

# Dispositivi Elettronici

## Riassunto dei contenuti del corso

Luca Daidone  
Politecnico di Milano

24 luglio 2021

## **Foreword**

Questo documento contiene i riassunti delle 11 lezioni che compongono il corso di dispositivi elettronici tenuto dal prof. Lacaita.

È molto probabile siano presenti errori di contenuto, di sintassi e di grammatica e perciò in caso aveste dubbi o suggerimenti di modifiche scrivetemi un'email a: daidoneluca98@gmail.com ☺

# Indice

<b>1 Cristalli - Legge di Ohm - Modello a rilassamento</b>	<b>5</b>
1.1 Cristalli . . . . .	5
1.2 Legge di Ohm e modello di Drude della conduzione . . . . .	6
1.3 Moto Browniano e Modello a rilassamento . . . . .	8
<b>2 Semiconduttori - proprietà</b>	<b>10</b>
2.1 Diagramma di Arrhenius . . . . .	10
2.2 Generazione termica - elettroni e lacune . . . . .	12
2.3 Velocità di deriva e mobilità . . . . .	13
2.4 Fononi ottici . . . . .	15
<b>3 Semiconduttori drogati</b>	<b>17</b>
3.1 Drogaggio . . . . .	17
3.2 Modello idrogenoide . . . . .	17
3.3 Lacune e concentrazione di portatori in funzione della T . . . . .	19
3.4 Legge di azione di massa . . . . .	20
3.5 Droganti e mobilità . . . . .	22
<b>4 Corrente di diffusione - Equazione di continuità</b>	<b>24</b>
4.1 Diffusione dei portatori - Legge di Fick - Relazione di Einstein . .	24
4.2 Correnti di deriva e diffusione . . . . .	27
4.3 Conservazione della carica ed equazione di continuità . . . . .	28
4.4 Meccanismi di ricombinazione . . . . .	30
<b>5 Giunzione pn</b>	<b>33</b>
5.1 Statistica di Boltzmann . . . . .	33
5.2 Contatti ohmici e polarizzazione diretta/inversa . . . . .	37
5.3 Breakdown . . . . .	38
<b>6 Giunzione pn polarizzata</b>	<b>40</b>
6.1 Andamento della concentrazione dei minoritari in zona neutra . .	40
6.2 Corrente totale con polarizzazione diretta e zona lunga . . . . .	43
6.3 Tempo di transito zona lunga . . . . .	45
6.4 Profili di minoritari in zone corte - polarizzazione diretta . . . . .	45
6.5 Corrente totale con polarizzazione diretta e zona corta . . . . .	47
6.6 Tempo di transito zona corta - polarizzazione diretta . . . . .	48
6.7 Polarizzazione inversa . . . . .	49
6.8 Profilo di minoritari in zona corta - polarizzazione inversa . . . . .	51
6.9 Corrente in zona neutra . . . . .	53

<b>7 Giunzione pn - zona svuotata e profilo di campo</b>	<b>54</b>
7.1 Campo elettrico $E$ . . . . .	54
7.2 Potenziale $\Phi_i$ di contatto . . . . .	56
7.3 Approssimazione unilatera . . . . .	59
7.4 Polarizzazione inversa . . . . .	60
7.5 Breakdown a valanga . . . . .	60
7.6 Polarizzazione Diretta . . . . .	62
<b>8 Condensatore MOS</b>	<b>63</b>
8.1 Condizione di svuotamento e di forte inversione . . . . .	64
8.2 Condizione di soglia - elettrostatica a soglia . . . . .	65
8.3 Elettrostatica sopra soglia . . . . .	68
<b>9 Transistore MOS</b>	<b>70</b>
9.1 Relazioni in zona ohmica . . . . .	70
9.2 Pinch-off . . . . .	72
9.3 Oltre il Pinch-off - Saturazione . . . . .	73
9.4 Transconduttanza - amplificazione - resistenza di uscita . . . . .	76
9.5 Saturazione precoce . . . . .	77
9.6 Tempo di transito e frequenza di taglio . . . . .	78
<b>10 Livelli di Fermi</b>	<b>79</b>
10.1 Livelli elettronici . . . . .	79
10.2 Relazione di dispersione . . . . .	82
10.3 Statistica di Fermi . . . . .	84
<b>11 Potenziali di contatto</b>	<b>89</b>
11.1 Potenziale di Fermi . . . . .	89
11.2 Contatti metallo-semiconduttore . . . . .	91
11.3 Contatti rettificanti e ohmici . . . . .	92

## Elenco delle figure

1 Piani di Miller . . . . .	5
2 Modello di Drude . . . . .	6
3 Colonna isoterma . . . . .	33
4 Punto di pinch-off . . . . .	72
5 Effetto della variazione di $L'$ . . . . .	75
6 Bande all'equilibrio . . . . .	89

# 1 Cristalli - Legge di Ohm - Modello a rilassamento

## 1.1 Cristalli

I corpi allo stato solido si presentano in due forme: *cristallini* e *amorfi*. I solidi cristallini sono composti da celle elementari, disposizioni di atomi o molecole, ripetute e traslate nelle tre dimensioni con passo determinato dalle celle elementari. I solidi amorfi non presentano alcuna distribuzione regolare nello spazio.

Gli assi di traslazione non sono necessariamente ortogonali ed esistono 14 diversi gruppi con i quali è possibile generare un cristallo per traslazione.

Le celle più semplici, come quella qui a lato, sono cubiche:  $a$  è il *passo reticolare* e gli atomi che la compongono sono 2 in totale poiché si contano l'atomo centrale e  $\frac{1}{8}$  di atomo per ogni spigolo del cubo (ogni spigolo è condiviso con altre 7 celle adiacenti).

Gli assi della cella primitiva costituiscono un sistema di riferimento e vengono indicati con la *notazione di Miller*  $[x, y, z]$ , dove le tre coordinate sono le intercette del piano di Miller con i tre assi.

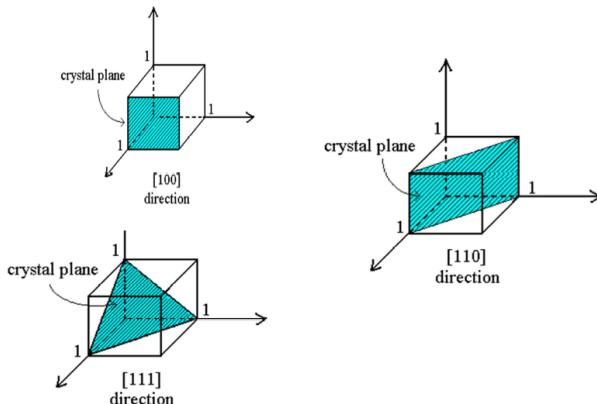
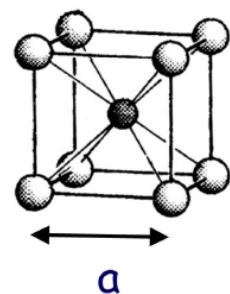


Figura 1: Piani di Miller

I piani sono caratterizzati da densità differenti. Ad esempio per calcolare la densità atomica nel piano  $[1, 1, 1]$  si considera che il piano comprende 1 atomo centrale e  $\frac{3}{8}$  di atomi ai vertici del triangolo cioè in totale  $\frac{11}{8}$  di atomo. Per individuare la densità  $\rho$  allora:

$$\rho = \frac{\frac{11}{8}}{A_{\text{triangolo}}} \frac{g}{cm^3}$$

**N.B.** Ricorda che ad esempio atomo con nucleo 1 *uma* allora ogni mole  $1 \frac{g}{mol}$

## 1.2 Legge di Ohm e modello di Drude della conduzione

Da osservazioni sperimentali si ricava la legge di Ohm:

$$V = RI$$

Ma la tensione  $V \propto \vec{E}$ ,  $\vec{E} \propto \vec{F}$  e  $I \propto \vec{V}_d$ , cioè si ottiene una relazione di proporzionalità tra forza e velocità che non rispecchia le relazioni della meccanica classica!

$$\boxed{\vec{F} \propto \vec{V}_d}$$

Paul Drude diede la risposta: in accordo con la meccanica classica le cariche vengono accelerate a seguito della forza elettrica e la loro velocità aumenta. Nel loro percorso collidono con gli ioni del reticolo e, per semplificare, si immagina che perdano tutta la quantità di moto ad intervalli regolari  $\tau_0$ .

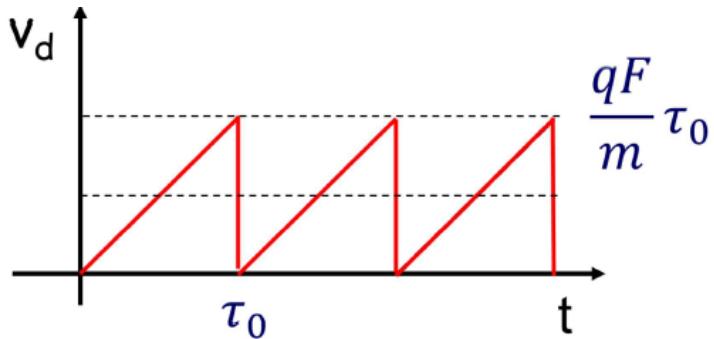


Figura 2: Modello di Drude

L'accelerazione a cui sono sottoposti i portatori è pari a

$$a = \frac{qE}{m}$$

e la velocità massima è

$$V_d = \frac{qE}{m} \tau_0.$$

La velocità media è semplicemente la metà di quella massima:

$$\bar{V}_d = \frac{qE}{2m} \tau_0$$

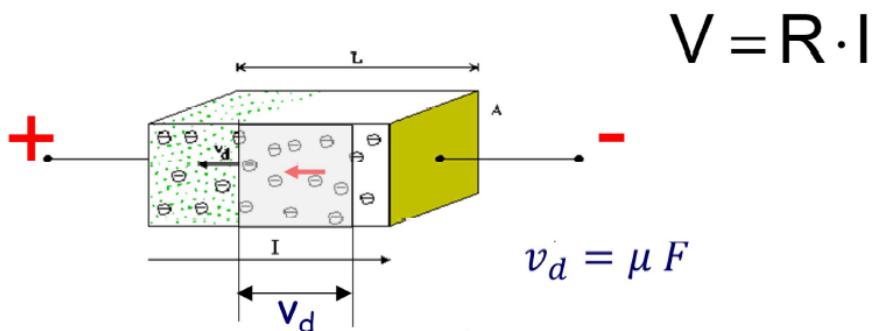
e tale relazione permette di esprimere una grandezza chiamata *mobilità elettronica*:

## V di deriva e mobilità

$$\bar{V}_d = \mu E \left[ \frac{\text{cm}}{\text{s}} \right] \quad \mu = \frac{q\tau_0}{2m} \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \right].$$

Si è ottenuta una proporzionalità tra  $\bar{V}_d$  e  $E$  come espresso dalla legge di Ohm. Poichè nell'espressione della mobilità compare il tempo di urto  $\tau_0$ , è necessario che esso *non vari al variare del campo E* affinchè valga la proporzionalità appena trovata.

Dato il conduttore:



dalla definizione di corrente:

$$I = nqV_dA = nq\mu EA = nq\mu \frac{V}{L}A = nq\mu \frac{A}{L}V$$

dove  $n$  è la densità di portatori per unità di volume,  $L$  la lunghezza del conduttore,  $V$  la tensione ai capi del conduttore,  $\mu$  la conducibilità e si è espresso il campo come  $E = \frac{V}{L}$  poichè è il campo medio.

Si è trovata così la *resistività*  $\rho$ :

## Resistività e Resistenza

$$\rho = \frac{1}{nq\mu}$$

e quindi:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

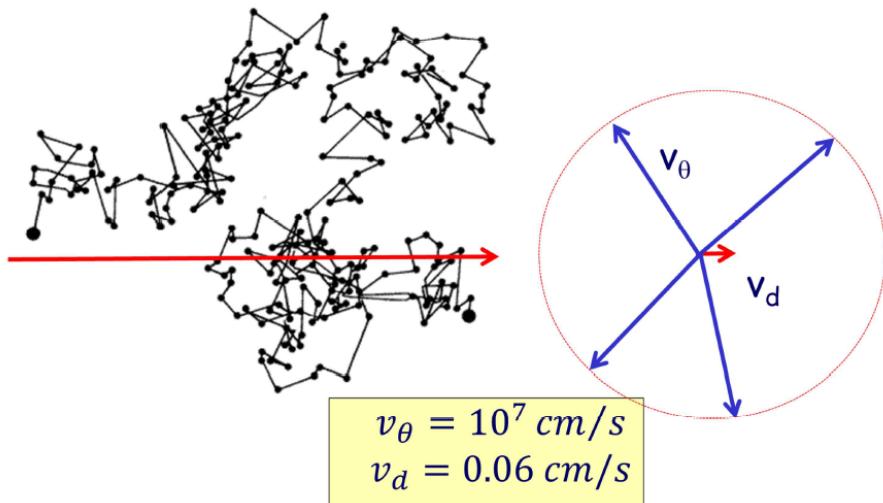
La *resistività* dipende da parametri fisici (mobilità e densità di portatori), la *resistenza* da parametri fisici e geometrici. Sperimentalmente la resistenza è costante e questo implica che la mobilità non varia con il campo elettrico! Cioè il tempo  $\tau_0$  di collisione è costante e la velocità di deriva  $V_d$  è proporzionale al campo

elettrico medio nel conduttore.

### 1.3 Moto Browniano e Modello a rilassamento

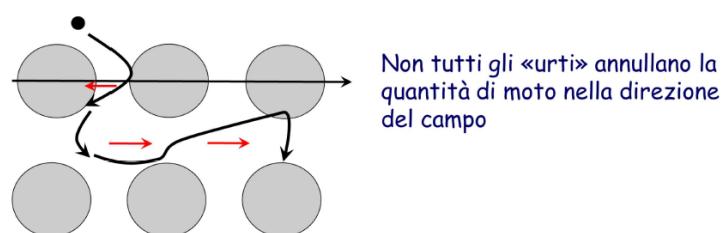
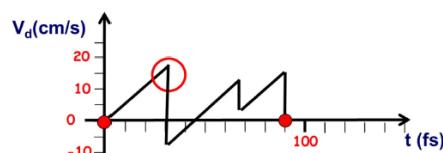
I portatori di carica possiedono un'energia cinetica che è possibile esprimere con il *Principio di equipartizione di Boltzmann*:

$$\frac{1}{2}mV_\theta^2 = \frac{3}{2}KT$$



La velocità termica  $V_\theta$  non ha una direzione precisa, è "casuale" ed è 8 ordini di grandezza più grande della velocità di deriva! La componente di velocità di deriva dovuta al campo accelerante, oltre ad essere trascurabile rispetto la velocità termica *nei conduttori*, è anche ordinata lungo una direzione.

Considerando la sola velocità di deriva si scopre che non ogni urto fa perdere tutta la quantità di moto al portatore:



Solo l'accelerazione (pendenza dei tratti) rimane costante.

Si considera allora la *variazione di quantità di moto media* nell' unità di tempo, che sarà la somma tra forza netta esercitata dal campo meno una perdita media dovuta agli urti.

$$\frac{dV_d m}{dt} = qE - \frac{V_d m}{\tau}$$

dove  $\tau$  è il *tempo medio di rilassamento* cioè il tempo che intercorre da quando il portatore inizia a muoversi a quando perde tutta la quantità di moto. In condizioni stazionarie (campo elettrico agisce da lungo, non ci sono transitori), la variazione di quantità di moto è nulla:

$$0 = qE - \frac{(V_d m)}{\tau} \quad qE = \frac{V_d m}{\tau}$$

e allora:

### V di deriva e mobilità

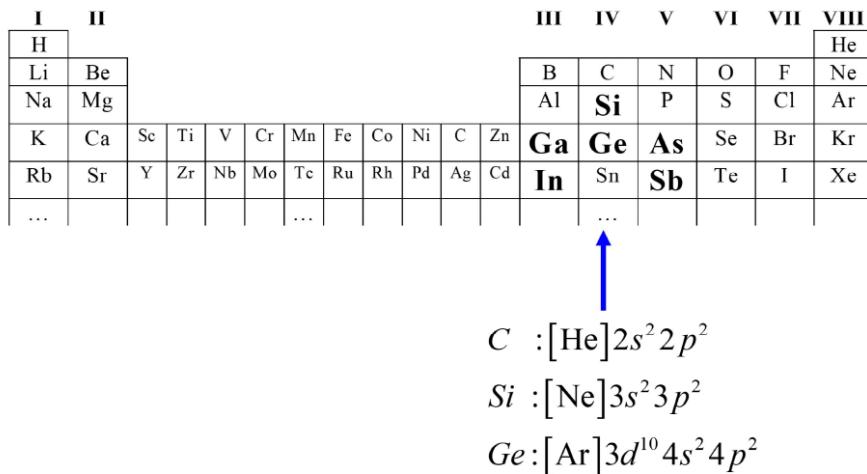
$$V_d = \frac{q\tau E}{m}$$

che è la velocità media di deriva e allora la mobilità elettronica sarà:

$$\mu = \frac{q\tau}{m}$$

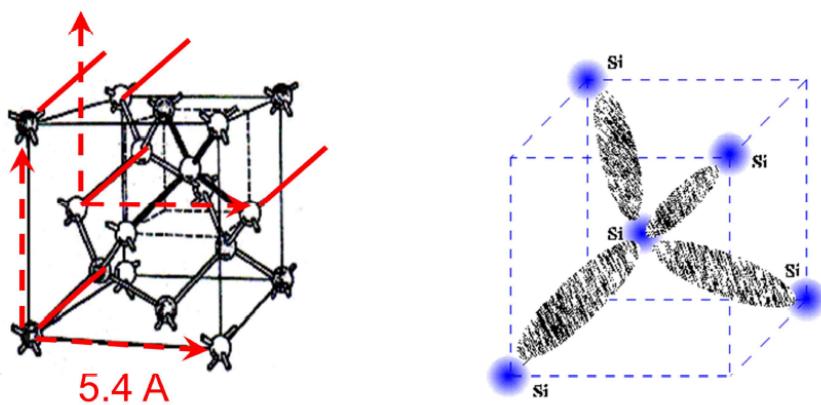
Si sono perciò aggiustate le espressioni di velocità di deriva e di mobilità trovate prima considerando un modello più realistico.

## 2 Semiconduttori - proprietà



Carbonio, Silicio e Germanio fanno parte del IV gruppo della tavola periodica. Hanno 4 elettroni nelle shell di valenza, 2 negli orbitali s e 2 negli orbitali p. Un elettrone può essere promosso in un orbitale p vuoto con minima spesa di energia. Si dice che l'atomo si è ibridizzato *sp*<sup>3</sup>. La struttura è tetraedrica e i quattro elettroni possono essere impiegati in legami covalenti, cioè verrebbe da pensare che il solido cristallino è del tutto isolante non essendoci elettroni liberi per la conduzione. Il Carbonio in forma cristallina (diamante) è in effetti isolante.

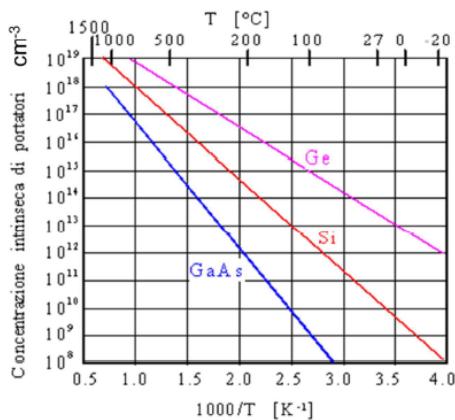
La struttura che si forma è la seguente:



A sinistra è mostrato un reticolo cristallino e a destra la cella elementare. Il reticolo è *cubico a facce centrali*.

### 2.1 Diagramma di Arrhenius

Tracciando però in un grafico la concentrazione intrinseca di portatori rispetto alla temperatura per Silicio e Germanio, si scopre che essa varia al variare della temperatura. Il diagramm è detto *Diagramma di Arrhenius*:



$$n = n_i = Ae^{-E_\sigma/kT}$$

$$\log(n_i) = -\frac{E_\sigma}{kT} \log(e) + \log(A)$$

Per il Silicio la concentrazione di portatori @T=300K è  $n_i = 1.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Dal diagramma si scopre che nei semiconduttori la concentrazione intrinseca *aumenta all'aumentare della temperatura*.

Il grafico di Arrenhius presenta  $\log(n_i)$  sull'asse y e  $\frac{1}{T}$  sull'asse x in basso.

Detta A la pendenza della retta e  $\log(\beta)$  l'intercetta con l'asse y, si scrive l'equazione della retta del Si:

$$\log(n_i) = -\frac{A}{T} + B \quad \log(n_i) = -\frac{A}{T} + \log(\beta) \quad \log\left(\frac{n_i}{\beta}\right) = -\frac{A}{T}$$

da cui si ricava:

$$n_i = \beta e^{-\frac{A}{T}},$$

c'è quindi una relazione esponenziale tra T e  $n_i$ .

Si definisce allora:

$$A = \frac{E_\sigma}{k}$$

dove  $E_\sigma$  è detta *energia di attivazione*, k è la costante di Boltzmann e  $\beta$  è un'opportuna costante. Perciò:

$$n_i = \beta e^{-\frac{E_\sigma}{T}}.$$

L'energia di attivazione definisce la barriera energetica termica che i portatori devono superare per "liberarsi" ed è proporzionale all' *energia di legame*  $E_g$ .

$$E_\sigma = \frac{E_g}{2}$$

e perciò:

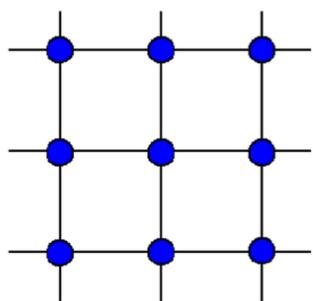
Relazione di Arrenhius

$$n_i = \beta e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

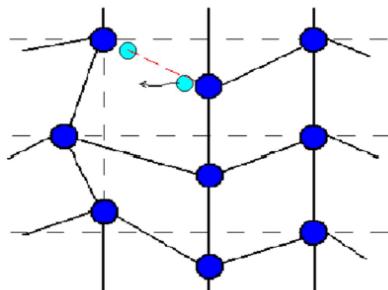
## 2.2 Generazione termica - elettroni e lacune

Non è un caso che nell'equazione di Arrhenius compaia l'energia di legame.

All'aumentare della temperatura  $T$  gli atomi del reticolo iniziano vibrare e poichè la temperatura è indice di energia cinetica, può accadere che i legami tra gli atomi del reticolo si spezzino.



$$T = 0 \text{ K}$$



$$T > 0 \text{ K}$$

La rottura non causa solamente la "liberazione" di un elettrone ma anche la generazione di un sito di carica positiva. Il nucleo dell'atomo di silicio ha infatti carica netta +4 e nel caso si rompa un legame è circondato da solo 3 elettroni. Se si applica un campo elettrico esterno gli elettroni che si sono liberati acquisiscono la capacità di muoversi e contemporaneamente la presenza delle vacanze positive genera anche un flusso secondario di elettroni che saltano da una vacanza all'altra.

Questo significa che la corrente totale è composta da *due contributi*!

$$I = n_i q V_d A + n^+ q V_d^+ A$$

dove  $n^+ = n_i$  poichè per ogni elettrone liberato si genera una sítio positivo, mentre  $V_d^+$  sarà diverso da  $V_d$ .

Questo contributo aggiuntivo viene spiegato attraverso la *lacuna*. Conviene considerare le lacune perchè considerare il moto degli elettroni di legame che saltano nelle vacanze complicherebbe notevolmente i calcoli. Avendo velocità di deriva differenti anche la conducibilità sarà differente. La corrente totale è perciò:

Contributo delle lacune alla corrente

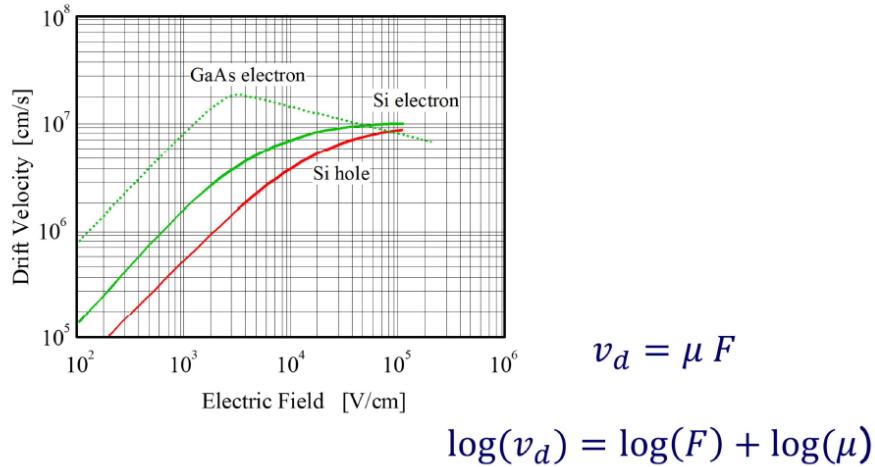
$$I = (qn\mu_n + qp\mu_p) \frac{A}{L} V$$

La corrente totale è generata da due contributi, da cariche positive e negative. I semiconduttori seguono un regime ohmico (velocità di deriva proporzionale al

campo elettrico) fino a certi valori di  $E$ , si nota poi un discostamento e una saturazione delle velocità. La mobilità cioè *non rimane costante!*

### 2.3 Velocità di deriva e mobilità

Se si traccia su di un grafico in scala logaritmica l'andamento della velocità in funzione del campo elettrico  $E$  si trova:



si nota che per certi valori di  $E$  in poi la velocità satura e rimane costante. Questo è un problema importante perché i valori di campo elettrico per i quali c'è saturazione non sono molto alti.

$$\log(V_d) = \log(E) + \log(\mu) \quad V_d = \mu E$$

Ma allora la mobilità varia!

Come trovato grazie al modello di Drude la velocità di deriva è pari a:

$$V_d = \frac{q\tau E}{m}$$

cioè

$$\mu = \frac{q\tau}{m}.$$

Deve allora variare il tempo di rilassamento. Si era detto che il tempo di rilassamento rimane costante ma non è vero: è il *cammino*  $\lambda$  dei portatori a rimanere costante.

$$\boxed{\lambda = V_{tot}\tau}$$

dove  $V_{tot}$  è la velocità media netta, composta da velocità termica e velocità di deriva:

$$V_{tot} = V_\theta + V_d.$$

Si era anche detto che la velocità di deriva è trascurabile rispetto alla velocità termica...vero fino a quando la velocità di deriva non arriva ad essere comparabile alla velocità termica! Essa è proporzionale al campo elettrico, e se esso è abbastanza grande, lo sarà anche la velocità. Si era considerato il tempo di rilassamento costante poichè per campi fino ad una certa soglia:

$$V_{tot} \approx V_\theta \quad \lambda = V_\theta \tau \quad \tau = \frac{\lambda}{V_\theta}$$

che è il rapporto tra due quantità costanti. Se però la  $V_{tot} \neq V_\theta$  allora entra in gioco la velocità di deriva che fa variare la mobilità. Si dice che le cariche diventano *calde*. Per capire meglio si espande il modello a rilassamento aggiungendo un bilancio di potenza. Il bilancio valuta la variazione di *energia cinetica*  $E_k$ , che sarà pari alla potenza esercitata dalla forza elettrica meno un termine che tiene conto della perdita totale di energia cinetica nel tempo di rilassamento nel reticolo.

