

8

IL RUMORE NEI CIRCUITI ELETTRONICI

- 8.1** *Introduzione al rumore nei circuiti elettronici*
- 8.2** *Caratterizzazione del rumore*
 - 8.2.1 Distribuzione gaussiana del rumore
 - 8.2.2 Spettro del rumore
 - 8.2.3 Densità spettrale e valore RMS del rumore
- 8.3** *Sorgenti di rumore in un circuito*
 - 8.3.1 Rumore di un resistore
 - 8.3.2 Rumore di canale di un MOSFET
 - 8.3.3 Rumore di giunzione di un bipolare
- 8.4** *Trasferimento della densità spettrale di rumore dal punto sorgente all'uscita*
 - 8.4.1 Procedimento di calcolo
 - 8.4.2 Somma di più rumori
 - 8.4.3 Trasferimento diretto dei generatori di densità spettrale
- 8.5** *Trasferimento della densità spettrale di rumore in presenza di elementi capacitivi*
- 8.6** *Calcolo del valore RMS del rumore in uscita*
 - 8.6.1 Banda equivalente per il rumore
 - 8.6.2 Stima del valore RMS in presenza di più poli e più zeri
- 8.7** *Considerazioni conclusive sul rapporto S/N*
- 8.8** *Contributi di rumore dominanti negli stadi base*
 - 8.8.1 Stadio amplificatore Source a massa
 - 8.8.2 Stadio amplificatore Source a massa con resistenza di degenerazione
 - 8.8.3 Stadio buffer del tipo Source follower

8.1 INTRODUZIONE AL RUMORE NEI CIRCUITI ELETTRONICI

Se prendiamo un qualsiasi circuito elettronico ed analizziamo il valore di una grandezza elettrica (tensione o corrente) in un punto, vediamo che non è stabile e pulito nel tempo ma fluttua attorno al valore aspettato $s(t)$.

La **fluttuazione casuale** attorno al segnale aspettato $s(t)$ è chiamata **RUMORE** e la indichiamo con $n(t)$.

Nel caso ad esempio della tensione $V(t)$ all'uscita di un circuito reale, possiamo considerare $V(t)$ come la somma:

$$V(t) = s(t) + n(t) + d(t)$$

Nel seguito non considereremo i disturbi $d(t)$, intesi come fluttuazioni del segnale certamente indesiderate ma riconducibili a cause precise (induzioni, interferenze) e quindi in linea di principio eliminabili con una attenta realizzazione o schermatura del sistema elettronico.

Il rumore $n(t)$, rendendo l'identificazione del segnale meno nitida, ci porta a commettere un errore più o meno grande nella misura di $s(t)$, ed in alcuni casi può addirittura rendere impossibile il riconoscimento di un segnale.

Per capire il rumore ed i suoi effetti nei sistemi elettronici, andiamo ad analizzare quindi:

- quali sono le modalità di rappresentazione del rumore e quali sono i parametri che ne quantificano l'entità;
- quali sono, in un circuito elettronico, le sorgenti fisiche di rumore;
- come il rumore, generato localmente da un componente, si propaga verso l'uscita del circuito "aggiungendosi" al segnale;
- come poterne ridurre l'entità.

8.2 CARATTERIZZAZIONE DEL RUMORE

Il rumore NON è caratterizzato dal suo andamento nel tempo perché per sua natura $n(t)$ è diverso da una osservazione all'altra e perché *non è predicibile*, cioè non possiamo predire quale ne sarà il valore $n(t+dt)$ all'istante successivo all'osservazione.

Essendo una **grandezza casuale**, il rumore potrà essere unicamente caratterizzato da grandezze che ne sintetizzano la sua distribuzione statistica. In particolare, costruendo la distribuzione delle ampiezze delle fluttuazioni, si potrà ricavarne il **valore medio** ed il **valore quadratico medio**.

8.2.1 Distribuzione gaussiana del rumore

Nella grande maggioranza dei casi, la distribuzione delle ampiezze delle fluttuazioni (rumore) ha una forma ben approssimabile ad una gaussiana centrata proprio sul livello di segnale idealmente presente in quel punto se non ci fosse rumore (Fig.8.1). Questo è equivalente a dire che il **valore medio del rumore è nullo**.

