediante coefficiente di mutua induzione è rappresentato da una coppia di solenoidi coassiali, con quello interno inserito nella parte centrale di quello con dimensioni maggiori, in modo da assumere per il campo magnetico di quest'ultimo l'approssimazione di solenoide infinito. In questo caso è possibile calcolare facilmente il coefficiente

$M$ , valutando il flusso del campo magnetico generato dal solenoide esterno concatenato con le spire del solenoide interno (non è possibile fare il contrario perché non è noto il campo magnetico esterno prodotto dal solenoide interno). Detti  $N$ ,  $N_{int}$  il numero totale di spire del solenoide esterno e di quello interno,  $l$  la lunghezza del solenoide esterno e  $A$  la superficie trasversale di quello interno, si ottiene  $M = \mu_0 A N N_{int} / l$ , dipendente solo parametri geometrici dei due circuiti.

Variando l'intensità di corrente in un circuito, varia di conseguenza il flusso del campo magnetico da tale corrente generato e concatenato con il circuito stesso. Si introduce in tal caso il coefficiente di auto induzione  $L$ , detto anche induttanza del circuito, definito come il coefficiente di proporzionalità tra la corrente nel circuito ed il flusso del campo magnetico concatenato al circuito:

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

Il coefficiente di auto induttanza si misura in Henry, analogamente a quello di mutua induttanza. Se nel circuito varia l'intensità di corrente  $i$ , dalla legge di Faraday-Lenz si ottiene:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt} .$$

La forza elettromotrice indotta, a causa della presenza del segno negativo (legge di Lenz) ha verso tale da far circolare nel circuito una corrente indotta che di oppone alle variazioni della corrente stessa. Per questo motivo tale forza elettromotrice indotta è anche detta contro-elettromotrice e il coefficiente di auto induzione rappresenta l'inerzia elettrica del circuito, cioè la sua tendenza a mantenere il proprio stato (a non variare l'intensità di corrente). Tanto maggiore è l'induttanza, infatti, tanto maggiore sarà la forza contro-elettromotrice e tanto più difficile risulta variare l'intensità della corrente circolante.

Per un solenoide con  $N$  spire, lunghezza  $l$  e superficie trasversale  $A$  si calcola facilmente che l'induttanza è pari a  $L = \mu_0 A N^2 / l$  e dipende solo dai parametri geometrici del circuito.

L'induttanza di un componente si rappresenta graficamente mediante un piccolo solenoide.

#### COLLEGAMENTO DI INDUTTANZE IN SERIE E PARALLELO

Due o più induttanze collegate in serie sono percorse dalla stessa corrente. L'induttore risultante, ai fini esterni, si comporta come un singolo induttore con induttanza pari alla somma delle induttanze (le forze elettromotrici indotte si sommano,  $\mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_{ind_1} + \mathcal{E}_{ind_2}$ ):

$$L = L_1 + L_2 = \sum_k L_k .$$

Due o più induttanze collegate in parallelo presentano ai loro comuni terminali la stessa forza elettromotrice indotta e sommano le correnti ( $i = i_1 + i_2$ ). L'induttore risultante, ai fini esterni, si comporta come un singolo induttore con induttanza pari al reciproco della somma dei reciproci delle singole induttanze (la forza elettromotrice è la stessa,  $\mathcal{E}_{ind_1} = \mathcal{E}_{ind_2} = \mathcal{E}_{ind}$ , e le variazioni di corrente si sommano):

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \sum_k \frac{1}{L_k} .$$

#### ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA AL CAMPO MAGNETICO

Per far variare la corrente in un circuito è necessario contrastare la forza elettromotrice indotta, legata alla induttanza del circuito stesso. E' quindi necessario inserire nel circuito un generatore di forza elettromotrice (generatore di tensione) che, anche in assenza di resistenza del circuito, ovvero considerando un circuito ideale, fornisce potenza e compie un lavoro per indurre la variazione di

corrente. Tale lavoro del generatore si converte in energia potenziale del campo magnetico generato dalla (variazione di) corrente nel circuito. Per meglio chiarire questi concetti si consideri un circuito in cui inizialmente non circola corrente e si supponga di variare la corrente dal valore iniziale zero fino al valore finale  $i$ , inserendo ad esempio nel circuito un generatore. Per la legge di Faraday-Lenz, si genera una forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E}_{ind} = -L(di/dt)$ . Il lavoro elementare  $\delta\mathcal{L}_{est}$  compiuto dal generatore per far circolare una carica infinitesima  $\delta q$  nel circuito è uguale ed opposto a quello della forza elettromotrice indotta:

$$\delta\mathcal{L}_{est} = -\mathcal{E}_{ind}\delta q = L(di/dt)i dt = Lidi.$$

Integrando tale lavoro elementare tra la condizione iniziale ( $i = 0$ ) e quella finale ( $i = i$ ) si ottiene:

$$\mathcal{L}_{est} = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2 = U_B,$$

dove  $U_B = \frac{1}{2}Li^2$  rappresenta l'energia potenziale del campo magnetico (o energia potenziale magnetica) che è stato generato dalla corrente circolante nel circuito. Se si considera un solenoide (lunghezza  $l$ , superficie trasversale  $A$ , numero totale di spire  $N$ ) si ottiene:

$$U_B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{AN^2}{l} i^2 = \frac{1}{2} (lA) \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Poiché il campo magnetico all'incirca costante è localizzato nel volume interno al solenoide, si può introdurre una densità di energia magnetica (energia magnetica per unità di volume)  $u_B$  dividendo  $U_B$  per il volume del solenoide ( $lA$ ):

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Nonostante tale espressione per la densità di energia potenziale del campo magnetico sia stata ottenuta nel caso particolare del solenoide, si può mostrare che essa ha validità generale. Ad ogni campo magnetico, comunque prodotto, è quindi possibile associare una energia potenziale magnetica la cui densità  $u_B$  è data dalla precedente espressione. In presenza di un mezzo, la permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$  è sostituita da quella del mezzo  $\mu_0 \mu_r$  ottenendo la seguente espressione per la densità di energia potenziale magnetica:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}.$$



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 14. LE EQUAZIONI DI MAXWELL

#### LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

In regime non stazionario, la legge di Ampère ( $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ) è inconsistente con l'equazione di conservazione della carica (o equazione di continuità della corrente,  $\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ). Infatti, sostituendo la prima nella seconda, si ottiene:

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

che rappresenta una incongruenza matematica, in quanto una identità dell'analisi vettoriale afferma che per qualsiasi vettore  $\vec{A}$ ,  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$ , tranne che in regime stazionario quando  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Anche dal punto di vista fisico, considerando ad esempio un circuito contenente un condensatore che si sta caricando, la legge di Ampère fornisce risultati non congruenti. Scelta infatti una linea  $\Gamma$  concatenata al conduttore a cui è collegata una armatura del condensatore, la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo tale linea assume risultati diversi a seconda che si consideri una superficie  $S_1$  appoggiata alla linea  $\Gamma$  attraversata dal conduttore (si ottiene in tal caso  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = \mu_0 i$ ) o una superficie  $S_2$  appoggiata alla linea che non è attraversata dal conduttore ma si estende tra le due armature del condensatore, dove  $\vec{J}$  è nullo (si ottiene in questa situazione  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = 0$ ). Poiché la scelta della superficie che si appoggia alla linea  $\Gamma$  è arbitraria, si deduce che la legge di Ampère non è valida in condizioni non stazionarie.

Maxwell propose di modificare l'equazione di Ampère introducendo un nuovo termine da sommare alla corrente di conduzione  $\vec{J}$ , rendendo il vettore somma dei due a divergenza nulla, ovvero solenoidale, anche in regime non stazionario. Ricavando la densità di carica dalla legge di Gauss e sostituendo nell'equazione di continuità della corrente si ottiene:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\epsilon_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \operatorname{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Il vettore  $\vec{J}_{tot} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ha pertanto divergenza nulla anche in regime non stazionario e Maxwell propose di sostituirlo a  $\vec{J}$  modificando la legge di Ampère nella legge di Ampère-Maxwell:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Il termine  $\vec{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  prende il nome di densità di corrente di spostamento, ed è proporzionale alla variazione del campo elettrico  $\vec{E}$  nel tempo.

Le leggi fondamentali per il campo elettrico  $\vec{E}$  e per il campo magnetico  $\vec{B}$  possono essere sintetizzate nelle seguenti quattro equazioni (si riporta di seguito sia la forma integrale che quella differenziale):

$$\int_{S \text{ chiusa}} \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Legge di Gauss

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Legge di Faraday-Lenz

$$\int_{S \text{ chiusa}} \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Legge di Gauss del magnetismo

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{Legge di Ampère-Maxwell}$$

Queste equazioni prendono il nome di equazioni di Maxwell, che contribuì alla definizione della quarta (legge di Ampère-Maxwell) e ne riconobbe l'importanza per la descrizione generale dell'elettromagnetismo. Esse sono equivalenti a otto equazioni scalari (comprendono infatti due equazioni vettoriali e due equazioni scalari) e non sono completamente indipendenti, in quanto le sorgenti del campo elettrico e magnetico sono tra loro legate dall'equazione di continuità. Di fatto, utilizzando l'equazione di continuità, la prima e la terza equazione sono ricavabili dalla seconda e dalla quarta, per cui le equazioni scalari indipendenti sono sei nelle sei variabili rappresentate dalle componenti spaziali del campo elettrico e del campo magnetico.

La prima equazione (legge di Gauss) stabilisce un legame tra carica elettrica e campo elettrico, ed è valida sia per campi statici che per campi variabili nel tempo. La seconda equazione (legge di Faraday-Lenz) mostra che anche un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico. Le sorgenti del campo elettrico sono pertanto le cariche elettriche e le variazioni temporali del campo magnetico. La terza equazione (legge di Gauss per il magnetismo) afferma che il campo magnetico è solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche libere o monopoli magnetici. La quarta equazione (legge di Ampère-Maxwell) individua come sorgenti del campo magnetico le correnti di conduzione (cariche in movimento) e le variazioni temporali del campo elettrico (correnti di spostamento). Qualunque legge dell'elettromagnetismo è deducibile dalle equazioni di Maxwell. L'equazione di continuità della corrente si ricava direttamente applicando l'operatore divergenza alla legge di Ampère-Maxwell e utilizzando la legge di Gauss.

La validità sperimentale ed il profondo significato delle equazioni di Maxwell, formulate nel 1873, fu dimostrata da Hertz alcuni anni dopo (1888) con la dimostrazione della esistenza delle onde elettromagnetiche, che rappresenta il risultato più importante e la maggior conferma di tali equazioni.

La soluzione delle equazioni di Maxwell, note le cariche sorgenti e le correnti sorgenti, fornisce il campo elettrico  $\vec{E}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$  consentendo quindi di conoscere la forza che agisce su una qualsiasi carica  $q_s$  nello spazio attraverso la forza di Lorentz  $\vec{F} = q_s(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Le equazioni di Maxwell nello spazio vuoto, in assenza di cariche e di correnti, assumono una forma significativa in quanto caratterizzata da una simmetria tra i due campi elettrico e magnetico. In forma differenziale si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} &= 0, \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Da tali equazioni è possibile mostrare che, a parte la soluzione banale  $\vec{E} = 0$  e  $\vec{B} = 0$ , è possibile solo una soluzione con campi variabili nel tempo e nello spazio, che costituiscono le onde elettromagnetiche.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 15. LE ONDE ELETTROMAGNETICHE

#### L'EQUAZIONE DELLE ONDE

A partire dalle equazioni di Maxwell è possibile derivare l'equazione delle onde elettromagnetiche, la cui soluzione è rappresentata da una perturbazione che si propaga, nel vuoto, alla velocità della luce. La derivazione formale utilizza la formulazione locale delle equazioni di Maxwell nel vuoto, in assenza di cariche e di correnti ( $\rho = 0; \vec{J} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

E' opportuno, per semplificare la trattazione, utilizzare l'operatore nabla per esprimere gli operatori vettoriali rotore e divergenza. Le precedenti equazioni possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Applicando l'operatore rotore alla seconda equazione (legge di Faraday-Lenz) ed utilizzando quindi l'identità vettoriale  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ , unitamente alla prima equazione (legge di Gauss) ed alla quarta (legge di Ampère-Maxwell), si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Allo stesso modo, partendo dalla quarta equazione ed utilizzando la medesima identità vettoriale insieme alla terza ed alla seconda equazione, si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Posto  $\nu = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ , si riconosce che le due equazioni hanno la stessa forma e ogni componente del campo elettrico e magnetico soddisfa all'equazione di D'Alambert (o equazione d'onda):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

Si può mostrare che la perturbazione  $f(x, y, z, t)$  si propaga nel vuoto con velocità  $\nu$  pari a  $c$  (velocità della luce nel vuoto). La velocità della luce nel vuoto è una costante universale ed è stata misurata sperimentalmente con grande precisione:  $c = 299.792.458 \text{ m/s} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Tutte le

onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con la velocità della luce. Inoltre, risulta che tale velocità di propagazione è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziale (in moto con velocità relativa costante l'uno rispetto all'altro). Unitamente al principio di Relatività, questa circostanza comporta che le equazioni di Maxwell siano invarianti in ogni sistema di riferimento inerziale e che pertanto, nel passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, le trasformazioni di Galileo debbano essere sostituite dalle trasformazioni di Lorentz, che hanno validità più generale e che si riducono a quelle di Galileo quando le velocità sono piccole rispetto alla velocità della luce.

### ONDE PIANE

L'equazione di D'Alambert è una equazione differenziale alle derivate parziali, del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti, le cui soluzioni sono determinate a meno di funzioni arbitrarie che possono essere ricavate imponendo le condizioni al contorno e le condizioni iniziali. La configurazione delle condizioni al contorno cui corrisponde l'espressione più semplice e più utilizzata è la configurazione piana, che dà origine alle onde piane uniformi. In tal caso si può mostrare che, oltre alla soluzione rappresentata da  $f = \text{costante}$ , che descrive campi costanti nel tempo e uniformi nello spazio e non interessa nello studio delle onde elettromagnetiche, tale equazione è soddisfatta da una arbitraria funzione  $f$  il cui argomento deve essere una combinazione lineare delle variabili spaziali e temporale, ovvero:

$$f = f(w) = f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \pm vt)$$

$$w = \vec{r} \cdot \vec{u}_n \pm vt = xu_{nx} + yu_{ny} + zu_{ny} \pm vt$$

dove  $\vec{u}_n$  è un generico versore nello spazio, che individua la direzione di propagazione dell'onda. Il luogo dei punti in cui, ad un dato istante, la variabile  $w$ , ovvero l'argomento della funzione, assume lo stesso valore prende il nome di fronte di fase. L'equazione  $w = \text{cost}$  rappresenta, in un fissato istante, un piano nello spazio ortogonale a  $\vec{u}_n$ . Il generico fronte di fase della funzione  $f$  così definita è pertanto un piano che, al variare di  $t$ , si sposta parallelamente a se stesso con velocità  $\vec{v} = \pm v\vec{u}_n$ , nel verso di  $\vec{u}_n$  se si considera il segno negativo (onda progressiva), e in verso opposto se si considera il segno positivo (onda regressiva). La funzione  $f$  rappresenta, per via della sua struttura, una perturbazione che si propaga lungo la direzione  $\vec{u}_n$  con velocità  $v$ . Si può facilmente verificare questa circostanza considerando per semplicità la funzione  $f(x, t) = f(x - vt)$ , che rappresenta una perturbazione dipendente da una sola coordinata spaziale, che si propaga lungo l'asse  $x$ . Il valore assunto dalla funzione nel generico punto  $\bar{x}$  al tempo  $\bar{t}$  si ritrova in un istante successivo  $\bar{t} + \Delta t$  nel punto  $\bar{x} + \Delta x$  che soddisfa alla condizione:

$$\bar{x} - v\bar{t} = \bar{x} + \Delta x - v(\bar{t} + \Delta t) \Rightarrow \Delta x = v\Delta t$$

Tutti i valori della funzione risultano pertanto spostati nel tempo  $\Delta t$  della stessa quantità  $\Delta x = v\Delta t > 0$ , ovvero la perturbazione trasla rigidamente nel verso positivo dell'asse  $x$  a velocità  $v$  (onda progressiva). Allo stesso modo si può verificare che, se si considera la funzione  $f = f(x + vt)$ , la perturbazione si muove rigidamente nel verso negativo dell'asse  $x$  (onda regressiva). Si può inoltre verificare (ad esempio nel caso di funzione monodimensionale come quella appena considerata), calcolando le derivate parziali seconde della funzione  $f$  rispetto al tempo e alla variabile spaziale, che essa è soluzione dell'equazione di D'Alambert.