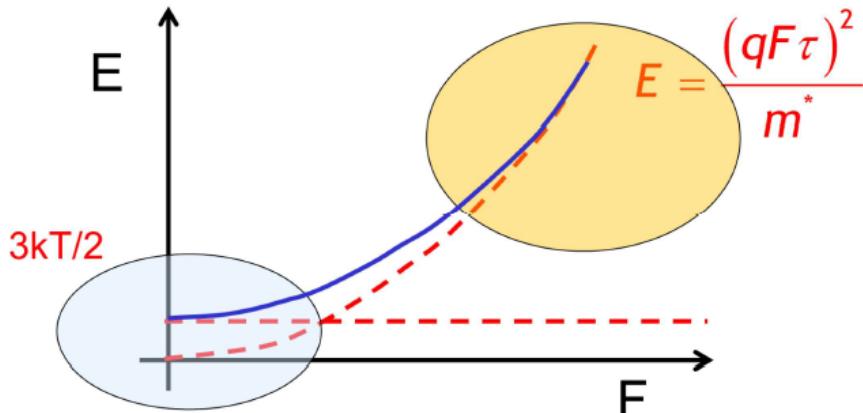
$$\begin{cases} \frac{dV_d m}{dt} = qE - \frac{V_d m}{\tau} \\ \frac{dE_k}{dt} = qEV_d - \frac{E_k}{\tau} \end{cases}$$

in condizioni stazionarie allora:

$$\begin{cases} 0 = qE - \frac{V_d m}{\tau} \\ 0 = qEV_d - \frac{E_k}{\tau} \end{cases} \quad \begin{cases} qE = \frac{V_d m}{\tau} \\ qEV_d = \frac{E_k}{\tau} \end{cases} \quad \begin{cases} V_d = \frac{q\tau E}{m} \\ E_k = qEV_d \tau \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} V_d = \frac{q\tau E}{m} \\ E_k = \frac{(qE\tau)^2}{m} \end{cases}}$$

Si è trovato che l'energia cinetica (e quindi la velocità media totale!) dipende quadraticamente dal campo elettrico.

Si considera anche il termine di energia termica del reticolo, pari a  $\frac{3}{2}kT$ .



Fino a quando l'energia cinetica (parabola tratteggiata) rimane al di sotto dell'energia termica, la mobilità rimane costante e prevale la velocità termica.

Quando  $E_k$  supera l'energia termica, le cariche "diventano calde" e la velocità di deriva prevale facendo variare la mobilità con il campo.

## 2.4 Fononi ottici

Per descrivere a fondo il meccanismo che causa la saturazione della velocità è necessario tenere conto dell'effetto dei *fononi ottici*. Si tratta di quanti di energia che vengono trasmessi al reticolo a seguito degli urti dei portatori e che non possono superare una certa soglia che indichiamo con  $E_p = 70\text{meV}$ . Rivedendo allora i due bilanci di prima:

$$\begin{cases} \frac{dV_d m}{dt} = qE - \frac{V_d m}{\tau} \\ \frac{dE_k}{dt} = qEV_d - \frac{E_p}{\tau} \end{cases}$$

in condizioni statiche:

$$\begin{cases} 0 = qE - \frac{V_d m}{\tau} \\ 0 = qEV_d - \frac{E_p}{\tau} \end{cases} \quad \begin{cases} V_d = \frac{q\tau E}{m} \\ q\tau E = \frac{E_p}{V_d} \end{cases} \quad V_d = \sqrt{\frac{E_p}{m}}$$

Ovvero si è trovato che questo limite massimo di energia trasferibile al reticolo causa una saturazione della velocità, costringendola ad un valore massimo pari a:

velocità massima di deriva

$$V_d = \sqrt{\frac{E_p}{m}}$$

Allora:

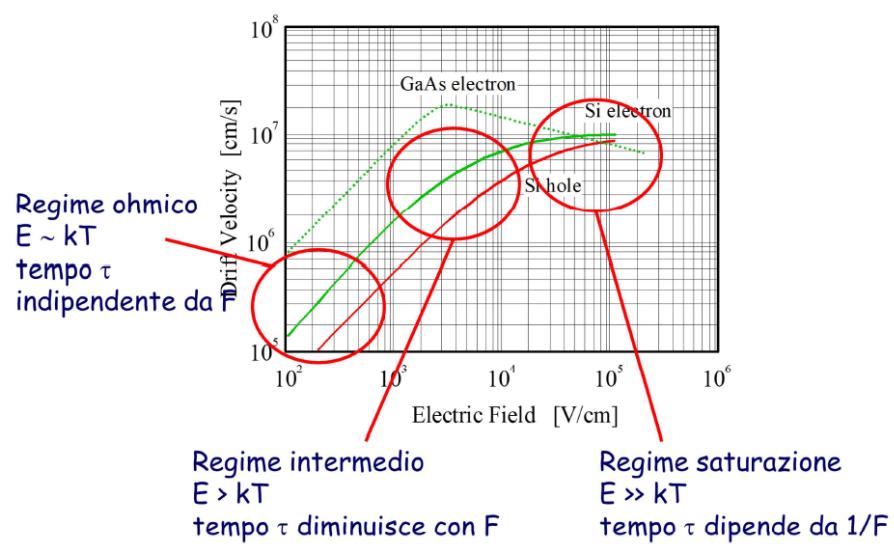
$$E_p = \frac{(q\tau E)^2}{m} \rightarrow \tau = \frac{\sqrt{E_p m}}{qE}$$

cioè il tempo medio di rilassamento è inversamente proporzionale al campo elettrico  $E$ . Se il campo raddoppia, il tempo dimezza e la velocità di deriva:

$$V_d = \frac{q\tau E}{m}$$

rimane costante!

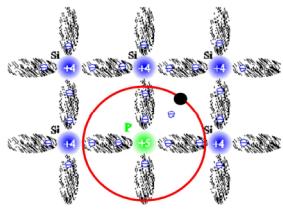
I possibili regimi sono i seguenti:



### 3 Semiconduttori drogati

#### 3.1 Drogaggio

Se si introduce un atomo di fosforo (pentavalente) nel reticolo cristallino di un semiconduttore, si crea un sito in cui è presente un elettrone che può facilmente liberarsi.

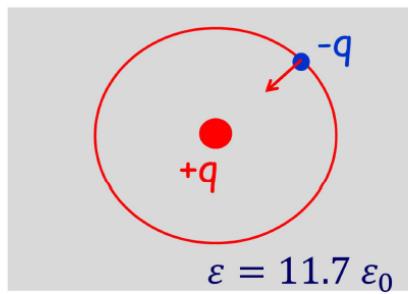
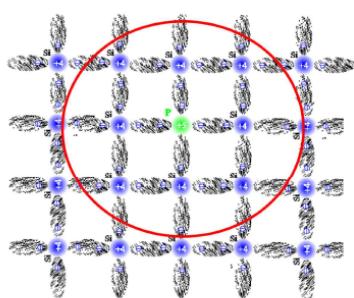


L'atomo di Fosforo può infatti formare 4 legami covalenti con gli atomi adiacenti e avere ancora un elettrone disponibile. Quando l'elettrone si libera dal sito, rimane un sito carico positivamente, che *non* è però una lacuna! Si tratta infatti di uno ione. Quando invece l'elettrone è ancora legato all'atomo, il sito è *neutro*.

#### 3.2 Modello idrogenoide

L'atomo di fosforo ha 4 dei suoi 5 elettroni occupati in legami covalenti. L'elettrone rimanente orbita attorno all'atomo e risente di una carica netta pari a +1 poichè la restante carica positiva è schermata dagli elettroni di legame, più interni.

In questo modo è possibile considerare il sistema come un atomo di idrogeno (1 protone 1 elettrone), seppur tra l'elettrone e il nucleo sia presente il reticolo e quindi una nube di elettroni di legame polarizzabili che schermano il campo elettrico generato dal nucleo. Si studia il sistema idrogenoide e si faranno poi le dovute modifiche.



$$F = \frac{q}{(4\pi\epsilon)r^2}$$

polarizzabilità del mezzo

Si utilizza il *Modello di Bohr* ovvero si considerano la forza centripeta che sente l'elettrone e il suo momento angolare, il quale per l'ipotesi di Bohr deve essere

necessariamente quantizzato:

$$\begin{cases} F = qE = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\frac{V^2}{r} \\ mVr = n\hbar \end{cases} \quad (1)$$

Dove  $r$  è il raggio atomico,  $n$  un numero naturale,  $\hbar$  la costante di Plank ridotta e  $V$  la velocità tangenziale. Si vuole ricavare il raggio atomico.

$$\begin{cases} \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} = mV^2 r^2 \\ mV^2 r^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m} \end{cases} \quad \frac{q^2 r}{4\pi\epsilon_0} = \frac{n^2 \hbar^2}{m} \quad r = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{q^2 m}$$

Si è trovato il raggio dell'atomo di idrogeno, che può assumere solo valori multipli del valore fondamentale pari a:

$$r = n^2 a_0 \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{q^2 m} \approx 0.5 A = 0.05 nm$$

detto anche *raggio di Bohr*.

Si studia ora l'energia dell'elettrone. Essa è composta da due contributi: l'energia cinetica e l'energia potenziale, e quest'ultima sarà negativa poiché si tratta di particelle cariche negativamente. Allora:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

E poichè dall'equazione 1 si ricava:

$$V^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mr}$$

allora:

$$E_{tot} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2r} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2r}.$$

Ma  $r$  è il raggio di Bohr, allora risulta:

$$E_{tot} = -\frac{1}{n^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a_0}.$$

Ovvero l'energia decresce quadraticamente con il numero quantico  $n$ .

Anche in questo caso si definisce una quantità fondamentale: il *Rydberg*.

$$R_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a_0} = 13.6 eV$$

che è l'energia minima dell'elettrone nel sistema idrogenoide, relativa al numero quantico 1.

Si applicano ora le approssimazioni dovute al reticolo cristallino. Considerando  $n = 1$ , si sostituisce la permittività del vuoto con quella del Silicio  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

### Raggio atomico nel reticolo di silicio

$$r = \frac{4\pi\epsilon\hbar^2}{q^2m} = \epsilon_r a_0$$

Il raggio è perciò aumentato di un fattore pari a  $\epsilon_r \approx 11,7$ . Il diametro atomico è quindi dell'ordine di 10A cioè due volte il passo del reticolo.

L'energia varia anch'essa, per  $n=1$  e con  $r = \epsilon_r a_0$ :

$$E_{tot} = -\frac{1}{n^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon 2r} \quad E_{tot} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon 2\epsilon_r a_0} \quad E_{tot} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2\epsilon_r^2 a_0}$$

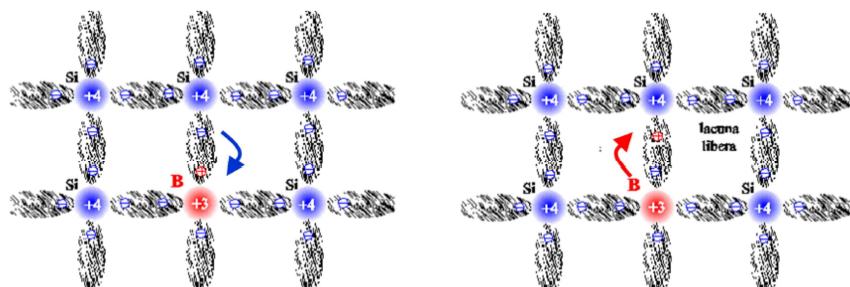
### Energia dell'elettrone nel reticolo di silicio

$$E_{tot} = -\frac{R_y}{\epsilon_r^2}$$

L'energia è quindi ridotta di un fattore pari a  $\epsilon_r^2$ . È importante notare che  $E_{tot} = 100meV$  che è comparabile con l'energia termica a temperatura ambiente  $\frac{KT}{q} = 25meV$ , basterà perciò un piccolo incremento della temperatura per raggiungere l'energia necessaria all'elettrone per svincolarsi dallo ione.

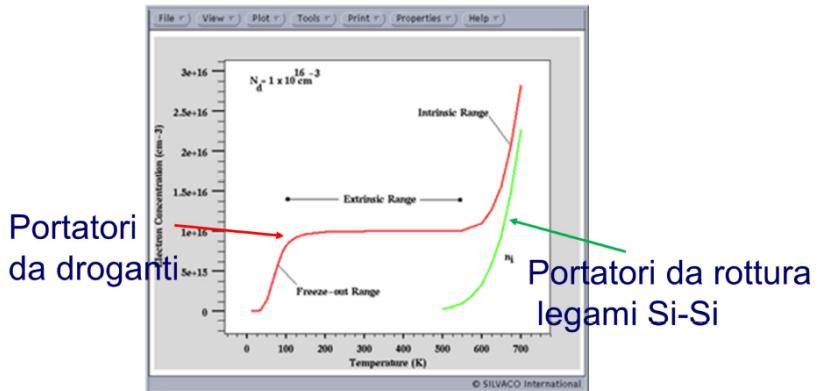
### 3.3 Lacune e concentrazione di portatori in funzione della T

Se invece di inserire nel reticolo atomi pentavalenti si inseriscono atomi trivalenti come il boro, nei siti in cui è presente il drogante si viene a formare una carica netta positiva. Infatti i 3 elettroni del boro creeranno dei legami covalenti, lasciando scoperto uno degli elettroni degli atomi di silicio adiacenti.



Con un minimo dispendio di energia, l'elettrone dell'atomo di silicio può saltare e inserirsi nel sito del boro, creando uno ione negativo (boro + elettrone) e una lacuna "vagante".

Se si plotta l'andamento della concentrazione di portatori al variare della temperatura, si ottiene il seguente diagramma:

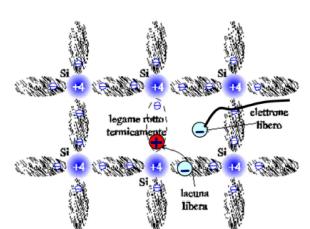


la concentrazione di portatori è dovuta alle vibrazioni del reticolo che conferiscono energia agli elettroni i quali si svincolano dagli atomi di drogante. Poichè le vibrazioni dipendono dall'energia termica e cioè dalla temperatura, si possono individuare 3 zone principali:

- *freeze-out*: a basse T (<100K) l'energia termica non è sufficiente a far svincolare gli elettroni, la concentrazione diminuisce notevolmente al diminuire della T. Gli elettroni sono "fermi" e rimangono vincolati ai nuclei.
- *concentrazione estrinseca*: per un largo range attorno a 300K, la temperatura è sufficiente a far svincolare gli elettroni dei droganti. La concentrazione estrinseca è molto maggiore della concentrazione intrinseca (del solo silicio) e perciò si approssima la concentrazione di portatori con quella del drogante.
- *alte T*: per T elevate, l'agitazione termica è molto intensa e la concentrazione di portatori dovuta alla rottura dei legami Si-Si inizia ad aumentare notevolmente, fino a superare la concentrazione di drogante (curva verde). **N.B.** La concentrazione intrinseca verde è esponenziale poichè è rappresentata dalla relazione di Arrhenius.

### 3.4 Legge di azione di massa

Consideriamo del Silicio non drogato. A temperatura fissata, a causa dell'agitazione termica, si può definire un *tasso di generazione* di portatori dovuto alla rottura dei legami Si-Si. Questo tasso è chiaramente solo legato alla temperatura T poichè i legami si rompono a seguito dell'energia termica acquisita,



ed è espresso in  $\frac{\text{portatori}}{\text{cm}^3} \text{s}$ . È possibile anche definire un *tasso di ricombinazione*, esso è proporzionale alle concentrazioni di elettroni e lacune poichè se ad esempio gli elettroni raddoppiano, c'è più probabilità che un elettrone incontri una lacuna e il tasso deve raddoppiare. Inoltre tale tasso deve dipendere anch'esso dalla temperatura, poichè sarà sicuramente dipendente dalla velocità termica con cui si muovono i portatori (è espresso in portatori su  $\text{cm}^3$  per secondo).

I due tassi saranno del tipo:

$$G = f_{1(T)} \quad R = npf_{2(T)}.$$

All'equilibrio termico (sistema *isoterma e isolato*) deve esserci equilibrio e quindi i due tassi devono eguagliarsi:

$$G = R \quad f_{1(T)} = npf_{2(T)} \quad np = \frac{f_{1(T)}}{f_{2(T)}}$$

Tale prodotto *dipende quindi solamente dalla temperatura!*

Rimane invariato anche in presenza di droganti, poichè la presenza o meno di droganti non varia né la probabilità di rottura dei legami Si-Si (generazione) né la probabilità che un elettrone incontri una lacuna nel suo moto.

Per determinare il valore del prodotto np, si fa riferimento al caso intrinseco:

$$np = n_i^2$$

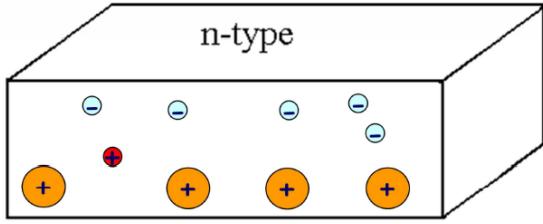
e poichè come detto tale prodotto dipende *solamente* dalla temperatura, vale anche nel caso sia presente del drogante. Dalla relazione di Arrhenius allora si ricava la *Legge di azione di massa*:

#### Legge di azione di massa

$$np = n_i^2 = \beta e^{-\frac{E_g}{kT}}$$

La legge di azione di massa vale sempre, anche nel caso sia presente del drogante. I droganti possono essere donori o accettori:

- drogaggio p: si inseriscono droganti accettori, atomi trivalenti che generano un eccesso di lacune. La concentrazione p aumenta e n diminuisce per la legge di azione di massa.
- drogaggio n: si inseriscono droganti donori, atomi pentavalenti che generano un eccesso di elettroni. La concentrazione n aumenta e p diminuisce per la legge di azione di massa.



$$N_D^+ + p = n$$

I portatori in eccesso sono detti *maggioritari* e quelli in difetto *minoritari*. È importante ricordare che vale sempre la neutralità di carica: i droganti ionizzati e le lacune devono essere compensate dagli elettroni liberi. Se si conosce la concentrazione del drogante e si vuole calcolare la concentrazione di elettroni. Per la neutralità di carica:

$$N_D^+ + p = n$$

e dalla legge di azione di massa:

$$p = \frac{n_i^2}{n} \quad N_D^+ + \frac{n_i^2}{n} = n \quad n^2 - nN_D^+ - n_i^2 = 0$$

si trovano allora le radici rispetto  $n$  e si sviluppa tramite McLaurin:

$$n = \frac{N_D^+}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{(N_D^+)^2}} \right] \approx \frac{N_D^+}{2} \left[ 1 + 1 + \frac{2n_i^2}{(N_D^+)^2} \right] = N_D^+ + \frac{n_i^2}{N_D^+}.$$

Il risultato trovato indica che la concentrazione di elettroni è pari alla concentrazione di atomi donori più la concentrazione di lacune. Trascurando le lacune (secondo termine), ricaviamo che *la concentrazione di elettroni è approssimabile con la concentrazione di donori*.

$$N_D^+ \approx n.$$

Nel caso siano presenti sia drogante p che n, si può ricavare il così detto *drogante netto*:

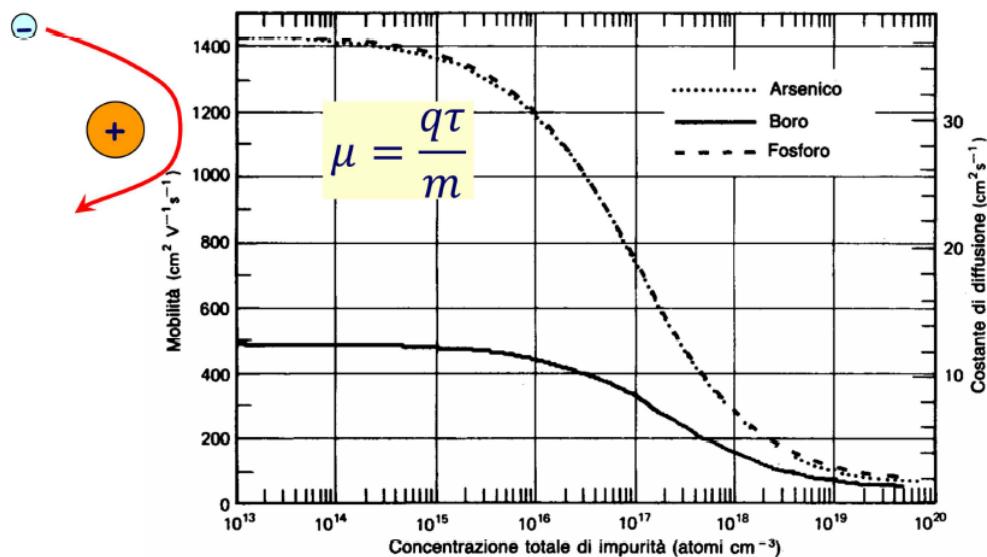
$$N_D^+ - N_A^- = N_N.$$

### 3.5 Droganti e mobilità

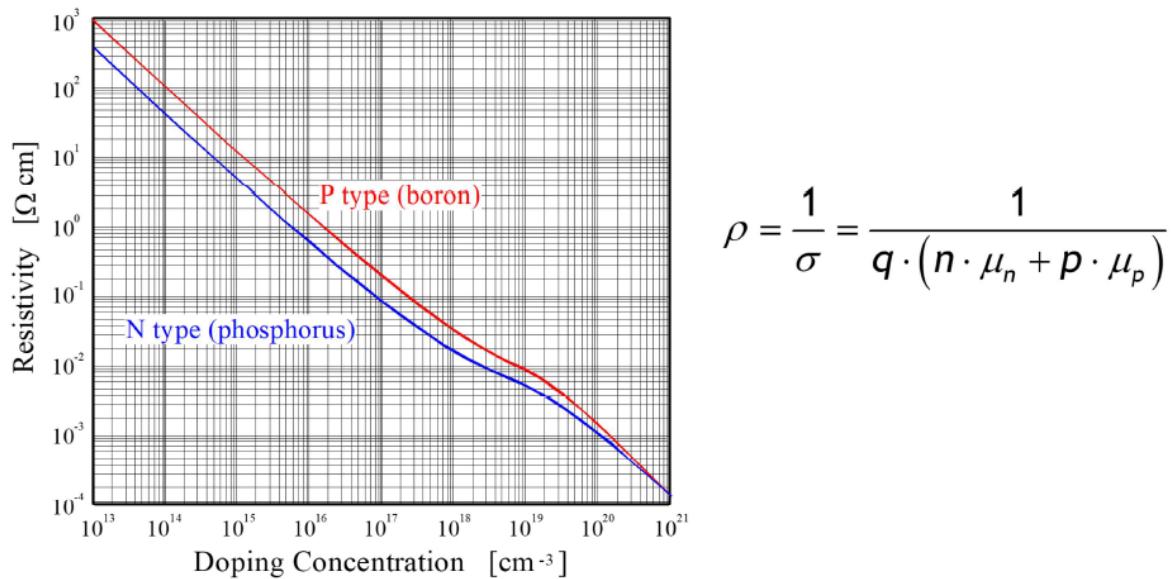
All'amentare della concentrazione dei droganti, aumenta la concentrazione di portatori e quindi la resistività del semiconduttore diminuisce.

Per drogaggi alti entra però in gioco l'effetto di *scattering*: gli ioni dei droganti ionizzati esercitano una forza coulombiana sui portatori, agendo come ostacoli nel

loro cammino. Maggiore numero di ostacoli implica minore tempo di rilassamento e cioè minore mobilità dei portatori!

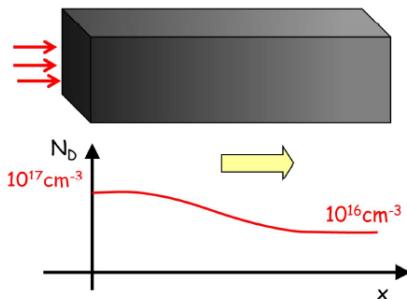


Si vede infatti che per drogaggi  $> 10^{16}$  la mobilità inizia a diminuire. L'effetto sulla resistività non è però così importante, come si vede dal seguente grafico:



## 4 Corrente di diffusione - Equazione di continuità

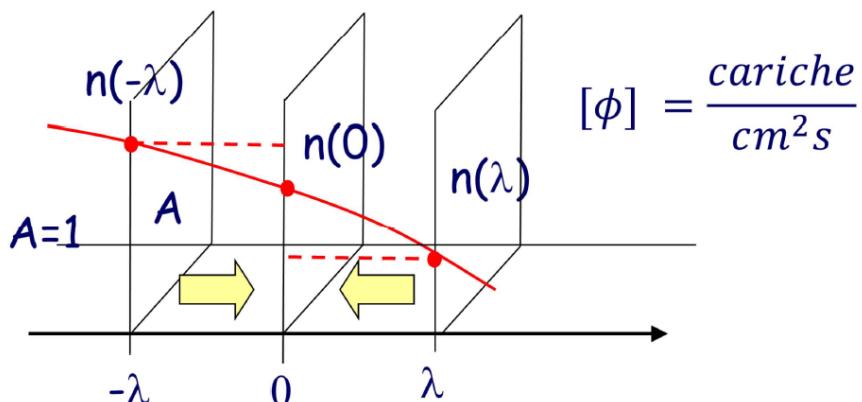
### 4.1 Diffusione dei portatori - Legge di Fick - Relazione di Einstein



Il processo di drogaggio di un semiconduttore non sempre risulta uniforme, possono esserci delle zone con concentrazione di drogante (e quindi di portatori) maggiore.

Questo squilibrio può formarsi anche, ad esempio, in presenza di radiazione ottica incidente su di un solo lato del semiconduttore. È ragionevole pensare che a causa di questa differenza di concentrazione sarà presente un flusso di cariche dalle zone con densità maggiore a quelle con densità minore. Essendo il flusso generato da una differenza di concentrazione e non da un campo elettrico, si parla di *corrente di diffusione*.

Dato il seguente profilo unidimensionale di portatori in un semiconduttore di sezione pari a  $A = 1$ :



ci si pone ad una distanza pari a al cammino libero medio  $\lambda$ , così da assicurarsi che i portatori presi in considerazione non collidono con il reticolo nello spazio preso in considerazione. La densità  $n_x$  è unidimensionale e perciò espressa in  $\frac{\text{portatori}}{\text{cm}^3}$ .

Nella lunghezza tra 0 e  $\lambda$  il numero di portatori totale è pari a:

$$\lambda n_\lambda$$

approssimando il profilo con la linea tratteggiata non si compie un grosso errore poichè la distanza è estremamente corta.