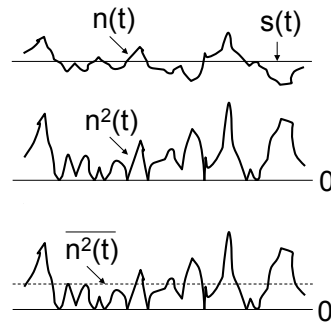
L'entità delle fluttuazioni (in gergo indicata come l'ampiezza della "fascia" o "barba" di rumore) viene caratterizzata dalla **deviazione standard (σ)** della distribuzione, la cui dimensione è il Volt [V] se si sta misurando un segnale di tensione o l'Ampère [A] se si sta misurando un segnale di corrente.

Essa è calcolata :

i) facendo il quadrato degli scostamenti introdotti dal rumore $n(t)$ rispetto alla linea di segnale $s(t)$;

ii) mediandoli tutti (si ottiene così il **valore quadratico medio**, $\overline{n^2(t)}$, del rumore, che è una grandezza che ha le dimensioni di V^2 oppure di A^2);

iii) estraendone la radice $\sigma = \sqrt{\overline{n^2(t)}}$



Il risultato è un numero che ha proprio le stesse dimensioni del segnale ([V] oppure [A], come detto) grazie al quale è semplice ed immediato fare un confronto diretto della "ampiezza" del rumore con l'ampiezza del segnale.

Per come è ottenuto, la deviazione standard σ è anche indicata come "**valore RMS**" del rumore, dove RMS significa Root Mean Square, cioè appunto Radice

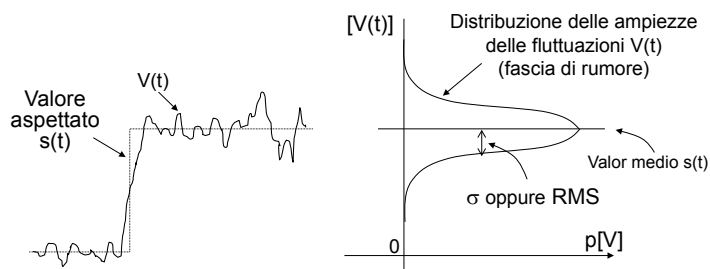


Fig. 8.1 Rappresentazione nel tempo di un segnale rumoroso e, a destra, distribuzione delle ampiezze dopo il gradino.

quadrata del valore Quadratico Medio.

Si ricordi che in una distribuzione Gaussiana circa il 63% delle fluttuazioni totali è contenuto in $\pm\sigma$.

Si noti che il valore quadratico medio del rumore, $\overline{n^2(t)}$, che ha le dimensioni di $[V^2]$ o $[A^2]$, è proporzionale alla potenza trasportata dal rumore stesso (**Potenza di rumore**).

8.2.2 Spettro del rumore

Come ogni segnale elettrico, anche il rumore $n(t)$ può essere pensato come somma di onde sinusoidali generatrici.

Per estrarre ognuna di queste **componenti armoniche del rumore**, in particolare quella alla frequenza f , si può pensare di prendere il rumore $n(t)$ e di farlo passare in un circuito passa-banda centrato proprio alla frequenza f ed avente una piccola larghezza di banda Δf come schematizzato nella Fig.8.2, ad esempio $\Delta f=1\text{Hz}$. All'uscita avrò solo onde $n_f(t)$ di frequenza compresa tra $(f-\Delta f/2)$ e $(f+\Delta f/2)$.

Poiché il rumore $n(t)$ all'ingresso, come più volte sottolineato, ha un andamento temporale casuale in ampiezza, così sarà per le "sinusoidi" $n_f(t)$ in uscita dal filtro. Esse quindi potranno essere caratterizzate dal valore medio della loro ampiezza (che sarà ovviamente zero essendo le onde sinusoidali) e dal valore quadratico medio della loro ampiezza, $\overline{n_f^2(t)}$.

Se divido tale valore per la larghezza Δf del filtro, ottengo il valore quadratico medio del pacchetto di segnali che differiscono al più di 1Hz in frequenza. Coerentemente con ciò, questa grandezza è chiamata **densità spettrale di potenza**

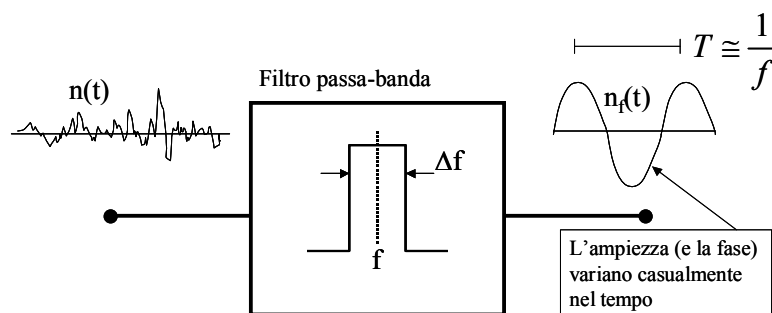


Fig. 8.2 Schematizzazione dell'estrazione della densità spettrale di potenza alla frequenza f da un segnale $n(t)$ attraverso un filtro passa-banda stretto $\Delta f=1\text{Hz}$.