Il campo elettrico ed il campo magnetico sono quindi rappresentati da onde piane uniformi che hanno le seguenti espressioni:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \pm vt)$$

2

$$\vec{B} = \vec{B}_0 f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \pm vt)$$

dove  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono, ad un determinato istante, vettori uniformi su ogni piano ortogonale alla direzione di propagazione  $\vec{u}_n$ . Per le diverse componenti si ha, ad es.,  $E_x = E_{0x} f(\vec{r} \cdot \vec{u}_n \pm vt)$ .

Poiché l'equazione di D'Alambert è lineare, la soluzione più generale per le onde piane è costituita dalla somma di un'onda progressiva e di un'onda regressiva.

### ONDE PIANE ARMONICHE

Un notevole caso particolare di onde piane uniformi è quello delle onde piane armoniche monocromatiche, in cui la funzione  $f$  è di tipo sinusoidale. Considerare soluzioni sinusoidali, come sostanzialmente faremo, non rappresenta una perdita di generalità. L'equazione delle onde è infatti lineare e pertanto vale il principio di sovrapposizione, per cui ogni combinazione lineare di due o più soluzioni rappresenta anch'essa una soluzione. Inoltre, ogni funzione periodica può essere sviluppata in serie lineare di funzioni sinusoidali (sviluppo in serie di Fourier) ed il metodo può essere esteso anche al caso di funzioni non periodiche. Un insieme opportuno di funzioni sinusoidali – ovvero di onde monocromatiche – costituisce quindi una soluzione generale in grado di rappresentare qualsiasi perturbazione.

Un'onda piana armonica monocromatica (consideriamo un'onda progressiva) è usualmente espressa, rendendo l'argomento della funzione adimensionale, come:

$$f = A \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

dove  $A$  è l'ampiezza dell'onda;  $\vec{k}_0 = k_0 \vec{u}_n$  il vettore d'onda, che individua direzione e verso di propagazione dell'onda ed il cui modulo è dato da  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ , con  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda nel vuoto;  $\omega = 2\pi\nu$  è la pulsazione o frequenza angolare, essendo  $\nu$  la frequenza dell'onda;  $\delta$  è la fase iniziale. Si può facilmente mostrare che l'argomento della funzione sinusoidale ha la forma funzionale opportuna per soddisfare l'equazione di D'Alambert risultando:

$$f = A \cos \left[ k_0 \left( \vec{r} \cdot \vec{u}_n - \frac{\omega}{k_0} t \right) + \delta \right],$$

ponendo  $\frac{\omega}{k_0} = \nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ . Il rapporto  $\frac{\omega}{k_0}$  prende il nome di velocità di fase dell'onda (nel vuoto).

I parametri più significativi dell'onda sinusoidale monocromatica sono la frequenza  $\nu$  e la lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , tra i quali esiste la relazione  $\nu = c/\lambda_0$  ovvero  $\lambda_0 = cT$ , essendo  $T = 1/\nu$  il periodo dell'onda.

Le onde elettromagnetiche piane nel vuoto godono in generale delle seguenti proprietà, che si possono rigorosamente dimostrare:

- 1) I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  si propagano nel vuoto con la stessa velocità, pari alla velocità della luce  $c$ .
- 2) I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono mutuamente ortogonali tra loro e sono ortogonali alla direzione di propagazione  $\vec{u}_n$ . Risulta in particolare:

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_n \times \vec{E}}{v},$$

ovvero  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_n$ , costituiscono, nell'ordine, una terna destra. Le onde piane nel vuoto sono pertanto onde trasversali, dette anche TEM [(onda) Trasversale Elettrica e Magnetica]

- 3) Il rapporto tra i moduli dei campi elettrico e magnetico è pari alla velocità della luce:

$$\frac{E}{B} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Queste proprietà dei campi, anche se dedotte operando in coordinate cartesiane, valgono in generale per tutte le onde elettromagnetiche nel vuoto.

### ONDE SFERICHE

Quando le condizioni al contorno e la configurazione delle sorgenti sono tali da imporre simmetria sferica (ad es., quando si ha una sorgente puntiforme), è opportuno esprimere la soluzione in coordinate polari  $(r, \theta, \varphi)$  e adottare anche per l'operatore laplaciano  $\nabla^2$  la sua espressione in coordinate polari. Se l'onda è sferica (ovvero ha fronti di fase sferici), la generica componente  $F$  del campo elettrico e magnetico dipende solo dalla coordinata radiale  $F(\vec{r}, t) = F(r, t)$  e per essa vale l'equazione delle onde. Poiché manca la dipendenza da  $\theta$  e da  $\varphi$ , nell'espressione del laplaciano in coordinate polari l'unico termine che sopravvive è quello relativo alla derivata rispetto a  $r$ ; l'equazione di D'Alambert delle onde  $\nabla^2 F = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$  diventa quindi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial F}{\partial r}) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Essendo

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial F}{\partial r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF)$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Moltiplicando il secondo membro per  $r/r$  e poiché qualunque funzione della sola  $r$  commuta con l'operatore di derivazione rispetto a  $t$  si ha

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rF)}{\partial t^2}$$

e, moltiplicando per  $r$ , si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 (rF)}{\partial t^2}.$$

La funzione  $(rF)$  deve soddisfare quindi l'equazione monodimensionale delle onde di D'Alambert, la cui soluzione è del tipo:

$$rF(r, t) = f(r \pm vt) \quad [v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}]$$

La generica componente del campo elettrico e magnetico è quindi data da

$$F(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - vt) + f(r + vt)],$$

che mostra come le onde sferiche hanno un'ampiezza che si attenua come  $1/r$  all'aumentare di  $r$ . E' proprio grazie a questa caratteristica che le onde elettromagnetiche sferiche soddisfano il principio di conservazione dell'energia; si vedrà infatti che l'energia delle onde elettromagnetiche è in generale proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza del campo.

A grande distanza dal centro in una piccola regione di spazio il fattore  $1/r$  si può considerare costante e l'onda sferica può essere approssimata da un'onda piana.

#### POLARIZZAZIONE DELLE ONDE

Se il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana mantiene inalterata nel tempo la propria direzione di oscillazione, l'onda si dice polarizzata linearmente lungo tale direzione. Ovviamente anche il campo magnetico conserva nel tempo la propria direzione di oscillazione, perpendicolare a quella del campo elettrico e alla direzione di propagazione. Il campo elettrico di un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente lungo la direzione  $\vec{u}_p$  (ortogonale a  $\vec{u}_n$ ) è dato da:

$$\vec{E} = [E_0 \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)] \vec{u}_p.$$

Solitamente si preferisce far coincidere la direzione di polarizzazione indicata dal versore  $\vec{u}_p$ , con un asse cartesiano. Se assumiamo l'onda polarizzata lungo l'asse  $y$  che si propaga lungo l'asse  $x$ , si ottiene:

$$\vec{E} = [E_0 \cos(k_0 x - \omega t + \delta)] \vec{u}_y;$$

$$\vec{B} = [\frac{E_0}{c} \cos(k_0 x - \omega t + \delta)] \vec{u}_z;$$

da dove si vede come i campi elettrico e magnetico siano in fase tra loro.

In generale, per la linearità dell'equazione delle onde, un'onda piana polarizzata linearmente lungo una qualsiasi direzione che si propaga lungo l'asse  $x$  può essere considerata come somma di due onde piane polarizzate linearmente in direzioni ortogonali, una lungo l'asse  $y$  ( $\vec{E}_y$ ) e l'altra lungo l'asse  $z$  ( $\vec{E}_z$ ) con la stessa fase  $\delta$ . Può invece accadere che le due componenti  $\vec{E}_y$  e  $\vec{E}_z$  non abbiano la stessa fase iniziale, ma siano tra di esse sfasate. Si può in tal caso mostrare che, fissato un punto nello spazio, la punta del vettore  $\vec{E}$  descrive in generale in funzione del tempo una ellisse che ritraccia se stessa dopo ogni periodo; se lo sfasamento reciproco è pari a  $\pi/2$  e le ampiezze dei due campi sono uguali,  $E_{0y} = E_{0z}$ , l'ellisse si trasforma in un cerchio. Si parla in tal caso di polarizzazione ellittica e di polarizzazione circolare, rispettivamente.

Ad esempio, consideriamo due onde piane monocromatiche ortogonali che si propagano lungo l'asse  $x$  sfasate di  $\pi/2$ :

$$\vec{E}_y = E_{0y} \cos(k_0 x - \omega t) \vec{u}_y = E_{0y} \cos(\omega t - k_0 x) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_z = E_{0z} \cos(k_0 x - \omega t + \pi/2) \vec{u}_z = E_{0z} \sin(\omega t - k_0 x) \vec{u}_z.$$

Il campo dato dalla loro sovrapposizione

$$\vec{E} = E_{0y} \cos(\omega t - k_0 x) \vec{u}_y + E_{0z} \sin(\omega t - k_0 x) \vec{u}_z$$

ruota con velocità angolare  $\omega$  costante intorno alla direzione di propagazione, e il suo estremo libero percorre una ellisse; lo stesso avviene per il campo magnetico. Infatti, se  $y$  e  $z$  sono le coordinate dell'estremo libero del campo elettrico  $\vec{E}$ , si ha che  $y = E_{0y} \cos(\omega t)$  e  $z = E_{0z} \cos(\omega t)$ , da cui si ricava

$$\frac{y^2}{E_{0y}^2} + \frac{z^2}{E_{0z}^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1,$$

che è l'equazione di una ellisse e l'onda si dice polarizzata ellitticamente. Se le due componenti  $\vec{E}_y$  e  $\vec{E}_z$  hanno ampiezza uguale pari a  $E_0$ , si ottiene in particolare l'equazione di una circonferenza:

$$\frac{y^2}{E_0^2} + \frac{z^2}{E_0^2} = 1$$

e l'onda risultante si dice polarizzata circolarmente.

Le onde elettromagnetiche, quando sono prodotte da un insieme di processi elementari tra loro indipendenti e scorrelati, come nel caso della luce naturale (solare) o quella emessa dal filamento di una lampadina, sono costituite da treni d'onda elettromagnetici, ciascuno dei quali è descrivibile come:

$$\vec{E} = [E_0 \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)] \vec{u}_p$$

dove tuttavia la direzione di  $\vec{u}_p$  e quindi quella di  $\vec{E}$  è del tutto casuale. Se ad esempio assumiamo che la direzione di propagazione sia lungo l'asse  $x$ ,  $\vec{E} = [E_0 \cos(kx - \omega t + \delta)] \vec{u}_p$ , il vettore  $E_0 \vec{u}_p$  (che giace sul piano  $y - z$ ) forma con l'asse  $y$  un angolo il cui valor medio (cioè mediato su molti treni d'onda) è nullo. L'onda si dice in questo caso non polarizzata. Anche la fase  $\delta$  di ogni treno d'onda può variare in maniera completamente scorrelata tra un processo elementare e l'altro ed essere pertanto non definita; in tal caso si dice che la radiazione (ad esempio la luce naturale) non è coerente.

#### ENERGIA E IMPULSO NEI CAMPI ELETROMAGNETICI

Nel caso di campo elettrico in un condensatore piano e di campo magnetico in un solenoide, si è ricavato che ad essi è associata rispettivamente la densità di energia potenziale elettrica e magnetica:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Tali risultati sono generalizzabili a qualsiasi campo elettrico e magnetico, anche non statico. Pertanto anche ad un'onda elettromagnetica, costituita dall'insieme di un campo elettrico e di uno magnetico, è associabile una densità di energia elettromagnetica:

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Poiché per le onde elettromagnetiche nel vuoto risulta  $E = cB = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , i due termini che concorrono a formare la densità di energia elettromagnetica sono uguali e risulta:

$$u_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}.$$

L'energia elettromagnetica è quindi dovuta per metà al campo elettrico e per metà al campo magnetico.

Consideriamo un volume di spazio  $\tau$  racchiuso da una superficie  $\Sigma$ , all'interno del quale vi siano cariche, correnti, e campo elettromagnetico. Si può mostrare che il lavoro elementare fatto dal campo elettromagnetico su cariche e correnti, attraverso la forza di Lorentz, è pari a:

$$\delta\mathcal{L}_{em} = \vec{E} \cdot \vec{J} dt dt.$$

Trasformando il prodotto scalare  $\vec{E} \cdot \vec{J}$  mediante alcune identità vettoriali ed utilizzando la legge di Maxwell-Ampere, si perviene alla seguente relazione, che lega la variazione temporale di energia  $U_\tau$  presente nel volume  $\tau$  (energia ceduta o acquistata da cariche e/o correnti, cioè energia della materia) alla variazione dell'energia elettromagnetica contenuta nello stesso volume ed al flusso di energia elettromagnetica entrante o uscente attraverso la corrispondente superficie di contorno  $\Sigma$ :

$$\frac{\partial U_\tau}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau - \int_{\Sigma \text{ chiusa}} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{u}_n d\Sigma.$$

Tale relazione è nota come teorema di Poynting, ed estende anche alla energia associata alle onde elettromagnetiche il principio di conservazione dell'energia. I due termini a secondo membro rappresentano infatti il primo la variazione di energia elettromagnetica associata al campo elettromagnetico presente nel volume  $\tau$ , ed il secondo il flusso di energia (ovvero l'energia per unità di tempo e di superficie) trasportata dal campo elettromagnetico attraverso la superficie di contorno  $\Sigma$ . Il vettore

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0},$$

prende il nome di vettore di Poynting. Esso ha direzione e verso coincidenti con quelli di propagazione dell'onda ed il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo attraversa l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. La relazione di Poynting può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\partial U_\tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} (u_{em}) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} (U_\tau + U_{em}) = - \int_{\Sigma \text{ chiusa}} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{u}_n d\Sigma,$$

da cui è ancora più evidente come la variazione complessiva di energia per unità di tempo nel volume  $\tau$ , dovuta a quella scambiata con la materia e a quella del campo elettromagnetico, sia pari al flusso di energia entrante o uscente dal volume stesso.

Il teorema di Poynting ha validità generale, ed è applicabile anche nello spazio vuoto. Si ha in tal caso:

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} = - \int_{\Sigma \text{ chiusa}} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma.$$

Il significato fisico del vettore di Poynting è ben individuabile nel caso di onde piane.  $\vec{S}$  ha infatti la stessa direzione e lo stesso verso di propagazione dell'onda piana. Risulta inoltre che il suo modulo è pari a:

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = c\epsilon_0 E^2 = cu_{em}.$$

Consideriamo lo spazio delimitato da un parallelepipedo di lato  $cdt$  e superficie di base  $A$  ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda piana che investe il parallelepipedo. Nel tempo  $dt$  passa attraverso la superficie  $A$  una quantità di energia trasportata dall'onda pari all'energia elettromagnetica complessiva contenuta nel volume del parallelepipedo,  $u_{em}cdtA$ .

L'energia per unità di tempo e di superficie attraverso  $A$ , definita come intensità (istantanea) dell'onda elettromagnetica  $I(t)$ , è pertanto pari a  $c u_{em}$ , ovvero è pari al modulo del vettore di Poynting:

$$I(t) = S = c u_{em} = c \varepsilon_0 E^2(t) .$$

Nel caso di onda piana monocromatica:

$$I(t) = c \varepsilon_0 E^2(t) = c \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t).$$

Le variazioni nel tempo del campo elettrico sono molto rapide (da decine di nanosecondi per le onde radio a femtosecondi per la radiazione ottica) per cui è significativo il valor medio dell'intensità dell'onda,  $\langle I(t) \rangle$ :

$$\langle I(t) \rangle = c \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2.$$

Con considerazioni simili a quelle utilizzate per dimostrare il teorema di Poynting si può mostrare che, sempre attraverso la forza di Lorentz (mediante l'azione della componente della forza legata al campo magnetico) al campo elettromagnetico è associato una densità di quantità di moto  $\vec{J}$  data da

$$\vec{J} = \frac{\vec{s}}{c^2}$$

con direzione e verso coincidenti con quelli dell'onda e il cui modulo  $J = \frac{u_{em}}{c}$  è legato alla densità di energia del campo elettromagnetico. La quantità di moto trasportata dall'onda può essere trasferita ad un corpo su cui incide l'onda elettromagnetica. Se si considera una superficie totalmente assorbente di area  $A$  perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda  $\vec{u}_x$ , la variazione di quantità di moto  $d\vec{p}_{em}$  subita dall'onda assorbita nel tempuscolo  $dt$  è pari a

$$d\vec{p}_{em} = -J(Acdt) \vec{u}_x$$

ed è uguale ed opposta a quella subita dalla superficie del corpo:

$$d\vec{p}_{sup} = J(Acdt) \vec{u}_x.$$

La variazione nel tempo della quantità di moto produce una forza sulla superficie, diretta nel verso dell'onda:

$$\vec{F}_{sup} = \frac{d\vec{p}_{sup}}{dt} = u_{em} A \vec{u}_x,$$

cui è associata una pressione, detta pressione di radiazione:

$$\mathbb{P}_{rad} = \frac{F}{A} = u_{em} = \frac{I}{c}$$

La pressione di radiazione per una superficie assorbente risulta pertanto uguale alla densità di energia elettromagnetica associata all'onda. Se la superficie è riflettente, l'onda riflessa ha verso opposto a quella incidente, e la variazione di quantità di moto associata all'onda è data da:

$$d\vec{p}_{em} = -\mathcal{I}(Acdt)\vec{u}_x - \mathcal{I}(Acdt)\vec{u}_x = -2\mathcal{I}(Acdt)\vec{u}_x,$$

per cui la pressione di radiazione raddoppia:

$$\mathbb{P}_{rad} = 2u_{em} = 2\frac{I}{c}.$$



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 16. SPETTRO ELETTRONAGNETICO

#### LO SPETTRO ELETTRONAGNETICO

Facendo riferimento alla frequenza (o alla lunghezza d'onda) delle onde elettromagnetiche sinusoidali che la compongono, la radiazione elettromagnetica si estende su un ampiissimo intervallo di circa 24 decadi, dalle onde hertziane a bassissima frequenza alla radiazione cosmica di altissima energia (e frequenza). Le onde elettromagnetiche a diversa frequenza differiscono enormemente per la modalità di generazione, di rivelazione e di interazione con la materia.