Non essendo presenti capi esterni, il movimento dei portatori è causato solamente dall'agitazione termica. Non hanno un moto ordinato bensì casuale e per questo motivo si può dire che metà dei portatori andranno verso destra e metà verso

sinistra. Il flusso:

$$\Phi^- = \frac{1}{2} \frac{\lambda n_{(\lambda)}}{A\tau}$$

dove A è unitario e inoltre:

$$\tau = \frac{\lambda}{V_\theta} \longrightarrow \Phi^- = \frac{1}{2} \lambda n_{(\lambda)} \frac{V_\theta}{\lambda} \quad \Phi^- = \frac{1}{2} n_{(\lambda)} V_\theta. \quad (2)$$

Discorso analogo si può fare per la coordinata  $x = -\lambda$ , ottenendo:

$$\Phi^+ = \frac{1}{2} n_{(-\lambda)} V_\theta$$

Ma  $n(x)$  è una funzione della coordinata x e si può quindi sviluppare in serie di MacLaurin in un intorno di  $x = 0$ :

$$n_{(x)} = \left[ n_{(0)} + \frac{dn}{dx} \Big|_0 (x - 0) + \dots \right],$$

allora:

$$n_{(\lambda)} = \left[ n_{(0)} + \frac{dn}{dx} \Big|_0 (\lambda - 0) + \dots \right].$$

Sostituendo  $n_{(\lambda)}$  nell' espressione del flusso 2 e troncando gli ordini superiori al primo si ottiene:

$$\Phi^- = \frac{1}{2} \left[ n_{(0)} + \frac{dn}{dx} \Big|_0 \lambda \right] V_\theta$$

e analogamente:

$$\Phi^+ = \frac{1}{2} \left[ n_{(0)} - \frac{dn}{dx} \Big|_0 \lambda \right] V_\theta.$$

Si può ora trovare il *flusso netto in  $x=0$* :

$$\Phi_{(0)} = \Phi^+ - \Phi^- \quad \Phi_{(0)} = -\lambda V_\theta \frac{dn}{dx} \Big|_0$$

Si è trovato che il flusso netto che fluisce nel punto a coordinata 0 dipende dal gradiente della concentrazione e da un coefficiente detto *coefficiente di diffusione* pari a:

Coefficiente di diffusione

$$D_n = \lambda V_\theta \quad \left[ \frac{cm^2}{s} \right]$$

Perciò maggiore velocità termica implica maggiore flusso generato dalla variazio-

ne di concentrazione. Si è trovata la *Legge di Fick*:

### Legge di Fick

$$\Phi_{(x)} = -\lambda V_\theta \frac{dn}{dx}$$

Questa relazione indica che in presenza di una differenza di concentrazione c'è un flusso di portatori in direzione opposta al gradiente della concentrazione. È possibile trovare una relazione che lega la *mobilità* con il *coefficiente di diffusione*. Se si riscrive il coefficiente di diffusione:

$$D_n = V_\theta \lambda = V_\theta \frac{\lambda \tau}{\tau} = V_\theta^2 \tau,$$

ma dal *principio di equipartizione* di Boltzann (in una dimensione) si può ricavare  $V_\theta^2$ , infatti:

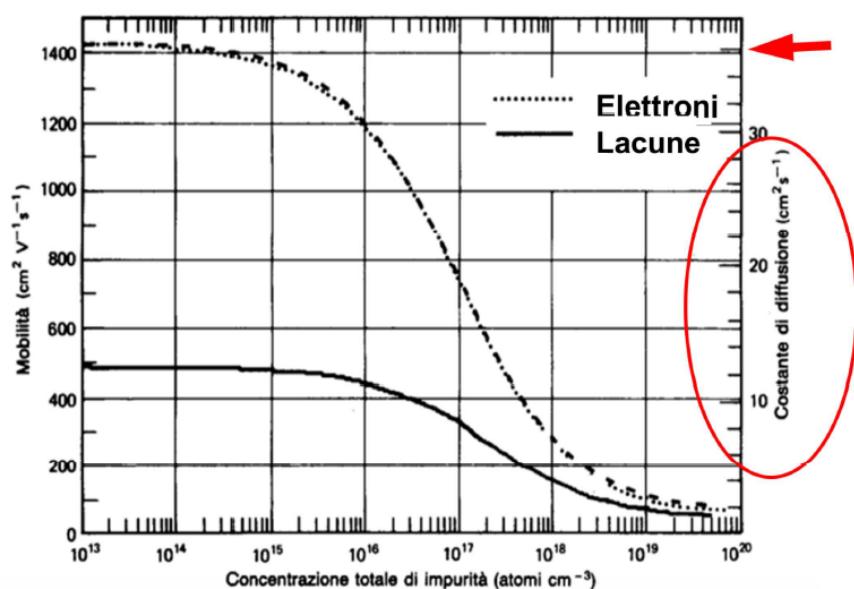
$$\frac{1}{2} m V_\theta^2 = \frac{kT}{2} \quad V_\theta^2 = \frac{kT}{m}$$

e perciò risulta:

$$D_n = \frac{kT}{m} \tau = \frac{kT}{q} \mu_n$$

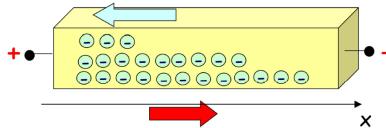
che è la *Relazione di Einstein* e mostra come a T fissata mobilità e coefficiente di diffusione siano proporzionali!

$$D_n = \frac{kT}{q} \mu_n$$



## 4.2 Correnti di deriva e diffusione

### Correnti di Deriva:

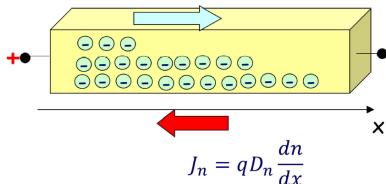


Ai capi del blocchetto di silicio a sinistra è applicata una differenza di potenziale e cioè un campo elettrico diretto dal morsetto a sinistra a quello a destra.

Gli elettroni, cariche negative, fluiscano verso il morsetto + a sinistra sotto l'effetto del campo elettrico. La corrente di deriva fluisce convenzionalmente nel verso opposto a quello degli elettroni e cioè nel *verso del campo elettrico*. La corrente di deriva (di  $e^-$  e lacune) fluisce *sempre* nel verso del campo elettrico.

$$J_n = qn\mu_n E \quad J_p = qp\mu_p E$$

### Correnti di diffusione:



Come visto dalla relazione di Fick i portatori vanno nella direzione opposta del gradiente della concentrazione.

Per gli elettroni questo implica che la corrente elettrica fluirà *nel verso del gradiente*. Per le lacune invece, la corrente di diffusione avrà lo stesso verso dei portatori, ovvero *opposto al gradiente*.

$$J_n = q\Phi_{(x)} = qD_n \frac{dn}{dx} \quad J_p = q\Phi_{(x)} = -qD_p \frac{dp}{dx}$$

Il segno meno indica che la corrente di diffusione degli elettroni è concorde al gradiente mentre quella delle lacune è discorde al gradiente.

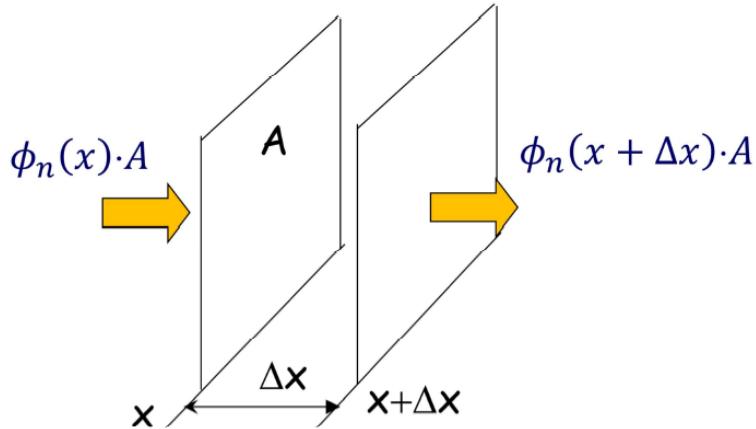
Le correnti totali saranno perciò pari a:

#### Correnti totali

$$J_n = qn\mu_n E + qD_n \frac{dn}{dx} \quad J_p = qp\mu_p E - qD_p \frac{dp}{dx} \quad (3)$$

### 4.3 Conservazione della carica ed equazione di continuità

Si considera il seguente blocchetto di semiconduttore di sezione A:



deve valere la conservazione della carica, cioè il bilancio netto tra cariche uscenti e cariche entranti deve necessariamente essere uguale alla variazione di cariche totali nel volume.

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Delta x A = (\Phi_{n(x)} - \Phi_{n(x+\Delta x)}) A.$$

Si nota però che dividendo per  $\Delta x$  il secondo termine si risale alla definizione di derivata (con - davanti), e si può perciò scrivere:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{d\Phi_n}{dx}$$

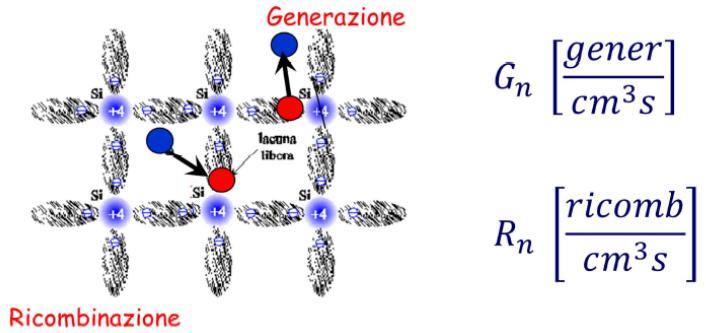
ma si sa che:

$$\Phi_{n(x)} = \frac{J_{n(x)}}{q} \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{d}{dx} \frac{J_{n(x)}}{q}.$$

Si ottengono perciò due prime equazioni, che verranno arricchite tra poco, che esprimono il tasso di variazione di cariche nell'unità di tempo nell'unità di volume.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{dJ_{n(x)}}{dx} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{q} \frac{dJ_{p(x)}}{dx} \quad (4)$$

Il meno è necessario poichè la corrente di diffusione delle lacune è opposta al gradiente.



All'interno del volume  $\Delta x A$  avvengono però anche fenomeni di ricombinazione e generazione di portatori ed è necessario tenerne conto nel bilancio sopra. Detti  $G_n$  e  $R_n$  i tassi di ricombinazione degli elettroni, il numero totale di portatori generati e/o ricombinati nel volume è pari a:

$$(G_n - R_n)\Delta x A$$

Si aggiunge questo termine alle equazioni 4 (per unità di volume):

### Equazione di continuità

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{dJ_{n(x)}}{dx} + (G_n - R_n)$$

Si può ulteriormente raffinare l'equazione: dalla 4 si vede che compare la divergenza delle correnti totali, espresse nella 3.

Perciò:

$$\frac{dJ_{n(x)}}{dx} = q\mu_n \frac{\partial(nE)}{\partial x} + qD_n \frac{d^2n}{dx^2}$$

dove

$$\frac{\partial(nE)}{\partial x} = E \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x}$$

Allora l'equazione di continuità completa risulta essere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{q} \left[ q\mu_n \left( E \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + qD_n \frac{d^2n}{dx^2} \right] + (G_n - R_n) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \mu_n \left( E \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + D_n \frac{d^2n}{dx^2} + (G_n - R_n) \end{aligned} \quad (5)$$

La concentrazione  $n$  però è composta da due termini! Dalla concentrazione  $n_0$  all'equilibrio termico che *non è funzione del tempo* e dello spazio (per semicon-

duttore omogeneo), e dalla concentrazione  $n'$  di portatori in eccesso. Allora:

$$n = n_0 + n'$$

Identiche considerazioni valgono per le lacune.

Considerando per semplicità il campo  $E$  uniforme e inserendo il nuovo termine delle concentrazioni nell'equazione 5:

### Equazioni di continuità per n e p

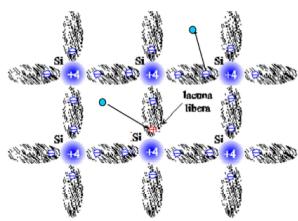
$$\frac{\partial n'}{\partial t} = \mu_n E \frac{\partial n'}{\partial x} + D_n \frac{d^2 n'}{dx^2} + (G_n - R_n) \quad (6)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \mu_p E \frac{\partial p'}{\partial x} - D_p \frac{d^2 p'}{dx^2} + (G_p - R_p) \quad (7)$$

## 4.4 Meccanismi di ricombinazione

Esistono principalmente 2 tipi di ricombinazione:

*Ricombinazione radiativa o "al volo":*



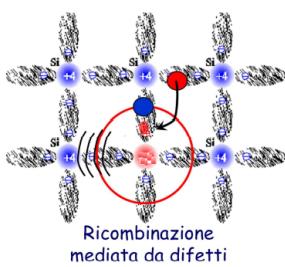
questo meccanismo riguarda solamente portatori liberi nel reticolo. Se un minoritario e un maggioritario si "incontrano" durante il loro moto libero, l'elettrone rilascia energia sotto forma di fotoni. Questo meccanismo è responsabile dell'emissione di radiazione luminosa ed è ampiamente sfruttato nei LED.

Poichè all'equilibrio termico i tassi di generazione e ricombinazione devono uguagliarsi, essi avranno la seguente forma:

$$G_n = B n_i^2 \quad R_n = B n p$$

Dove  $B$  è un parametro opportuno dipendente dalla temperatura. Si uguaggiano all'equilibrio termico per la legge di azione di massa.

*Ricombinazione mediata da difetti:*

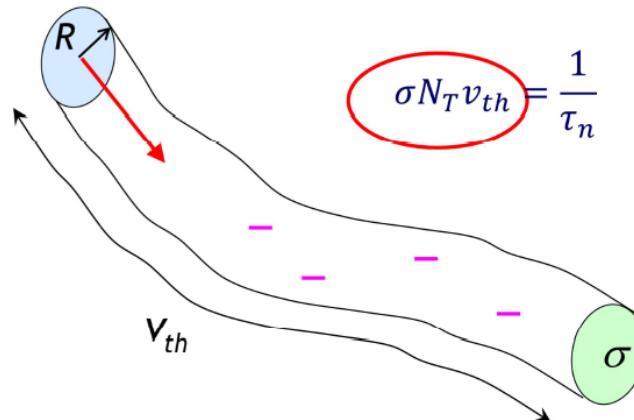


Nel reticolo del semiconduttore possono essere presenti delle impurità, ovvero atomi di specie diverse dal semiconduttore. Questi atomi hanno spesso configurazioni elettroniche differenti e possono catturare i minoritari nel reticolo. Questo tipo di ricombinazione è "meno utile" poichè l'energia viene rilasciata attraverso vibrazioni reticolari, che significa dissipazione di calore. Il processo avviene in due fasi:

1. Cattura del minoritario da parte dell'impurità
2. Ricombinazione tra minoritario catturato e maggioritario

Il tempo necessario alla cattura del minoritario è il tempo che caratterizza il processo, poichè essendo un minoritario molto raro, ci vorrà tempo prima che incontri un'impurità. Si può considerare nullo il tempo di ricombinazione.

Per trovare un'espressione del *tempo di cattura*  $\tau_n$ , si considera la seguente immagine:



si considera una circonferenza di raggio  $R$  attorno al minoritario poichè se esso passa ad una distanza minore di  $R$  da un difetto, viene catturato.  $\sigma$  è l'area della circonferenza, il minoritario in un'unità di tempo percorre una distanza pari a  $V_\theta$  e  $N_T$  è la densità di difetti nel reticolo.

Allora, per definizione di tempo di cattura, in un  $\tau_n$  il minoritario deve incontrare un difetto nel volume  $\sigma V_\theta$ . Segue:

$$N_T V_\theta \sigma \tau_n = 1 \rightarrow \tau_n = \frac{1}{N_T V_\theta \sigma}$$

Allora il tasso di ricombinazione per unità di volume sarà pari alla densità di minoritari diviso il tempo medio necessario alla cattura.

$$R_n = \frac{n}{\tau_n} \left[ \frac{\text{minoritari}}{\text{cm}^3 \text{s}} \right].$$

Analogamente al caso della ricombinazione radiativa, i tassi di generazione e ricombinazione devono eguagliarsi all'equilibrio termico, perciò:

$$G_n = \frac{n_i^2}{p \tau_n} \rightarrow G_n = \frac{n_i^2}{N_A \tau_n}$$

Dove  $p = N_A$  poichè si tratta di maggioritari in un semiconduttore drogato.

**N.B.** Il processo di ricombinazione mediata da difetti è molto più consistente del processo di ricombinazione radiativa.

L'equazione di continuità ,alla luce di ciò che si è appena detto, sarà allora:

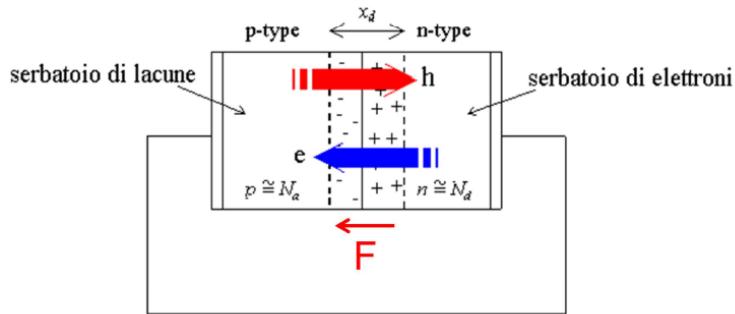
$$\boxed{\frac{\partial p'}{\partial t} = \mu_p E \frac{\partial p'}{\partial x} - D_p \frac{d^2 p'}{dx^2} + g' - \frac{p'}{\tau_n}} \quad (8)$$

Poichè:

$$G_{0p} = R_{0p} \rightarrow G_p - R_p = (G_{0p} + g'_p) - (R_{0p} + r'_p) \rightarrow G_p - R_p = g'_p - r'_p$$

## 5 Giunzione pn

La diffusione è il fenomeno di spostamento di un insieme di particelle da una zona a concentrazione maggiore ad una a concentrazione minore. Mettendo a contatto due blocchetti di silicio, uno drogato p e uno n, si instaura una corrente di diffusione dovuta allo spostamento delle specie caricate da una zona ad alta concentrazione ad una a bassa concentrazione.



Le lacune e gli elettroni che si spostano da un lato all'altro per diffusione lasciano alle loro spalle gli atomi di drogante ionizzati, formando così nelle due regioni di contatto due zone adiacenti di carica opposta, questa zona è detta *zona di carica spaziale*. Queste due zone danno origine a un campo elettrico e perciò a un potenziale che si oppone al moto di diffusione delle cariche.

Si raggiunge perciò un equilibrio, nel quale corrente di diffusione e corrente di deriva causata dal campo elettrico si annullano a vicenda. *All'equilibrio* non c'è più spostamento di cariche, e si instaura una tensione ai capi della zona di carica spaziale detta *potenziale di contatto* che chiamiamo  $\Phi_i$ .

### 5.1 Statistica di Boltzmann

Si considera la colonna isoterma di gas in figura:

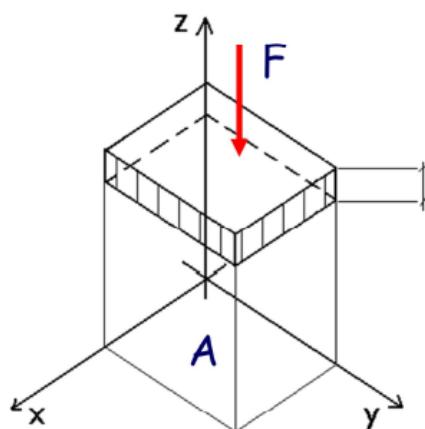


Figura 3: Colonna isoterma

le particelle di gas si accumuleranno in basso a seguito della forza di gravità, ma allo stesso tempo a  $T$  fissata esse avranno un'energia cinetica non nulla che porterà alcune di esse a quote  $z$  più elevate.

Dalla legge universale dei gas:

$$PV = \tilde{n}RT$$

dove  $\tilde{n}$  è il numero di moli del gas, moltiplicando  $\tilde{n}$  per il numero di Avogadro  $N_A$  si ottiene il numero totale di particelle.

$$PV = \tilde{n}N_A \frac{RT}{N_A}$$

si riconosce che:

$$\frac{R}{N_A} = k$$

è la costante di Boltzmann. La pressione può perciò essere espressa come:

$$P = \frac{\tilde{n}N_A}{V}kT = nkT \quad (9)$$

dove  $n$  è la concentrazione di particelle.

Si considera ora la forza di gravità agente sulla sezione infinitesima  $dz$  in figura 3:

$$dF = -nAdzmg$$

dove  $Adz$  è il volume della sezione e  $nAdz$  il numero totale di particelle. La pressione allora sarà pari a:

$$dP = \frac{dF}{A} = -ndzmg. \quad (10)$$

Mettendo assieme le due espressioni della pressione:

$$\begin{cases} P = nkT \\ dP = -ndzmg \end{cases}$$

si ottiene:

$$kTdn = -ndzmg \quad \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT}dz$$

Si può perciò ora esprimere la concentrazione  $n$  in funzione della quota  $z$ ! Si

integra da 0 alla quota  $h$ :

$$\int_{n(0)}^{n(h)} \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} \int_0^h dz$$

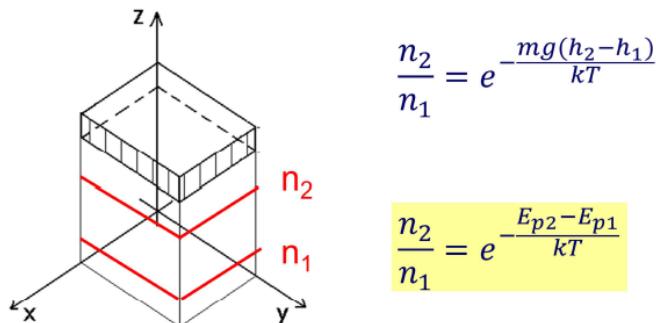
$$\ln \left( \frac{n(h)}{n(0)} \right) = -\frac{mg}{kT} h$$

n in funzione di h

$$n(h) = n(0) e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (11)$$

Questa espressione è molto importante perchè mostra come l'andamento della concentrazione è massima alla base e all'aumentare della quota  $h$  decresce esponenzialmente. All'esponente sono presenti l'*energia potenziale* a numeratore e un termine legato alla T al denominatore. La forza gravitazionale cioè tende a far accumulare le particelle alla base, l'energia termica "combatte" l'effetto e tende a far salire le particelle.

In un sistema l'occupazione dei livelli decresce esponenzialmente all'aumentare dell'energia.



Il rapporto delle concentrazioni di equilibrio  
dipende esponenzialmente dalla differenza di  
energia potenziale

In figura è mostrato come l'esponenziale delle differenze di energie potenziali in due livelli definisca il rapporto tra le concentrazioni in essi.

Si vuole ora calcolare il numero di particelle totali presenti da una quota in poi:

$$N_{tot(E>E_{P1})} = \int_{h_1}^{+\infty} n(0) e^{-\frac{mgh}{kT}} Adz$$

$$N_{tot(E>E_{P1})} = n(0) A \frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgh_{(1)}}{kT}}$$

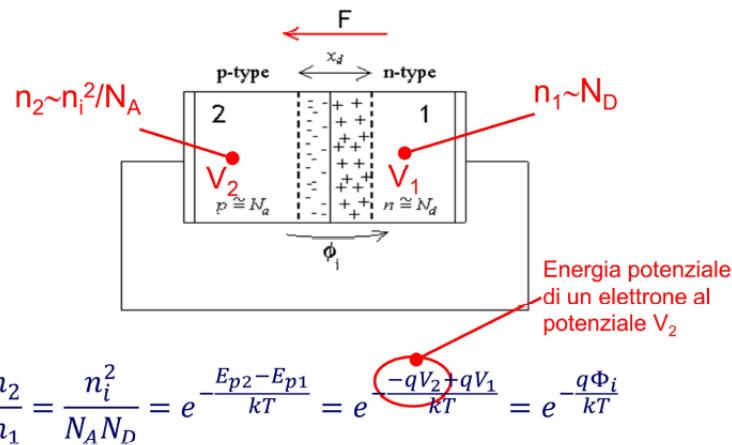
dove

$$n_{(0)} A \frac{kT}{mg} = N_{tot}$$

è il numero totale di particelle nel sistema. Questo significa che la *frazione di particelle che si trova a energia potenziale maggiore di  $E_{P1}$*  è pari a:

$$e^{-\frac{mgh_{(1)}}{kT}} = e^{-\frac{E_{P1}}{kT}}$$

Si applicano ora i concetti appena visti alla giunzione pn:



come detto prima il processo di diffusione è interrotto quando il campo E generato causa una corrente di deriva che bilancia la corrente di diffusione. All'equilibrio si è formata la zona di carica spaziale e non c'è più movimento di cariche da una zona all'altra.

Si prendono in considerazione gli elettroni: se ci si pone ad una distanza ragionevole dalla zona di carica spaziale si può affermare che

- in zona drogata p la concentrazione di elettroni è  $n \approx \frac{n_i^2}{N_A}$
- in zona drogata n la concentrazione di elettroni è  $n \approx N_D$

Tenendo a mente la statistica di Boltzmann e considerando la zona drogata n come "il pavimento" della nostra colonna isoterma, si può trovare il rapporto tra queste due concentrazioni, che deve essere pari a:

$$\frac{\frac{n_i^2}{N_A}}{N_D} = e^{-\frac{E_{P2}-E_{P1}}{kT}}.$$

Dati i potenziali elettrici di ciascun lato  $V_1$  e  $V_2$ , le energie potenziali sono:

$$E_{P1} = -qV_1 \quad E_{P2} = -qV_2$$

sostituendo si ottiene:

$$\frac{\frac{n_i^2}{N_A}}{N_D} = e^{-\frac{q(V_1-V_2)}{kT}}$$

$$\frac{n_i^2}{N_A N_D} = e^{-\frac{q\Phi_i}{kT}}$$

poichè il potenziale di contatto  $\Phi_i = V_1 - V_2$ .

Da questa relazione è molto utile ricavare una formula per il calcolo del potenziale di contatto:

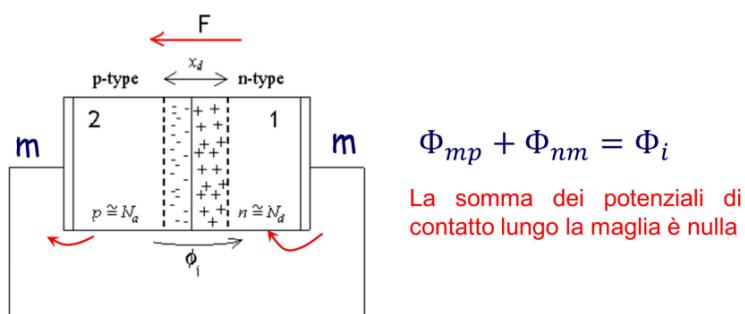
### Potenziale di contatto

$$\Phi_i = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right)$$

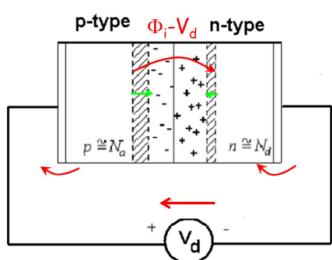
Dove  $\frac{kT}{q}$  è detta tensione termica ed è  $\approx 25\text{mV}$  a  $T=300\text{K}$ .

## 5.2 Contatti ohmici e polarizzazione diretta/inversa

Se il diodo cortocircuitato presenta una tensione di contatto, affinchè venga rispettata la legge di Kirchhoff delle tensioni deve esserci almeno una caduta uguale ed opposta da qualche altra parte nella maglia.



Sono presenti delle cadute di tensione sui contatti ohmici tra metallo e semiconduttore che rendono il potenziale totale nella maglia pari a 0. I contatti ohmici, se ben fatti, non vedono variare la caduta di potenziale ai loro capi al variare della corrente.

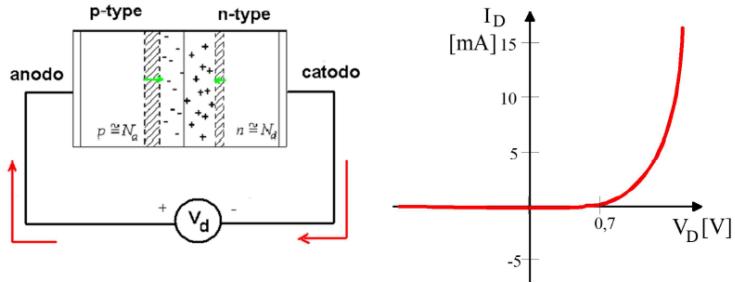


Si applica ora un generatore di tensione ai capi del diodo con il lato a potenziale più alto collegato al lato p del diodo. Poichè i potenziali dei contatti ohmici restano invariati, il potenziale di contatto deve essere pari a  $\Phi_i - V_d$ .

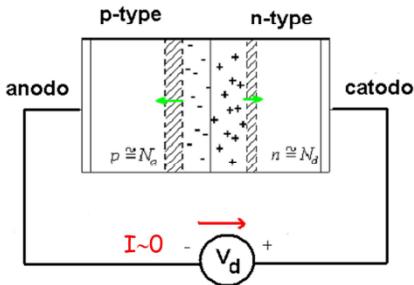
Il campo elettrico nella giunzione diminuisce e i portatori maggioritari avanzano per diminuire le dimensioni

della zona di carica.