del rumore alla frequenza f , ha le dimensioni di $[V^2/Hz]$ o $[A^2/Hz]$ e la indichiamo con

$$S(f) = \overline{n_f^2(t)} / \Delta f \quad (8.1)$$

Ripetendo il procedimento variando la frequenza centrale f del filtro, si può ottenere la densità spettrale di potenza del rumore a tutte le frequenze. Esso costituisce lo **spettro di potenza** del rumore.

Lo spettro di potenza del rumore può avere un andamento in linea di principio qualsivoglia (Fig.8.3a). Se lo spettro è piatto (Fig.8.3b), cioè se il valore quadratico medio di ogni componente in frequenza del rumore è uguale alle altre, si dice che lo spettro è bianco. Se lo spettro non è bianco, in gergo si dice che è “colorato”. Ad esempio, se sono più ampie le frequenze basse (Fig.8.3c) si dice che il rumore è rosa, in analogia con l’effetto che si avrebbe se le onde sinusoidali fossero onde di luce visibile, oppure si dice che il rumore ha “una componente $1/f$ ” ad indicare che il rumore diminuisce all’aumentare della frequenza come $1/f$ o simili.

8.2.3 Densità spettrale e valore RMS del rumore

E’ intuitivo pensare che la potenza del rumore totale $n(t)$ (cioè il suo valore quadratico medio, $\overline{n^2(t)}$) sia la somma delle potenze trasportate dalle singole componenti sinusoidali, cioè che

$$\overline{n^2(t)} = \int_0^\infty S(f) df \quad (8.2)$$

Se si estrapola la radice quadrata dell’espressione (8.2) si ottiene il valore RMS del rumore come introdotto all’inizio:

$$\sigma = \text{RMS} = \sqrt{\overline{n^2(t)}} = \sqrt{\int_0^\infty S(f) df} \quad (8.3)$$

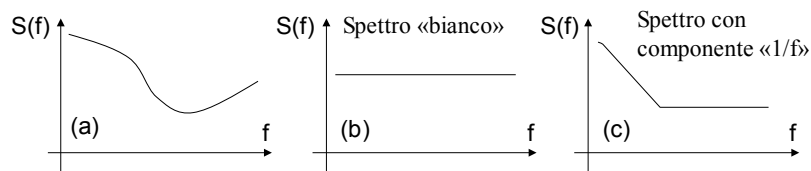


Fig. 8.3 Esempi di spettri di potenza di rumore che si possono trovare in un punto di un circuito elettronico.

Dagli estremi di integrazione si nota che se la banda di frequenze fosse veramente infinita, facilmente si avrebbe una barba di rumore di ampiezza spropositata. Fortunatamente, gli elementi capacitivi presenti nel circuito definiscono una banda finita di frequenze in cui l'integrazione si attua, così da fornire un valore finito di rumore come effettivamente avviene nella pratica e che vedremo meglio in seguito.

Verifica analitica che il valore quadratico medio della somma di sinusoidi sia uguale alla somma dei valori quadratici medi delle singole sinusoidi.

Si consideri la somma di due sinusoidi : $U(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$
Il valore quadratico medio della somma è :

$$\overline{u^2(t)} = \overline{(A \sin \omega_1 t)^2} + \overline{(B \sin \omega_2 t)^2} + 2AB \overline{(\sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t)} = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} + 0$$

Il risultato è appunto la somma dei valori quadratici medi delle singole sinusoidi.

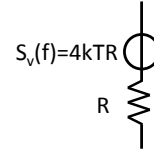
8.3 SORGENTI DI RUMORE IN UN CIRCUITO

Per quantificare l'entità del rumore presente in un punto di un circuito bisogna innanzitutto conoscere il rumore prodotto da ogni elemento che compone il circuito stesso. L'informazione di interesse che descrive completamente un elemento elettronico (resistore, transistor, ecc.) dal punto di vista del rumore è il suo **spettro di potenza di rumore**.