Per spettro elettromagnetico della radiazione si intende l'intera gamma di possibili frequenze delle onde elettromagnetiche. E' proprio infatti sulla base degli intervalli di frequenza (o di lunghezza d'onda,  $\lambda_0 = c/\nu$ ) che le onde elettromagnetiche sono usualmente classificate.

#### CLASSIFICAZIONE DELLE ONDE ELETTRONAGNETICHE

Le onde a frequenza più alta,  $\nu > 3 \times 10^{19} \text{ Hz}$  ( $\lambda_0 < 10^{-11} \text{ m}$ ) costituiscono i raggi cosmici e la radiazione gamma. La loro origine fisica è legata a interazioni tra nucleoni e/o tra particelle elementari; sono prodotte naturalmente nelle reazioni nucleari (ad esempio nelle stelle) e artificialmente negli acceleratori di particelle; hanno un elevato potere ionizzante, sono in grado di indurre danni irreversibili nel tessuto biologico (mutazioni del DNA) e sono in grado di interagire con i nuclei atomici (provocandone la frammentazione).

Per frequenze comprese nell'intervallo  $3 \times 10^{16} < \nu < 3 \times 10^{19} \text{ Hz}$  ( $10^{-11} \text{ m} < \lambda_0 < 10^{-8} \text{ m}$ ) si hanno i raggi X, generati naturalmente nei processi di decadimento radioattivo e artificialmente nei processi di frenamento di elettroni ad alta energia (tubi a raggi X) e nei sincrotroni. Anche i raggi X hanno un elevato potere ionizzante, sono dannosi per i tessuti biologici, e sono in grado di interagire con elettroni delle *shell* atomiche più interne. Oltre alle applicazioni scientifiche (diffrattometria per lo studio di strutture cristalline e molecolari) un loro importante impiego è quello in campo medico (radiografie, TAC).

Le frequenze comprese nell'intervallo  $8 \times 10^{14} < \nu < 3 \times 10^{16} \text{ Hz}$  ( $10^{-8} \text{ m} < \lambda_0 < 0.38 \times 10^{-6} \text{ m}$ ) corrispondono alla regione dei raggi ultravioletti o UV, ulteriormente divisi in UVA (10 nm  $< \lambda_0 < 280 \text{ nm}$ ), UVB (280 nm  $< \lambda_0 < 315 \text{ nm}$ ) e UVC (315 nm  $< \lambda_0 < 380 \text{ nm}$ ). La radiazione UV è legata a processi di diseccitazione di atomi o molecole (transizioni elettroniche nella materia); è presente nella luce solare, e può essere generata artificialmente nelle scariche ad arco e con alcuni tipi di laser.

La regione del visibile è estremamente ridotta e si estende per circa un'ottava,  $4 \times 10^{14} < \nu < 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$  ( $0.38 \times 10^{-6} \text{ m} < \lambda_0 < 0.75 \times 10^{-6} \text{ m}$ ). La sua rilevanza per l'uomo è enorme, perché è l'unica porzione dello spettro elettromagnetico rilevabile direttamente da uno dei nostri organi sensoriali, e costituisce la nostra finestra di osservazione sull'universo. Anche le onde elettromagnetiche nel visibile sono legate alle transizioni elettroniche nella materia; sono generate naturalmente dal sole e dalle stelle, e artificialmente prodotte da lampade (a incandescenza, scarica in gas, fluorescenza, diodi emettitori di luce - LED) e da vari tipi di laser.

Segue la regione dell'infrarosso (IR), nell'intervallo  $3 \times 10^{11} < \nu < 4 \times 10^{14} \text{ Hz}$  ( $0.75 \times 10^{-6} \text{ m} < \lambda_0 < 10^{-3} \text{ m}$ ). La regione IR si suddivide a sua volta in IR vicino (NIR, 750 nm  $< \lambda_0 < 1.4 \mu\text{m}$ ), IR medio (MIR, 1.4  $\mu\text{m} < \lambda_0 < 3 \mu\text{m}$ ), e IR lontano (FIR, 3  $\mu\text{m} < \lambda_0 < 1 \text{ mm}$ ). La radiazione infrarossa è legata alle transizioni roto-vibrazionali delle molecole e alle vibrazioni reticolari nei solidi; è presente naturalmente nella luce solare ed è generata da qualsiasi corpo caldo e da alcuni tipi di laser.

La regione delle microonde si estende nell'intervallo  $10^9 < \nu < 3 \times 10^{11} \text{ Hz}$  ( $10^{-3} \text{ m} < \lambda_0 < 0.3 \text{ m}$ ). Questa radiazione è presente nello spazio interstellare (radiazione di fondo dell'universo) ed è prodotta

artificialmente da dispositivi a microonde (magnetron, klystron); è utilizzata per i sistemi radar, per i forni a microonde, e per molti canali di comunicazione (telefoni cellulari).

Per frequenze inferiori,  $\nu < 10^9$  ( $\lambda_0 > 0.3$  m), si ha la regione delle radioonde e delle onde hertziane, che si estende fino a frequenze di pochi Hertz. Queste onde sono generate da oscillatori e circuiti elettronici o comunque da correnti variabili nel tempo. Il principale campo di applicazione sono le telecomunicazioni, con una densa suddivisione in bande più fini che individuano ad es. i canali TV (alcune centinaia di MHz) e i canali radio (FM tra 88 e 108 MHz, AM tra 535 e 1605 kHz); al di sotto del kHz (onde hertziane) le onde elettromagnetiche a bassissima frequenza (300 Hz) sono utilizzate per comunicazioni tra sottomarini.

#### **OTTICA E SPETTRO DELL'INTERVALLO VISIBILE**

L'ottica in senso lato si occupa, oltre che della regione spettrale del visibile, anche dell'ultravioletto e dell'infrarosso, ricoprendo complessivamente un intervallo spettrale dell'ordine di 5 decadi, di cui una porzione molto limitata, circa un'ottava, è quella del visibile.

All'interno della regione visibile, i diversi intervalli spettrali individuano i diversi colori percepiti del nostro occhio: violetto tra 380 e 450 nm, blu tra 450 e 475 nm, ciano tra 475 e 495 nm, verde tra 495 e 570 nm, giallo tra 570 e 590 nm, arancione tra 590 e 620 nm, rosso da 620 nm a 750 nm. Ovviamente i limiti di tali intervalli sono convenzionalmente definiti e le transizioni da un colore all'altro avvengono in modo graduale al variare della lunghezza d'onda.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 17. LEGGI DI SNELL DELL'OTTICA

#### EQUAZIONE DELLE ONDE NEI DIELETTRICI E INDICE DI RIFRAZIONE

Nella materia le equazioni di Maxwell si modificano per includere la polarizzazione  $\vec{P}$  e la magnetizzazione  $\vec{M}$  del materiale. È possibile mostrare che per un dielettrico lineare ed isotropo, le leggi per i campi elettrici e magnetici valide nel vuoto continuano a valere, pur di sostituire alla costante dielettrica del vuoto  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del mezzo  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  e alla permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$  la permeabilità magnetica del mezzo  $\mu = \mu_0\mu_r$ . In assenza di cariche e di correnti, le equazioni di Maxwell per un dielettrico diventano:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Le equazioni delle onde per il campo elettrico ed il campo magnetico si modificano di conseguenza:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \\ \nabla^2 \vec{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

La velocità di propagazione  $v$  delle onde elettromagnetiche in un dielettrico diminuisce rispetto a quella del vuoto  $c$ . Risulta infatti:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

assumendo  $\mu_r \cong 1$ . La grandezza adimensionale  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  prende il nome di indice di rifrazione. La velocità della luce in un mezzo materiale  $v$  è quindi data da:

$$v = c/n.$$

Per un'onda piana armonica, poiché vale la relazione  $\lambda = \frac{v}{\nu}$ , si ottiene  $\lambda = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$ , ovvero la lunghezza d'onda si riduce del fattore  $n$  rispetto al vuoto. Analogamente, il vettore d'onda risulta moltiplicato per la stessa quantità,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = nk_0$ .

A bassa frequenza, fino alla regione delle microonde, l'accordo con i dati sperimentali è buono; a partire dall'infrarosso si osserva una discrepanza, che tende ad aumentare all'aumentare della frequenza. Nella regione del visibile il valore sperimentale di  $\epsilon_r$  è molto più basso rispetto a quello misurato alle basse frequenze; ad es. nel vetro, a fronte di valori di  $\epsilon_r$  compresi tra 4 e 7, si osserva sperimentalmente una riduzione della velocità di propagazione di circa 1.5. La spiegazione di questo comportamento richiede una analisi più approfondita della polarizzabilità (o dell'indice di rifrazione) in funzione della frequenza.

Dalle equazioni di Maxwell in un mezzo dielettrico, generalizzando quanto mostrato in regime stazionario, si possono ricavare le condizioni di raccordo alla interfaccia tra due mezzi dielettrici per i diversi campi:

$$E_{1,t} = E_{2,t}; \quad D_{1,n} - D_{2,n} = \sigma; \quad B_{1,n} = B_{2,n}; \quad H_{2,t} - H_{2,t} = J.$$

In particolare, in assenza di densità superficiale di carica libera e di corrente di conduzione all'interfaccia tra due dielettrici, risulta  $D_{1,n} = D_{2,n}$  e  $H_{2,t} = H_{2,t}$ , ovvero si conservano le componenti tangenziali dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , e le componenti normali dei campi  $\vec{B}$  e  $\vec{D}$ .

#### LE LEGGI DI SNELL

Per studiare la rifrazione di un'onda piana monocromatica ad una interfaccia tra due mezzi dielettrici omogenei e isotropi, di indice di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$ , assumiamo che localmente la superficie possa essere considerata piana e che non vi siano densità di carica e di corrente all'interfaccia; assumiamo inoltre, per convenienza, che l'onda incidente, proveniente dal mezzo con indice di rifrazione  $n_1$ , sia polarizzata ortogonalmente al piano di incidenza e che il suo vettore d'onda  $\vec{k}_i$  giaccia sul piano di incidenza (definito come il piano che contiene la normale alla superficie di separazione nel punto di incidenza, diretta verso il mezzo 1, e il vettore d'onda  $\vec{k}_i$ ). Si osserva la presenza di un'onda piana riflessa nel mezzo 1 e di un'onda trasmessa (o rifratta) nel mezzo 2. Nel mezzo 1 vi sarà pertanto, all'interfaccia, la somma  $\vec{E}_1$  di un campo incidente  $\vec{E}_i$  e di un campo riflesso  $\vec{E}_r$ ; nel mezzo 2 vi sarà un campo trasmesso  $\vec{E}_t = \vec{E}_2$ .

Essendo i campi elettrici ortogonali alla superficie di separazione, deve risultare:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_2 = \vec{E}_t.$$

Utilizzando per i campi la notazione complessa (fasori) si ottiene:

$$\vec{E}_{0i} \exp[j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)] + \vec{E}_{0r} \exp[j(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)] = \vec{E}_{0t} \exp[j(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varphi_t)],$$

che deve essere soddisfatta in ogni posizione  $\vec{r}$  all'interfaccia e ad ogni istante  $t$ . Le fasi complessive devono pertanto essere sempre uguali indipendentemente da  $\vec{r}, t$ :

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r = \vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varphi_t.$$

Analizziamo tale relazione. Ponendo  $\vec{r} = 0$ ;  $t = 0$ , conseguono per le fasi iniziali,  $\varphi_r, \varphi_t$ , dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa  $\varphi_r = \varphi_t = 0$ , ovvero onda riflessa e trasmessa non subiscono salti di fase.

Ponendo  $\vec{r} = 0$ , si ottiene:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t,$$

per cui le tre onde incidente, riflessa e rifratta sono isofrequenziali. Le lunghezze d'onda dei campi incidente e riflesso sono le stesse,  $\lambda_i = \lambda_r$ , in quanto si propagano nello stesso mezzo, mentre varia la lunghezza d'onda del campo trasmesso:  $\lambda_t = (\frac{n_1}{n_2})\lambda_i$ .

Ponendo  $t = 0$ , si ricava che: 1) i vettori d'onda riflesso e trasmesso hanno una sola componente (che giace sul piano d'incidenza, come per il vettore incidente), ovvero i tre campi incidente, riflesso e trasmesso sono complanari; 2) i tre vettori d'onda sono uguali, pertanto risulta:

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx},$$

avendo assunto l'asse  $z$  ortogonale alla superficie di separazione, e gli assi  $x$  e  $y$  giacenti su tale superficie, con il campo elettrico polarizzato nella direzione  $y$ .

Dalla precedente relazione si ricava per l'onda riflessa:

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \theta_r,$$

da cui, essendo  $\lambda_i = \lambda_r$  si ricava la legge di Snell della riflessione: l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di trasmissione,  $\theta_i = \theta_r$ .

Per l'onda trasmessa si ottiene:

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_t} \sin \theta_t,$$

da cui si ricava la legge di Snell della trasmissione (o della rifrazione): il rapporto tra il seno dell'angolo di trasmissione e il seno dell'angolo di incidenza è pari al rapporto tra gli indici di rifrazione del primo e del secondo mezzo:

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i.$$

Se il secondo mezzo ha indice di rifrazione superiore a quello del primo, la direzione di propagazione del campo trasmesso si avvicina alla normale; in caso contrario, si allontana da essa.

### I COEFFICIENTI DI FRESNEL

Se le onde incidente, riflessa e trasmessa soddisfano alle leggi di Snell, ovvero hanno uguale fase complessiva all'interfaccia, è possibile determinare, utilizzando le condizioni di raccordo prima ricordate, e cioè la conservazione delle componenti tangenziali dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , e delle componenti normali dei campi  $\vec{B}$  e  $\vec{D}$ , le relazioni tra le ampiezze del campo elettrico incidente, riflesso e rifratto, ovvero i coefficienti di riflessione e di trasmissione in campo. I risultati sono diversi per un'onda incidente polarizzata linearmente in direzione ortogonale al piano di incidenza (detta polarizzazione trasversale elettrica, TE) e per un'onda polarizzata linearmente con il campo elettrico giacente sul piano di incidenza (polarizzazione trasversale magnetica, TM). Poiché una qualsiasi onda, indipendentemente dal suo stato di polarizzazione, può essere scomposta come la somma di un'onda TE e di un'onda TM alla superficie di separazione, la conoscenza dei coefficienti di riflessione e trasmissione in campo nei due casi consente di calcolare le intensità riflesse e trasmesse in ogni possibile situazione.

Tali coefficienti sono detti coefficienti di Fresnel. Nel caso della riflessione ed esprimendoli in funzione del solo angolo di incidenza, sono dati da:

$$\text{Onda TE} \quad r_{TE} = \left( \frac{E_r}{E_i} \right)_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}},$$

$$\text{Onda TM} \quad r_{TM} = \left( \frac{E_r}{E_i} \right)_{TM} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}.$$

In generale, i coefficienti di Fresnel sono diversi per le due polarizzazioni e dipendono dall'angolo di incidenza e dal rapporto tra gli indici di rifrazione,  $n = \frac{n_2}{n_1}$ .