Questo fenomeno è detto *polarizzazione in diretta*.

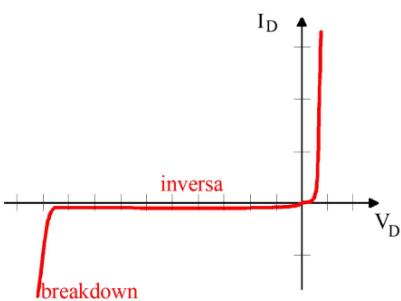


Le cariche maggioritarie possono tornare a diffondere poichè la barriera di potenziale è stata abbassata, si instaura una corrente elettrica. Per fare un'analogia con la colonna isoterma, è come se la forza di gravità diminuisse.



La *polarizzazione in inversa* avviene quando il lato a potenziale alto del generatore  $V_d$  è collegato al lato n del diodo. In questo caso il potenziale di contatto cresce,  $\Phi_i + V_D$ , e cresce anche il campo elettrico facendo aumentare la dimensione della zona di carica spaziale. La corrente è circa zero ed è solo dovuta a fenomeni di generazione nella zona di carica spaziale. È come se la forza di gravità aumentasse nel caso della colonna isoterma.

### 5.3 Breakdown



Il breakdown è un fenomeno definito da una repentina variazione della corrente inversa nel diodo. Tale fenomeno si innesca per valori della tensione di contatto minori di una certa soglia e può essere distruttivo. I diodi Zener utilizzano tale fenomeno per simulare l'effetto di un generatore di tensione, poichè il breakdown è caratterizzato da una tensione di contatto fissa a un valore  $V_{BD}$ . Il breakdown

può essere di due tipi:

- *Breakdown a valanga*:

Normalmente all'interno della zona di carica spaziale avvengono dei fenomeni di generazione termica di portatori. Un elettrone appena generato viene accelerato dal campo elettrico presente nella zona di carica spaziale. Se il campo elettrico è sufficientemente grande, sopra una certa soglia, accelera-

l'elettrone e gli conferisce abbastanza energia da rompere un legame durante la collisione con gli atomi nel reticolo.

Rompendo un legame, genera altri due portatori che verranno accelerati a loro volta e che hanno alta probabilità di rompere altri legami. Se il guadagno di questo processo retroazionato è maggiore di 1, la generazione di portatori diverge e la corrente inversa aumenta.

Il valore di tensione (e cioè di campo) per cui il guadagno del processo è maggiore di 1 è detta *tensione di breakdown*.

- *Breakdown zener:*

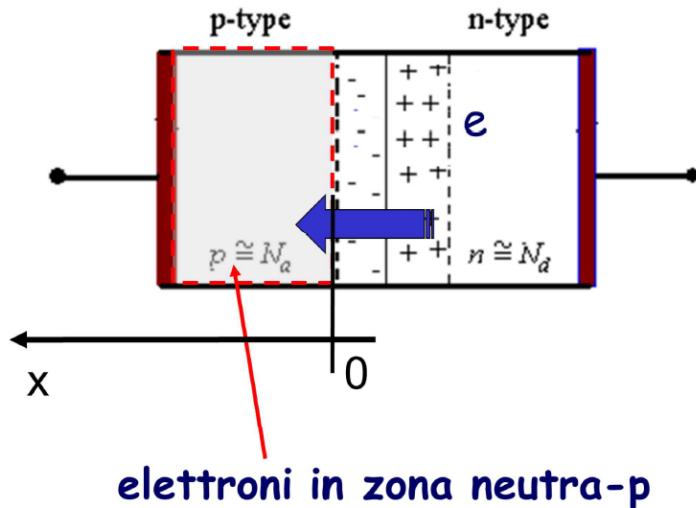
nei diodi zener (composti da silicio drogato pesantemente p e n) l'estrazione degli elettroni nella zona di carica spaziale avviene direttamente attraverso il campo elettrico applicato.

## 6 Giunzione pn polarizzata

### 6.1 Andamento della concentrazione dei minoritari in zona neutra

Quando il diodo è polarizzato in diretta gli elettroni vengono iniettati in zona p dove sono minoritari (e viceversa per le lacune ma il discorso è identico). Si vuole stimare l'andamento della concentrazione degli elettroni minoritari in zona neutra p.

Si pone un sistema di riferimento con l'origine all'inizio della zona neutra p:



Per poter trovare l'andamento della concentrazione bisogna risolvere l'equazione di continuità 6, che è un'equazione differenziale del 2<sup>o</sup> ordine. È necessario definire le condizioni al contorno, che saranno la concentrazione alla coordinata 0 e la concentrazione nella zona p lontano dalla giunzione.

Dalla statistica di Boltzmann:

$$n_{(0)} = N_D e^{\left(-\frac{q(\Phi_i - V_d)}{kT}\right)}$$

che è la frazione di elettroni del serbatoio  $N_D$  (zona n) che riesce a superare la barriera di potenziale  $\Phi_i - V_d$ , ma:

$$n_{(0)} = N_D e^{\left(\frac{(-q\Phi_i)}{kT}\right)} e^{\left(\frac{(qV_d)}{kT}\right)}$$

$$\frac{n_{(0)}}{N_D} = \frac{n_i^2}{N_A N_D} e^{\left(\frac{(qV_d)}{kT}\right)}$$

$$n_{(0)} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\left(\frac{(qV_d)}{kT}\right)}$$

che mostra come il valore massimo di concentrazione di minoritari in zona p dipenda esponenzialmente da  $V_D$ !

La concentrazione di elettroni in zona p lontano dalla giunzione è pari a:

$$n_{(+\infty)} \approx \frac{n_i^2}{N_A} = n_0.$$

L'equazione di continuità:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = \mu_n E \frac{\partial n'}{\partial x} + D_n \frac{d^2 n'}{dx^2} - \frac{n'}{\tau_n}$$

è semplificabile poichè ad alta conducibilità i campi elettrici sono nulli poichè vengono schermati dalle cariche (come nei conduttori) ed essendo in regime stazionario il termine derivato rispetto al tempo è nullo anch'esso. Si ottiene perciò:

$$0 = D_n \frac{d^2 n'}{dx^2} - \frac{n'}{\tau_n}$$

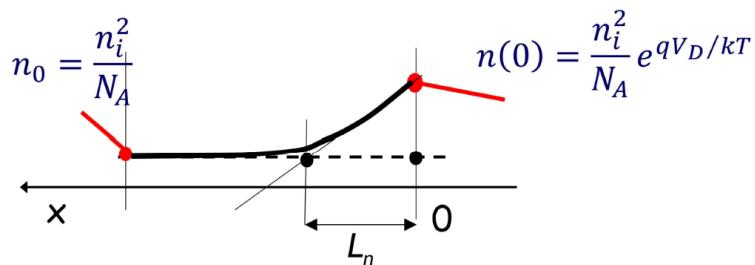
si è considerato solo il termine di ricombinazione poichè la generazione di elettroni in zona p è trascurabile. Sapendo che  $\frac{n_i^2}{N_A} = n_0$  e  $n' = n - n_0$  si riscrivono le condizioni al contorno

$$\begin{cases} D_n \frac{d^2 n'}{dx^2} - \frac{n'}{\tau_n} = 0 \\ n'_{(0)} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - n_0 = n_0 \left(e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1\right) \\ n'_{(+\infty)} = \left(\frac{n_i^2}{N_A} - n_0\right) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Si trova l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$D_n \lambda^2 - \frac{1}{\tau_n} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}}$$

Dove il termine  $\sqrt{D_n \tau_n} = L_n$  è detto *lunghezza di diffusione dei minoritari* e rappresenta l'asintoto iniziale di partenza dell'andamento esponenziale del profilo di minoritari.



L'integrale generale risulta:

$$\begin{cases} n'_{(x)} = Ae^{\frac{x}{L_n}} + Be^{-\frac{x}{L_n}} \\ n'_{(0)} = n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) \\ n'_{(+\infty)} = 0 \end{cases}$$

e risolvendo il problema di Cauchy si ottiene l'espressione dell'andamento dei portatori minoritari in eccesso in zona p:

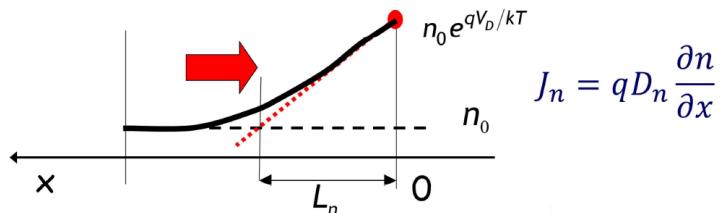
$$n'_{(x)} = n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

e allora la concentrazione di portatori  $n$  è:

Concentrazione elettroni minoritari in zona p - polarizzazione diretta

$$n_{(x)} = n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}} + n_0 \quad (13)$$

Si è trovato che l'andamento dei minoritari è una decrescita esponenziale, con valore massimo dipendente esponenzialmente da  $V_D$ . L'andamento decresce poiché man mano che i minoritari si infiltrano nella zona p vengono ricombinati con le lacune maggioritarie.



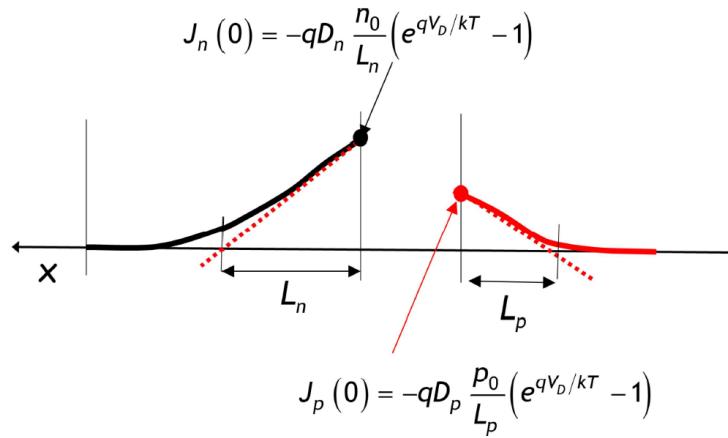
È allora possibile calcolare la corrente di diffusione:

$$J_n = qD_n \frac{dn}{dx} = -qD_n \frac{n_0}{L_n} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

cioè anch'essa decresce esponenzialmente e possiede un andamento analogo a quello della concentrazione. La corrente diminuisce a causa della ricombinazione. Il valore massimo di corrente è in corrispondenza dell'inizio della zona p e vale:

$$J_{(0)} = -qD_n \frac{n_0}{L_n} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right).$$

Per i minoritari in zona n tutta la trattazione fatta sopra è analoga, si ottiene cioè:

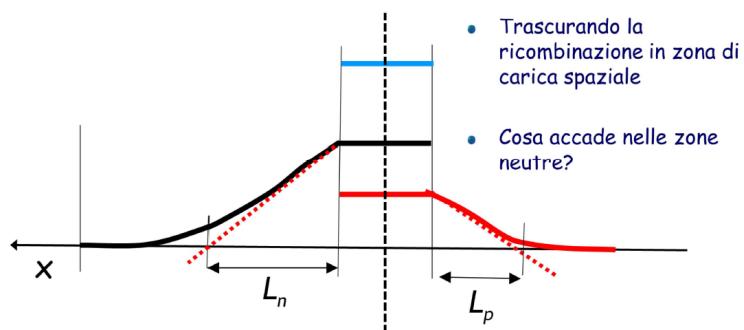


come visto in precedenza le correnti di diffusione sono concordi o discordi al gradiente in base se il portatore è un elettrone o una lacuna. In figura la corrente netta fluisce nella direzione discorde all'asse x. Le due correnti di diffusione perciò si sommano.

## 6.2 Corrente totale con polarizzazione diretta e zona lunga

Facendo l'ipotesi che non avvengano fenomeni di ricombinazione nella zona di carica spaziale è possibile affermare che il valore della corrente di diffusione nella zona di carica spaziale è la medesima del punto a concentrazione di minoritari maggiore. Questo perchè la concentrazione massima fa riferimento al numero di portatori che attraversano la zona di carica spaziale e se nessuno si ricombina durante l'attraversamento, la concentrazione è la medesima.

Poichè ci siamo posti in condizioni stazionarie *la corrente è la medesima in tutto il dispositivo*, ed è pari *alla somma delle due correnti di diffusione* nella zona di carica spaziale.



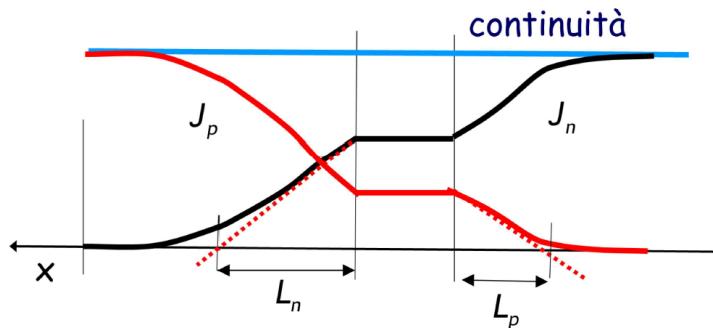
La corrente totale è allora pari a:

$$J_{tot} = -q \left( \frac{n_0}{L_n} D_n + \frac{p_0}{L_p} D_p \right) \left( e^{qV_D/kT} - 1 \right)$$

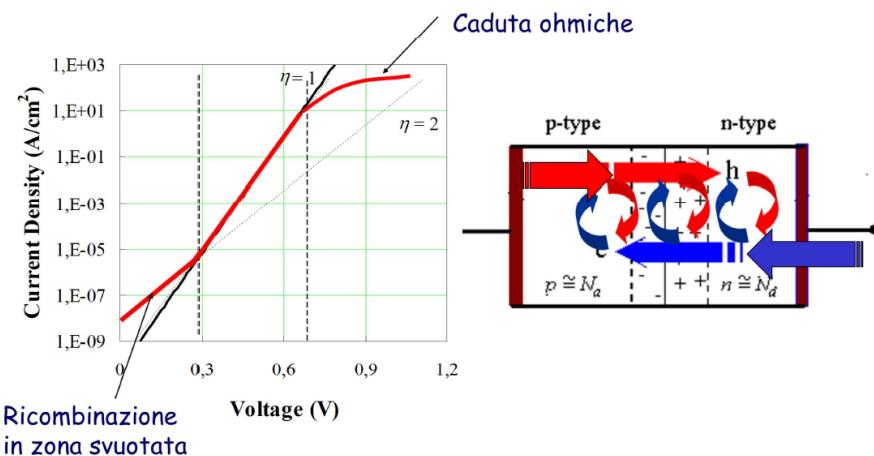
## Corrente totale

$$J_{tot} = -q \left( \frac{n_i^2}{N_A L_n} D_n + \frac{n_i^2}{N_D L_p} D_p \right) (e^{q \frac{V_D}{kT}} - 1)$$

Che è una relazione esponenziale in funzione di  $V_D$ . Notare che si sono trascurate le componenti di deriva poichè i campi interni sono schermati dai portatori. In realtà sebbene i campi siano piccoli, la concentrazione dei maggioritari è elevata e perciò la componente di deriva non sarà trascurabile ( $J_d = q\mu_n nE$ ). Poichè la corrente è la medesima in tutto il dispositivo, sottraendo la corrente di diffusione dei minoritari alla corrente totale trovata si trova la corrente relativa ai maggioritari:



Si è appena trovato che la corrente cresce esponenzialmente al variare di  $V_D$ , in realtà ci sono dei discostamenti da questo andamento per valori alti e valori bassi della tensione  $V_D$ :



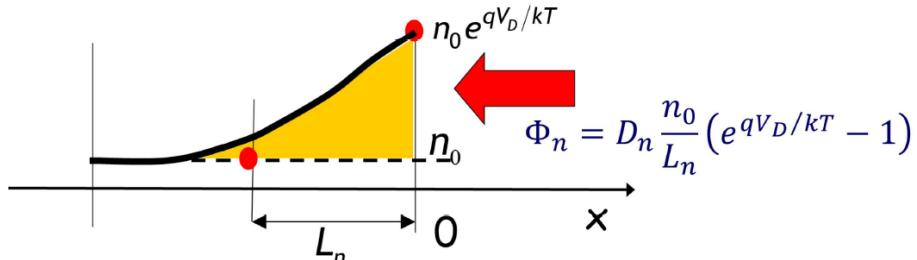
si vede come per tensioni maggiori di circa  $V_D = 0,7V$  la crescita sia meno che esponenziale. Questo perchè le cadute ohmiche nelle zone drogata e ai contatti non sono più trascurabili e parte di  $V_D$  applicata dal generatore esterno ricade su queste resistenze.

Per  $V_D < 0,3V$  invece subentrano gli effetti di ricombinazione nella zona di carica.

### 6.3 Tempo di transito zona lunga

Dall'espressione della corrente di diffusione dei minoritari trovata prima si può calcolare il flusso entrante di minoritari in zona p:

$$\Phi_n = D_n \frac{n_0}{L_n} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right)$$



Inoltre avendo trovato il profilo  $n_{(x)}$  è possibile calcolare la *densità per unità di area dei minoritari in eccesso*  $N'$ , sapendo che  $n' = n - n_0$ :

$$N' = \int_0^{+\infty} (n_{(x)} - n_0) dx = \int_0^{+\infty} \left( n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}} + n_0 - n_0 \right) dx$$

$$N' = L_n n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right)$$

Se si considerano *condizioni stazionarie*, il profilo di minoritari non deve variare e il flusso entrante deve essere pari al flusso uscente. Il flusso uscente è riferito ai portatori che si ricombinano su unità di area per unità di superficie. La densità di minoritari per unità di area appena trovata rimane costante anch'essa e quindi deve risultare:

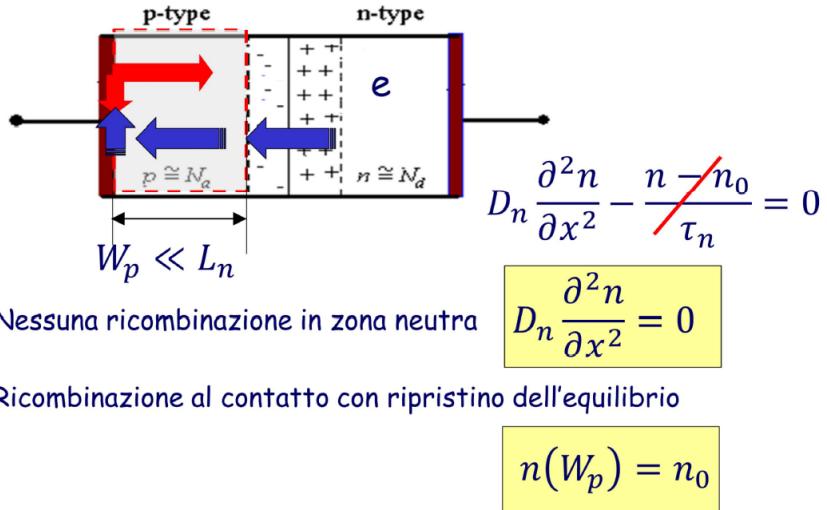
$$\Phi_n = \frac{N'}{\tau}$$

Dove  $\tau$  è un tempo che esprime la vita media dei portatori minoritari in zona p. È detto *tempo medio di permanenza* ed è equivalente al tempo di vita medio del minoritario. È cioè il tempo di ricombinazione!

$$\boxed{\tau_n = \frac{N'}{\Phi_n} = \frac{L_n^2}{D_n}}$$

### 6.4 Profili di minoritari in zone corte - polarizzazione diretta

Si considera ora una giunzione pn nella quale il lato neutro p è di lunghezza  $W_p \ll L_n$ .



In queste condizioni si possono ignorare i fenomeni di ricombinazione degli elettroni minoritari. La ricombinazione avviene esclusivamente al contatto ohmico poiché si tratta di una zona ricca di impurità. A distanza  $W_p$  dalla giunzione la concentrazione di minoritari torna ad essere  $n_0 = \frac{n_i^2}{N_A}$ .

Dall'equazione di continuità allora:

$$\begin{cases} D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0 \\ n_{(0)} = n_0 e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} \\ n_{(W_p)} = n_0 = \frac{n_i^2}{N_A} \end{cases}$$

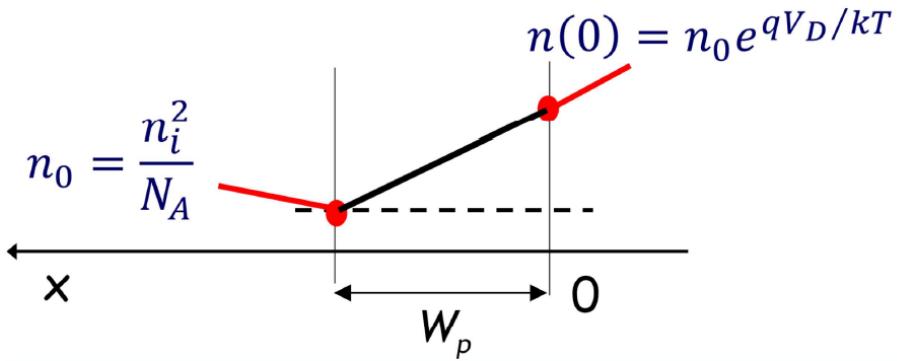
L'integrale generale dell'equazione differenziale risulta:

$$n_{(x)} = Ax + B$$

$$\begin{cases} B = n_0 e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} \\ AW_p + B = n_0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = n_0 e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} \\ A = \frac{n_0}{W_p} - \frac{n_0}{W_p} e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} \end{cases}$$

$$n_{(x)} = \left( \frac{n_0}{W_p} - \frac{n_0}{W_p} e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} \right) x + n_0 e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)}$$

Ovvero il profilo è una retta, ed essendo il termine esponenziale tra parentesi molto maggiore el primo termine, il coefficiente angolare della retta è negativo, come ci si aspettava.



Si noti come la dipendenza esponenziale da  $V_D$  è mantenuta. Si può raccogliere e ottenere una relazione della stessa forma del profilo per zona lunga:

#### Profilo minoritari zona corta

$$n_{(x)} = \frac{n_0}{W_p} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) (W_p - x) + n_0.$$

Si riporta il profilo in zona lunga per confronto:

$$n_{(x)} = n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}} + n_0.$$

È allora possibile calcolare la corrente di diffusione:

$$J_n = qD_n \frac{dn}{dx} = -qD_n \frac{n_0}{W_p} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right)$$

e per confronto si riporta la corrente di diffusione in zona lunga:

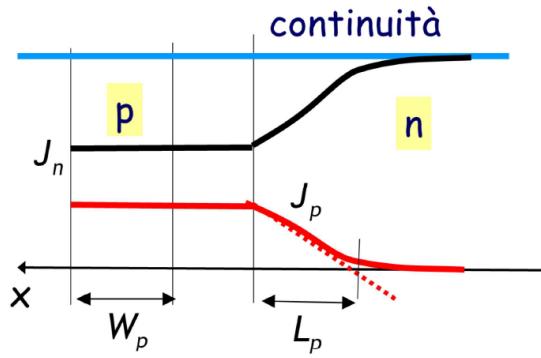
$$J_n = -qD_n \frac{n_0}{L_n} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

La differenza sostanziale è nel termine pre esponenziale che contiene  $W_p \ll L_n$  a denominatore. La corrente per la zona corta a pari polarizzazione sarà perciò maggiore. Si noti inoltre come la corrente, a differenza del caso con zona lunga, è costante e non dipende dalla coordinata x.

## 6.5 Corrente totale con polarizzazione diretta e zona corta

La corrente totale, nuovamente costante in tutto il dispositivo per le condizioni di stazionarietà, sarà allora la somma del contributo di corrente dato dagli elettroni minoritari in zona p (costante) e il contributo delle lacune minoritarie in zona n.

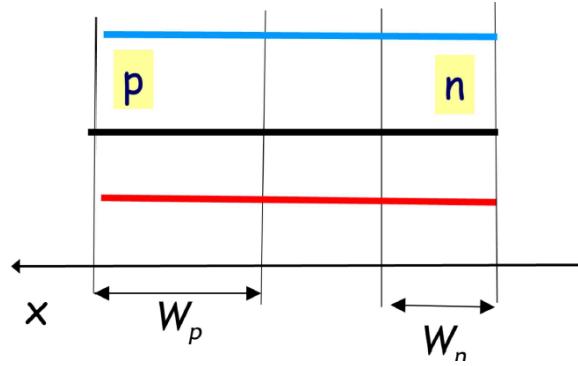
- *Zona p corta zona n lunga:*



La corrente totale è pari a:

$$J_{tot} = J_{n(0)} + J_{p(0)} = -q(D_n \frac{n_i^2}{N_A W_p} + D_p \frac{n_i^2}{N_D L_p}) \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right)$$

- Zona p corta zona n corta:



La corrente è costante in entrambe le zone e quella totale è pari a:

$$J_{tot} = J_{n(0)} + J_{p(0)} = -q(D_n \frac{n_i^2}{N_A W_p} + D_p \frac{n_i^2}{N_D W_n}) \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right)$$

## 6.6 Tempo di transito zona corta - polarizzazione diretta

Analogamente a quanto fatto prima si considera il flusso di minoritari entrante nella zona corta:

$$\Phi_n = D_n \frac{n_0}{W_p} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right)$$

Inoltre avendo trovato il profilo  $n_{(x)}$  è possibile calcolare la *densità per unità di area dei minoritari in eccesso*  $N'$ , sapendo che  $n' = n - n_0$ :

$$N' = \int_0^{W_p} (n_{(x)} - n_0) dx = \int_0^{W_p} \left( n_0 \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right) (W_p - x) + n_0 - n_0 \right) dx$$

$$N' = \frac{n_0 W_p}{2} \left( e^{\left(\frac{qV_d}{kT}\right)} - 1 \right).$$

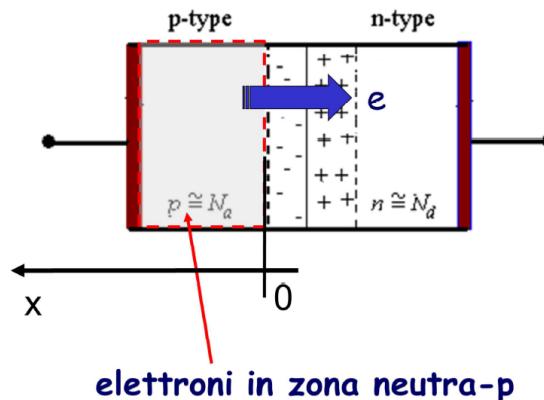
Come prima si può definire il rapporto tra la densità per unità di area dei minoritari in eccesso e il flusso entrante. Questo rapporto da origine ad un tempo che non è più però il tempo di ricombinazione, poichè si sono ignorati tali fenomeni, è piuttosto il *tempo medio di transito* dei minoritari attraverso la zona corta.

$$\tau_{tr} = \frac{N'}{\Phi_n} = \frac{W_p^2}{2D_n}$$

Tale tempo dipende *quadraticamente* dalla distanza  $W_p$ ! Questo perchè stiamo considerano una corrente di diffusione e i portatori non possiedono una velocità ordinata lungo un asse, bensì si muovono di *moto Browniano casuale*. Se la distanza raddoppia il tempo necessario ad un portatore per attraversare la zona quadruplica.

## 6.7 Polarizzazione inversa

Si fa la stessa identica trattazione per la giunzione pn polarizzata inversamente.



In questo caso ci si aspetta una concentrazione di elettroni minoritari in zona p con andamento opposto. Massima concentrazione di elettroni a distanza  $> L_n$  dalla giunzione, poichè la zona di carica è maggiore cioè meno elettroni possono saltare in zona p, e il campo elettrico di intensità maggiore "spinge" gli elettroni minoritari in zona p alla zona n.