8.3.1 Rumore di un resistore

La causa fisica del rumore elettronico in un resistore è il moto casuale nelle 3 direzioni dello spazio dei portatori di carica (elettroni e/o lacune) nel dispositivo, detto *moto browniano*. In conseguenza di ciò, la differenza di potenziale tra i morsetti di un resistore a vuoto (cioè non collegato) non è sempre rigorosamente nulla ma fluttua attorno al valore $V=0V$: ad un certo istante infatti può accadere che nel loro moto casuale, gli elettroni si trovino più numerosi in prossimità di un morsetto piuttosto che dell'altro, determinando in quell'istante una differenza di potenziale non nulla tra i morsetti. Queste fluttuazioni della tensione tra i morsetti di un resistore scollegato le chiamiamo rumore.

Poiché la tensione ai morsetti di un resistore a vuoto fluttua, è naturale pensare di rappresentare il resistore reale come un resistore ideale privo di rumore con in **serie** un generatore di tensione variabile. La tensione erogata da questo generatore avrà **valore medio nullo** ma **valore quadratico medio NON nullo**.

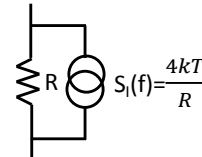


Se si misurasse il valore quadratico medio frequenza per frequenza (cioè lo spettro) del rumore di tensione di una resistenza di valore R , si troverebbe che esso è in buona approssimazione uno **spettro bianco con densità spettrale**

$$S_v(f) = 4 k T R \quad [V^2/Hz] \quad (8.4)$$

Questo risultato ci dice che il rumore di tensione di un resistore è tanto maggiore quanto maggiore è la temperatura T di funzionamento e quanto maggiore è il suo valore R . Il fattore di proporzionalità k è la costante di Boltzmann.

In alternativa, poiché la corrente in un resistore cortocircuitato fluttua, si potrebbe rappresentare il resistore reale come un resistore ideale privo di rumore con in **parallelo** un generatore di corrente variabile. La corrente erogata da questo generatore avrà **valore medio nullo** ma **valore quadratico medio NON nullo**.



Se si misurasse il valore quadratico medio frequenza per frequenza (cioè lo spettro) del rumore di corrente di una resistenza di valore R , si troverebbe che esso è in buona approssimazione uno **spettro bianco con densità spettrale**

$$S_i(f) = 4 k T / R \quad [A^2/Hz] \quad (8.4 \text{ bis})$$

Il rumore di una resistenza è chiamato **rumore termico** o anche **rumore Johnson** dal nome dello scienziato che per primo lo ha misurato negli anni '20.

Ricordando che $kT/q = V_{th} = 25mV$ a $T = 300K$, il valore di $S_v(f)$ può essere espresso dividendo e moltiplicando per $q = 1.6 \cdot 10^{-19}C$ più facile da ricordare di $k = 1.38 \cdot 10^{-23}J/K$ come:

$$S_v(f) = 4 \frac{kT}{q} q \cdot R = 0.1 \cdot q \cdot R \quad [V^2/Hz].$$

Il rumore termico è presente con lo stesso valore delle (8.4) non solo quando il componente è isolato ma anche quando il resistore è polarizzato e percorso da una generica corrente. Ciò è dovuto al fatto che il moto browniano dei portatori è ben maggiore, in termini di velocità delle cariche, della piccola modifica al loro moto apportata dalla tensione esterna applicata per produrre la corrente netta misurata. Pertanto il rumore termico non ha motivo di modificarsi quando si connette un resistore in un circuito e gli si fa passare una corrente.

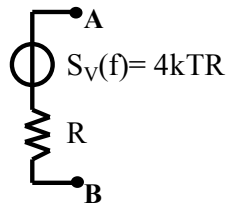
La cautela da adottare è quella di utilizzare il valore appropriato per la temperatura T : se il componente si riscalda a causa della dissipazione di potenza, T dovrebbe

essere quanto meno la temperatura assoluta del componente (a rigore, T deve rappresentare l'energia cinetica media, $E=3kT/2$, delle cariche accelerate dai campi elettrici di polarizzazione e quindi T può anche essere superiore alla temperatura assoluta del componente).

Se percorsi da corrente, alcuni tipi di resistori possono manifestare anche un aggiuntivo rumore $1/f$.

CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN RESISTORE RUMOROSO

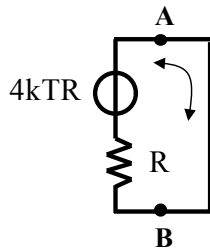
Resistore in un circuito aperto:



Fluttuazione di corrente : *NULLA, data l'assenza di una maglia.*

Fluttuazione di tensione tra A e B : $S_V(f) = 4kTR$

Se il resistore viene cortocircuitato:

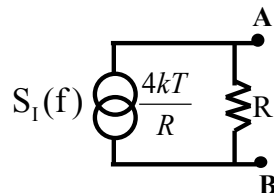


Fluttuazione di corrente :
(ricordarsi che la densità spettrale è una grandezza quadratica, per cui la legge di Ohm va applicata al quadrato)

$$S_I(f) = \frac{S_V(f)}{R^2} = \frac{4kTR}{R^2} = \frac{4kT}{R}$$

Fluttuazione di tensione tra A e B : *NULLA, dato il cortocircuito*

Da quest'ultimo caso si può ricavare il circuito equivalente NORTON di una resistenza rumorosa:



Il resistore rumoroso può quindi essere rappresentato indifferentemente con l'uno (Thevenin) o con l'altro (Norton) dei due circuiti equivalenti, a seconda della convenienza

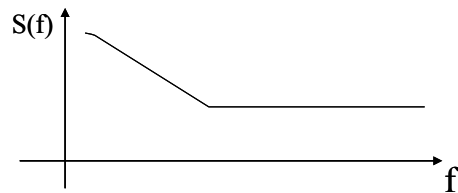
8.3.2 Rumore di canale di un MOSFET

Anche il canale di un MOSFET è un resistore, avente una resistenza pari a $1/g_m$. Esso effettivamente genera un rumore termico. Per come viene normalmente usato il transistor, è comodo visualizzare il suo rumore con un generatore di **corrente** di rumore posto in parallelo al canale avente densità spettrale a media frequenza pari a :

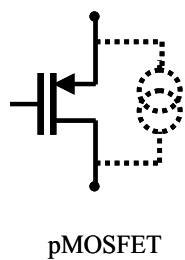
$$S_I(f) = \frac{4kT}{1/g_m} \frac{2}{3} \quad (8.5)$$

Il piccolo fattore correttivo, normalmente pari a $2/3$, deriva dal fatto che il canale è un resistore con resistenza non omogenea lungo tutto il canale: infatti vicino al source c'è un maggior accumulo di portatori (e quindi la resistenza di quel tratto di canale è più piccola) mentre vicino al punto di pinch-off la densità di portatori diventa piccola (e quindi la resistenza locale aumenta).

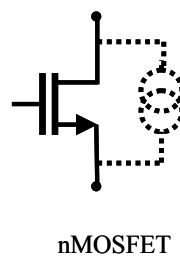
Lo spettro di rumore di canale del MOSFET è ben rappresentabile come rumore bianco a medie ed alte frequenze. A bassa frequenza invece, a causa dell'intrappolamento e rilascio dei portatori da parte di trappole inevitabilmente presenti all'interfaccia tra ossido e canale, il rumore tende ad essere più grande ed a crescere al decrescere della frequenza: esso è detto rumore $1/f$.



CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN MOSFET RUMOROSO



$$S_I(f) = \frac{4kT}{1/g_m} \frac{2}{3}$$



$$S_I(f) = \frac{4kT}{1/g_m} \frac{2}{3}$$

8.3.4 Rumore di giunzione di un bipolare

La fluttuazione della corrente che scorre tra emettitore e collettore di un transistor bipolare origina dal fatto che le cariche elettriche in moto (elettroni o lacune) devono attraversare delle regioni svuotate di portatori (le cosiddette regioni di carica spaziale a cavallo delle giunzioni metallurgiche) in cui non sono presenti cariche libere mobili se non quelle degli stessi portatori in transito. In questa situazione ogni portatore si muove nella zona svuotata del cristallo in modo del tutto indipendente (scorrelato) dagli altri portatori. Essi quindi poi escono da tale zona in istanti di tempo del tutto casuali e NON correlati uno rispetto all'altro.

Il numero medio di cariche in uscita nell'unità di tempo costituisce la corrente media, I_C , circolante nel transistor, mentre il fatto che le cariche arrivino non con perfetta regolarità temporale determina delle fluttuazioni su tempi brevi del citato valore medio. Se si misurasse lo spettro delle fluttuazioni di questa corrente si troverebbe che è in buona approssimazione uno spettro bianco con densità spettrale

$$S_{I_C}(f) = 2qI_C \quad [A^2/Hz] \quad (8.6)$$

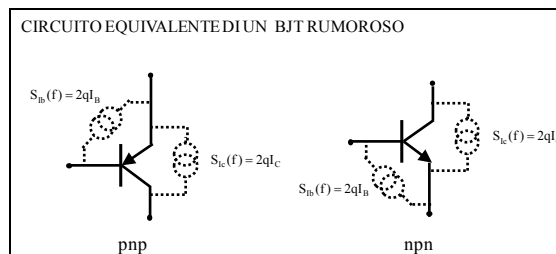
cioè pari al doppio del prodotto tra la carica dell'elettrone ($q=1.6 \times 10^{-19}C$) e la corrente media circolante. Questo genere di rumore è chiamato **rumore shot** della corrente I_C , dove il termine "shot" sembra voler richiamare l'arrivo a "colpi casuali" dei portatori.