Si distinguono due situazioni: nella prima, detta riflessione esterna,  $n > 1$ ; nella seconda, detta riflessione interna,  $n < 1$ .

Nel caso di riflessione esterna i due coefficienti hanno lo stesso valore in modulo per  $\theta_i = 0$ , ed assumono il valore  $r_{TE} = r_{TM} = -1$  per  $\theta_i = 90^\circ$ . Il coefficiente  $r_{TM}$  si annulla ( $r_{TM} = 0$ ) per  $\theta_{i,B} = \arctg(\frac{n_2}{n_1})$ , detto angolo di Brewster. Il coefficiente  $r_{TE}$  conserva lo stesso segno (negativo) per qualsiasi angolo di incidenza.

Nel caso di riflessione interna esiste per l'angolo di incidenza un angolo limite,  $\theta_{i,c} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  (detto anche angolo critico che si ricava ponendo  $\sin\theta_t = 1$ ), oltre il quale non esiste onda trasmessa. L'angolo di trasmissione  $\theta_t$ , infatti, risulta sempre maggiore di  $\theta_i$ ; quando quest'ultimo raggiunge il valore critico  $\theta_{i,c}$ ,  $\theta_t = 90^\circ$  e l'onda trasmessa si propaga parallelamente all'interfaccia. Per valori superiori a  $\theta_{i,c}$  la legge di Snell della trasmissione non ha più soluzioni reali e pertanto non esiste campo elettromagnetico che si propaga nel mezzo 2. I due coefficienti hanno lo stesso valore iniziale in modulo per  $\theta_i = 0$ , ed assumono il valore  $r_{TE} = r_{TM} = +1$  per  $\theta_i = \theta_{i,c}$ . Per angoli di incidenza superiori all'angolo critico, l'onda è totalmente riflessa ed i coefficienti sono sempre in modulo uguali a 1. Si dice che in tali condizioni l'onda subisce riflessione totale interna. Questo fenomeno ha una notevole rilevanza nella tecnologia; ad es. le fibre ottiche (sottili filamenti di vetro costituiti da un nucleo centrale cilindrico circondato da un mantello vetroso con indice di rifrazione più basso del nucleo centrale) si basano proprio sulla riflessione totale interna all'interfaccia tra il nucleo e mantello: l'onda nel nucleo, incidendo ad angoli superiori a quello critico, si può propagare senza subire perdite per decine di chilometri. Anche nel caso di riflessione interna esiste l'angolo di Brewster per il coefficiente  $r_{TM}$ ; il suo valore, per la stessa coppia di mezzi dielettrici, è il complementare dell'angolo di Brewster per riflessione esterna.

L'angolo di Brewster  $\theta_{i,B}$  si può ricavare imponendo che onda riflessa e trasmessa formino un angolo di  $90^\circ$ . Le onde riflessa e trasmessa sono originate dai dipoli atomici alla superficie del materiale posti in oscillazione dal campo incidente. Poiché un dipolo oscillante non irraggia nella direzione di oscillazione, se il campo elettrico giace sul piano di incidenza (polarizzazione TM) e le onde riflessa e trasmessa, per soddisfare le leggi di Snell, formano un angolo di  $90^\circ$ , non può esistere campo riflesso (si propagherebbe nella direzione di oscillazione dei dipoli). Imponendo tale condizione si ricava facilmente che  $\theta_t = 90^\circ - \theta_i \Rightarrow \sin\theta_t = \cos\theta_i$ ; sostituendo nella legge di Snell della trasmissione, si ricava  $(\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t})_B = (\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i})_B = \tan\theta_{i,B} = \frac{n_2}{n_1}$ .

Il coefficiente di riflessione in potenza o in intensità  $R$  di un'onda elettromagnetica è dato dal modulo quadro del coefficiente di riflessione in campo,  $R = |r|^2$ . Per la conservazione dell'energia, il coefficiente di trasmissione in potenza o in intensità  $T$  si ricava dalla relazione  $T = 1 - R$ , assumendo trascurabile l'assorbimento dell'onda nel mezzo.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 18. OTTICA GEOMETRICA

#### DALL'OTTICA ONDULATORIA ALL'OTTICA GEOMETRICA.

La luce occupa una porzione molto ristretta dello spettro delle onde elettromagnetiche, caratterizzata da frequenze comprese tra  $4 \times 10^{14}$  Hz e  $8 \times 10^{14}$  Hz, corrispondenti a lunghezze d'onda inferiori al micron (da 0.38 μm a 0.75 μm), molto piccole rispetto agli oggetti del mondo macroscopico. Nell'ipotesi che la lunghezza d'onda della radiazione sia infinitesima ( $\lambda \rightarrow 0$ ) è possibile trattare la propagazione dell'onda elettromagnetica mediante il concetto di raggio, che ne descrive in modo sufficientemente preciso il comportamento nell'ipotesi che gli oggetti che si interpongono sul suo cammino siano molto maggiori della lunghezza d'onda (maggiori di qualche decina di micron).

La interpretazione di molti fenomeni legati alla propagazione della luce, basata sul concetto di raggio, nasce molto prima della formulazione delle equazioni di Maxwell dall'osservazione di alcuni fenomeni fisici legati al comportamento della luce. L'ottica legata a queste osservazioni, detta ottica geometrica in quanto le sue leggi sono espresse da relazioni di tipo geometrico (e/o trigonometrico), è in grado di interpretare correttamente fenomeni quali la riflessione, la rifrazione tra due mezzi trasparenti omogenei e isotropi, e la propagazione rettilinea in mezzi ad indice di rifrazione costante (già Euclide aveva formulato correttamente la legge della riflessione).

E' possibile dedurre rigorosamente le leggi dell'ottica geometrica anche nel caso più generale di propagazione in un mezzo dielettrico (non magnetico,  $\mu_r = 1$ ), isotropo ma non necessariamente omogeneo (ovvero con  $\epsilon_r = \epsilon_r(\vec{r})$  dipendente dalla posizione), partendo dalle equazioni di Maxwell e ricavando l'equazione delle onde con l'approssimazione  $\lambda \rightarrow 0$ . In tale condizione le onde (che non sono più in generale onde piane) risultano tuttavia avere localmente caratteristiche analoghe alle onde piane, sotto l'ipotesi che le variazioni dell'indice di rifrazione  $n(\vec{r})$  (o della costante dielettrica relativa  $\epsilon_r(\vec{r})$ ) siano trascurabili su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda. I campi soluzione dell'equazione delle onde hanno in generale fronti di fase (luogo dei punti in cui la fase del campo è costante) descritti da superfici curve nello spazio, che tuttavia possono essere approssimate localmente con fronti d'onda piani. In ogni punto di tali fronti d'onda è possibile definire quindi un vettore d'onda locale,  $\vec{k}_{loc} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_n$ , con  $\vec{u}_n$  versore normale al fronte d'onda in ciascun punto. I campi elettrico e magnetico risultano anche in questo caso ortogonali tra loro e rispetto a  $\vec{u}_n$ , di modo che il vettore di Poynting è sempre parallelo a  $\vec{u}_n$ , direzione lungo la quale si propagano pertanto energia e quantità di moto dell'onda. Se si considera un punto di un fronte d'onda e ci si muove solidalmente con esso nella propagazione dell'onda, si percorre una curva la cui tangente è, in ogni punto, perpendicolare al fronte d'onda e parallela a  $\vec{u}_n$ . Tale curva si identifica con la traiettoria del raggio, che rappresenta pertanto un tubo di flusso infinitesimo lungo il quale si propaga l'energia trasportata dall'onda. Se descriviamo la traiettoria del raggio mediante una ascissa curvilinea  $s$  (per cui risulta  $\vec{u}_n = \frac{d\vec{r}}{ds}$ ), l'equazione di tale traiettoria è data da:

$$\frac{d}{ds} \left( n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \text{grad}(n(\vec{r})).$$

Tale equazione è detta equazione del raggio. Nel caso di mezzo omogeneo con indice di rifrazione costante, l'integrazione dell'equazione precedente fornisce facilmente  $\vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$  ( $\vec{a}, \vec{b}$  sono

costanti vettoriali arbitrarie), che rappresenta l'equazione di una retta nello spazio. Se il mezzo è omogeneo, i raggi di luce si propagano quindi in linea retta.

Se il mezzo non è omogeneo, i raggi di luce possono piegare (verso le zone in cui l'indice di rifrazione è crescente). Esempi di questo comportamento sono i raggi del sole che piegano entrando nell'atmosfera o il fenomeno del miraggio, in cui il raggio luminoso proveniente dal cielo raggiunge il nostro occhio dopo aver sfiorato il suolo (gli strati di atmosfera a contatto con il suolo hanno indice di rifrazione più basso essendo più caldi e meno densi), piegando nuovamente verso l'alto. In mezzi a indice di rifrazione variabile, i raggi seguono in generale traiettorie non rettilinee. Ad una interfaccia dielettrica i raggi, essendo tangenti al vettore d'onda locale, seguono infine le leggi di Snell della riflessione e della rifrazione.

L'ottica geometrica tratta la propagazione della radiazione elettromagnetica come un insieme di raggi, per i quali valgono l'equazione del raggio e le leggi di Snell. Tale approssimazione è estremamente utile per trattare la formazione delle immagini da parte di tutti gli strumenti ottici, quali specchi, lenti, telescopi, ecc. Nel seguito limiteremo la trattazione al caso di mezzi dielettrici omogenei (e isotropi).

#### OTTICA GEOMETRICA.

Nello studio della formazione delle immagini è conveniente introdurre alcuni concetti preliminari per poter descrivere le variazioni nella direzione di propagazione dei raggi quando questi attraversano un sistema ottico.

- Nel suo cammino attraverso un sistema ottico (costituito da mezzi omogenei) la traiettoria del raggio assume la forma di una spezzata (propagazione rettilinea nei mezzi omogenei e variazioni di pendenza in corrispondenza delle superfici di discontinuità tra dielettrici con diverso indice di rifrazione).
- Un raggio incidente e il corrispondente raggio uscente dal sistema ottico si dicono coniugati.
- Un insieme di raggi che presenta un comune punto di intersezione  $A$  si dice fascio omocentrico. Se ad un fascio omocentrico in  $A$  in ingresso ad un sistema ottico corrisponde in uscita un fascio omocentrico in  $A'$ , il sistema si dice stigmatico e i punti  $A$  e  $A'$  sono detti punti coniugati: il punto  $A$  è detto punto oggetto, il punto  $A'$  è detto punto immagine.
- I punti  $A$  e  $A'$  sono reali se corrispondono a intersezioni di raggi fisici, virtuali se corrispondono a intersezioni di prolungamenti di raggi fisici.
- Il punto coniugato del punto all'infinito è detto fuoco.
- Un sistema ottico costituito da elementi sferici che hanno tutti i centri di curvatura appartenenti ad una stessa retta si dice centrato. La retta su cui giacciono i centri di curvatura è detta asse ottico del sistema.

La determinazione dell'immagine formata da un sistema ottico consiste nel calcolare, per ciascun punto oggetto (da cui emergono i raggi entranti), il corrispondente punto immagine (in cui convergono i raggi uscenti (immagine reale) o da cui divergono i loro prolungamenti (immagine virtuale)). Per trovare le relazioni tra punti oggetto e punti immagine, è conveniente adottare alcune convenzioni di segno, qui di seguito riportate.

- Si assume che i raggi di luce si propagano da sinistra verso destra.
- Detto vertice  $V$  il punto di intersezione tra la superficie di separazione e l'asse ottico, la distanza  $p$  da  $V$  di un punto oggetto  $A$  è positiva ( $p > 0$ ) se  $A$  si trova a sinistra di  $V$ .
- La distanza  $q$  di un punto immagine  $A'$  da  $V$  è positiva ( $q > 0$ ) se  $A'$  si trova a destra di  $V$ .
- Il raggio di curvatura  $R$  di una superficie (sferica) di un sistema ottico è positivo se il centro di curvatura si trova a destra di  $V$ .

- Se l'oggetto ha una dimensione finita, la sua altezza  $y$  rispetto all'asse ottico è positiva ( $y > 0$ ) se l'oggetto si trova al di sopra dell'asse ottico;  $y < 0$  se si trova al di sotto.
- Se l'immagine ha dimensione finita, la sua altezza  $y'$  è positiva ( $y' > 0$ ) se l'immagine si forma al di sotto dell'asse ottico, negativa se si forma al di sopra.
- Il rapporto  $y'/y = M$  è detto ingrandimento o magnificazione (laterale o trasversale) dell'immagine.

Le relazioni che governano la formazione delle immagini (equazioni dei punti coniugati) sono ricavate nell'approssimazione parassiale o gaussiana. In tale approssimazione si considerano solo raggi parassiali, ovvero raggi che formano piccoli angoli con l'asse ottico e che non si allontanano molto da esso (l'altezza del punto di incidenza del raggio sulla superficie del componente ottico è sufficientemente piccola). E' quindi possibile approssimare seni e tangentini degli angoli che i raggi formano con l'asse ottico con i rispettivi angoli, il seno dell'angolo che il raggio di curvatura passante per il punto di incidenza forma con l'asse ottico con l'angolo stesso, e confondere il piede della perpendicolare dal punto di incidenza del raggio sull'asse ottico con il vertice.

In approssimazione parassiale la legge di Snell della rifrazione diventa:

$$n_2 \theta_t \cong n_1 \theta_i.$$

#### FORMAZIONE DELLE IMMAGINI DA SPECCHI

Per determinare la legge di formazione della immagine da un generico specchio sferico è opportuno considerare uno specchio concavo ( $R < 0$ ) ed un punto oggetto  $A$  posto sull'asse ottico, a distanza  $p$  dal vertice. Il punto immagine coniugato si trova tracciando le traiettorie di due raggi, il primo coincidente con l'asse ottico ed il secondo incidente nel generico punto  $P$ . A seguito della riflessione, il primo raggio ritraccia all'indietro se stesso restando coincidente con l'asse ottico, mentre il secondo è riflesso secondo la legge di Snell della riflessione e interseca il primo in un punto  $Q$  dell'asse ottico a distanza  $q$  da  $V$ ;  $Q$  è l'immagine reale di  $P$ . Poiché  $Q$  si trova a sinistra di  $V$ , la distanza  $q$  è negativa. Considerando i due triangoli, il primo formato dal raggio incidente, dall'asse ottico e dal raggio di curvatura, e il secondo dal raggio riflesso, dall'asse ottico e dal raggio di curvatura, da semplici relazioni tra gli angoli dei triangoli e dalla legge di Snell della riflessione si ricava la equazione dei punti coniugati per lo specchio:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}.$$

La relazione determinata nel caso di uno specchio concavo è del tutto generale e vale anche per specchi convessi, pur di tener conto correttamente dei segni di  $p$  e di  $q$  (per uno specchio concavo,  $R < 0, p > 0, q < 0$ ). Dalla precedente relazione, per calcolare la posizione dei fuochi, si può far tendere  $q$  all'infinito, determinando il fuoco anteriore o fuoco oggetto:

$$\frac{1}{f_p} = -\frac{2}{R} \Rightarrow f_p = -\frac{R}{2},$$

oppure far tendere  $p$  a infinito, determinando il fuoco posteriore o fuoco immagine:

$$\frac{1}{f_q} = \frac{2}{R} \Rightarrow f_q = \frac{R}{2}.$$

Nel caso di specchio concavo, ricordando le convenzioni sui segni, risulta che i due fuochi sono coincidenti e si trovano prima del vertice ad una distanza pari a  $R/2$ .

Per calcolare la magnificazione  $M$ , preso un segmento  $AB$  sopra l'asse ottico a distanza  $p$  da  $V$ , si individua con l'equazione dei punti coniugati la posizione  $q$  di  $A'$ . La perpendicolare da  $A'$  interseca il raggio riflesso dallo specchio in  $V$  proveniente da  $B$  nel punto  $B'$ . Dalla similitudine dei due triangoli  $ABV$  e  $A'B'V$  si ricava:

$$M = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{y'}{y} = -\frac{p}{q}.$$

Nel caso di specchio concavo l'ingrandimento è positivo e l'immagine si forma rovesciata (sotto l'asse ottico).

Un caso particolare di specchio sferico è quello piano, in cui  $R \rightarrow \infty$ . Dall'equazione dei punti coniugati risulta  $p = q$ , per cui per un oggetto reale l'immagine è sempre virtuale e si forma dietro lo specchio alla stessa distanza a cui è posto (davanti allo specchio) l'oggetto. La magnificazione è  $M = -1$ , e l'immagine (virtuale, dietro lo specchio) risulta diritta. Da notare l'inversione destra-sinistra nella formazione dell'immagine.