Partendo dalla statistica di Boltzmann:

$$n_{(0)} = N_D e^{\left(-\frac{q(\Phi_i + V_r)}{kT}\right)}$$

dove  $V_r$  è la tensione inversa applicata alla giunzione.

$$n_{(0)} = N_D e^{\left(\frac{-q\Phi_i}{kT}\right)} e^{\left(-\frac{qV_r}{kT}\right)}$$

$$\frac{n_{(0)}}{N_D} = \frac{n_i^2}{N_A N_D} e^{\left(-\frac{qV_r}{kT}\right)}$$

$$n_{(0)} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{-\left(\frac{qV_r}{kT}\right)}$$

Cioè la concentrazione di elettroni è molto minore in corrispondenza della giunzione rispetto alla concentrazione a distanza adeguata in piena zona neutra p. La concentrazione di elettroni in zona p lontano dalla giunzione è pari a:

$$n_{(+\infty)} \approx \frac{n_i^2}{N_A} = n_0.$$

Dall'equazione di continuità, e considerando  $n' = n - n_0$ :

$$\begin{cases} D_n \frac{d^2 n'}{dx^2} - \frac{n'}{\tau_n} = 0 \\ n'_{(0)} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{-\left(\frac{qV_r}{kT}\right)} - n_0 = n_0(e^{-\left(\frac{qV_r}{kT}\right)} - 1) \\ n'_{(+\infty)} = \left(\frac{n_i^2}{N_A} - n_0\right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

l'integrale generale risulta:

$$\begin{cases} n'_{(x)} = A e^{\frac{x}{L_n}} + B e^{-\frac{x}{L_n}} \\ n'_{(0)} = n_0(e^{-\left(\frac{qV_r}{kT}\right)} - 1) \\ n'_{(+\infty)} = 0 \end{cases}$$

e risolvendo il problema di Cauchy si ottiene l'espressione dell'andamento dei portatori minoritari in eccesso in zona p:

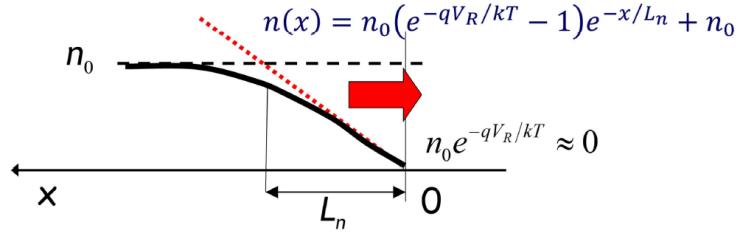
$$n'_{(x)} = n_0 \left( e^{-\left(\frac{qV_r}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

e allora la concentrazione di portatori  $n$  è:

Concentrazione elettroni minoritari in zona p - polarizzazione inversa

$$n_{(x)} = n_0 \left( e^{-\left(\frac{qV_r}{kT}\right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}} + n_0 \quad (15)$$

Il profilo, come atteso, decresce esponenzialmente man mano che ci si avvicina alla zona di carica. La concentrazione in corrispondenza all'ascissa  $x=0$  è approssimabile a 0. A distanze  $> L_n$  dalla zona di carica prevalgono i fenomeni di generazione, gli elettroni hanno però buone probabilità di giungere alla giunzione ed essere portati in zona n dal campo elettrico.



È allora possibile calcolare la corrente di diffusione:

$$J_n = qD_n \frac{dn}{dx} = -qD_n \frac{n_0}{L_n} \left( e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} - 1 \right) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

Il valore massimo di corrente è in corrispondenza dell'inizio della zona p, poiché il gradiente della concentrazione è massimo, e vale:

$$J_{(0)} = -qD_n \frac{n_0}{L_n} \left( e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} - 1 \right)$$

$$n_0 e^{-\frac{qV_r}{kT}} \approx 0$$

Densità di corrente in polarizzazione inversa

$$J_{(0)} = qD_n \frac{n_0}{L_n} \quad (16)$$

Concorde all'asse x poichè la corrente è concorde al gradiente della concentrazione.

## 6.8 Profilo di minoritari in zona corta - polarizzazione inversa

La trattazione per la zona corta è analoga alla polarizzazione diretta. Si ottiene: Dall'equazione di continuità:

$$\begin{cases} D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0 \\ n_{(0)} = n_0 e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} \\ n_{(W_p)} = n_0 = \frac{n_i^2}{N_A} \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale risulta:

$$n_{(x)} = Ax + B$$

$$\begin{cases} B = n_0 e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} \\ AW_p + B = n_0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = n_0 e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} \\ A = \frac{n_0}{W_p} - \frac{n_0}{W_p} e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} \end{cases}$$

$$n_{(x)} = \left( \frac{n_0}{W_p} - \frac{n_0}{W_p} e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} \right) x + n_0 e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)}$$

Ovvero il profilo è una retta, ed essendo il termine esponenziale tra parentesi circa 0, il coefficiente angolare della retta è positivo, come ci si aspettava.  
 È allora possibile calcolare la corrente di diffusione, ricordando che la corrente in questo caso è concorde al gradiente cioè segno +:

$$J_n = qD_n \frac{dn}{dx} = qD_n \frac{n_0}{W_p} \left( 1 - e^{\left( -\frac{qV_r}{kT} \right)} \right),$$

corrente costante poichè non dipende dalla coordinata x e poichè il termine esponenziale è «1, è semplificabile in:

$$J_n = qD_n \frac{n_0}{W_p}$$

In conclusione, la corrente totale che fluisce in un diodo polarizzato in inversa:

- *Zone lunghe:*

La densità di corrente totale è pari a:

$$J_{tot} = J_{n(0)} + J_{p(0)} = q(D_n \frac{n_i^2}{N_A L_n} + D_p \frac{n_i^2}{N_D L_p})$$

- *Zona p corta zona n lunga:*

La densità di corrente totale è pari a:

$$J_{tot} = J_{n(0)} + J_{p(0)} = q(D_n \frac{n_i^2}{N_A W_p} + D_p \frac{n_i^2}{N_D L_p})$$

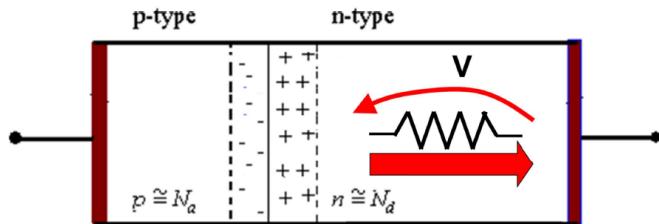
- *Zona p corta zona n corta:*

La densità di corrente è costante in entrambe le zone e quella totale è pari a:

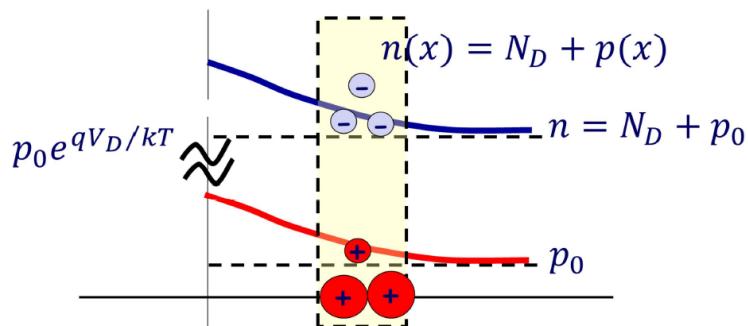
$$J_{tot} = J_{n(0)} + J_{p(0)} = q(D_n \frac{n_i^2}{N_A W_p} + D_p \frac{n_i^2}{N_D W_n})$$

## 6.9 Corrente in zona neutra

La zona neutra è resistiva, ci si aspetta perciò che la corrente fluente in essa sia una corrente di deriva come in un resistore.



Come si è visto, il profilo di minoritari ha un andamento che decresce esponenzialmente e affinchè ci sia neutralità di carica in ogni sezione infinitesima del dispositivo, i *maggioritari devono avere un profilo con gradiente identico a quello dei minoritari!*



Generalmente la concentrazione massima di minoritari è diversi ordini di grandezza più piccola della concentrazione massima di maggioritari. Si dice che si è in *regime di bassa iniezione* (pochi portatori iniettati in confronto ai maggioritari, cioè in zona n vale  $p \ll N_D$ ).

Se si scrive l'espressione totale della densità di corrente tenendo presente di tutti i contributi di deriva/diffusione di lacune ed elettroni:

$$J_{tot} = qn\mu_n E + qD_n \frac{dn}{dx} + qp\mu_p E - qD_p \frac{dp}{dx}$$

i termini di diffusione si compensano, e nel caso ideale in cui i coefficienti di diffusione sono uguali si eliminano a vicenda.

Essendo in regime di bassa iniezione  $p \ll N_D$  e il campo  $E$  è chiaramente uguale in entrambi i termini di deriva, e ciò significa che il termine relativo alle lacune è *trascurabile*! Si è perciò trovato che la corrente totale nel dispositivo può essere efficacemente rappresentata dal solo termine di deriva degli elettroni! Il campo elettrico  $E$  può quindi essere stimato come:

$$E = \frac{J_{tot}}{qn\mu_n}$$

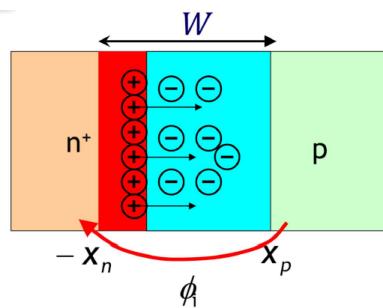
## 7 Giunzione pn - zona svuotata e profilo di campo

In questo capitolo si vuole individuare una relazione tra:

- la lunghezza  $W$  della zona di carica spaziale, la tensione di contatto  $\Phi_i$  e le concentrazioni di droganti,
- il campo massimo  $E_{max}$ , la tensione di contatto  $\Phi_i$  e le concentrazioni di droganti.

### 7.1 Campo elettrico E

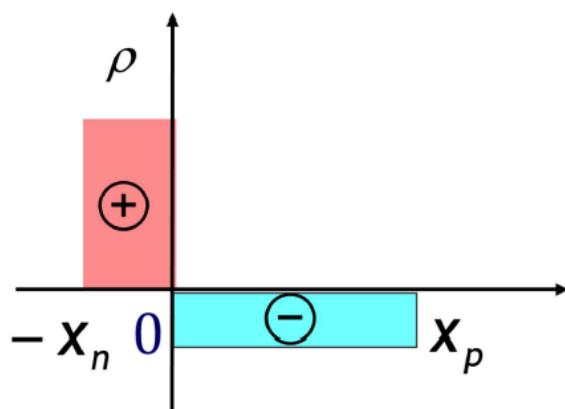
Si considera la seguente giunzione, in due dimensioni nell'immagine ma consideriamo anche la sezione A nei calcoli a seguire:



consideriamo la giunzione all'equilibrio non polarizzata. Nella zona di carica si forma un dipolo elettrico dovuto ai droganti ionizzati e si vuole individuare l'espressione del campo elettrico totale.

Tenendo presente che le concentrazioni volumetriche di droganti sono  $N_A$  e  $N_D$  e posizionando l'origine dell'asse x nella giunzione, si individuano le espressioni delle densità di carica elettrica nella zona di carica spaziale:

$$\rho_{(x)} = \begin{cases} qN_D & \left[ \frac{C}{cm^{-3}} \right] \quad -x_n \leq x < 0 \\ -qN_A & \left[ \frac{C}{cm^{-3}} \right] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}$$



le densità volumetriche sono perciò costanti nelle due zone ed è presente una discontinuità alla giunzione. Data la sezione A, per la neutralità di carica deve valere:

$$Q_{totn} = Q_{top} \quad qN_D x_n A = qN_A x_p A \quad \boxed{N_D x_n = N_A x_p}$$

Si applica ora il *Teorema del Gauss per il campo elettrico*. Data la sezione infinitesima della zona di carica  $dx$  si considera il volume infinitesimo  $A dx$  dove A è la sezione del dispositivo. Per il Teorema di Gauss il flusso totale uscente dal volume è pari alla carica totale contenuta nel volume stesso divisa per la costante dielettrica del mezzo. Si ricava:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{Q_{tot}}{\epsilon}$$

$$\iiint_V \nabla \cdot E dV = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho(x) dV$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho(x)}{\epsilon}$$

e poichè il campo elettrico considerato è parallelo all'asse x e nullo nelle altre direzioni, si ricava:

$$\boxed{\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon}.}$$

Poichè si conosce l'espressione di  $\rho(x)$ :

$$\frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{qN_D}{\epsilon} & \left[ \frac{V}{cm^{-2}} \right] \quad -x_n \leq x < 0 \\ \frac{-qN_A}{\epsilon} & \left[ \frac{V}{cm^{-2}} \right] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}$$

integrando si ricava facilmente l'espressione del campo elettrico:

$$E = \begin{cases} \frac{qN_D}{\epsilon} x + c_1 & \left[ \frac{V}{cm} \right] \quad -x_n \leq x < 0 \\ \frac{-qN_A}{\epsilon} x + c_2 & \left[ \frac{V}{cm} \right] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}$$

Per individuare i valori delle due costanti si fissano come *condizioni al contorno*:

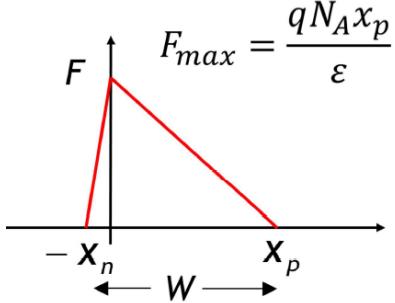
$$E_{(-x_n)} = 0 \quad E_{(x_p)} = 0$$

allora:

$$c_1 = \frac{qN_D}{\epsilon} x_n \quad c_2 = \frac{qN_A}{\epsilon} x_p$$

$$E = \begin{cases} \frac{qN_D}{\epsilon} (x + x_n) & \left[ \frac{V}{cm} \right] \quad -x_n \leq x < 0 \\ \frac{qN_A}{\epsilon} (x_p - x) & \left[ \frac{V}{cm} \right] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}$$

Il profilo del campo elettrico sarà perciò:



e imponendo la continuità in  $x=0$  si ricava il valore massimo del campo:

Valore massimo del campo E

$$E_{max} = \frac{qN_A}{\epsilon} x_p = \frac{qN_D}{\epsilon} x_n$$

da cui si ricava anche:

$$qN_D x_n = qN_A x_p$$

## 7.2 Potenziale $\Phi_i$ di contatto

Avendo calcolato l'espressione del campo elettrico è immediato calcolare quella del potenziale di contatto  $\Phi_i$ . Poichè:

$$E = -\nabla \Phi_i$$

allora:

$$\frac{d\Phi_i}{dx} = \begin{cases} -\frac{qN_D}{\epsilon} (x + x_n) & \left[ \frac{V}{cm} \right] \quad -x_n \leq x < 0 \\ \frac{qN_A}{\epsilon} (x - x_p) & \left[ \frac{V}{cm} \right] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}$$

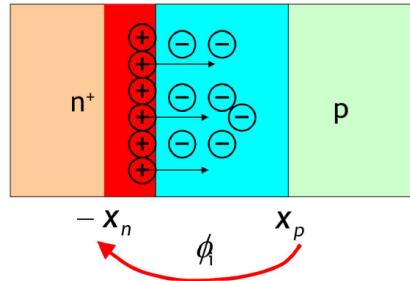
Si integrano le due espressioni:

$$\Phi_i = \begin{cases} -\frac{qN_D}{2\epsilon} (x + x_n)^2 + b_1 & [V] \quad -x_n \leq x < 0 \\ \frac{qN_A}{2\epsilon} (x - x_p)^2 + b_2 & [V] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}$$

dove si sono integrate nelle costanti  $b_1$  e  $b_2$  anche le costanti a seguito dell'integrazione. Per individuare il loro valore si considerano le condizioni al

contorno:

$$\Phi_{(-x_n)} = \Phi_i \quad \Phi_{(x_p)} = 0$$

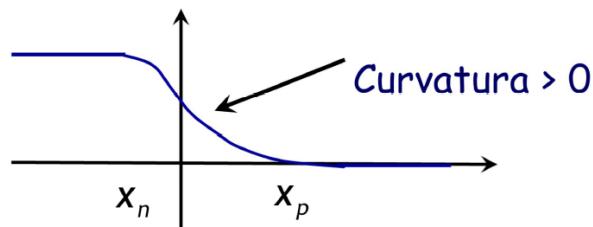


perciò:

$$b_1 = \Phi_i \quad b_2 = 0$$

$$\boxed{\Phi_i = \begin{cases} -\frac{qN_D}{2\epsilon} (x + x_n)^2 + \Phi_i & [V] \quad -x_n \leq x < 0 \\ \frac{qN_A}{2\epsilon} (x - x_p)^2 & [V] \quad 0 < x \leq x_p \end{cases}}$$

Risulta cioè che il potenziale ha andamento parabolico in entrambe le zone, per  $-x_n \leq x < 0$  è una parabola con concavità verso il basso e per  $0 < x \leq x_p$  con concavità verso l'alto. Le due parabole si raccordano in  $x=0$ .



Per la continuità in  $x = 0$ :

$$-\frac{qN_D}{2\epsilon} (x_n)^2 + \Phi_i = \frac{qN_A}{2\epsilon} (-x_p)^2$$

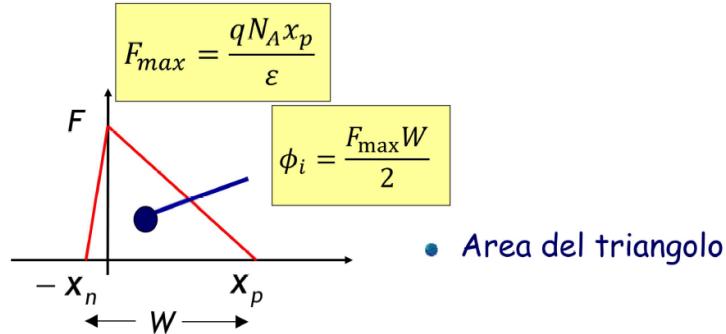
$$\Phi_i = \frac{qN_D}{2\epsilon} (x_n)^2 + \frac{qN_A}{2\epsilon} (-x_p)^2$$

$$\boxed{\Phi_i = \frac{qN_D x_n^2 + qN_A x_p^2}{2\epsilon}}$$

e poichè  $N_D x_n = N_A x_p$

$$\Phi_i = \frac{q N_A x_p (x_p + x_n)}{2\epsilon}$$

quest'ultima relazione la si può anche ricavare conoscendo solamente il valore massimo del campo E e l'estensione W della zona di carica. Il profilo del campo è infatti rappresentato da un triangolo e poichè l'integrale cambiato di segno del campo E è pari alla tensione  $\Phi_i$  ai capi della giunzione,  $\Phi_i$  sarà l'area del triangolo.



Poichè:

$$E_{max} = \frac{q N_D x_n}{\epsilon} = \frac{q N_A x_p}{\epsilon}$$

e la base del triangolo è W, allora:

Potenziale di contatto

$$\Phi_i = \frac{E_{max} W}{2} = \frac{q N_A x_p W}{2\epsilon}$$

Per poter esprimere il potenziale in funzione di W è però necessario esprimere  $x_p$  (o  $x_n$ ) in funzione di W. Dalla neutralità di carica:

$$q N_A x_p = q N_D x_n \quad x_n = x_p \frac{N_A}{N_D}$$

$$W = x_p + x_n = x_p + x_p \frac{N_A}{N_D} = x_p \left(1 + \frac{N_A}{N_D}\right) \quad x_p = W \frac{N_D}{N_A + N_D}$$

allora:

$$\Phi_i = \frac{E_{max} W}{2} = \frac{q N_A N_D W^2}{2\epsilon(N_A + N_D)}$$

Da cui si ricava un' *espressione di W in funzione della tensione  $\Phi_i$  e della concentrazione di droganti*:

Estensione zona di carica

$$W = \sqrt{\frac{2\epsilon\Phi_i}{q} \left( \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} \right)} = \sqrt{\frac{2\epsilon\Phi_i}{q} \left( \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)}$$

l'estensione W è equipartita tra le due zone in modo che sia garantita la neutralità, la zona più drogata è la più corta. Si può anche ricavare l'espressione del campo E massimo in funzione del potenziale di contatto. Dalle espressioni trovate prima:

$$E_{max} = \frac{qN_A x_p}{\epsilon} \quad x_p = W \frac{N_D}{N_A + N_D}$$

$$E_{max} = \frac{qN_A N_D W}{\epsilon(N_A + N_D)} = \sqrt{\frac{2q\Phi_i}{\epsilon} \left( \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right)}$$

campo E max in funzione del potenziale

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2q\Phi_i}{\epsilon} \left( \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right)}$$

### 7.3 Approssimazione unilatera

Come già visto l'estensione della zona di carica è sbilanciata verso la zona meno drogata. Con una differenza di droggaggio di un ordine di grandezza, i 10/11 di W sono estesi nella zona meno drogata.

Dalla relazione dell'estensione di carica:

- Zona p più drogata di n ( $N_A > N_D$ ):

$$W \approx \sqrt{\frac{2\epsilon\Phi_i}{qN_D}}$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{q\Phi_i N_D}{\epsilon}}$$

- Zona n più drogata di p ( $N_D > N_A$ ):

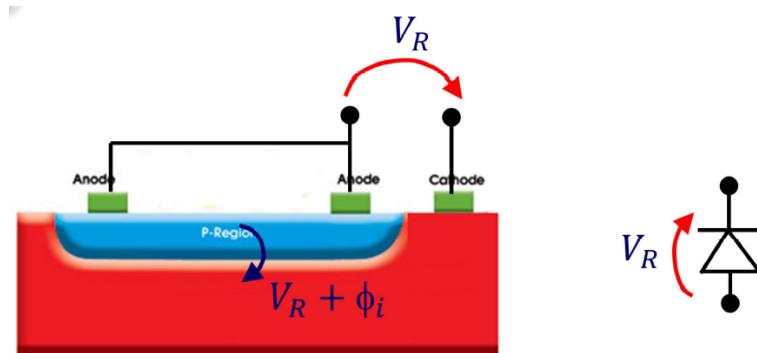
$$W \approx \sqrt{\frac{2\epsilon\Phi_i}{qN_A}}$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{q\Phi_i N_A}{\epsilon}}$$

Dalle relazioni trovate è evidente che  $E_{max}$  aumenta proporzionalmente alla radice quadrata del droggaggio della zona meno drogata, e  $W$  è inversamente proporzionale alla radice quadrata del droggaggio della zona meno drogata!

## 7.4 Polarizzazione inversa

Le relazioni trovate prima valgono anche nel caso in cui si polarizzi inversamente la giunzione.

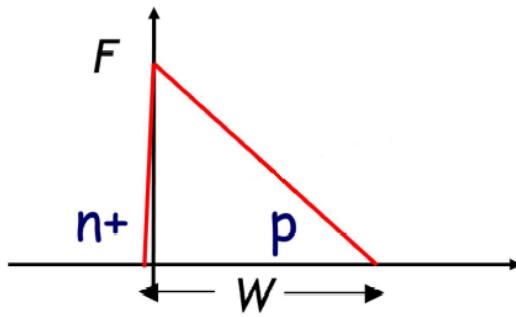


$$E_{max} = \sqrt{\frac{q(\Phi_i + V_r)}{\epsilon}} \left( \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right) \quad W = \sqrt{\frac{2\epsilon(\Phi_i + V_r)}{q}} \left( \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)$$

Il valore massimo del campo  $E$  e l'estensione della zona di carica aumentano.

## 7.5 Breakdown a valanga

Se il campo  $E$  raggiunge un valore limite  $E_{bd}$ , i portatori che attraversano la zona di carica possono acquisire abbastanza energia da rompere legami Si-Si e innescare un fenomeno di breakdown a valanga. Valori tipici di  $E_{bd} \approx 3 \cdot 10^5 \frac{V}{cm}$ . Per calcolare l'espressione del campo di breakdown e del relativo potenziale  $V_r$  necessario a raggiungere tali campi, si considera una giunzione in approssimazione unilatera, con zona n molto più drogata della zona p:



Si può considerare  $x_p \approx W$  poichè l'estensione della zona di carica spaziale è molto maggiore nel lato meno drogato, ovvero il p. Il valore massimo del campo  $E$  è:

$$E_{max} = E_{bd} = \frac{qN_A W}{\epsilon} \quad \boxed{W = \frac{E_{bd}\epsilon}{qN_A}}$$

il potenziale ai capi della zona di carica è pari all'area del triangolo:

$$\Phi_i + V_r = \frac{E_{bd}W}{2} = \frac{\epsilon E_{bd}^2}{2qN_A}$$

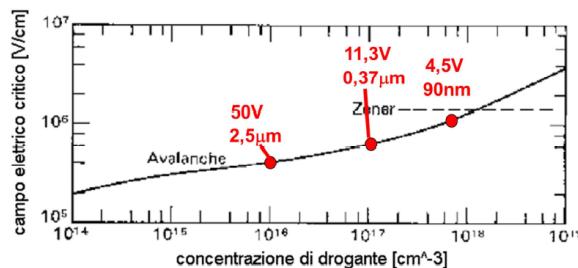
e poichè  $V_r = V_{bd} \gg \Phi_i$ :

### Tensione di breakdown

$$V_{bd} = \frac{\epsilon E_{bd}^2}{2qN_A}$$

Si noti come l'espressione del potenziale massimo di contatto è inversamente proporzionale alla concentrazione del drogante nella zona meno drogata, il campo elettrico critico  $E_{bd}$  è direttamente proporzionale alla concentrazione del drogante nella zona meno drogata e l'estensione  $W$  della zona di carica spaziale è inversamente proporzionale alla concentrazione del drogante nella zona meno drogata.

Campo elettrico  $E_{bd}$  in funzione del drogante della zona meno drogata:

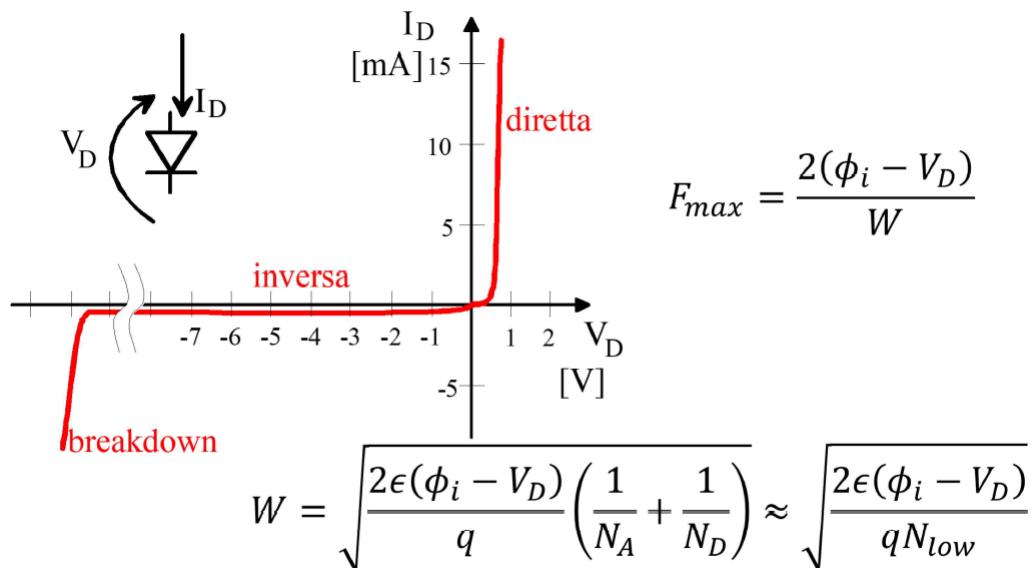


All'aumentare del drogante, la zona di carica spaziale si restringe e c'è meno probabilità che i portatori inneschino una ionizzazione e cioè un fenomeno a

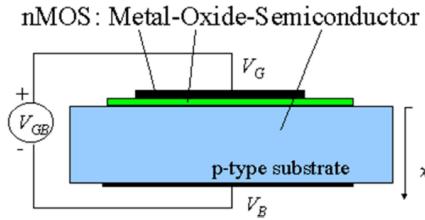
valanga. È perciò necessario aumentare il campo elettrico affinchè i portatori acquisiscano più energia e abbiano più probabilità di ionizzare degli atomi di Si. Per campi elettrici maggiori di  $1 \frac{MV}{cm}$  il breakdown non è più di tipo a valanga ma è zener: i portatori vengono strappati dal reticolo a causa del campo elettrico molto elevato.