Un BJT rumoroso è quindi rappresentabile dal simbolo ideale con in parallelo al collegamento tra emettitore e collettore un generatore di corrente di valore medio nullo e di valore quadratico medio dato da $S_{I_C}(f)$.

Poiché nel BJT è presente anche un flusso di portatori (di segno opposto rispetto a quelli che scorrono da emettitore a collettore) che scorre dalla base all'emettitore e che attraversa la corrispondente regione svuotata, anche la corrente di base fluttua attorno al suo valor medio, I_B , con una densità spettrale pari a

$$S_{I_B}(f) = 2qI_B \quad [A^2/Hz] \quad (8.7)$$

Poiché i due moti sono correlati rispetto al valor medio ($\beta = I_C/I_B$) ma sostanzialmente non correlati per quanto riguarda le microscopiche fluttuazioni di moto di ogni singolo portatore, i generatori di corrente di rumore $S_{I_C}(f)$ e $S_{I_B}(f)$ possono essere con buona approssimazione considerati indipendenti uno rispetto all'altro.



8.4 TRASFERIMENTO DELLA DENSITA' SPETTRALE DI RUMORE DAL PUNTO SORGENTE ALL'USCITA

Vediamo ora come calcolare la densità spettrale di potenza di rumore in un punto qualsiasi di un circuito (tipicamente all'uscita del circuito) dovuta alle varie sorgenti di rumore presenti nel circuito stesso.

A titolo di esempio consideriamo il circuito riportato nella Fig.8.4 in cui ci sono tre sorgenti di rumore (le due resistenze ed il MOSFET) e poniamoci l'obiettivo di calcolare l'entità del rumore complessivo in uscita in termini di densità spettrale $S_{V_u}(f)$ delle fluttuazioni della tensione $V_u(t)$. Come per l'analisi della funzione di trasferimento di un circuito quando eccitato da un segnale in ingresso, anche ora con il rumore i calcoli vengono svolti supponendo la rete lineare.

8.4.1 Procedimento di calcolo

- Associa al componente rumoroso il suo generatore di rumore (tensione o corrente a seconda della causa fisica o della comodità di calcolo), identificandolo come generatore che produce un segnale nel tempo. Scegliamo un verso per questo impulso nel tempo (Fig.8.4) e possiamo immaginare il segnale come una delle sinusoidi alle varie frequenze "f" di cui si può pensare scomposto il rumore in un dato istante.

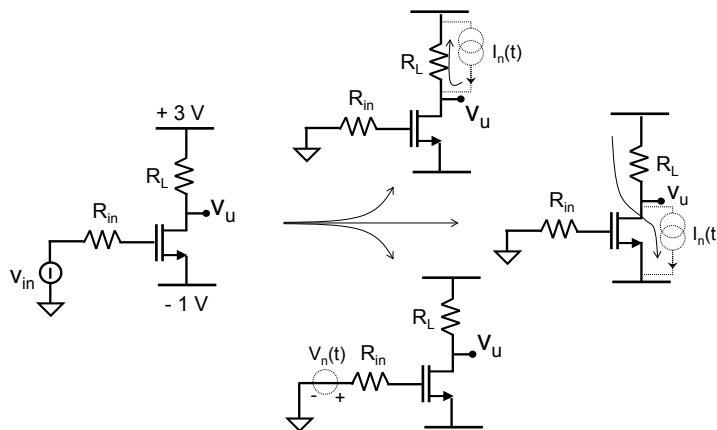


Fig. 8.4 Circuito di cui si voglia calcolare la densità spettrale in uscita dovuta ai 3 componenti rumorosi R_{in} , T_1 ed R_L . A rotazione per ogni sorgente di rumore si applica un generatore di "segnale" nel tempo (a scelta di tensione o di corrente) che simuli il rumore.

- Calcolo la funzione di trasferimento del “segnale di rumore” verso l'uscita in modo del tutto analogo a quello che farei se fosse un semplice generatore di segnale.