#### **FORMAZIONE DELLE IMMAGINI DA DIOTTO SFERICO (RIFRAZIONE DEL DIOTTO)**

Il diotto è costituito da due mezzi con indice di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  separati da una porzione di calotta sferica avente raggio di curvatura  $R$ . Per calcolare l'equazione dei punti coniugati del diotto assumiamo una superficie convessa ed un punto  $A$  sull'asse ottico a distanza  $p$  da  $V$ ; assumiamo inoltre  $n_2 > n_1$ . Consideriamo il raggio uscente da  $A$  che incide sulla superficie di separazione in  $V$  e prosegue diritto, ed il raggio parassiale uscente da  $A$  che incide in  $P$ , viene deviato secondo la legge di Snell e interseca l'asse ottico in  $A'$  nel secondo mezzo. Considerando gli stessi due triangoli già individuati nel caso precedente dello specchio, le relazioni tra gli angoli unitamente alla legge di Snell espressa in approssimazione parassiale forniscono l'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

La posizione dei fuochi si ottiene facendo tendere  $q$  all'infinito (fuoco oggetto) e  $p$  all'infinito (fuoco immagine) nella precedente equazione dei punti coniugati. Si ottiene:

$$f_p = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R; \quad f_q = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R.$$

La magnificazione del diotto si calcola considerando un oggetto esteso  $AB$ , determinando l'immagine  $A'$  e considerando poi un raggio uscente da  $B$  che intercetta la perpendicolare da  $A'$  nel punto  $B'$ . Dalla legge di Snell parassiale, esprimendo gli angoli in funzione di altezza e posizione dell'oggetto e dell'immagine si ottiene:

$$M = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 p}{n_2 q}.$$

#### **FORMAZIONE DELLE IMMAGINI CONLENTE SPESSA**

La lente spessa è formata dalla sequenza di due diottri sferici, ovvero è costituita da un mezzo con indice di rifrazione  $n$  delimitato da due porzioni di calotta sferica, aventi raggio di curvatura  $R_1$  e  $R_2$ , che si trova tra due mezzi con indice di rifrazione  $n_s$  e  $n_d$ . Per trovare la posizione in cui si forma l'immagine di un punto oggetto  $A$  posto sull'asse ottico a distanza  $p_1$  dal primo vertice  $V_1$ , è opportuno calcolare la posizione  $q_1$  della sua immagine  $A'$  prodotta dal primo diotto. Tale immagine, che si forma a distanza  $p_2 = L - q_1$  dal secondo vertice  $V_2$  ( $L$  è la distanza tra i due

vertici, cioè lo spessore della lente), diventa il punto oggetto per il secondo diottro, producendo l'immagine finale  $A''$  a distanza  $q_2$  da  $V_2$ . La posizione finale  $q_2$  si determina pertanto risolvendo il sistema di due equazioni nelle incognite  $q_1, q_2$ :

$$\frac{n_s}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-n_s}{R_1},$$

$$\frac{n}{L-q_1} + \frac{n_d}{q_2} = \frac{n_d-n}{R_2}.$$

Se la lente, come nella maggior parte dei casi, è in aria ( $n_s = n_d \approx 1$ ) si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} &= \frac{n-1}{R_1}, \\ \frac{n}{L-q_1} + \frac{1}{q_2} &= \frac{1-n}{R_2}.\end{aligned}$$

Il sistema di equazioni sopra riportate può essere risolto molto agevolmente se lo spessore  $L$  della lente può essere trascurato, come nella lente sottile.

#### FORMAZIONE DELLE IMMAGINI CON LENTE SOTTILE

Se lo spessore  $L$  della lente è trascurabile rispetto alle altre distanze in gioco, in particolare rispetto ai raggi di curvatura, i due vertici della lente coincidono con il suo centro ( $L \rightarrow 0$ ) e la lente si dice sottile. Il sistema di equazioni si semplifica notevolmente e diventa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} &= \frac{n-1}{R_1}, \\ -\frac{n}{q_1} + \frac{1}{q_2} &= \frac{1-n}{R_2}.\end{aligned}$$

Sommando membro a membro le due equazioni, ponendo  $p_1 = p$  e  $q_2 = q$ , si ottiene:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

La quantità

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{f_q} = \frac{1}{f}$$

rappresenta l'inverso della focale (unica) della lente sottile, o potere diottrico della lente (il potere diottrico si misura in  $m^{-1}$  o in diottrie). I due fuochi infatti, situati in posizione simmetrica ai due lati della lente, sono uguali in modulo e segno. La relazione

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

è nota come equazione dei fabbricanti di lenti. La focale, che dipende dall'indice di rifrazione del materiale e dai raggi di curvatura, è infatti la grandezza più significativa per caratterizzare una lente. La relazione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

rappresenta l'equazione dei punti coniugati della lente sottile.

Le lenti si suddividono in lenti positive o convergenti, con  $f > 0$ , e lenti negative o divergenti, con  $f < 0$ . All'interno di tali categorie vi possono essere lenti biconvesse ( $R_1 > 0$  e  $R_2 < 0$ ), piano convesse e a menisco positivo ( $f > 0$ ) e lenti biconcave, piano-concave e a menisco negativo ( $f < 0$ ).

La magnificazione o ingrandimento  $M$  si calcola considerando due dei tre raggi notevoli della lente (quello che provenendo dall'estremo  $B$  dell'oggetto, passa inalterato attraverso il centro della lente; quello che passa per il fuoco oggetto e prosegue, dopo la lente, parallelo all'asse ottico; quello che incide parallelo all'asse ottico e passa, dopo la lente, per il fuoco immagine). Il punto  $B'$  dell'immagine si trova dall'intersezione di due dei tre raggi prima indicati, con semplici considerazioni geometriche:

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{q}{p}$$

### ABERRAZIONI (CENNI)

Le aberrazioni sono scostamenti dell'immagine vera rispetto a quella calcolata utilizzando l'ottica parassiale, quando le condizioni di raggi parassiali non sono più soddisfatte. Le aberrazioni sono classificabili in due categorie: cromatiche e monocromatiche. Le prime sono conseguenza della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda (dal colore) della radiazione incidente, a causa del fenomeno della dispersione. Le seconde sono sempre presenti quando i raggi incidenti si propagano ad angoli non piccoli rispetto all'asse ottico o incidono sul componente ottico in posizioni lontane dal vertice e sono anche dette aberrazioni di Seidel.

#### a) Aberrazione cromatica

Poiché  $n = n(\lambda)$ , l'angolo di rifrazione, determinato dalla legge di Snell, varia al variare della lunghezza d'onda. In particolare la focale della lente dipende dalla lunghezza d'onda e aumenta con  $\lambda$ . Mettendo in evidenza tale dipendenza, per una lente sottile si ottiene:

$$\frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

L'aberrazione cromatica si può compensare, almeno a due lunghezze d'onda prefissate, utilizzando una coppia di lenti, una convergente e l'altra divergente, poste a contatto, la cui lunghezza focale equivalente si trova sommando i poteri diottrici (doppietto acromatico).

Gli specchi, non utilizzando il fenomeno della rifrazione, non presentano aberrazione cromatica.

#### b) Aberrazioni monocromatiche

1. *Aberrazione sferica.* Si consideri per semplicità uno specchio concavo ed il punto oggetto all'infinito, ovvero raggi paralleli che incidono su di esso. Aumentando la distanza dall'asse i raggi paralleli all'asse non convergono in uno stesso punto (fuoco immagine), ma si avvicinano al vertice, ovvero la focale dello specchio diminuisce per raggi non parassiali. In alcuni casi particolari l'aberrazione sferica degli specchi si può eliminare. Ad es., nel caso specifico di raggi paralleli incidenti su specchi di grande apertura, come avviene nei telescopi a ottica riflettente, si possono utilizzare specchi parabolici invece di specchi sferici. Anche per una lente convergente i raggi più lontani dall'asse ottico convergono in un fuoco più vicino alla lente. L'effetto è sia longitudinale che trasversale: (i) l'immagine di un punto oggetto si forma in punti diversi dell'asse; (ii) considerando fasci di raggi ad angoli diversi, l'intersezione di tali fasci di raggi con piani ortogonali all'asse ottico produce come immagini del punto oggetto nelle varie posizioni cerchi di diametro diverso. L'immagine migliore corrisponde al cerchio di diametro minimo, detto

cerchio di minima confusione. Una soluzione per ridurre l'aberrazione sferica consiste nell'inserire un diaframma per eliminare i raggi periferici, riducendo tuttavia la luminosità dell'immagine.

2. *Astigmatismo*. Quando l'oggetto puntiforme è fuori dall'asse ottico, la sua immagine su un piano ortogonale rispetto all'asse ottico cambia forma spostando il piano su cui è osservata e allontanandolo dalla lente: dapprima è circolare, si trasforma poi in ellittica con l'asse maggiore giacente su un piano detto sagittale e successivamente in un segmento. Allontanandosi ulteriormente dalla lente l'immagine diventa di nuovo circolare fino a trasformarsi di nuovo in un segmento che giace su un piano ortogonale al precedente, detto piano tangenziale.
3. *Coma*. Se l'oggetto puntiforme è fuori asse, la sua immagine, nella posizione migliore, non corrisponde ad un disco, ma risulta allungata assumendo l'aspetto di una piccola cometa, da cui la denominazione.
4. *Curvatura di campo*. Se l'oggetto ha una estensione finita (non è più puntiforme) le immagini (migliori) dei diversi punti non giacciono su uno stesso piano ortogonale all'asse ottico, ma su una superficie curva, concava verso la lente.
5. *Distorsione*. L'ingrandimento o magnificazione trasversale varia a seconda della distanza del punto oggetto dall'asse ottico: se cresce con la distanza si ha la distorsione a cuscinetto, se diminuisce, la distorsione a barilotto. Ne consegue una deformazione dell'oggetto, particolarmente osservabile considerando una griglia quadrata che si distorce allungandosi (cuscinetto) o contraendosi (barilotto) proporzionalmente alla distanza dei punti dall'asse ottico.



## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 19. INTERFERENZA DELLA LUCE

Quando in una stessa regione di spazio sono presenti due o più onde elettromagnetiche, polarizzate linearmente nella stessa direzione, l'intensità della luce (proporzionale al modulo quadro del campo elettromagnetico) risulta modulata, con la presenza di frange chiare e scure nelle quali si ridistribuisce spazialmente l'energia (che ovviamente si conserva). A tale fenomeno si dà il nome di interferenza: le frange di interferenza descrivono la modulazione spaziale dell'intensità del campo risultante. Il fenomeno dell'interferenza è tipico di tutte le propagazioni per onde, non solo delle onde elettromagnetiche e della luce.

#### INTERFERENZA DI ONDE PIANE

Si è ricavato, analizzando il vettore di Poynting ed il flusso di energia associato ad un'onda elettromagnetica piana monocromatica che il legame tra intensità media  $I$  e ampiezza del campo elettrico è dato nel vuoto da:

$$I = \varepsilon_0 c \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  periodo di oscillazione dell'onda. In un mezzo materiale la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto sono sostituite da quelle del mezzo:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2.$$

Consideriamo due onde piane monocromatiche, polarizzate linearmente nella stessa direzione, che si propagano collinearmente (lungo l'asse  $z$ ). Essendo i campi polarizzati linearmente nella stessa direzione, utilizziamo una notazione scalare:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \cos(k_1 z_1 - \omega_1 t + \varphi_1), \\ E_2 &= E_{02} \cos(k_2 z_2 - \omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

dove  $z_1$  e  $z_2$  sono le distanze percorse dalle due onde,  $k_1, k_2$  le costanti di propagazione,  $\omega_1, \omega_2$  le pulsazioni e  $\varphi_1, \varphi_2$  le rispettive fasi iniziali.

Per la linearità dell'equazione delle onde, il campo risultante  $E = E_1 + E_2$  è anch'esso soluzione dell'equazione delle onde. In presenza simultanea di due campi, possiamo quindi scrivere:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu T}} \int_0^T E^2 dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu T}} (\int_0^T E_1^2 dt + \int_0^T E_2^2 dt + 2 \int_0^T E_1 E_2 dt) = I_1 + I_2 + 2Z,$$

dove

$$Z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{01} E_{02}}{T} \int_0^T \cos(k_1 z_1 - \omega_1 t + \varphi_1) \cos(k_2 z_2 - \omega_2 t + \varphi_2) dt$$

con  $T$  multiplo intero dei periodi  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  e  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ . Se  $\omega_1 \neq \omega_2$ , l'integrale che compare nella precedente espressione è nullo e pertanto  $Z = 0$ . Conseguo che l'intensità dell'onda risultante risulta data dalla somma delle intensità delle due onde che si propagano e non si ha interferenza:

$$I = I_1 + I_2.$$

Se i due campi hanno la stessa frequenza (e si propagano nello stesso mezzo),  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\Rightarrow k_1 = k_2 = k$ . Mettendo in evidenza nell'espressione di  $Z$  la differenza di fase  $\Phi = k(z_2 - z_1) + \varphi_2 - \varphi_1$ , si ricava con alcuni passaggi:

$$Z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{E_{01}E_{02}}{2} \cos \Phi$$

ottenendo per l'intensità risultante:

$$I = I_1 + I_2 + 2Z = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{E_{01}E_{02}}{2} \cos \Phi = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Phi.$$

L'ultimo termine nella precedente relazione rappresenta il termine di interferenza, che dipende dalla differenza di fase complessiva tra le due onde. Sommando due onde monocromatiche piane con la stessa frequenza e con differenza di fase costante nel tempo si ottiene quindi un'onda la cui intensità varia da un minimo pari a  $I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$  quando le onde che interferiscono sono in opposizione di fase ( $\Phi = \pi \pm 2n\pi$ ) a un massimo pari a  $I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$  quando le onde sono in fase ( $\Phi = \pm 2n\pi$ ). Nel caso particolare in cui le ampiezze delle due onde siano uguali,  $I_1 = I_2 = I_0$ , si ottiene che l'intensità risultante:

$$I = 2I_0(1 + \cos \Phi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Phi}{2},$$

varia tra  $I_{max} = 4I_0$  e  $I_{min} = 0$ .

E' importante sottolineare che il fenomeno dell'interferenza avviene solo tra onde la cui differenza di fase rimane costante nel tempo. Se la differenza di fase complessiva  $\Delta$  varia in modo casuale nel tempo, la quantità  $\cos \Delta$  oscilla tra  $-1$  e  $+1$ , con valor medio  $\langle \cos \Delta \rangle = 0$  e non si ha interferenza. Due onde (o due sorgenti di onde elettromagnetiche) sono dette coerenti se mantengono la loro differenza di fase costante nel tempo; se invece la differenza di fase varia in modo casuale nel tempo, le onde (o le sorgenti) sono dette incoerenti. Le sorgenti di luce naturale sono generalmente incoerenti; tra le sorgenti artificiali i laser producono radiazione coerente.

Nel caso più generale in cui le onde che interferiscono si propagano lungo percorsi diversi in mezzi con indice di rifrazione diverso, per poi ricombinarsi e sovrapporsi nella parte finale del loro cammino (ad esempio, in un interferometro di Michelson o di Mac Zehender in cui in uno dei rami è interposto un mezzo con diverso indice di rifrazione), si ha che la fase complessiva è data da  $\Phi = k_2 z_2 - k_1 z_1 + \varphi_2 - \varphi_1$ , con  $k_2 = 2\pi n_2 / \lambda_0$  e  $k_1 = 2\pi n_1 / \lambda_0$ , dove  $n_2, n_1$  sono gli indici di rifrazione lungo i due percorsi delle due onde. La differenza di fase spaziale  $k_2 z_2 - k_1 z_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 z_2 - n_1 z_1)$  dipende quindi, oltre che dai cammini geometrici anche dagli indici di rifrazione. Per tener conto di questa circostanza si introduce il concetto di cammino ottico, definito come il prodotto del cammino geometrico per l'indice di rifrazione; la differenza di fase spaziale è proporzionale, tramite il vettore d'onda nel vuoto, alla differenza di cammino ottico ( $n_2 z_2 - n_1 z_1$ ). In generale, la fase spaziale accumulata da un'onda che si propaga lungo un cammino geometrico  $s$  in un mezzo con indice di rifrazione  $n$  è pari alla fase che acquisirebbe l'onda propagandosi nel vuoto lungo un cammino pari a  $ns$ .

Si ricorda infine l'importanza della polarizzazione nel fenomeno dell'interferenza: solo radiazione con la stessa polarizzazione è in grado di produrre interferenza; se ad esempio le due onde hanno

polarizzazioni lineari ortogonali, si può dimostrare che il termine di interferenza è rigorosamente nullo.