## 7.6 Polarizzazione Diretta

Le relazioni sono identiche ma la tensione diretta va a sottrarsi al potenziale di contatto. All'aumentare della tensione diretta la zona di carica si restringe e il valore del campo massimo  $E$  diminuisce. **N.B.** Valore di  $V_D < \Phi_i$

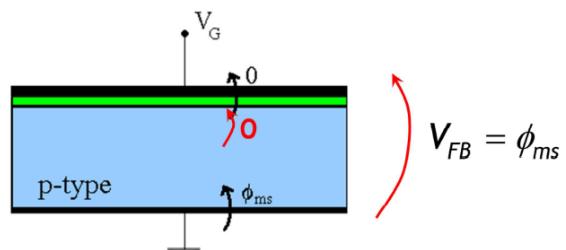


## 8 Condensatore MOS



Il condensatore MOS (Metal Oxide Semiconductor) è realizzato interponendo uno strato di ossido di Silicio  $SiO_2$  tra un semiconduttore uniformemente drogato (p o n) e un elettrodo di gate metallico. Sul substrato è a sua volta collegato un elettrodo metallico, detto elettrodo di substrato. A seconda della tensione applicata tra i morsetti di gate e di substrato, il condensatore MOS può funzionare in 3 modalità principali:

- *Regime di banda piatta*  $V_G = V_{fb}$ :

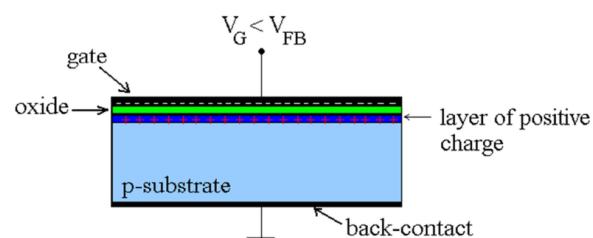


Il regime di banda piatta è raggiunto quando la tensione applicata tra gate e substrato annulla la caduta di potenziale ai capi del substrato. Quando si considera il condensatore MOS a morsetti aperti, è presente una caduta di potenziale  $\Phi_m$  tra elettrodo di substrato e substrato a causa dell'*effetto Volta*. Tale potenziale non è presente tra substrato e ossido poichè l'ossido è isolante.

Si sta inoltre considerando che *non ci sia carica intrappolata nell'ossido* e cioè potenziale ai suoi capi nullo, ipotesi spesso non verificata.

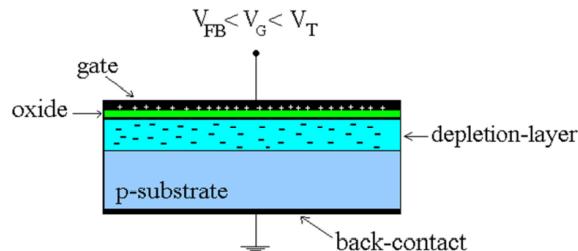
Se la tensione applicata al gate equivale alla tensione  $\Phi_m$ , la caduta di potenziale ai capi del substrato è identicamente nulla e ci si trova in regime di banda piatta.

- *Regime di accumulo*  $V_G < V_{fb}$ :



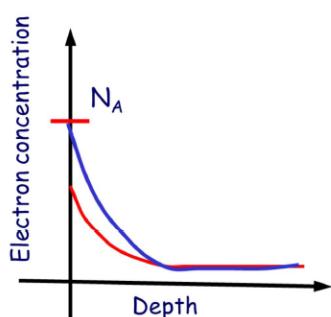
Se la tensione applicata tra gate e substrato è minore della tensione di banda piatta, si accumula carica negativa al gate. Tale accumulo genera un campo elettrico che tende a far accumulare lacune all'interfaccia ossido-silicio.

- Regime di svuotamento  $V_{fb} < V_G < V_T$ :



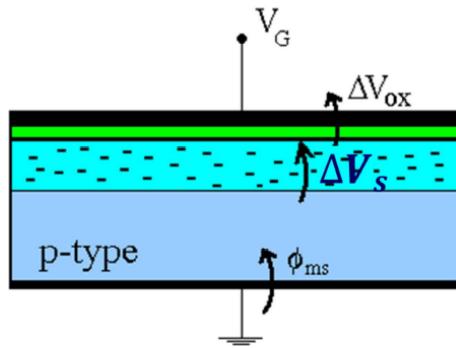
Se la tensione applicata è maggiore della tensione di banda piatta ma minore di una tensione di soglia che quantificheremo dopo, si accumula carica positiva sul gate. Tale carica genera un campo elettrico che tende ad allontanare le lacune dall'interfaccia ossido-silicio. Si è perciò creata una zona svuotata dalle lacune in cui sono presenti atomi di drogante ionizzati.

## 8.1 Condizione di svuotamento e di forte inversione



In condizione di svuotamento, si è detto che la zona è privata delle lacune a causa del capo elettrico. La zona non è realmente svuotata, ma è riempita dagli elettroni minoritari che vengono spinti dal campo elettrico verso l'interfaccia. In figura sono rappresentati due profili di concentrazione dei minoritari nella zona svuotata, in rosso il profilo in condizioni di svuotamento e in blu il profilo massimo raggiungibile. Entrambi i profili a destra raggiungono la concentrazione dei minoritari nel substrato, a sinistra invece il profilo blu raggiunge il valore massimo, ovvero concentrazione di minoritari pari alla concentrazione  $N_A$  di drogante. In ogni caso, c'è un massimo di concentrazione di elettroni minoritari all'interfaccia.

Il profilo di concentrazione dei minoritari segue la *statistica di Boltzmann* e il suo valore massimo dipende esponenzialmente dalla tensione ai capi della zona svuotata  $\Delta V_S$  detto *potenziale superficiale*:

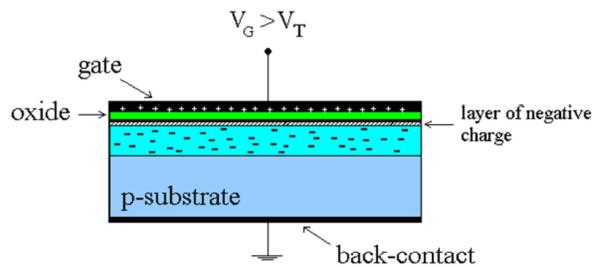


Detta  $n_{(0)}$  la concentrazione di minoritari all'interfaccia ossido-silicio:

$$n_{(0)} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\left(\frac{q\Delta V_s}{kT}\right)}$$

Cioè @T=300K la concentrazione all'interfaccia decuplica per ogni 60mV di aumento del potenziale superficiale. A causa di questa forte dipendenza dal potenziale superficiale, la concentrazione di elettroni minoritari all'interfaccia può aumentare e diventare pari o superiore alla concentrazione di drogante! Si parla di:

- *Regime di forte inversione*  $V_G \geq V_T$ :



Se la tensione di contatto raggiunge un valore sufficiente a rendere la concentrazione di minoritari all'interfaccia pari o maggiore della concentrazione di drogante, la conducibilità dello strato di minoritari non è più trascurabile:

$$\sigma = qn\mu_n$$

e perciò si ha uno strato con conducibilità di polarità opposta a quella del substrato.

## 8.2 Condizione di soglia - elettrostatica a soglia

Si definisce allora il potenziale superficiale di soglia  $\Psi_S$ , ovvero il potenziale superficiale necessario a rendere la concentrazione di minoritari pari alla concentrazione del drogante, e cioè il potenziale di soglia che separa il regime di

accumulo dal regime di forte inversione.

Dalla statistica di Boltzmann:

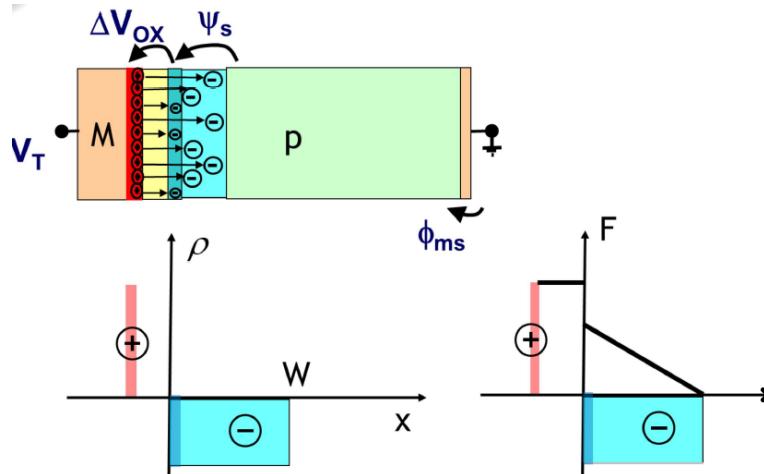
$$n_{(0)} = N_A = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\left(\frac{q\Psi_S}{kT}\right)}$$

$$\Psi_S = 2 \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_A}{n_i} \right)$$

### Potenziale superficiale di soglia

$$\Psi_S = 2 \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_A}{n_i} \right)$$

Si considerano ora i campi elettrici e le densità di cariche presenti nel sistema MOS a soglia, ovvero con  $\Delta V_S = \Psi_S$ .



Si trascura lo strato di carica. Il valore massimo del campo elettrico si trova analogamente a come fatto per la giunzione pn:

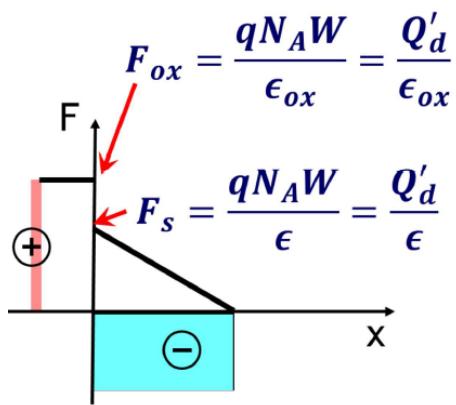
$$E_{s,max} = \frac{qN_A W}{\epsilon}$$

Il campo massimo nello strato di ossido sarà maggiore poiché  $\epsilon_{ox} < \epsilon$ , c'è perciò una discontinuità della costante dielettrica.

$$\epsilon_{ox} = \frac{\epsilon}{3} \quad E_{ox,max} = \frac{qN_A W}{\frac{\epsilon}{3}} = 3 \frac{qN_A W}{\epsilon}$$

cioè detta  $Q'_d$  la densità di carica per unità di superficie nella zona svuotata:

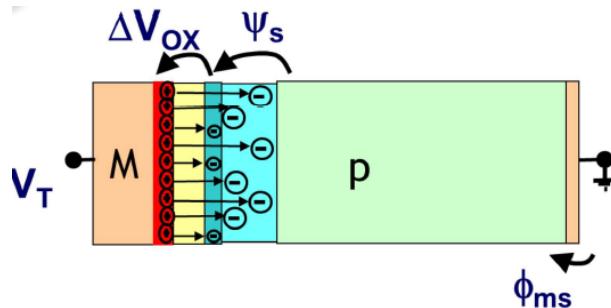
$$E_{s,max} = \frac{Q'_d}{\epsilon} \quad E_{ox,max} = \frac{Q'_d}{\epsilon_{ox}}$$



Per trovare l'espressione di  $W$ :

$$E_{s,max} = \frac{Q'_d}{\epsilon} = \frac{qN_A W}{\epsilon} \quad \Psi_S = \frac{E_{s,max} W}{2} = \frac{qN_A W^2}{2\epsilon} \quad W = \sqrt{\frac{2\epsilon\Psi_S}{qN_A}}$$

Si può ora trovare un'espressione per la tensione di soglia  $V_T$ :



La tensione ai capi dell'ossido è pari alla densità di carica per unità di area sulle sue armature diviso la capacità per unità di area dell'ossido.

$$\Delta V_{ox} = \frac{Q'_d + Q'_n}{C'_{ox}}$$

Dove  $Q'_n$  è la carica per unità di area dello strato di carica, che si è ignorato in tutta la trattazione sopra.

La tensione totale di soglia sarà:

$$V_T = \Phi_m + \Psi_S + \Delta V_{ox} = \Phi_m + \Psi_S + \frac{Q'_d}{C'_{ox}}$$

dove

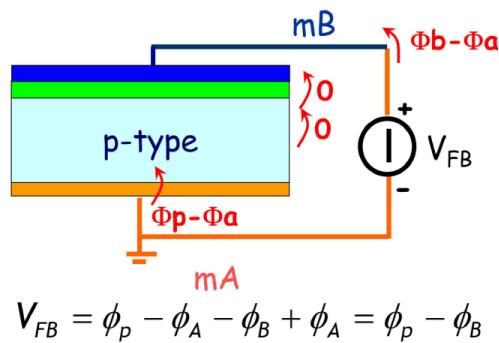
$$Q'_d = qN_A W = qN_A \sqrt{\frac{2\epsilon\Psi_S}{qN_A}} = \sqrt{2qN_A\epsilon\Psi_S}$$

## Tensione di soglia VT

$$V_T = \Phi_m + \Psi_S + \Delta V_{ox} = \Phi_m + \Psi_S + \frac{Q'_d}{C'_{ox}} = \Phi_m + \Psi_S + \frac{\sqrt{2qN_A\epsilon\Psi_S}}{C'_{ox}}$$

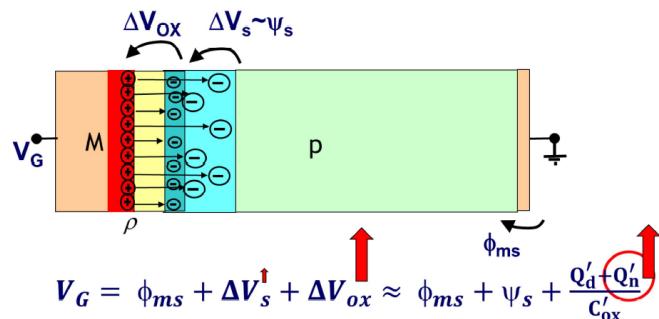
**N.B.**  $C'_{ox} = \epsilon_{ox} \frac{1}{t_{ox}} \left[ \frac{F}{cm^2} \right]$

La tensione  $\Phi_m$  dipende solamente dall'effetto volta tra *metallo del gate e substrato!* Anche se al substrato è collegato un elettrodo di metallo differente da quello del gate,  $\Phi_m$  dipende solo da gate e substrato.



### 8.3 Elettrostatica sopra soglia

Se la tensione di gate  $V_G$  supera la tensione di soglia si entra in regime di forte inversione. Come visto prima ciò significa che la concentrazione di portatori minoritari all'interfaccia supera la concentrazione di drogante.



Perciò nel termine  $\Delta V_{ox}$  che compare nella tensione di gate non si può più trascurare la carica dello strato di carica  $Q'_n$ :

$$V_G = \Phi_m + \Psi_S + \frac{Q'_d + Q'_n}{C'_{ox}}$$

Si introduce inoltre un' ulteriore approssimazione, cioè si considera  $\Psi_S$  costante al variare di  $V_G$  soprasoglia. Poichè come visto prima la concentrazione di minoritari all'interfaccia aumenta esponenzialmente all'aumentare del potenziale superficiale  $\Delta V_S$ , un aumento di  $V_G$  farà aumentare di poco (una quantità trascurabile)  $\Psi_S$ , ma a causa della dipendenza esponenziale la concentrazione di

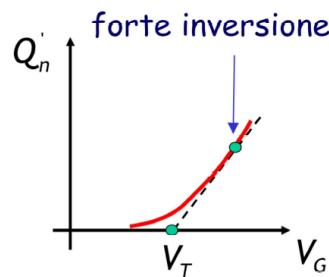
minoritari aumenterà notevolmente. Tale aumento farà aumentare la tensione ai capi dell'ossido in maniera sostanziale e perciò l'aumento di  $V_G$  sarà compensato quasi totalmente da un aumento di  $\Delta V_{ox}$ .

Allora:

$$V_G \approx V_T + \frac{Q'_n}{C'_{ox}} \quad [V_G - V_T = V_{OV}]$$

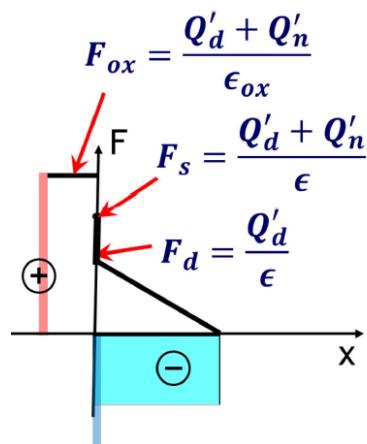
dove  $V_{OV}$  è detta *tensione di overdrive*, e perciò la carica per unità di superficie totale dello strato di carica è pari a:

$$Q'_n = C'_{ox} (V_G - V_T)$$



Ovvero in regime di forte inversione, la carica nello strato di carica dipende solo dalla tensione di overdrive.

Poichè lo strato di carica non è più trascurabile, bisogna tenerne conto nelle espressioni dei valori massimi dei campi elettrici:



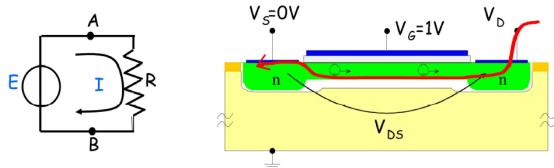
Allora:

Valori massimi campi elettrici in forte inversione

$$E_{d,max} = \frac{Q'_d}{\epsilon} \quad E_{s,max} = \frac{Q'_d + Q'_n}{\epsilon} \quad E_{ox,max} = \frac{Q'_d + Q'_n}{\epsilon_{ox}}$$

## 9 Transistore MOS

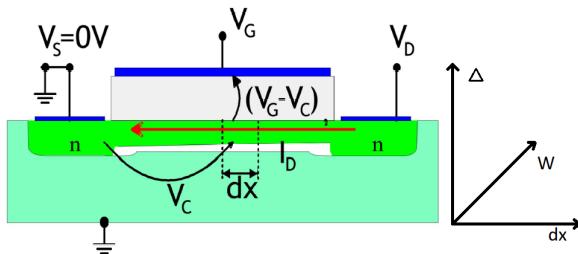
Il transistore MOS è composto da un condensatore MOS e due "serbatoi" di elettroni ai lati.



In condizioni di forte inversione lo strato di carica può essere visto come un resistore (non lineare), la cui resistenza diminuisce all'aumentare della tensione di overdrive  $V_G - V_T$ .

### 9.1 Relazioni in zona ohmica

Detta  $I_{DS}$  la corrente fluente dal drain al source e fissati a massa substrato e source, si può applicare la legge di Ohm al canale formato dallo strato di carica:



la corrente  $I_{DS}$  genera una caduta di potenziale ai capi del canale, indicata con  $V_C$  in figura. (si sono indicate a destra le dimensioni del canale)

Per la legge di Ohm, considerato il blocchetto infinitesimo di lunghezza  $dx$ :

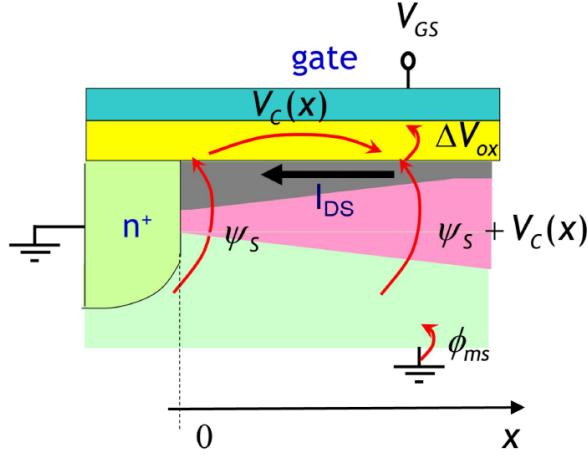
$$dV_C = \frac{1}{qn\mu_n} \frac{dx}{\Delta W} I_{DS}$$

ma si nota che  $qn\Delta$  è pari alla carica per unità di area  $Q'_n$  dello strato di carica.  
Allora:

$$dV_C = \frac{1}{Q'_n \mu_n} \frac{dx}{W} I_{DS} \quad (17)$$

È necessario individuare una relazione per il calcolo di  $Q'_n$ .

Poichè c'è una caduta di tensione  $V_C$  lungo il canale, la caduta di tensione ai capi della zona svuotata aumenta man mano che ci si avvicina al drain, e ciò implica che la zona si allarga e la carica  $Q'_d$  aumenta.



Seguendo la maglia che passa a sinistra si ricava:

$$V_{GS} = \Phi_m + \Psi_s + V_C + \Delta V_{ox} = \Phi_m + \Psi_s + V_C + \frac{Q'_{d(\Psi_s, V_C)} + Q'_n}{C'_{ox}}$$

La carica  $Q'_d$  è in funzione di  $\Psi_s$  e  $V_C$ . Si riscrive la relazione sommando e sottraendo  $Q'_{d(\Psi_s)}$ :

$$\begin{aligned} V_{GS} &= \Phi_m + \Psi_s + V_C + \frac{Q'_{d(\Psi_s)} - Q'_{d(\Psi_s)} + Q'_{d(\Psi_s, V_C)} + Q'_n}{C'_{ox}} \\ V_{GS} &= \Phi_m + \Psi_s + \frac{Q'_{d(\Psi_s)}}{C_{ox}} + V_C + \frac{Q'_n}{C'_{ox}} + \frac{Q'_{d(\Psi_s, V_C)} - Q'_{d(\Psi_s)}}{C'_{ox}} \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine rappresenta la variazione della tensione di soglia  $V_T$  all'aumentare della zona di carica (gli altri termini sono costanti quindi si elidono nella differenza tra  $V_{T(x+dx)}$  e  $V_{T(x)}$ ). Trascuriamo questo termine e consideriamo  $V_T$  costante in tutto il canale utilizzando l'*approssimazione a strato di carica* (con questa approssimazione si sovrasta la carica di canale). Allora:

$$V_{GS} = V_T + V_C + \frac{Q'_n}{C'_{ox}}$$

$$Q'_n = C'_{ox}(V_{GS} - V_T - V_C)$$

Perciò la carica per unità di area dello strato di carica è proporzionale alla tensione di overdrive.

Sostituendo l'espressione di  $Q'_n$  nell'equazione 17:

$$dV_C = \frac{1}{C'_{ox}(V_{GS} - V_T - V_C)\mu_n} \frac{dx}{W} I_{DS}$$

$$C'_{ox} W \mu_n (V_{GS} - V_T - V_C) dV_C = I_{DS} dx$$

e integrando:

$$C'_{ox} W \mu_n \int_0^{V_{DS}} (V_{GS} - V_T - V_C) dV_C = I_{DS} \int_0^L dx \quad (18)$$

$$C'_{ox} W \mu_n \left( V_{GS} V_{DS} - V_T V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right) dV_C = I_{DS} L$$

Corrente in zona ohmica

$$I_{DS} = \frac{1}{2} C'_{ox} \mu_n \frac{W}{L} (2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2) \quad (19)$$

dove il termine

$$k' = \frac{1}{2} C'_{ox} \mu_n$$

è detta *costante di conducibilità*  $k'$ . Se si ingloba anche  $\frac{W}{L}$  è la costante di transconduttanza  $k$ .

## 9.2 Pinch-off

La relazione della corrente  $I_{DS}$  in zona ohmica appena trovata rappresenta una parabola con concavità verso il basso:

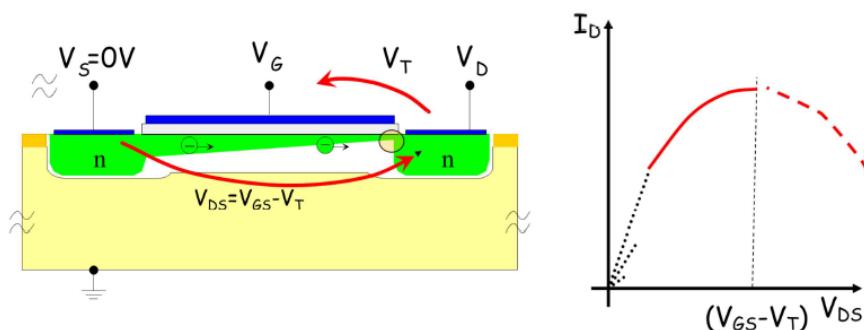


Figura 4: Punto di pinch-off

il cui vertice è:

$$V_{DS} = V_{GS} - V_T \quad I_{DS,max} = k (V_{GS} - V_T)^2$$

cioè si è ricavato che il valore massimo della corrente è proporzionale al quadrato della tensione di overdrive e che a  $V_{GS}$  fissata la corrente massima si raggiunge a  $V_{DS} = V_{GS} - V_T$ .

Si vede dalla figura 4 che se  $V_{DS} = V_{GS} - V_T$  allora la tensione  $V_{GD}$  deve essere pari a  $V_T$  e perciò il *lato drain* è a soglia. Dalle approssimazioni fatte nel capitolo

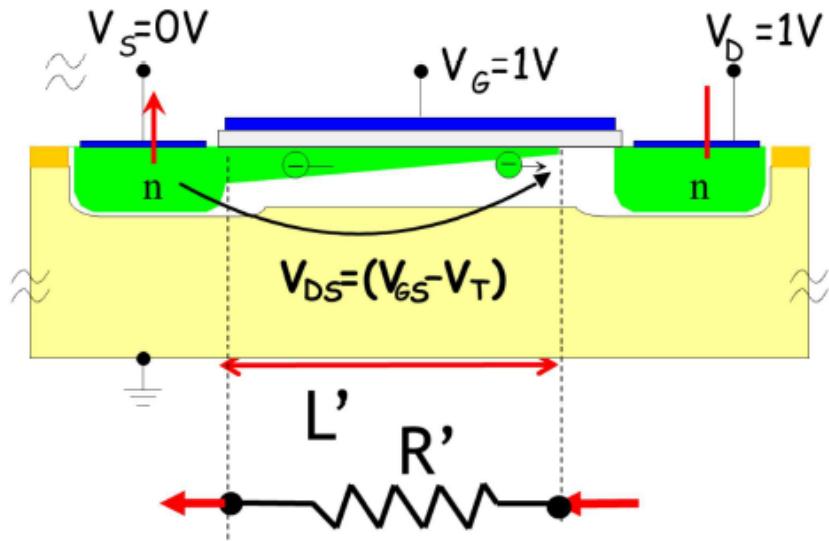
8, si può dire che essendo a soglia la carica  $Q'_n$  sul drain è nulla. In realtà è un valore trascurabile, che scende ulteriormente se  $V_{DS}$  aumenta facendo lavorare il drain sotto-soglia. ( $V_{GS}$  costante, se  $V_{DS}$  aumenta,  $V_T$  diminuisce). Questo punto è detto punto di *pinch-off*.