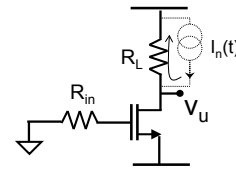
- Converto il "segnale" all'uscita in densità spettrale facendo il valore quadratico medio della sua espressione immaginando di calcolare il valore quadratico medio di quella sinusoide di rumore (tra le infinite presenti) presa in esame. Infatti non conosciamo l'andamento nel tempo del “segnale di rumore” ma solo la sua densità spettrale di potenza, cioè il suo valore quadratico medio, $\overline{V_u(t)^2} = S_u(f)$.

Con riferimento all'esempio della Fig.8.4 queste considerazioni si traducono nella seguente pratica:

Rumore di R_L :

Associo ad R_L un generatore di “segnale di rumore”, ad esempio di corrente scegliendo un verso per il “segnale” di corrente. Poiché l'impedenza di Drain del MOSFET è infinita, la corrente di rumore si chiude tutta su R_L fornendo in uscita un segnale :

$$v_u = i_n R_L$$



Facendo il valore quadratico medio di tale espressione si ottiene il valore quadratico medio di ogni componente in frequenza del “segnale di rumore” all'uscita. Questa densità spettrale in uscita è così espressa in funzione del prodotto tra il valore quadratico medio di ogni componente del “segnale di rumore” in ingresso (la densità spettrale della sorgente di rumore) ed il quadrato del trasferimento :

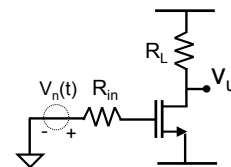
$$\overline{V_n^2} = \overline{I_n^2} \cdot R_L^2$$

$$S_U(f) = \frac{4kT}{R_L} \cdot R_L^2$$

Rumore di R_{in} :

Associo ad R_{in} un generatore di “segnale di rumore”, ad esempio di tensione scegliendo un verso per il “segnale” di tensione, e ne calcolo il trasferimento verso l'uscita :

$$V_u = -V_n g_m R_L$$



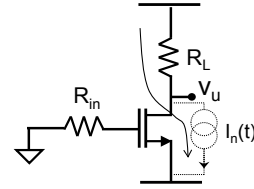
In analogia a quanto fatto sopra, facendo il valore quadratico medio di tale espressione si ottiene la densità spettrale in uscita espressa in funzione del prodotto tra la densità spettrale della sorgente di rumore ed il quadrato del trasferimento :

$$\overline{V_n^2} = \overline{V_n^2} \cdot g_m^2 R_L^2$$

$$S_U(f) = 4kT R_{in} \cdot (g_m R_L)^2$$

Rumore di $T1$:

Associo al MOSFET il generatore di corrente tra Source e Drain, scegliendo un verso per il “segnale” di corrente. L’impulso di corrente di rumore non può ricircolare all’interno dello stesso MOSFET perché la tensione V_{gs} non ne viene variata. Pertanto scorrerà tutto in R_L fornendo un segnale in uscita pari a



$$V_u = -I_n R_L$$

Facendone il valore quadratico medio frequenza per frequenza si ottiene la densità spettrale in uscita

$$\overline{V_n^2} = \overline{I_n^2} \cdot R_L^2$$

$$S_U(f) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4kT}{1/g_m} \cdot R_L^2$$

Si faccia attenzione, come fatto fino ad ora, che ***benché il segno di $V_n(t)$ o $I_n(t)$ sia arbitrario, il verso delle correnti o delle tensione da questi generate fino ad arrivare alla tensione in uscita gli deve essere congruente.*** Nell’esempio appena fatto questa attenzione sembra ininfluenza sul risultato finale perché l’elevamento al quadrato fa sparire il segno. Tuttavia ci sono casi in cui risulta fondamentale seguire ogni “impulso di rumore” con il verso giusto, tipicamente quando si hanno due possibili percorsi verso lo stesso punto d’uscita. In questi casi bisogna calcolare con precisione l’effettivo spostamento dell’impulso in uscita prima di farne il valore quadratico. Questo è ad esempio il caso dei circuiti differenziali, come vedremo nell’esercizio E8.6.

Riassumendo:

- E’ buona usanza segnare nel circuito il generatore di rumore di ogni sorgente come fatto nella Fig.8.4.
- Il calcolo del rumore corrisponde a tanti calcoli di funzioni di trasferimento tra i rispettivi generatori di rumore e l’uscita.
- Si noti come in un circuito elettronico ***ogni sorgente di rumore abbia una differente funzione di trasferimento verso lo stesso punto di uscita.*** Questa banale considerazione acquisterà importanza più avanti quando lungo il percorso del rumore ci saranno delle capacità che influenzeranno il comportamento in frequenza di ogni singola sorgente in maniera differente.
- Nel caso di più sorgenti fisiche di rumore, i generatori rappresentano fluttuazioni aventi cause fisiche differenti e indipendenti. I rumori quindi possono essere calcolati indipendentemente per ogni causa fisica e poi sommati nelle loro densità spettrali a produrre la densità spettrale totale in uscita.