#### **INTERFERENZA DI DUE SORGENTI COERENTI (INTERFEROMETRO DI YOUNG)**

Si consideri uno schermo piano opaco su cui sono praticate due piccole fessure lineari  $S_1$  e  $S_2$  distanti  $D$  l'una dall'altra, su cui incide un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda_0$ . Le due aperture campionano due piccole porzioni dello stesso fronte di fase dell'onda piana e, in accordo al principio di Huygens-Fresnel, diventano sorgenti di onde cilindriche coerenti (con la stessa fase iniziale). A grande distanza dietro al primo schermo ciascuna onda cilindrica proveniente dalle due aperture può essere considerata come un insieme di onde piane di ampiezza costante e vettori d'onda distribuiti in tutte le direzioni comprese tra  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  e  $\theta = +\frac{\pi}{2}$ , essendo  $\theta$  l'angolo tra il vettore d'onda e la normale allo schermo. A una distanza  $L$  molto grande rispetto alla separazione tra le fessure,  $L \gg D$ , si pone un secondo schermo parallelo al primo su cui si osserva la figura di interferenza risultante tra le due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ . Fissato un punto  $P$  sullo schermo e quindi individuata una direzione di osservazione corrispondente all'angolo  $\theta$  ( $\theta$  è l'angolo tra la congiungente il punto centrale tra le fessure con  $P$  e la normale alle fessure), la differenza di cammino ottico (in questo caso equivalente a quello geometrico se si assume la propagazione in aria, con  $n \approx 1$ ) tra le due onde provenienti dalle due fessure si ricava con semplici considerazioni trigonometriche ed è pari a:

$$s_2 - s_1 \cong D \sin \theta.$$

Assumendo uguali le fasi iniziali,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , lo sfasamento tra le due onde sullo schermo è dato da:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (s_2 - s_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} D \sin \theta.$$

La condizione di interferenza costruttiva, corrispondente ai massimi di intensità di luce (frange chiare), si ha per:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} D \sin \theta = 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots;$$

ovvero:

$$\sin \theta_{max,m} = \frac{m\lambda_0}{D}.$$

La condizione di interferenza distruttiva, corrispondente ai minimi di intensità (frange scure) si ha per:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} D \sin \theta = (2m+1)\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots;$$

ovvero:

$$\sin \theta_{min,m} = \frac{(m+1/2)\lambda_0}{D}.$$

Sullo schermo di osservazione i massimi di interferenza (per piccoli angoli) hanno coordinata:

$$y_{max,m} = L \tan \theta_{max,m} \cong L \sin \theta_{max,m} = \frac{mL\lambda_0}{D},$$

avendo posto l'origine nel punto di intersezione della perpendicolare al primo schermo passante per il punto centrale tra le due fessure con lo schermo di osservazione. L'intensità osservata sullo schermo, assumendo uguali le ampiezze delle due onde provenienti da  $S_1$  e da  $S_2$ , è data da:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta}{2} = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda_0} \right),$$

o, in funzione della coordinata y:

$$I(y) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi D y}{L \lambda_0} \right),$$

che corrisponde a un profilo di intensità con spaziatura costante tra i massimi ( $\Delta y_{Max} = \frac{L \lambda_0}{D}$ ), dando origine a una serie di frange chiare e scure equidistanti.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 20. INTERFERENZA DI N SORGENTI COERENTI E RETICOLO DI DIFFRAZIONE

#### INTERFERENZA DI N SORGENTI COERENTI

L'interferenza tra più sorgenti coerenti rappresenta una generalizzazione del caso di due sorgenti (interferometro di Young). Una tipica situazione sperimentale consiste in uno schermo opaco su cui sono praticate  $N$  fenditure uguali e parallele (trascurando per il momento gli effetti dovuti alla larghezza delle fenditure) con spaziatura  $D$ , illuminato con un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente; a grande distanza dietro di esso, cioè a una distanza  $L \gg D$ , è situato un secondo schermo parallelo al primo sul quale si osserva la distribuzione di intensità risultante dalla interferenza delle  $N$  onde coerenti trasmesse dalle fenditure. Da ciascuna fenditura origina un'onda che possiamo considerare cilindrica, con la stessa fase iniziale, che a grande distanza tende a diventare un'onda piana; fissata una direzione di propagazione, possiamo quindi considerare il campo elettromagnetico risultante come la somma di tante onde piane, con differenza di fase legata solo alla differenza di cammino ottico. I campi trasmessi da ciascuna fenditura sullo schermo di osservazione sono descrivibili mediante fasori di uguale ampiezza  $E_0$  e con la stessa frequenza dell'onda incidente. Fissato un qualsiasi punto  $P$  sullo schermo di osservazione e detto  $\theta$  l'angolo tra la retta congiungente la fenditura centrale con il punto  $P$  (ovvero la direzione di osservazione) e la normale al piano delle fenditure, ciascun fasore risulta sfasato rispetto a quello contiguo della quantità  $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta$ . La somma vettoriale di tutti i fasori fornisce l'ampiezza del campo risultante, il cui modulo quadra dà l'intensità nel punto  $P$  (ovvero nella direzione  $\theta$ ). La somma dei fasori forma una spezzata poligonale regolare con  $N$  lati, inscrivibile in una circonferenza, dal cui centro ciascun fasore è visto sotto uno stesso angolo  $\Phi'$ , uguale all'angolo di sfasamento tra due fasori contigui,  $\Phi' = \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta$  (si dimostra considerando i due triangoli isosceli formati congiungendo il centro della circonferenza agli estremi di due fasori contigui). Il fasore risultante, la cui ampiezza  $E$  è data dal segmento congiungente l'origine del primo fasore alla punta dell'ultimo, è sotteso da un angolo al centro pari a  $N \Phi' = N \Phi$ . Detto  $R$  il raggio della circonferenza, risulta:

$$E = 2R \sin\left(\frac{N\Phi}{2}\right)$$

$$E_0 = 2R \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)$$

da cui si ricava, dividendo membro a membro:

$$E = E_0 \frac{\sin\left(\frac{N\Phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)},$$

$$I(\theta) = I_0 \frac{[\sin\left(\frac{N\Delta}{2}\right)]^2}{[\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)]^2} = I_0 \frac{[\sin\left(\frac{\pi ND \sin \theta}{\lambda}\right)]^2}{[\sin\left(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}\right)]^2}.$$

La distribuzione di intensità risultante descritta dalla funzione  $I(\theta)$ , dovuta all'interferenza dei campi coerenti trasmessi dalle  $N$  fenditure, presenta i massimi (principali) di interferenza quando tutti i contributi si sommano in fase, cioè quando è verificata la condizione:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta = \pm 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

ovvero quando la differenza di cammino ottico è multiplo intero della lunghezza d'onda:

$$\sin\theta_{max,m} = \pm m \frac{\lambda}{D}$$

Calcolando (ad es. con la regola di De L'Hopital) il valore della funzione  $I(\theta)$  nei punti di massimo dati dalla precedente condizione, si ricava:

$$I_{max} = N^2 I_0.$$

Lo stesso risultato si ottiene anche direttamente considerando che, quando lo sfasamento è un multiplo intero di  $2\pi$ , tutti gli  $N$  fasori risultano allineati, e pertanto l'ampiezza  $E = NE_0$ , ovvero:

$$I = I_{max} = N^2 I_0.$$

Il numeratore della funzione  $I(\theta)$  si annulla per:

$$\frac{\pi ND \sin\theta}{\lambda} = \pm m' \pi \quad m' = 1, 2, \dots, N-1; N+1, N+2, \dots, 2N-1; \dots; mN+1, mN+2, \dots, (m+1)N-1. \\ \sin\theta_{min,m'} = \pm m' \frac{\lambda}{ND}.$$

Tra due massimi principali vi sono  $N-1$  minimi (zeri) (i valori  $m' = 0, N, 2N, \dots, mN$  sono esclusi in quanto corrispondono a massimi principali); consegue che esistono anche  $N-2$  massimi secondari tra due massimi principali. Da uno studio completo della funzione  $I(\theta)$  si ricava che l'ampiezza dei massimi secondari decresce, tendendo a zero, all'aumentare di  $N$ .

Per valori di  $N$  elevati la figura di interferenza presenta una serie di massimi di intensità molto stretti, equispaziati in funzione di  $\sin\theta$ ; la luce si concentra pertanto in una serie di direzioni definite dalla condizione di massimo  $D\sin\theta = +m\lambda$ .

Per valutare la larghezza angolare dei massimi principali  $\Delta\theta_{max,m}$  della figura di interferenza, si possono approssimare le larghezze angolari dei massimi principali con la distanza che intercorre tra il picco e il primo zero contiguo (considerando ciascun massimo come una funzione triangolo). Per il primo massimo, corrispondente a  $\theta_{max} = 0$  ( $m = 0, m' = 1$ ) risulta:

$$\Delta\theta_{max,0} = \theta_{min,1} \cong \sin\theta_{min,1} = \frac{\lambda}{ND}.$$

Generalizzando al caso del massimo principale  $m$ -esimo, possiamo scrivere:

$$\sin(\theta_{max,m} + \Delta\theta_{max,m}) = \sin\theta_{min,m'=mN+1} = m' \frac{\lambda}{ND} = (mN+1) \frac{\lambda}{ND} \\ \sin\theta_{max,m} + \cos\theta_{max,m} \Delta\theta_{max,m} = m \frac{\lambda}{D} + \frac{\lambda}{ND}$$

e, elidendo i termini uguali per la condizione di massimo prima ricavata, si ottiene:

$$\Delta\theta_{max,m} = \frac{\lambda}{ND \cos\theta_{max,m}}.$$

La larghezza dei massimi diminuisce all'aumentare sia del numero delle fenditure  $N$  che della loro spaziatura  $D$ , cioè è inversamente proporzionale alla lunghezza totale ( $ND$ ) dell'insieme di

fenditure. Si può inoltre osservare che il massimo centrale, corrispondente a  $\theta_{max} = 0$ , è il più stretto di tutti; all'aumentare di  $\theta$ , le larghezze dei massimi aumentano.

#### IL RETICOLO DI DIFFRAZIONE

Un insieme di fenditure uguali tra loro, separate l'una dall'altra da un passo costante, costituisce un dispositivo detto reticolo di diffrazione che opera in trasmissione. E' anche possibile realizzare reticolni di diffrazione che presentano tratti di superficie riflettenti uguali ed equispaziati, che opera per riflessione. In entrambi questi casi i reticolni producono variazioni periodiche sull'ampiezza dell'onda trasmessa o riflessa; in altri casi, i reticolni possono anche produrre modulazioni periodiche di fase.

Il numero di fenditure per unità di lunghezza di un reticolo può essere assai elevato, raggiungendo anche il migliaio per millimetro. La sua costruzione avviene generalmente fabbricando con tecniche litografiche un primo originale, che viene poi utilizzato come matrice dalla quale ottenere le repliche successive.

Il nome – reticolo di diffrazione – deriva dal fatto che, oltre all'interferenza tra gli elementi del reticolo, anche la diffrazione (vedi paragrafo sulla diffrazione) gioca un ruolo importante nel determinare le caratteristiche della distribuzione di intensità che si osserva in campo lontano, in quanto la luce è anche diffratta da ciascuna fenditura, che ha solitamente larghezza dell'ordine della lunghezza d'onda. Alcune importanti proprietà del reticolo di diffrazione, qui di seguito illustrate, sono tuttavia principalmente legate al fenomeno dell'interferenza multipla tra le  $N$  fenditure.

La dispersione  $\Delta$  del reticolo è lo spostamento angolare  $d\theta$  dei massimi di interferenza al variare della lunghezza d'onda, ed è definita come:

$$\Delta_m = d\theta_{\lambda,m} / d\lambda.$$

Per calcolare la dispersione in funzione dei parametri del reticolo è sufficiente differenziare l'espressione che fornisce la posizione angolare dei massimi principali. Per il massimo m-esimo si ha:

$$D \cos \theta_{max,m} d\theta_{\lambda,m} = m d\lambda,$$

da cui si ricava:

$$\Delta_m = \frac{d\theta_{\lambda,m}}{d\lambda} = \frac{m}{D \cos \theta_{max,m}}.$$

Si noti che la dispersione dipende dall'ordine  $m$  del massimo che si considera; la dispersione di un reticolo aumenta all'aumentare dell'ordine  $m$  (detto anche ordine di diffrazione o ordine del reticolo) e al diminuire del passo  $D$  tra le fenditure. Il massimo centrale ( $m=0$ ) non subisce spostamento angolare al variare della lunghezza d'onda e non presenta quindi dispersione. Per separare due onde monocromatiche con lunghezze d'onda molto vicine è necessario servirsi di reticolni con elevato valore della dispersione.

- Il potere risolutivo  $R$  del reticolo è l'inverso del rapporto tra la minima differenza di lunghezza d'onda di due onde monocromatiche, risolvibile dal reticolo, e la lunghezza d'onda (media) delle due onde. Al variare della lunghezza d'onda si sposta la posizione dei massimi principali che dipende da  $\lambda$  a causa della dispersione del reticolo. Per il massimo m-esimo lo spostamento angolare è dato da:

$$\Delta\theta_{\lambda,m} = \frac{m\Delta\lambda}{D\cos\theta}.$$

Per poter distinguere i due massimi relativi a due lunghezze d'onda molto vicine si può assumere, in accordo con il criterio di Rayleigh, che il massimo dell'uno coincida con il primo minimo dell'altro, ovvero che la minima distanza angolare risolvibile sia quella tra un massimo ed il primo minimo contiguo, pari alla larghezza del picco di trasmissione:

$$\Delta\theta_{Rayleigh} = \Delta\theta_{max,m} = \frac{\lambda}{ND\cos\theta_{max,m}}.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN,$$

Risulta che il potere risolutivo del reticolo è proporzionale all'ordine  $m$  del massimo di interferenza e al numero totale  $N$  di fenditure del reticolo.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 21. DIFFRAZIONE DELLA LUCE

#### CONCETTI INTRODUTTIVI

La diffrazione è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando la luce incontra nel suo percorso un ostacolo o un'apertura. Nello spazio oltre l'ostacolo o l'apertura all'onda che si propaga imperturbata devono essere sommate in modo coerente anche tutte le onde elementari secondarie generate dagli atomi alla superficie dell'ostacolo o sul bordo dell'apertura, posti in oscillazione dal campo elettromagnetico incidente. Tra queste onde secondarie generate dagli oscillatori atomici (che hanno la stessa frequenza dell'onda incidente) e la porzione di campo elettromagnetico trasmesso dopo l'ostacolo o l'apertura si hanno fenomeni di interferenza con conseguente ridistribuzione spaziale dell'energia. Il campo elettromagnetico risultante avrà in generale componenti che si propagano anche lungo direzioni diverse da quella di incidenza. I fenomeni di diffrazione sono quindi particolari situazioni di interferenza nelle quali, invece di considerare la sovrapposizione di onde emesse da un numero finito di sorgenti, si considera quella di un numero elevatissimo di sorgenti infinitesime (gli oscillatori atomici alla superficie dell'ostacolo o dell'apertura forzati dall'onda incidente) con la porzione di onda trasmessa imperturbata.

Le modulazioni di intensità dovute a questi fenomeni di interferenza si localizzano principalmente a ridosso del confine tra la zona di ombra geometrica e quella illuminata direttamente, creando delle frange di diffrazione più o meno accentuate, a seconda delle condizioni, nella cosiddetta zona di penombra. Questa deviazione della luce dal percorso rettilineo, che non è imputabile né a riflessione né a rifrazione, non è descrivibile con l'ottica geometrica, ma, come tutti i fenomeni di interferenza, necessita della trattazione ondulatoria.

Dal punto di vista modellistico e computazionale, i fenomeni di diffrazione possono essere trattati utilizzando la teoria scalare della diffrazione, che fondamentalmente utilizza (integra) l'equazione delle onde considerando le opportune condizioni al contorno. Ad esempio, nel caso di un'apertura in uno schermo opaco, le condizioni al contorno impongono che il campo sia imperturbato all'interno dell'apertura, sia nullo sulla superficie posteriore dello schermo al di fuori dell'apertura, e che si annulli a distanza infinita dietro lo schermo proporzionalmente all'inverso della distanza.