### 9.3 Oltre il Pinch-off - Saturazione

Si considera ora la situazione in cui  $V_{DS}$  supera la tensione di pinchoff ovvero  $V_{DS} > V_{GS} - V_T$ . Poichè  $V_{GS}$  è fissata, sarà  $V_{GD}$  a diminuire e diventare più piccola di  $V_T$ . Come visto sopra, se si prende l'espressione della carica  $Q'_n$  si vede che al punto di pinchoff la carica si annulla:

$$Q'_n = C'_{ox}(V_{GS} - V_T - V_C) \quad Q'_n = C'_{ox}(V_{GS} - V_T - (V_{GS} - V_T)) = 0$$

perciò se  $V_C$ , che qua abbiamo chiamato  $V_{DS}$ , aumenta oltre il punto di pinch-off, la carica  $Q'_n$  è completamente annullata nel canale.



man mano che dal source si procede verso il drain,  $V_C$  aumenta, quindi si distinguono 2 zone: la prima che comprende la lunghezza  $L'$  fino a quando  $V_C = V_{GS} - V_T$  e la seconda che comprende la lunghezza rimanente priva di carica.

Nella prima zona, l'approssimazione ohmica vale ancora e si integra l'espressione 18 cambiando però gli estremi.

$$C'_{ox} W \mu_n \int_0^{V_{GS}-V_T} (V_{GS} - V_T - V_C) dV_C = I_{DS} \int_0^{L'} dx$$

$$I_{DS} = C'_{ox} \mu_n \frac{W}{L'} \left( V_{GS}^2 - V_{GS} V_T - V_{GS} V_T + V_T^2 - \frac{(V_{GS} - V_T)^2}{2} \right)$$

Corrente oltre il pinch-off ignorando modulazione L'

$$I_{DS} = \frac{1}{2} C'_{ox} \mu_n \frac{W}{L'} (V_{GS} - V_T)^2$$

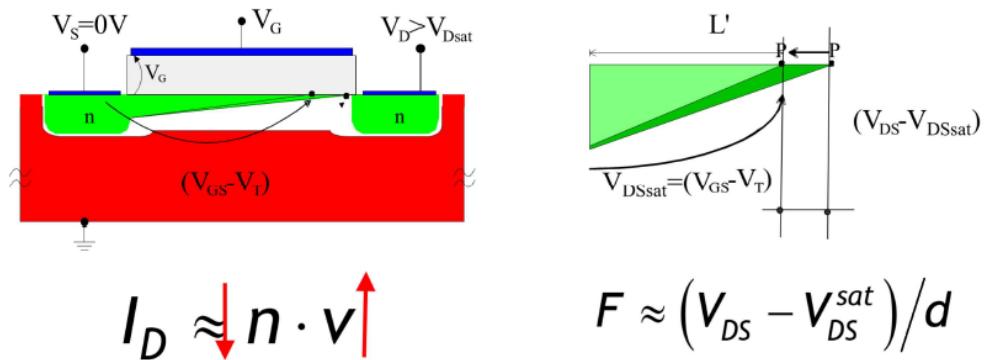
la corrente sarà la medesima in tutto il canale per continuità e avrà il valore qua sopra.

È necessario ora capire *quanto vale L'*. Sappiamo che  $L' = L$  al pinch off e che diminuisce se  $V_{DS}$  cresce oltre il valore limite, bisogna trovare una relazione che la leggi alla tensione  $V_{DS}$ .

La corrente per definizione è proporzionale alla concentrazione dei portatori per la loro velocità:

$$I \approx nqV$$

ma si è visto che la carica nello strato di carica diminuisce man mano che ci si avvicina al drain. Ma allora se la concentrazione di carica diminuisce, per mantenere costante la corrente deve aumentare la velocità.



la velocità delle cariche dipende dal campo elettrico, perciò man mano che ci si sposta verso il drain *il campo E deve aumentare d'intensità*.

Nella lunghezza dopo il pinch-off, dove la concentrazione di cariche è molto bassa, il campo elettrico deve assumere valori molto elevati.

Prese le due tensioni  $V_{DS}$  e  $V_{DS,sat}$  dove quest'ultima rappresenta la tensione di pinch-off e la lunghezza  $d = L - L'$ , si può dire che il campo elettrico ai capi della zona priva di portatori è:

$$\frac{V_{DS} - V_{DS,sat}}{d} = E$$

ma allora affinchè E sia molto elevato, d deve essere molto piccolo (ordine dei nm) e perciò si può affermare che:

$$L \approx L'$$

Dire che  $L = L'$  significa che la corrente dopo il pinchoff satura.

Un'approssimazione migliore considera che  $L'$  varia in funzione di  $V_{DS}$ . Se si sviluppa al primo ordine la funzione  $L'_{(V_{DS})}$  si ottiene:

$$L' \approx L'_{(V_{DS,sat})} + \frac{dL'}{dV_{DS}} \Big|_{V_{DS}} (V_{DS} - V_{DS,sat})$$

ma  $L'_{(V_{DS,sat})}$  è pari a  $L$ , e la derivata sarà negativa poichè  $L'$  diminuisce all'aumentare di  $V_{DS}$ . Si definisce un termine  $\lambda$  che permette di esprimere in termini percentuali l'influenza che ha una variazione di  $L'$  rispetto a  $L$ :

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{L} \left| \frac{dL'}{dV_{DS}} \right|}.$$

Allora:

$$L' \approx L + \frac{dL'}{dV_{DS}} \Big|_{V_{DS}} (V_{DS} - V_{DS,sat})$$

$$\boxed{L' = L(1 - \lambda(V_{DS} - V_{DS,sat}))}$$

perciò la  $L'$  varia linearmente al variare di  $V_{DS}$  e la corrente non è costante:

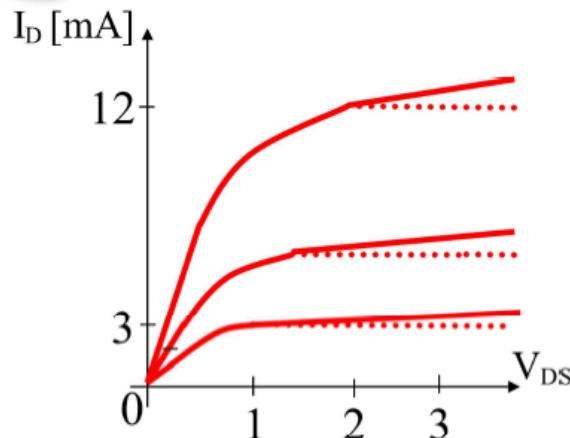


Figura 5: Effetto della variazione di  $L'$

e la corrente totale:

$$I_{DS} = \frac{1}{2} C'_{ox} \mu_n \frac{W}{L(1 - \lambda(V_{DS} - V_{DS,sat}))} (V_{GS} - V_T)^2$$

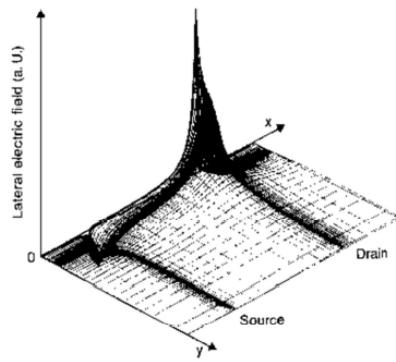
svilupando in serie al primo ordine:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

allora:

## Corrente in saturazione

$$I_{DS} = \frac{1}{2} C'_{ox} \mu_n \frac{W}{L} (V_{GS} - V_T)^2 (1 + \lambda(V_{DS} - V_{DS,sat}))$$



La modulazione di  $L'$  è modesta, infatti come visto prima il campo elettrico verso il drain è ben maggiore e cioè  $d$  è molto piccolo. In figura si vede un profilo di campo elettrico, verso destra c'è il drain e infatti il valore del campo ha un picco.

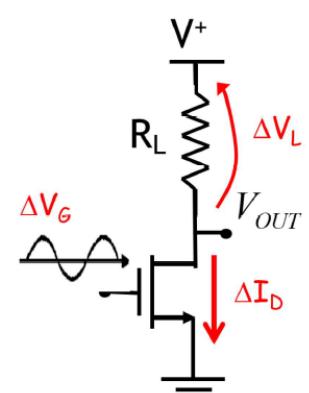
## 9.4 Transconduttanza - amplificazione - resistenza di uscita

Modulando la tensione  $V_{GS}$  varia la corrente  $I_{DS}$ , in regime di saturazione e per piccoli segnali si può considerare tale variazione lineare. Il coefficiente di proporzionalità è detto transconduttanza ed è definito come:

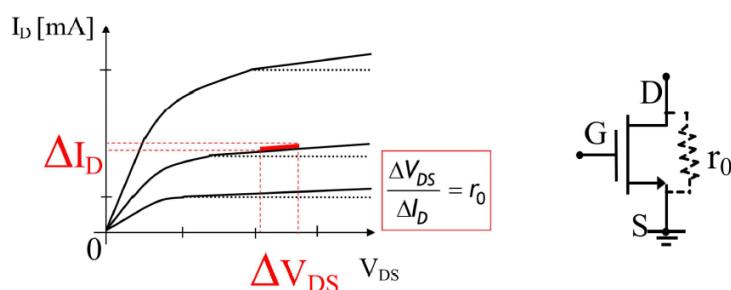
$$g_m = \left. \frac{dI_{DS}}{dV_{GS}} \right|_{V_{DS,sat}} = 2k(V_{GS} - V_T) = \frac{2I_{DS,sat}}{(V_{GS} - V_T)}$$

L'amplificazione è data da:

$$G = -g_m R_L$$



Poiché come visto nella sezione precedente, la corrente di saturazione non è costante e varia lievemente all'aumentare della tensione  $V_{DS}$ , si può modellizzare il transistore come avesse un resistore  $r_0$  tra drain e source:



la cui resistenza vale:

$$r_0 = \frac{dV_{DS}}{dI_{DS}} = \frac{1}{\frac{dI_{DS}}{dV_{DS}}} = \frac{1}{\lambda I_{DS,sat}} = \frac{L}{\left| \frac{dL'}{dV_{DS}} \right| I_{DS,sat}} = \alpha \frac{L}{I_{DS,sat}}$$

Il valore di questa resistenza *aumenta all'aumentare della lunghezza di canale L*. Se L aumenta, diminuisce il valore del parametro  $\lambda$ , e cioè la pendenza della retta della corrente in saturazione diminuisce. La corrente varia meno a parità di variazione di tensione.

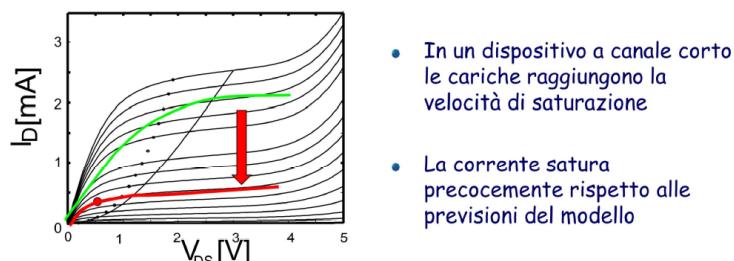
A causa di questa resistenza  $r_0$ , il guadagno dello stadio ha un massimo pari a:

$$G = g_m r_0 = \frac{2I_{DS,sat}}{(V_{GS} - V_T)} \alpha \frac{L}{I_{DS,sat}} = \alpha \frac{2L}{(V_{GS} - V_T)}$$

Tale amplificazione dipende esclusivamente da parametri del transistore e implica che *transistori a canale lungo avranno guadagno massimo maggiore*.

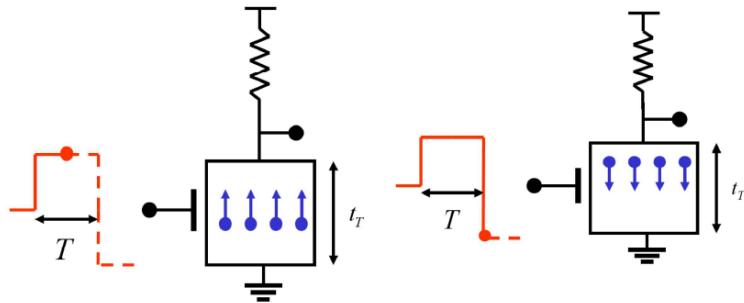
## 9.5 Saturazione precoce

Nei dispositivi reali utilizzati oggi il canale è ben più corto di 1um. Una tale lunghezza implica che il campo elettrico nel canale sia estremamente elevato e che le cariche vengano accelerate a velocità alte. Subentra però l'effetto della *saturazione della velocità!* La relazione che lega la tensione  $V_{DS}$  e la corrente nel canale non è più la relazione 19, poichè il punto di saturazione avviene ben prima del pinch-off ovvero per tensioni  $V_{DS}$  minori di  $V_{GS} - V_T$ .



il tratto rosso è il tratto reale, si vede che satura ben prima del livello atteso in verde. Si nota inoltre che le correnti aumentano notevolmente per valori alti di  $V_{DS}$  a causa del breakdown della giunzione pn tra drain e substrato.

## 9.6 Tempo di transito e frequenza di taglio



I portatori impiegano un tempo chiaramente non nullo per attraversare il canale. Questo implica che se la tensione di gate viene modulata, affinché le cariche si muovano e "attuino" il comando dato dal gate deve passare un tempo pari al tempo di percorrenza del canale  $\tau_T$ , detto *tempo di transito*.

Tale tempo può essere stimato come il rapporto tra la lunghezza del canale e la velocità di deriva delle cariche nel tratto ohmico. La velocità di deriva è pari alla mobilità per il campo E, e quest'ultimo si esprime come tensione di overdrive su lunghezza del canale.

$$\tau_T = \frac{L}{V_d} = \frac{L}{\mu E} = \frac{L}{\mu \frac{(V_{GS} - V_T)}{L}} = \frac{L^2}{\mu(V_{GS} - V_T)}$$

La frequenza massima di funzionamento sarà pari a:

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi\tau_T}$$

*dispositivi a canale corto possono funzionare a frequenze maggiori.*

Cioè per concludere, lunghezze di canale minori implicano maggiori frequenze di funzionamento ma minore guadagno:

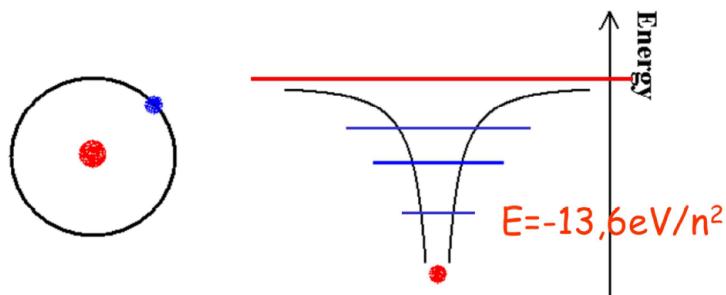
Tecnologia	Gmax	f <sub>T</sub> (GHz)
0,5μm	150	20
0,35μm	110	30
0,25μm	80	40
0,18μm	60	60
0,13μm	40	85
90nm	30	120
65nm	20	175

GBWP ≈ 3.5 THz

# 10 Livelli di Fermi

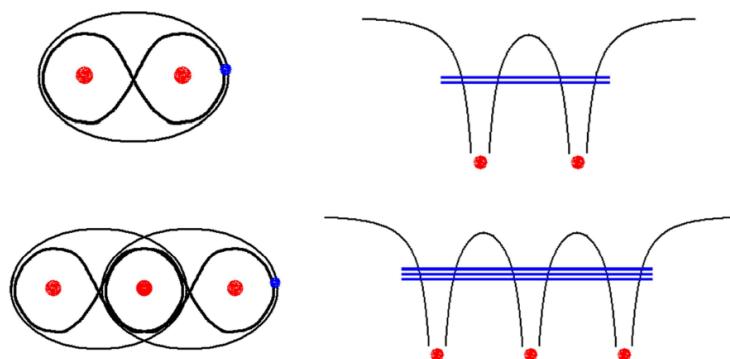
## 10.1 Livelli elettronici

Gli stati stazionari di energia in un atomo sono quantizzati. Come visto nel terzo capitolo, l'energia minima del sistema idrogenoide è detta Rydberg e stati a energia maggiore coincidono con multipli interi di questa grandezza. I livelli di energia sono misurabili in modo ripetibile e senza indeterminazione.



Il livello in rosso è detto *livello di vuoto* e coincide con il livello di energia degli elettroni a distanza infinita dal nucleo. Perciò più piccola è la distanza dal nucleo maggiore è l'energia di legame.

Si considerano ora dei sistemi bi-atomici e tri-atomici:

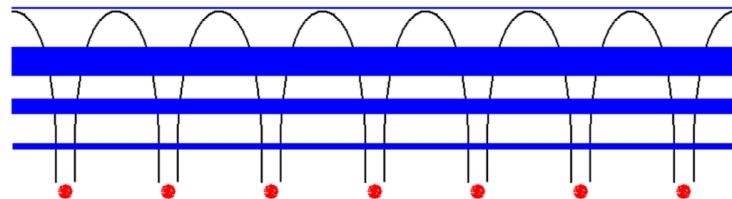


nella struttura bi-atomica, in corrispondenza di ogni livello energetico (1p, 2p, 3p, ...) degli atomi singoli si generano due livelli distinti, uno a energia leggermente superiore dell'altro.

Il livello a energia più bassa corrisponde a un *orbitale legante* ed è l'orbitale con massima probabilità di occupazione, quello a energia più alta corrisponde a un *orbitale anti-legante* e ha minima probabilità di occupazione. Gli elettroni hanno massima probabilità di trovarsi tra i due nuclei a causa dell'attrazione coulombiana e tale posizione è relativa all'orbitale legante. La situazione in cui gli elettroni non si trovano tra i due nuclei è altamente improbabile e corrisponde all'energia maggiore poiché la repulsione tra i due nuclei non schermati da cariche negative nel mezzo è massima. Se gli atomi si avvicinano, la repulsione tra i due nuclei aumenta e perciò l'energia relativa allo stato in cui gli elettroni non

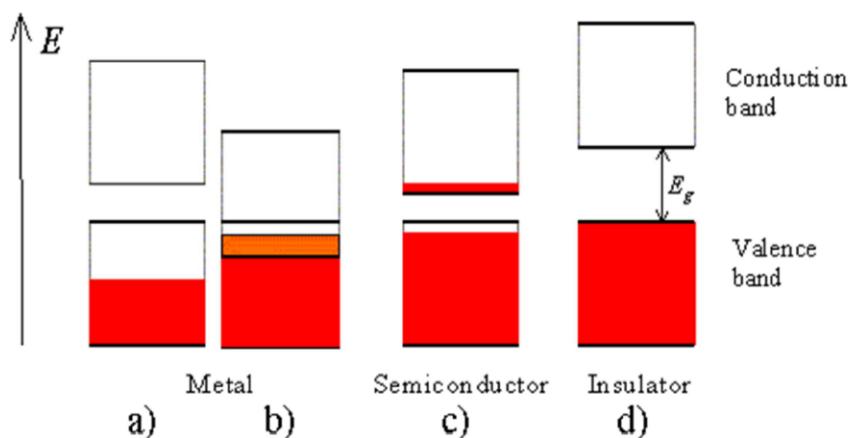
si trovano tra i due nuclei è maggiore: i due livelli si allontanano e il fenomeno è detto *splitting*.

Nel sistema tri-atomico si formano 3 livelli per ogni livello dell'atomo originale e così via. Se si considera un reticolo di N atomi:



per ogni livello energetico dell'atomo singolo si forma una banda composta da N livelli energetici. L'energia dei livelli in ogni banda viene scandita attraverso una grandezza derivata dal vettore d'onda quantizzato detto numero quantico  $p$ , che varia per passi discreti. Nel caso del reticolo tridimensionale l'energia è funzione dei 3 numeri quantici  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ . Si possono vedere questi 3 parametri come le componenti di un vettore detto *momento reticolare*. Ogni livello energetico può essere occupato al più da 2 elettroni per il principio di esclusione di Pauli.

La struttura a bande dei solidi ne determina le proprietà conduttrive o isolanti. Come nei livelli energetici dell'atomo singolo, le bande nei solidi sono separate da "gap" ovvero livelli di energia non ammessi.



Se una banda è completa, gli elettroni di tale banda non vengono influenzati dall'applicazione di campi elettrici esterni poichè non avendo livelli di energia superiore in cui passare, non possono muoversi. Se invece una banda non è piena, l'applicazione di campi elettrici permette agli elettroni di acquisire energia e accelerare.

Per questo motivo si suddividono i solidi in tre categorie:

- *Metalli*:

nei metalli la banda di valenza non è completa, gli elettroni possono essere

promossi a livelli energetici più alti e cioè generare correnti elettriche. Le bande possono anche essere sovrapposte.

- *Isolanti:*

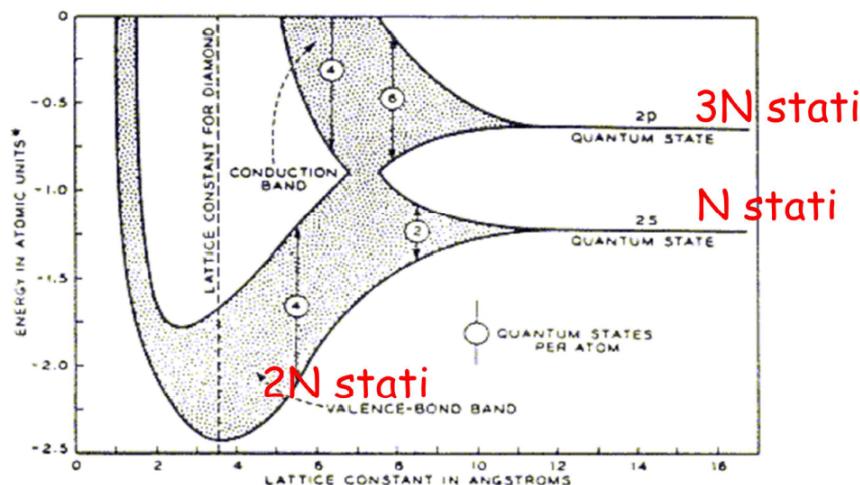
negli isolanti la banda di valenza è completa e il gap energetico che separa la banda di valenza da quella di conduzione è  $\geq 5\text{eV}$ .

- *semiconduttori:*

nei semiconduttori la banda di valenza è completa ma il gap energetico tra banda di valenza e banda di conduzione è nell'ordine di  $1\text{eV}$ . Alcuni elettroni possono essere promossi alla banda di conduzione senza troppa spesa energetica.

Seguendo questo ragionamento però verrebbe da dire che gli atomi del IV gruppo della tavola periodica sono conduttori poiché hanno 4 elettroni nella shell più esterna, sono infatti caratterizzati da una configurazione elettronica esterna  $2s^2 2p^2$ . Tra questi è presente anche il carbonio, che in forma di diamante è un noto isolante!

Si introduce questo grafico:



dove nell'asse x è presente il passo reticolare del solido e nell'asse y sono rappresentante le bande relative ai livelli energetici  $2s^2 2p^2$ .

Perciò in un reticolo 3 dimensionale la banda inferiore relativa agli orbitali s è composta da  $N$  livelli, la banda relativa agli orbitali p è composta da  $3N$  livelli (poiché i p sono  $p_x, p_y$  e  $p_z$ ). Ogni livello energetico ha 2 elettroni per il principio di esclusione di Pauli, e perciò  $2N$  elettroni nella banda inferiore e  $6N$  elettroni nella banda superiore.

Partendo da destra, la distanza tra gli atomi del reticolo è abbastanza grande da non permettere che gli atomi si influenzino tra loro: le bande sono separate come nell'atomo singolo.

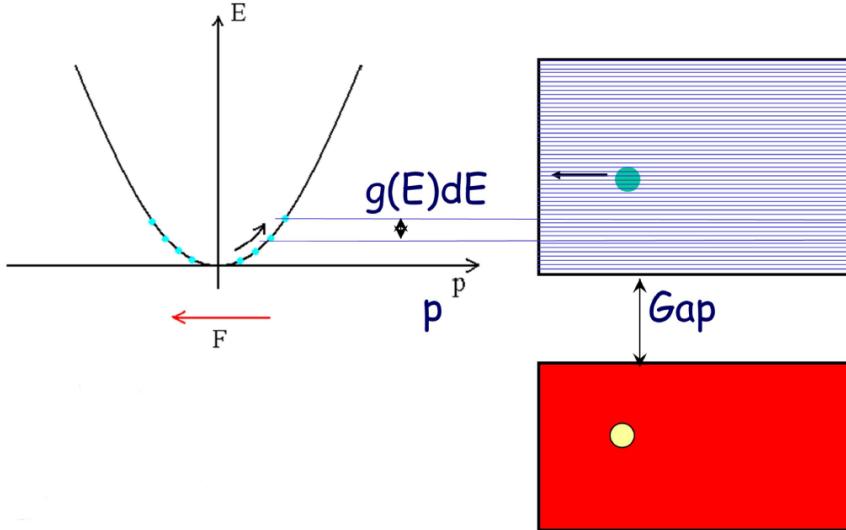
Man mano che il passo reticolare decresce avviene lo *splitting* descritto sopra e i livelli energetici delle bande si separano tra loro. Si arriva ad un punto in cui le bande si sovrappongono e si genera un'unica banda con  $4N$  stati energetici. In questa condizione il solido è conduttivo.

Si raggiunge però uno stato energetico più stabile, le bande si separano nuovamente e si dividono in due bande con  $2N$  stati energetici ciascuna, una banda detta di valenza e una detta di conduzione. Si dice che è avvenuta un'ibridizzazione  $sp^3$ , caratterizzata da una struttura tetraedrica.

Al diminuire del passo reticolare il gap tra le due nuove bande aumenta. Questa struttura è caratteristica dei solidi composti da atomi del IV gruppo, la differenza di condutività è spiegata dal gap: pari a 5eV per il diamante e attorno a 1eV per silicio e germanio.

## 10.2 Relazione di dispersione

Si considera ora la banda di valenza di un sistema composto da  $N$  atomi. I livelli energetici sono scanditi dal numero quantico  $p$  (in realtà dal momento reticolare ma semplifichiamo) che può assumere valori interi positivi o negativi. Ad ogni valore del numero quantico corrispondono valori di energia che umetano con andamento parabolico all'aumentare di  $p$ :



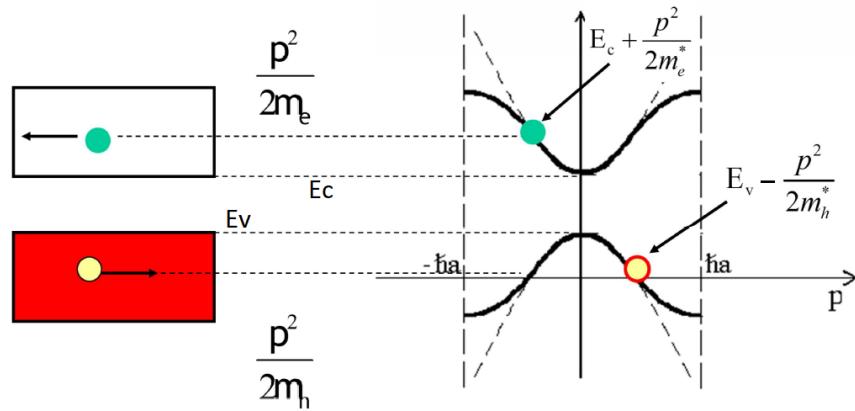
L'andamento dell'energia al variare del numero quantico ricorda la relazione che lega energia cinetica e quantità di moto, infatti:

$$q = mV \quad E_k = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{q^2}{2m}$$

l'andamento di energia trovato suggerisce una relazione analoga con il numero quantico, che si chiama *momento* reticolare per questo motivo, e suggerisce anche l'esistenza di una massa dell'elettrone che non è però la massa inerziale della

particella libera (stiamo considerando la particella nella banda di valenza). Questa massa è detta *massa efficace* e spiega l'aumento di energia non lineare tra i vari livelli nella banda all'aumentare del momento reticolare. **N.B.** La massa efficace qua discussa è diversa dalla massa efficace utilizzata nei primi capitoli per discutere la conducibilità.