I risultati della teoria scalare della diffrazione sono simili a quelli previsti dal principio di Huygens-Fresnel. Tale principio, che è semplicemente un metodo empirico di calcolo, asserisce che ciascun punto di un'onda può essere considerato come una sorgente puntiforme (di ampiezza infinitesima) di un'onda sferica secondaria centrata in quel punto. Il fronte d'onda successivo del campo che si propaga può essere ricostruito come inviluppo dei fronti d'onda sferici di queste sorgenti secondarie virtuali. Fresnel raffinò questa descrizione, assumendo che la distribuzione di sorgenti secondarie elementari emetta onde alla stessa frequenza di quella originaria e che tali onde interferiscano tra loro.

Analizziamo il caso, di grande interesse in ottica, di un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente che incide su una apertura  $\Sigma$ . La teoria scalare della diffrazione ha come risultato l'integrale di diffrazione, che fornisce il campo  $E(P)$  nel generico punto  $P$  dietro l'apertura:

$$E(P, t) = \iint_{\Sigma_0} CE(P_0) \frac{\exp[j(kr - \omega t - \frac{\pi}{2})]}{r} f(\theta) d\Sigma_0.$$

In questa espressione si è utilizzata la notazione esponenziale per descrivere il campo elettromagnetico e si può riconoscere che il campo  $E(P, t)$  risultante è dato dalla somma (ovvero dal calcolo dell'integrale) di infiniti contributi infinitesimi  $dE = CE(P_0) \frac{\exp[j(kr - \omega t - \frac{\pi}{2})]}{r} dx_0 dy_0$  ( $C$  è una costante). Ciascun contributo è un'onda sferica elementare centrata nel generico punto  $P_0$  dell'apertura  $\Sigma_0$  distante  $r$  dal punto  $P$ , con ampiezza proporzionale all'ampiezza  $E(P_0)$  del campo incidente nel punto  $P_0$  dell'apertura  $\Sigma_0$ , con la stessa frequenza dell'onda incidente e sfasato in anticipo di  $\pi/2$  rispetto ad essa. Ogni onda sferica elementare è pesata infine dal termine adimensionale  $f(\theta)$ , detto fattore di obliquità, dove  $\theta$  è l'angolo tra la retta congiungente  $P_0$  con  $P$  e la normale all'apertura, ovvero è l'angolo che individua la direzione di osservazione. Il fattore di obliquità è una funzione proporzionale a  $\cos \theta$ , che assume il valore massimo per  $\theta = 0$  e si annulla per  $\theta = \pi/2$ .

L'integrale di diffrazione sopra introdotto, nel caso di apertura di forma qualsiasi, è difficile da calcolare per via analitica e richiede in generale una integrazione numerica. Si possono tuttavia individuare due dimensioni caratteristiche, che sono la dimensione trasversale massima dell'apertura  $h$  e la distanza  $L$  a cui si osserva il campo dietro l'apertura e si può mostrare che esistono due regimi di diffrazione:

- 1) diffrazione di Fraunhofer o di campo lontano per  $\lambda L \gg h^2$ ;
- 2) diffrazione di Fresnel o di campo vicino per  $\lambda L \ll h^2$ .

I due regimi corrispondono a distanze di osservazione molto lontane (diffrazione di Fraunhofer o in campo lontano) e distanze di osservazione molto vicine allo schermo (diffrazione di Fresnel o in campo vicino). Nel caso di diffrazione di Fraunhofer l'integrale di diffrazione si semplifica notevolmente, in quanto si può approssimare il fattore di obliquità  $f(\theta) \cong 1$  ed il termine  $r$  a denominatore dell'onda sferica (ma non quello che compare nella fase!) con la distanza misurata ortogonalmente all'apertura,  $r \cong L$ , ponendosi in approssimazione parassiale.

#### DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER CON APERTURA MONODIMENSIONALE (FENDITURA)

Nel caso di campo lontano e con geometrie semplici dell'apertura (ad esempio, apertura rettangolare o circolare) è possibile calcolare per via analitica l'integrale di diffrazione. Come esempio, si può calcolare il campo di Fraunhofer prodotto dietro l'apertura nel caso di una fenditura monodimensionale di larghezza  $a$  (assumiamo illimitata l'altra dimensione dell'apertura). Introdotta una coordinata  $y_0$  con origine al centro della fenditura, le onde elementari hanno origine da tutti i punti  $P_0(y_0)$  dell'apertura con  $-\frac{a}{2} < y_0 < \frac{a}{2}$ . L'integrale di diffrazione di Fraunhofer diventa in tal caso:

$$E(P, t) = \int_{-a/2}^{a/2} C'E_0 \frac{\exp[j(kr(y_0) - \omega t - \frac{\pi}{2})]}{L} dy_0,$$

in cui  $C'$  è una costante e  $r(y_0) \cong r_0 - y_0 \sin \theta$ , dove  $r_0$  è la distanza tra il punto centrale sull'apertura  $P_0(0)$  e il punto  $P$ . Si ha pertanto:

$$E(P, t) = E(\theta, t) = \frac{C'E_0}{L} \exp[j(kr_0 - \omega t - \frac{\pi}{2})] \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-jky_0 \sin \theta) dy_0.$$

Si noti che, essendo  $a \ll L$ , l'angolo  $\theta$  non varia al variare di  $y_0$  all'interno dell'apertura. Integrando si ottiene:

$$E(P, t) = \frac{c' a E_0}{L} \exp [j(kr_0 - \omega t - \frac{\pi}{2})] \frac{\sin(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}},$$

da cui si ricava l'intensità (considerando il valor medio del quadrato della parte reale del campo su un periodo):

$$I(P) = I_M \frac{\sin^2(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})^2}.$$

La distribuzione angolare di intensità in funzione di  $\sin \theta$  è del tipo seno cardinale al quadrato e presenta un lobo centrale in cui si concentra la massima parte dell'energia (circa l'80%), con il massimo a  $\theta = 0$  e una serie di lobi laterali decrescenti con i minimi (zeri della funzione) dati da:

$$\sin \theta_{min} = \pm m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, \dots$$

I minimi risultano equispaziati, e la piena larghezza a metà altezza del massimo centrale, valutabile come la distanza tra il massimo centrale ed il primo zero adiacente, è pari a:

$$\sin(\Delta\theta) \cong \Delta\theta = \frac{\lambda}{a}.$$

Gli effetti della diffrazione sono strettamente legati al parametro  $\frac{\lambda}{a}$ . Se l'apertura è molto maggiore della lunghezza d'onda, la luce è diffratta in misura trascurabile, il lobo centrale diventa molto stretto e la distribuzione angolare dell'intensità è limitata ad angoli prossimi a  $\theta = 0$ ; in altre parole, i raggi di luce (il fronte d'onda) proseguono inalterati oltre l'apertura. Se le dimensioni dell'apertura diventano invece confrontabili con la lunghezza d'onda, la distribuzione di campo si allarga notevolmente dietro l'apertura e il fascio di luce diverge. L'angolo  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$  è anche detto angolo di diffrazione o angolo di divergenza del fascio per l'onda piana di dimensione trasversale  $a$  (o il fascio di luce collimato di dimensione trasversale  $a$ , nel caso monodimensionale)

E' possibile calcolare la diffrazione di Fraunhofer da una fenditura anche utilizzando un approccio di tipo geometrico, basato su una rappresentazione delle onde sferiche elementari provenienti dall'apertura mediante fasori. Le onde sferiche elementari che si sommano nella direzione  $\theta$  hanno tutte uguale ampiezza (infinitesima)  $dE_0 = [(C'E_0)/L]dy_0$  e ciascuna onda ha una differenza di fase rispetto a quella contigua pari a  $d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta dy_0$ . La catena di fasori, ciascuno sfasato rispetto al precedente dello stesso angolo  $d\varphi$ , costituisce una spezzata poligonale regolare i cui lati sono infinitesimi e che si può approssimare ad un arco di cerchio. Lo sfasamento complessivo tra l'ultima onda elementare (per  $x \approx a$ ) e la prima (per  $x \approx 0$ ) è pari a  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$ . L'ampiezza del campo risultante  $E(\theta)$  è data dal fasore che sottende l'arco di cerchio (la corda che sottende l'arco). Si può mostrare facilmente che l'angolo al centro corrispondente all'arco di cerchio è pari a  $\varphi$ . La lunghezza dell'arco di cerchio,  $E_M$ , è pari alla somma di tutti i vettori elementari in fase, ovvero rappresenta il valore massimo che il campo risultante può avere quando la differenza di fase tra vettori elementari contigui è nulla, cioè quando  $\theta = 0$ . Detto  $R$  il raggio del cerchio, si ha  $\varphi = E_M/R$ . Risulta inoltre:

$$E(\theta) = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2 \frac{E_0}{\varphi} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}.$$

Sostituendo nella precedente relazione  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$ , si ottiene lo stesso risultato prima trovato calcolando l'integrale di diffrazione:

$$I(\theta) = I_M \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)^2}.$$

#### DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER DA APERTURA CIRCOLARE

Nel caso di un'apertura circolare, caso molto importante in quanto la maggior parte dei componenti e dispositivi ottici, a partire dalle lenti, hanno forma circolare o sono comunque limitati da diaframmi circolari, il calcolo dell'integrale di diffrazione in approssimazione di Fraunhofer in due dimensioni è più complesso rispetto al caso monodimensionale, ma fornisce un risultato simile:

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} \right]^2.$$

Nella precedente relazione  $d$  è il diametro dell'apertura circolare e  $J_1$  la funzione di Bessel del primo tipo di ordine 1. La distribuzione di intensità che si osserva a grande distanza dietro l'apertura è una funzione con simmetria circolare a campana con la massima parte dell'energia concentrata in un lobo centrale con il massimo in  $\theta = 0$ , circondato da una serie di anelli concentrici periferici con intensità via via decrescente all'aumentare di  $\sin\theta$  (tale figura prende il nome di figura di diffrazione di Airy).

La condizione per il primo minimo (primo zero della funzione  $I(\theta)$ ) contiguo al massimo centrale è:

$$\sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

per cui la larghezza a metà altezza del lobo centrale è data da:

$$\sin\Delta\theta \cong \Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}.$$

L'angolo di divergenza di un'onda piana limitata da un'apertura circolare è quindi pari a:

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}.$$

Su uno schermo posto dietro l'apertura circolare, a distanza  $L$  (con  $L \gg d$ , ovvero in campo lontano) la figura di diffrazione consiste in un massimo centrale circondato da una serie di frange scure e chiare (rapidamente decrenti in intensità) concentriche. La prima frangia scura corrisponde al primo zero della funzione di Airy ed è dato da  $\rho_L = 1.22 \frac{\lambda L}{d}$ , dove  $\rho$  rappresenta la distanza radiale dal centro (dove l'intensità è massima).

La diffrazione costituisce il limite ultimo alla capacità di uno strumento ottico (come ad es. una lente) nella formazione delle immagini. Consideriamo infatti un punto oggetto all'infinito, ossia un fascio di raggi paralleli che incide su una lente di diametro  $d$ , che è equivalente a considerare un fronte d'onda piano incidente sulla lente. L'immagine del punto all'infinito, che in ottica geometrica è un punto sul piano focale posteriore della lente, a causa della diffrazione diventa una figura di Airy, ovvero un piccolo cerchio luminoso con raggio (tra il massimo e il primo zero) pari a  $\rho_f \cong 1.22 \frac{\lambda f}{d}$ .

Per un oggetto esteso ciascun punto immagine risulta trasformato in una figura di Airy e la qualità dell'immagine si degrada, cioè perde di nitidezza. Questo effetto è quasi sempre mascherato dalle aberrazioni, che sono spesso dominanti, ma diventa importante per piccoli diametri delle ottiche.

#### CRITERIO DI RISOLUZIONE DI RAYLEIGH

La diffrazione gioca un ruolo molto importante quando si vogliono distinguere due oggetti lontani puntiformi, come due stelle, che presentano una piccola separazione angolare. Assumiamo infatti di volerne registrare un'immagine con uno strumento ottico, per semplicità una lente positiva. Due sorgenti puntiformi molto lontane (due stelle) producono, sulla lente, due onde che possiamo considerare piane, formanti un piccolo angolo  $\varphi$  tra di esse, con  $\varphi$  distanza angolare tra le due stelle. Le due onde piane sono focalizzate dalla lente di focale  $f$  in due punti alla distanza  $\Delta \cong f\varphi$  (in ottica geometrica), che diventano per la diffrazione due dischi di Airy. Sul piano di osservazione (piano focale) si sommano le intensità delle due figure di diffrazione, che risultano traslate l'una rispetto all'altra della distanza  $\Delta \cong f\varphi$ . Si assume che le due figure risultino distinguibili quando il massimo di intensità della prima coincide con il primo zero della seconda. A partire da tale condizione limite, infatti, si comincia, aumentando la separazione angolare tra i due oggetti, ad osservare un avallamento nel profilo di intensità risultante dalla somma delle due figure di diffrazione, per cui diventa possibile distinguere (risolvere) i due oggetti puntiformi lontani. La condizione limite è quindi data da:

$$\Delta \cong f\varphi \geq \rho_f \cong 1.22 \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \varphi \geq 1.22 \frac{\lambda}{f}$$

cioè la minima separazione angolare risolvibile è pari all'angolo di diffrazione (all'angolo di divergenza del fascio). Questo criterio di risoluzione prende il nome di criterio di Rayleigh per la risoluzione delle immagini. La risoluzione di un qualsiasi sistema ottico migliora se si diminuisce la lunghezza d'onda di osservazione e/o se aumenta l'apertura del sistema ottico (della lente) che raccoglie la luce. Nei telescopi si usano infatti lenti con diametro molto grande (anche alcuni metri per i telescopi degli osservatori); nei microscopi, per migliorare il potere risolutivo, si può impiegare luce con lunghezza d'onda al limite inferiore del visibile (o, volendo migliorare ulteriormente, si possono impiegare microscopi elettronici che utilizzano fasci di elettroni, i quali si comportano come onde con lunghezza d'onda di pochi nanometri, che riescono quindi a fornire una risoluzione molto maggiore dei microscopi ottici).

#### INTERFERENZA E DIFFRAZIONE DI DUE SORGENTI COERENTI

Consideriamo due fenditure parallele illuminate da un'onda piana che costituiscono due sorgenti coerenti, come nell'esperimento di Young. Se si considera il caso reale in cui la larghezza  $a$  di ciascuna delle due fenditure è finita, confrontabile con la lunghezza d'onda o maggiore di essa, nel determinare la distribuzione di intensità sullo schermo gioca un ruolo importante, oltre alla interferenza, anche il fenomeno della diffrazione. In tal caso infatti sullo schermo di osservazione, situato in campo lontano (diffrazione di Fraunhofer), si osserva una distribuzione di intensità data dal profilo di interferenza delle due fenditure modulato dalla figura di diffrazione della singola fenditura (le due fenditure sono uguali e danno origine, in campo lontano, alla stessa figura di diffrazione). Si ottiene pertanto:

$$I(\theta) = 4I_{0,int} \cos^2 \left( \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda_0} \right) = 4I_M \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)^2} \cos^2 \left( \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda_0} \right),$$

avendo posto  $I_{0,int} = I_M \frac{\sin^2(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})^2}$  ed essendo  $I_M$  il valore massimo dell'intensità al centro della figura di diffrazione.

Solitamente l'ampiezza  $a$  della singola fenditura è inferiore alla spaziatura tra le fenditure,  $a < D$ , per cui all'interno del lobo centrale della diffrazione, di larghezza angolare pari a  $\lambda/a$ , cadono più massimi di interferenza (spaziati angolarmente di  $\lambda/D$ ), la cui ampiezza non è costante ma risulta modulata dal profilo di diffrazione. Le posizioni dei massimi dipendono dalle proprietà di interferenza tra le due fenditure mentre le loro ampiezze dipendono dalle caratteristiche di diffrazione della singola fenditura.

#### **INTERFERENZA E DIFFRAZIONE DI $N$ SORGENTI COERENTI: RETICOLO DI DIFFRAZIONE**

Nella precedente trattazione dell'interferenza tra più sorgenti coerenti si è trascurato l'effetto della larghezza finita delle singole fenditure, considerando solo il fenomeno della interferenza tra i campi trasmessi dalle  $N$  fenditure. Se si analizza invece il caso reale, in cui ciascuna fenditura ha una larghezza  $a$  sufficientemente piccola, confrontabile o maggiore della lunghezza d'onda, il fenomeno della diffrazione modifica sensibilmente la distribuzione di intensità prodotta dall'insieme delle  $N$  fenditure: per questo motivo il dispositivo ottico che si basa sulla interferenza di più sorgenti di luce coerente (ottenute per trasmissione della luce da tante fenditure parallele o per riflessione da porzioni lineari riflettenti di una superficie illuminata da un'onda luminosa) prende il nome di reticolo di diffrazione. In tal caso sullo schermo di osservazione, situato in campo lontano (diffrazione di Fraunhofer), si osserva infatti (con riferimento ad un reticolo in trasmissione) una distribuzione di intensità data dal profilo di interferenza della luce proveniente dalle  $N$  fenditure modulato dalla figura di diffrazione della singola fenditura (le fenditure sono tutte uguali e danno origine, in campo lontano, alla stessa figura di diffrazione). Si ottiene pertanto:

$$I(\theta) = I_{0,int} \frac{[\sin(\frac{\pi N D \sin \theta}{\lambda})]^2}{[\sin(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda})]^2} = I_M \frac{\sin^2(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})^2} \frac{[\sin(\frac{\pi N D \sin \theta}{\lambda})]^2}{[\sin(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda})]^2},$$

avendo posto  $I_{0,int} = I_M \frac{\sin^2(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})^2}$ .

Solitamente l'ampiezza  $a$  della singola fenditura è inferiore alla spaziatura tra le fenditure,  $a < D$ , per cui all'interno del lobo centrale della diffrazione, di larghezza angolare pari a  $\lambda/a$ , cadono più massimi di interferenza (spaziati angolarmente di  $\lambda/D$ ), la cui ampiezza non è costante ma risulta modulata dal profilo di diffrazione. Anche per il reticolo di diffrazione le posizioni dei massimi dipendono dalle proprietà di interferenza tra le  $N$  fenditure, mentre le loro ampiezze dipendono dalle caratteristiche di diffrazione della singola fenditura.

## CONCETTI RIASSUNTIVI

### 22. INDICE DI RIFRAZIONE COMPLESSO: DISPERSIONE E ASSORBIMENTO DELLA LUCE

Riprendiamo alcuni concetti relativi alla polarizzazione dei dielettrici in condizioni statiche, con particolare riferimento al meccanismo della polarizzazione per deformazione.

Per un singolo atomo il momento di dipolo atomico  $\vec{p}$  è proporzionale al campo  $\vec{E}$ , ed è esprimibile come

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

dove  $\alpha$  è la polarizzabilità elettronica (per deformazione). Preso un volumetto  $\Delta\tau$ , contenente un numero di atomi statisticamente significativo si definisce densità di polarizzazione il vettore:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta\tau} = \frac{n_{\Delta\tau}}{\Delta\tau} \vec{p} = N\alpha \vec{E}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli  $n_{\Delta\tau}$  dipoli contenuti in  $\Delta\tau$  e valutata per  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ;  $N$  rappresenta il numero di dipoli per unità di volume.

Per un dielettrico normale (lineare, omogeneo e isotropo) la relazione (macroscopica) tra densità di polarizzazione e campo elettrico è esprimibile come  $P = \epsilon_0 \chi E = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E$ , relazione che vale anche vettorialmente,  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ , essendo il dielettrico isotropo. Confrontando tale espressione con la precedente definizione di densità di polarizzazione, si ottiene una relazione tra la suscettività dielettrica (o la costante dielettrica) e la polarizzabilità atomica:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = N\alpha \vec{E} \rightarrow \chi = \frac{N\alpha}{\epsilon_0};$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}.$$

Tale relazione vale per gas rarefatti. Per i solidi la relazione è più complessa (relazione di Clausius-Mossotti):

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0})}.$$

Consideriamo nel seguito un modello per i gas rarefatti. In ciascun atomo del materiale i baricentri delle cariche positive (protoni) e negative (elettroni), coincidenti in assenza di campo elettrico, in presenza di un campo elettrico  $\vec{E}$  si separano, dando origine ad un momento di dipolo atomico  $\vec{p}$ , parallelo ed equiverso ad  $\vec{E}$ . Il momento di dipolo atomico  $\vec{p}$  e la polarizzabilità si possono ricavare con un semplice modello di atomo costituito da una carica positiva  $e$  puntiforme ( $e$  pari alla carica dell'elettrone) situata al centro di una sfera di carica negativa con densità volumetrica di carica costante e con carica totale  $-e$  (atomo di idrogeno). In presenza di campo elettrostatico, la posizione di equilibrio della carica positiva non coincide più con il baricentro della distribuzione di carica negativa. Lo spostamento  $x$  tra i baricentri delle due cariche si ricava eguagliando la forza del campo  $eE$ , che tende ad allontanare le cariche, a quella attrattiva di Coulomb  $eE_c$  che tende a riportare il baricentro della carica negativa verso la carica positiva (il modulo del campo coulombiano si ricava utilizzando la legge di Gauss):

$$x = \left( \frac{4\pi\epsilon_0 R_a^3}{e} \right) E,$$

dove  $R_a$  è il raggio atomico (raggio della distribuzione di carica negativa). Moltiplicando per la carica  $e$ , si ottiene per il momento di dipolo atomico:

$$p = ex = 4\pi\epsilon_0 R_a^3 E$$

e per la polarizzabilità atomica:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_a^3.$$

In condizioni non statiche, ovvero in presenza di un campo elettrico dipendente dal tempo, anche il momento di dipolo atomico diventa dipendente dal tempo. Per determinarne l'espressione, cominciamo con l'osservare che la forza coulombiana di attrazione tra carica positiva e nuvola elettronica è una forza di richiamo elastica. Infatti:

$$\vec{F} = -e\vec{E}_c = -\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_a^3}\right)x\vec{u}_x,$$

da cui si ricava l'espressione della costante elastica, che è data da:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_a^3}.$$

Partendo da una condizione statica, supponiamo di rimuovere il campo elettrico  $\vec{E}$ . La posizione del baricentro della nuvola elettronica (molto più leggera del nucleo), soggetta ad una forza di richiamo elastica, è descritta dall'equazione di moto di un oscillatore armonico:

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

dove  $\omega_0 = \sqrt{k/m_e} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_a^3 m_e}}$  è la pulsazione propria e  $m_e$  è la massa dell'elettrone.

Ad esempio, per l'atomo di idrogeno ( $R_a \sim 0.53 \times 10^{-10}$ ) si ottiene  $(\nu_0)_H = \frac{(\omega_0)_H}{2\pi} = 5.3 \times 10^{15} \text{ Hz}$ , cioè la frequenza di oscillazione propria cade nell'ultravioletto. In sistemi più complessi (atomi a più elettroni o molecole), l'oscillazione riguarda generalmente più di una nuvola elettronica; in tal caso la carica dell'elettrone è sostituita dalla carica totale oscillante carica  $q$  e la massa  $m$  si riferisce alla massa complessiva degli elettroni che oscillano con la stessa frequenza propria. Nel caso in cui tutti gli elettroni dell'atomo abbiano la stessa frequenza propria di oscillazione,  $q = Ze$  ed  $m = Zm_e$ , con  $Z$  numero atomico ed  $e$  carica dell'elettrone.

Polarizzabilità, massa e carica oscillanti, e pulsazione propria dell'atomo sono quindi legate dalla relazione

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{\alpha m}.$$

Sulla base del modello sopra introdotto, consideriamo cosa accade quando un campo elettromagnetico (un'onda a frequenze ottiche) si propaga in un mezzo materiale (trasparente). Consideriamo il campo elettrico dell'onda in un punto dello spazio, per semplicità nell'origine del sistema di coordinate, rappresentandolo mediante un fasore:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \exp(-j\omega t); \quad \text{Re}\{\vec{E}(t)\} = \vec{E}_0 \cos(-\omega t).$$

Se si considerano gli effetti dissipativi dovuti all'irraggiamento (una carica oscillante irraggia radiazione di dipolo) e alle interazioni (urti) con gli atomi adiacenti, il moto del baricentro della nuvola di carica elettronica è quello di un oscillatore smorzato soggetto ad una forza di richiamo elastica  $\vec{F}_c = -k\vec{r}$ , ad una forza dissipativa rappresentabile come  $\vec{F}_v = -m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$ , e ad una forzante sinusoidale, costituita dal campo elettrico dell'onda che si sta propagando,  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \exp(-j\omega t)$ . Il moto del baricentro della nuvola elettronica, descritto dalla coordinata generica  $\vec{r}(t)$  parallela alla direzione del campo elettrico forzante, è in questo caso descritto dall'equazione

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + k\vec{r} = q\vec{E}_0 \exp(-j\omega t)$$

la cui soluzione asintotica è del tipo  $\vec{r}(t) = \vec{A} \exp(-j\omega t)$ . Sostituendo tale espressione nella precedente equazione si ricava l'ampiezza dell'oscillazione della nuvola elettronica, che risulta dipendente dalla frequenza  $\omega$  del campo elettrico dell'onda elettromagnetica:

$$\vec{A} = \frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\gamma)} \vec{E}_0.$$

Ogni atomo del materiale si comporta quindi come un dipolo elettrico oscillante alla stessa frequenza dell'onda elettromagnetica che si propaga, con la nota legge del moto dell'oscillatore armonico smorzato con forzante. Il momento di dipolo oscillante, indotto dal campo che si propaga nel materiale, è dato da:

$$\vec{p}(t) = q\vec{r}(t) = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\gamma)} \vec{E}_0 \exp(-j\omega t),$$

e la polarizzabilità  $\alpha$  risulta quindi una grandezza complessa dipendente dalla frequenza dell'onda che si propaga nel materiale:

$$\alpha = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\gamma)}.$$

Si può esprimere  $\alpha$  in forma esponenziale:

$$\alpha = |\alpha| \exp(j\delta)$$

$$\text{essendo } |\alpha| = \frac{q^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}; \quad \text{tg}(\delta) = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

da cui risulta evidente che sia il modulo che la fase della polarizzabilità complessa dipendono dalla frequenza dell'onda che si propaga. In particolare, a frequenza  $\omega = 0$  si ottiene la stessa relazione già ricavata nel caso statico,  $\alpha = \frac{q^2}{\omega_0^2 m}$ .

Il momento di dipolo oscillante ha la stessa frequenza  $\omega$  di oscillazione del campo elettrico dell'onda ed uno sfasamento  $\delta$ :

$$Re\{\vec{p}(t)\} = Re\{\alpha \vec{E}(t)\} = |\alpha| \vec{E}_0 \cos(-\omega t + \delta).$$

La costante dielettrica del materiale  $\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}$  ed il suo indice di rifrazione  $n \cong \sqrt{\epsilon_r}$  (assumiamo  $\mu_r \cong 1$ ), che sono legati alla polarizzabilità  $\alpha$ , risultano anch'esse grandezze complesse. Nell'ipotesi in cui  $\frac{N\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$ , l'indice di rifrazione può essere espresso come:

$$n = \sqrt{1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{N\alpha}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\gamma)}.$$

Ponendo  $n = n_R + jn_I$  si ha:

$$\begin{aligned} n_R &= Re\{n\} = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}; \\ n_I &= Im\{n\} = \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Esaminiamo separatamente l'andamento delle due componenti reale e immaginaria in funzione della frequenza. Lontano dalla risonanza, per  $\omega \ll \omega_0$ , ovvero per  $(\omega_0^2 - \omega^2) \gg \omega\gamma$ ,  $n_R$  tende al valore  $1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2}$  (che assume nel caso statico,  $\omega = 0$ ); al crescere della frequenza ha un andamento crescente fino al valore massimo  $1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{2\omega_0\gamma}$  per  $\omega = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}$ ; decresce quindi rapidamente nella zona della risonanza fino al valore minimo  $1 - \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{2\omega_0\gamma}$  per  $\omega = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$ , essendo esattamente pari a 1 a risonanza; per  $\omega > \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$  cresce nuovamente tendendo asintoticamente a 1. La parte immaginaria dell'indice di rifrazione  $n_I$  è diversa da zero solo nell'intorno della risonanza, ed è descritta da una curva a campana di larghezza  $\gamma$  centrata alla frequenza di risonanza con un massimo pari a  $\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{2\omega_0\gamma}$ .

La dipendenza della parte reale dell'indice di rifrazione dalla frequenza dà origine al fenomeno denominato dispersione. Le regioni spettrali in cui la parte reale dell'indice di rifrazione è crescente in funzione della frequenza (ed in cui la parte immaginaria è circa nulla) sono dette a dispersione normale, mentre la zona attorno alla risonanza, in cui  $n_R$  decresce con la frequenza (e  $n_I > 0$ ) è detta zona a dispersione anomala. Nei vetri, la frequenza di risonanza  $\omega_0$  cade solitamente nell'ultravioletto, per cui nella regione del visibile la frequenza  $\omega$  è inferiore a quella di risonanza e la dispersione è normale, ovvero la parte reale dell'indice di rifrazione aumenta con la frequenza (cioè diminuisce con la lunghezza d'onda), dando origine alle cosiddette curve di dispersione del vetro. Si può mostrare che, nella zona di trasparenza dei vetri, e segnatamente nella regione visibile dello spettro, la parte reale dell'indice di rifrazione diminuisce al crescere della lunghezza d'onda  $\lambda$  (zona a dispersione normale) con un andamento ben riprodotto dalla formula di Cauchy:

$$n_R = 1 + A(1 + \frac{B}{\lambda^2}),$$

dove  $A, B$  sono opportune costanti. La formula di Cauchy è ricavabile dalla precedente relazione che esprime  $n_R$  in funzione della frequenza, assumendo  $\omega \ll \omega_0$  e  $\omega \gg \gamma$ , in modo da poter trascurare il termine legato allo smorzamento.

La parte immaginaria dell'indice di rifrazione è invece responsabile, nell'intorno della risonanza dove  $n_I > 0$ , del fenomeno dell'assorbimento della radiazione, ovvero di una sua attenuazione durante la propagazione. Per meglio capire il ruolo che la parte reale e quella immaginaria dell'indice di rifrazione hanno nella propagazione, si consideri, per semplicità, un campo scalare  $E = E(z, t)$  che si propaga lungo l'asse z in un dielettrico con indice di rifrazione complesso  $n = n_R + jn_I$ . Rappresentando il campo  $E$  mediante fasore si ottiene:

$$E = E_0 \exp[j(kz - \omega t)] = E_0 \exp[j(nk_0 z - \omega t)] = E_0 \exp\{j[(n_R + jn_I)k_0 z - \omega t]\}.$$

Sviluppando il termine di fase nell'esponenziale, con  $k_0 = \omega/c$  numero d'onda nel vuoto, si ha:

$$E = E_0 \exp[j(n_R k_0 z - \omega t)] \exp(-\frac{n_I \omega z}{c}) = E_0 \exp[j(n_R k_0 z - \omega t)] \exp(-\beta z).$$

dove  $\beta = \frac{n_I \omega}{c}$  è detto coefficiente di assorbimento (in campo). Si osserva che, nelle equazioni precedenti, il termine legato alla parte immaginaria dell'indice di rifrazione è costituito da un esponenziale reale decrescente con la distanza di propagazione, che rappresenta un'attenuazione per l'onda elettromagnetica che si propaga. Inoltre,  $n_R$  e  $\beta$  dipendono dalla frequenza: consegue che sia la velocità di propagazione dell'onda nel dielettrico che il suo assorbimento dipendono dalla frequenza dell'onda rispetto a quella di risonanza del mezzo in cui essa si propaga.

Alla polarizzabilità dinamica degli atomi a frequenze molto elevate come quelle ottiche non contribuisce in generale la polarizzazione per orientamento, tipica delle molecole polari e che costituisce il termine dominante nel caso statico. Ad es. per l'acqua, che è una molecola polare, la polarizzazione per orientamento non risponde per frequenze maggiori di circa 1 MHz, in quanto le molecole non riescono più a seguire con la rotazione dei dipoli le rapide variazioni del campo elettrico. Per questo motivo la costante dielettrica dell'acqua, il cui valore statico è molto elevato ( $\epsilon_r \sim 81$ ) diminuisce drasticamente di valore al di sopra del MHz, e si riduce a  $\epsilon_r \sim 1.78$  per frequenze ottiche nel visibile.

Nel caso in cui in un atomo vi siano elettroni con diverse frequenze di risonanza, l'andamento dispersivo legato a  $n_R(\omega)$  e la curva di assorbimento legata a  $n_I(\omega)$ , sopra discussi, si replicano in corrispondenza di ciascuna frequenza di risonanza. Anche nel caso in cui, in molecole o in solidi, siano presenti diversi tipi di oscillatore che modellizzano diversi fenomeni fisici (rotazioni e vibrazioni molecolari, oltre alle transizioni elettroniche), la costante dielettrica e l'indice di rifrazione presentano più risonanze, che possono avere frequenze variabili dal lontano infrarosso (risonanze rotazionali) al medio e vicino infrarosso (risonanze vibrazionali) fino all'ultravioletto (risonanze elettroniche); vi sono quindi in generale diverse regioni spettrali di dispersione normale intervallate da zone che presentano dispersione anomala e bande di assorbimento.