Discorso identico vale per le lacune, la cui energia però diminuisce all'aumentare del numero quantico:



nel sistema in figura, un elettrone è stato promosso in banda di conduzione, ha superato il gap energetico pari a:

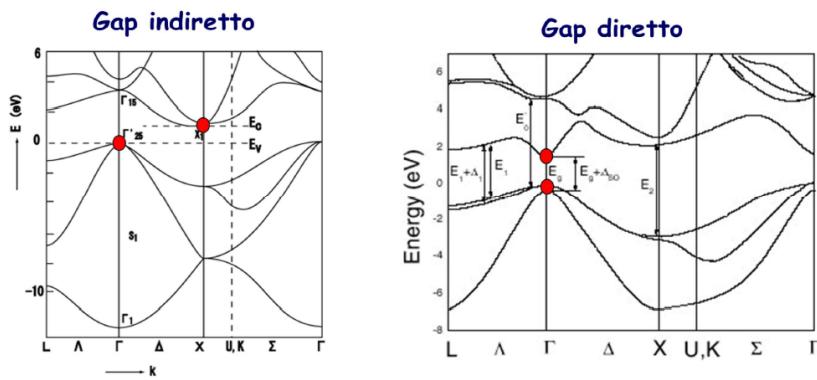
$$\Delta E = E_c - E_v$$

si è però lasciato alle spalle una lacuna. Le energie di elettrone e lacuna corrispondono alle energie superiore di banda di valenza  $E_v$  e inferiore di banda di conduzione  $E_c$  più i termini cinetici espressi in funzione del momento reticolare:

$$E_e = E_c + \frac{p^2}{2m_e^*} \quad E_h = E_v - \frac{p^2}{2m_h^*}$$

dove le masse efficaci, come detto prima, esprimono la curvatura delle relazioni E-p, dette *relazioni di dispersione*.

Nei reticolati cristallini le relazioni di dispersione sono più complesse, e i limiti superiori e inferiori delle parabole che descrivono i livelli di energia nelle bande possono non presentarsi allo stesso valore del momento reticolare.

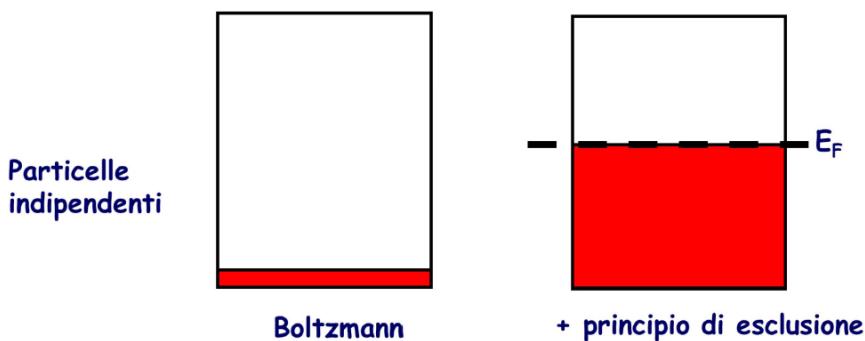


Si distinguono perciò i semiconduttori a:

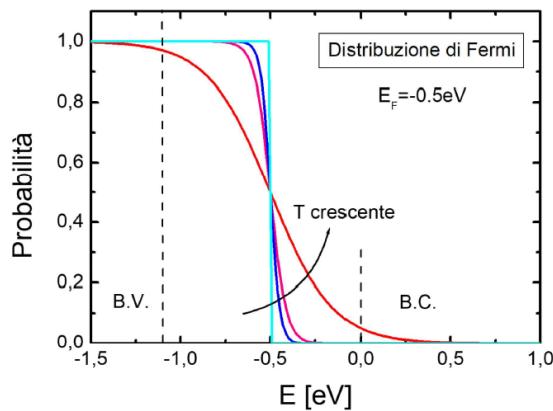
- Gap diretto: gli estremi delle due parabole si trovano per il medesimo valore di p.
- Gap indiretto: gli estremi delle due parabole si trovano per valori differenti di p.

### 10.3 Statistica di Fermi

Se si applicasse la statistica di Boltzmann ad una banda di valenza, si ricaverebbe che la concentrazione di elettronni è maggiore sul fondo a energie più basse, esattamente come nella colonna di gas isotermi. Per il principio di Pauli però questo non è possibile! Per ogni livello energetico ci possono essere al più 2 elettronni e perciò i livelli saranno riempiti in modo uniforme per tutti i livelli di energia. A 0K gli elettronni non acquisiscono energia termica e non possono quindi saltare a livelli di energia superiori, occupano quindi i livelli energetici in modo ordinato dal più basso verso l'alto fino all'esaurimento degli elettronni disponibili. L'energia dell'ultimo stato occupato da elettronni a 0K è detto *livello di Fermi*.



La funzione che esprime la probabilità degli elettronni di trovarsi sopra o sotto il livello di fermi è la seguente:



$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \rightarrow e^{-E/kT}$$

a 0K la funzione è rappresentata da un gradino, la probabilità che gli elettroni si trovino sotto il livello di Fermi a -0.5eV è pari a 1. Al crescere della temperatura la curva si arrotonda e la probabilità che gli elettroni si trovino oltre il livello di Fermi cresce. La probabilità che i portatori si trovino al livello di Fermi rimane sempre costante a 0,5. Si noti inoltre come le code ad alta energia della funzione ricordano l'andamento esponenziale della statistica di Boltzmann.

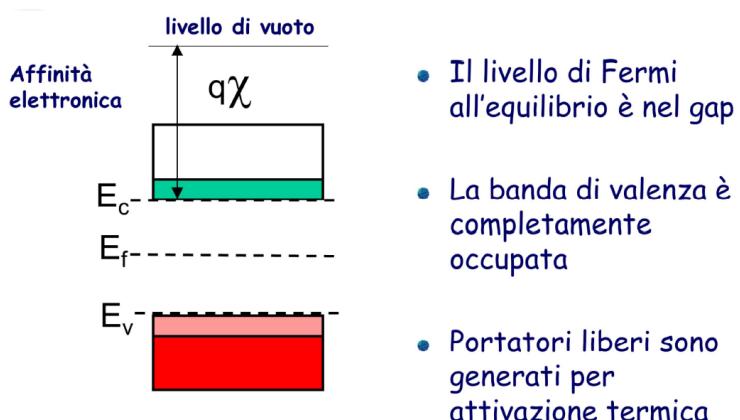
La funzione che definisce la probabilità è la seguente:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

e per  $E > E_F$  l'espressione è quella di Boltzmann:

$$f(E) = e^{-\frac{E}{kT}}$$

In un semiconduttore come il silicio si è visto che la banda di valenza è completa e per generazione termica qualche elettrone viene promosso alla banda di conduzione. A 0K però non c'è energia termica trasmessa ai portatori e quindi la banda di valenza è piena e quella di conduzione vuota:



ciò significa che il livello di Fermi deve trovarsi in un punto del gap. Nel silicio il livello di Fermi è esattamente alla metà.  $E_i = \frac{E_g}{2}$

La distanza tra livello energetico più basso della banda di conduzione  $E_C$  e il livello di vuoto è detta *affinità elettronica*.

Si vuole trovare l'espressione della densità di elettroni in banda di conduzione. Data la funzione  $g_{(E)}$  che esprime la densità di stati energetici per unità di energia, la funzione  $f_{(E)}$  di probabilità definita prima e il volume del solido  $\Omega$  (numero di stati dipende dal numero di atomi e quindi è proporzionale al volume):

$$N_{e^-} = \int_0^{+\infty} \Omega g_{(E)} f_{(E)} dE$$

$$n = \frac{N_{e^-}}{\Omega} = \int_0^{+\infty} g_{(E)} f_{(E)} dE$$

Tale espressione rappresenta la concentrazione totale di elettroni in tutto il volume.

La concentrazione di elettroni nella banda di conduzione è pari a:

$$n_c = \int_{E_c}^{+\infty} g_{(E-E_C)} f_{(E)} dE = \int_{E_c}^{+\infty} \frac{g_{(E-E_C)}}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dE$$

assumendo che i livelli di energia sopra  $E_C$  siano  $\gg kT$ , allora

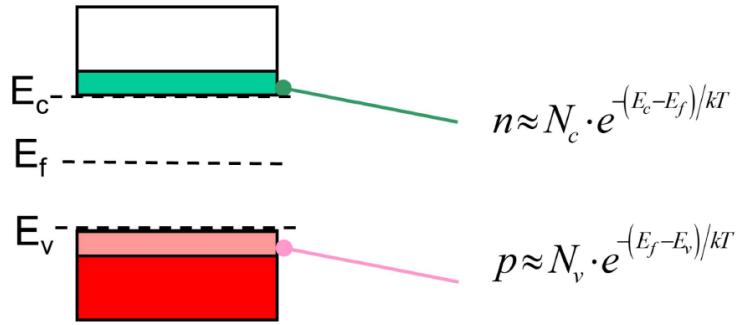
$$e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1 \approx e^{\frac{E-E_F}{kT}}$$

$$n_c \approx \int_{E_c}^{+\infty} g_{(E-E_C)} e^{-\frac{E-E_F}{kT}} dE$$

e sommando e sottraendo  $E_c$  all'esponente si ricava:

$$n_c \approx \int_{E_c}^{+\infty} g_{(E-E_C)} e^{-\frac{E-E_F+E_C-E_C}{kT}} dE = e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}} \int_{E_c}^{+\infty} g_{(E-E_C)} e^{-\frac{E-E_C}{kT}} dE = N_c e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}}$$

dove  $N_c$  è detto *densità di stati equivalente della banda di conduzione* e dipende dalla temperatura. Ci si è cioè ricondotti ad un'espressione della concentrazione in forma di Boltzmann!

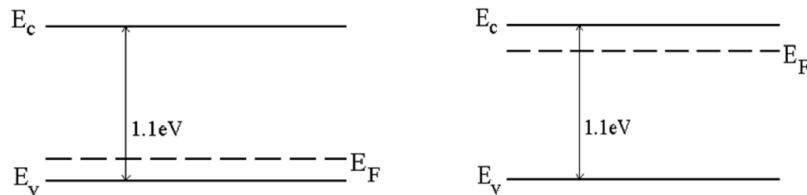


$$N_c = 3.22 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad N_v = 1.83 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

Concentrazione portatori nella banda di valenza

$$n_c \approx N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \quad p_c \approx N_v e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

Queste relazioni possono essere utilizzate per stimare la distanza del livello di Fermi dai livelli di energia di banda di conduzione e valenza:



$$N_A = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$E_F - E_v = kT \ln \frac{N_v}{N_A} = 75 \text{ meV} \quad E_c - E_F = kT \ln \frac{N_c}{N_D} = 30.17 \text{ meV}$$

$$N_D = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_D = n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

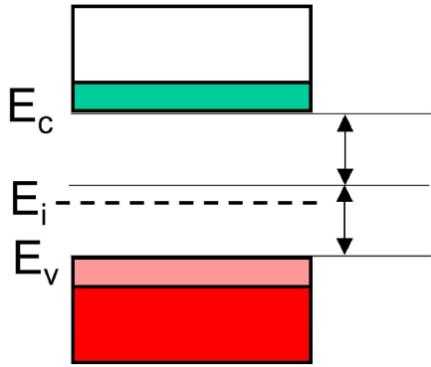
$$E_C - E_F = kT \ln \left( \frac{N_C}{N_D} \right)$$

$$N_A = p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

$$E_F - E_V = kT \ln \left( \frac{N_V}{N_A} \right)$$

Per il silicio intrinseco, detto  $E_i$  il livello di Fermi:

$$E_C - E_i = kT \ln \left( \frac{N_C}{n_i} \right) \quad E_i - E_V = kT \ln \left( \frac{N_V}{n_i} \right)$$



sommendo allora le due espressioni:

$$E_i - E_C = -kT \ln \left( \frac{N_C}{n_i} \right) + E_i - E_V = kT \ln \left( \frac{N_V}{n_i} \right)$$

$$2E_i = (E_C + E_V) + kT \ln \left( \frac{N_C}{N_V} \right) \quad \boxed{E_i = \frac{(E_C + E_V)}{2} + \frac{kT}{2} \ln \left( \frac{N_C}{N_V} \right)}$$

È possibile anche ricavare l'espressione della concentrazione di portatori intrinseca, poiché:

$$n \approx N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \quad p \approx N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

allora  $n_i^2 = np$  sarà:

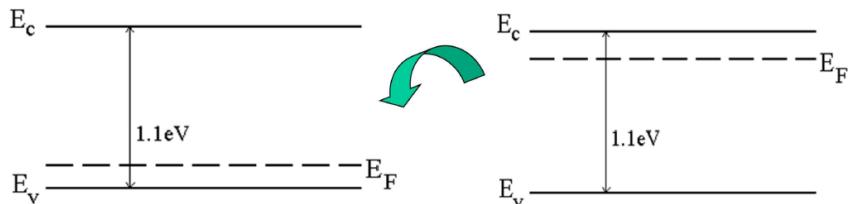
$$\boxed{n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{kT}}}$$

Dove  $E_g = E_C - E_V$ . Quest'ultima espressione giustifica la dipendenza della concentrazione intrinseca da  $E_g$  vista nei primi capitoli!

# 11 Potenziali di contatto

## 11.1 Potenziale di Fermi

Si considera una giunzione pn. Poichè le due parti di silicio drogato hanno livelli di Fermi differenti a causa del drogaggio e perciò differenti concentrazioni di elettroni nella banda di conduzione, quando vengono messe a contatto gli elettroni tendono a saltare nei livelli di energia più bassa.



- Al contatto, gli elettroni si trasferiscono nella zona a energia potenziale minore
- Il livello di Fermi all'equilibrio si equalizza

Quando si è stabilito un equilibrio il livello di Fermi dovrà essere costante su tutta la struttura. All'equilibrio si ha quindi la seguente struttura delle bande:

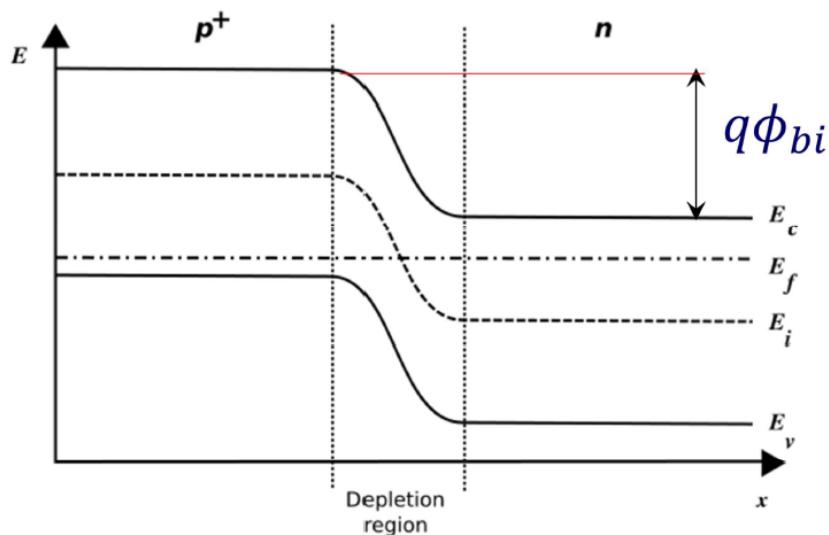


Figura 6: Bande all'equilibrio

il livello di Fermi è costante ma nei due lati è più vicino alle bande di conduzione/valenza a seconda del drogaggio. Ci deve essere continuità tra le due bande e ciò significa che all'interfaccia delle due zone deve esserci una "piegatura delle bande".

La piegatura è dovuta al campo elettrico che si genera nella zona di carica.(Il

campo elettrico è pari alla derivata dell'energia potenziale elettrica!) In tale zona il livello di Fermi del sistema si interseca con il livello di Fermi intrinseco, cioè nella zona di carica la concentrazione di portatori sarà pari alla concentrazione intrinseca.

Si definisce *potenziale di contatto* la distanza tra i livelli di Fermi intrinseci espresa in eV.

Il potenziale di Fermi è definito come la differenza di potenziale tra il livello di Fermi del sistema e il livello intrinseco:

$$\Phi_F = \frac{E_F - E_i}{q}$$

Dato del silicio drogato n si scrivono le relazioni di livello di Fermi e livello di Fermi intrinseco:

$$n = N_D = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \quad n_i = N_C e^{-\frac{E_C - E_i}{kT}}$$

e facendo il rapporto tra le due:

$$\frac{N_D}{n_i} = e^{-\frac{E_F - E_i}{kT}}$$

e perciò si ricava:

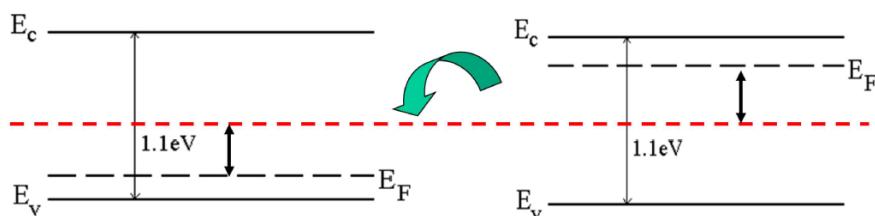
### Potenziale di Fermi per silicio drogato n e p

$$q\Phi_n = E_F - E_i = kT \ln \left( \frac{N_D}{n_i} \right) \quad q\Phi_p = E_F - E_i = -kT \ln \left( \frac{N_A}{n_i} \right)$$

Si noti che il potenziale di contatto è pari alla somma dei potenziali di Fermi dei due lati:

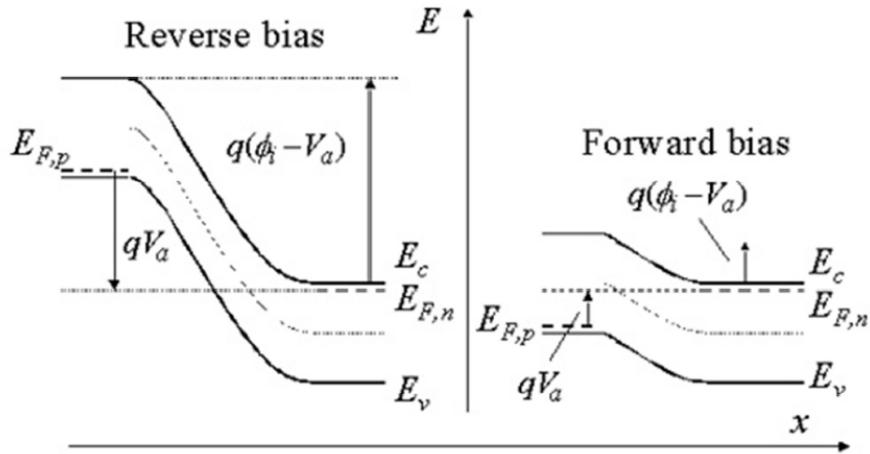
$$\Phi_{bi} = |\Phi_n| + |\Phi_p| = \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_D}{n_i} \right) + \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_A}{n_i} \right) = \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_D N_A}{n_i^2} \right)$$

che è l'espressione usata nei capitoli precedenti.



Quindi gli elettroni inizialmente vanno nelle bande ad energia minore sul lato drogato p, ma a causa della zona di carica si genera il campo e la struttura all'equilibrio diventa quella schematizzata in figura 6.

Nel caso si polarizzi la struttura, non si è più all'equilibrio, non si ha più perciò un unico livello di Fermi. Si formano 2 livelli di Fermi detti *quasi livelli*:



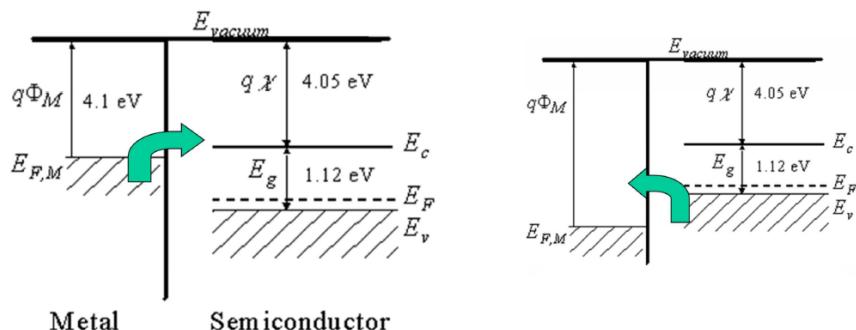
la distanza tra i quasi livelli è pari alla polarizzazione applicata.

## 11.2 Contatti metallo-semiconduttore

Nei metalli si può definire la *funzione lavoro* cioè la differenza di energia tra il livello di Fermi del metallo e il livello di vuoto, che rappresenta il lavoro necessario per portare un elettrone dal livello di fermi al livello du vuoto e quindi farlo uscire dal metallo. Nei metalli poichè la banda di conduzione non è completa, il livello di Fermi si trova al suo interno.

$$q\Phi_M$$

Mettendo a contatto un metallo e un semiconduttore possono accadere due cose:



- Al contatto, il metallo perde elettroni

- Al contatto, il metallo acquista elettroni

- Livello di Fermi del Metallo maggiore del livello del semiconduttore:  
In questo caso gli elettroni tendono a riversarsi nel semiconduttore portando

il metallo ad un potenziale maggiore, all'equilibrio il livello di Fermi si egualgia e si genera un campo elettrico che "curva" i potenziali. Il potenziale di contatto è positivo sul lato del metallo,

- Livello di Fermi del Metallo minore del livello del semiconduttore:

In questo caso gli elettroni tendono a riversarsi nel metallo portando il semiconduttore ad un potenziale maggiore, all'equilibrio il livello di Fermi si egualgia e si genera un campo elettrico che "curva" i potenziali. Il potenziale di contatto è positivo sul lato del semiconduttore.

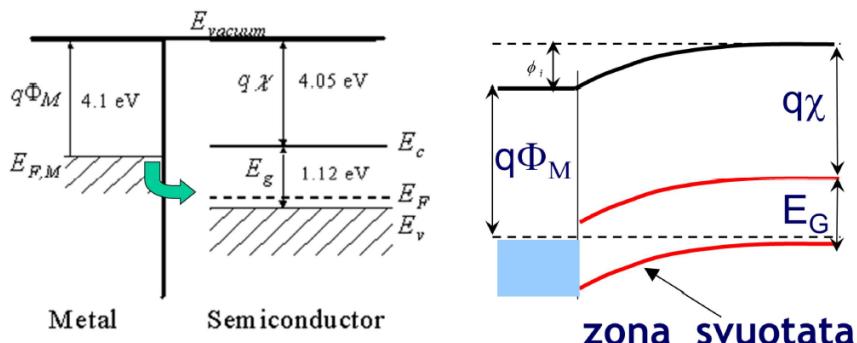
Nella tabella a lato si possono vedere i potenziali raggiunti da vari metalli e semiconduttori se messi a contatto con del i-Si. È possibile ricavare dalla tabella i potenziali di contatto tra elementi della stessa. Ad esempio il potenziale di contatto tra Al e Ag sarà pari a  $0,6 - (-0,4) = 1\text{V}$ .

**N.B.** 1eV in Joule è  $1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} J$  perciò un'energia di 0,6eV è l'energia acquisita da un elettrone accelerato da un potenziale di 0,6V.

Elemento	Potenziale di contatto
Al	0,60
Si-n+	0,56
W	0,16
Cu	0
Au	-0,3
Ag	-0,4
Si-p+	-0,56

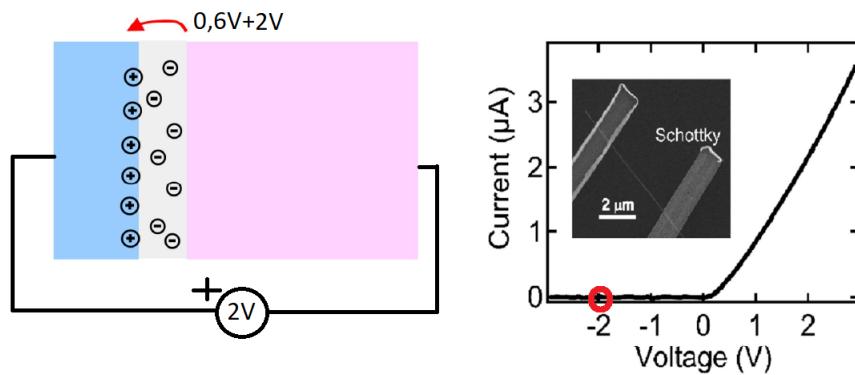
### 11.3 Contatti rettificanti e ohmici

Si mettono ora a contatto dell'Al e del p-Si:



il livello di Fermi è costante poichè siamo all'equilibrio, mentre il livello di vuoto e i livelli energetici  $E_C$  ed  $E_V$  si piegano per garantire la continuità. Il contatto si *svuota di maggioritari* (lacune) infatti il livello di Fermi è lontano dalla banda di valenza del Si, c'è perciò una zona in cui la conducibilità è minore.

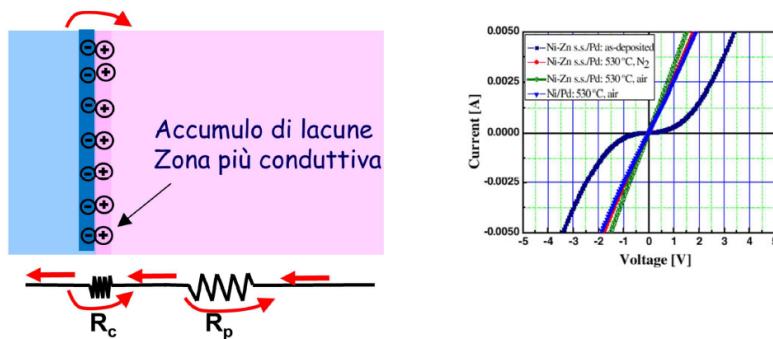
Si è formata cos' una giunzione rettificante a tutti gli effetti, che lavora come un diodo:



- La polarizzazione esterna modula la barrier e la zona svuotata

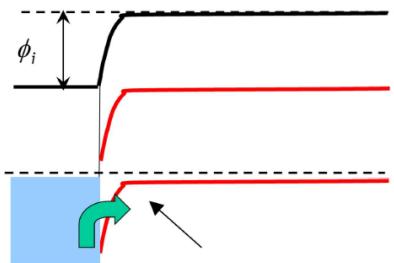
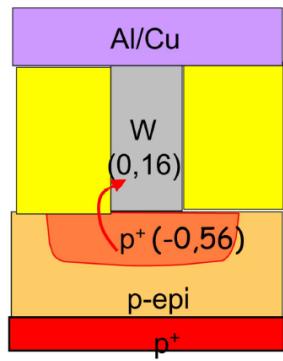
il potenziale di contatto può essere modulato, facendo crescere o decrescere la conducibilità.

Mettendo invece a contatto del p-Si con un metallo con funzione lavoro maggiore e cioè livello di Fermi minore di quello del p-Si, gli elettroni si sposteranno nel metallo, generando un accumulo di portatori maggioritari (lacune) nel silicio. Addirittura il livello di Fermi si interseca con la banda di valenza del Si. Il contatto perciò si arricchisce di maggioritari e la conducibilità aumenta! È infatti detto ohmico poiché è rappresentabile da un resistore di resistenza inferiore alle aree adiacenti.



- La variazione della polarizzazione esterna si sviluppa ai capi delle zone meno conduttrive

Nei dispositivi elettronici moderni si utilizza il Tungsteno (W) che però a contatto con il Silicio forma un contatto rettificante. Per ovviare a questo problema si droga fortemente il silicio p, in modo tale che la zona svuotata diventi talmente sottile da permettere agli elettroni di passare comunque tramite *effetto tunnel*.



conduzione  
per effetto tunnel