8.4.2 Somma di più rumori

Nel caso di più sorgenti fisiche di rumore, poiché i generatori rappresentano fluttuazioni aventi cause fisiche differenti e indipendenti, i rumori possono essere calcolati indipendentemente (come abbiamo fatto nel paragrafo precedente) e poi sommati nelle loro densità spettrali come qualunque grandezza statistica.

La densità totale di rumore in uscita nel circuito della Fig.8.4 è quindi la somma delle tre densità trovate :

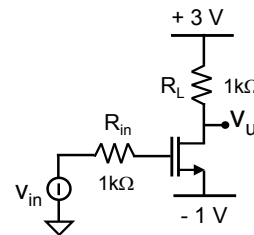
$$S_U(f) = 4kTR_{in} \cdot (g_m R_L)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4kT}{1/g_m} \cdot R_L^2 + \frac{4kT}{R_L} \cdot R_L^2$$

E' facile ora fare delle considerazioni operative sul circuito della Fig.8.4 :

- i) basta che il guadagno del circuito sia maggiore di 1 ($R_L > 1/g_m$) perché il rumore della resistenza di carico sia trascurabile rispetto al rumore del MOSFET;
- ii) è importante avere una resistenza di ingresso R_{in} bassa, in sintonia con il fatto che la resistenza di uscita dello stadio di comando è opportuno che sia la più piccola possibile per avere ad esempio meno perdita di segnale e banda più larga. Ora aggiungiamo anche che introduce meno rumore !

E 8.1 Calcolare il valore della densità spettrale del rumore in uscita all'amplificatore della Fig.8.4 in cui il MOSFET abbia $V_T=0.5V$, $V_A=\infty$, $k=4mA/V^2$ ed in cui $R_{in}=1k\Omega$ e $R_L=1k\Omega$.

Confrontare i contributi ed evidenziare la sorgente di rumore più importante.



Il circuito porta $I_D=1mA$ ed ha $g_m=4mA/V$ ($1/g_m=250\Omega$). Ha un guadagno $G=-4$.

Rumore di R_L : poiché $\overline{V_n^2} = S_U(f) = \overline{I_n^2} \cdot R_L^2 = \frac{4kT}{R_L} \cdot R_L^2$ e ricordando che

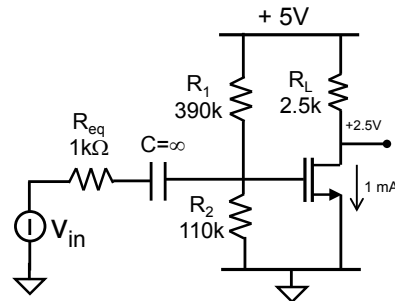
$4kT/q=100mV$, si ottiene una densità spettrale in uscita dovuta a R_L di $S_U(f)=16 \cdot 10^{-18} V^2/Hz$. Spesso si usa indicarne la sua radice quadrata per comodità in quanto avrebbe le stesse dimensioni del segnale e quindi più intuitiva da analizzare e forse anche da ricordare. Nel nostro caso si ha $\sqrt{S_u(f)} = 4 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$.

Rumore di R_{in} : poiché $S_U(f) = 4kTR_{in} \cdot (g_m R_L)^2$ la densità spettrale in uscita risulta $S_U(f)=256 \cdot 10^{-18} V^2/Hz$ ($16nV/\sqrt{Hz}$).

Rumore del MOSFET: poiché $S_U(f) = \overline{I_n^2} \cdot R_L^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4kT}{1/g_m} \cdot R_L^2$, si ottiene $42 \cdot 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$ ($6.5 \frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}}$).

La densità totale di rumore in uscita è quindi la somma delle densità trovate, $314 \cdot 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$ equivalenti a $17.6 \frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}}$, prevalentemente data dal rumore della resistenza R_{in} . Anche quindi per motivi di rumore è importante progettare circuiti con R_{in} piccola.

E 8.2 Calcolare la densità spettrale del rumore in uscita all'amplificatore della figura accanto ($V_T=0.6V$, $k=4\text{mA}/V^2$), dovuto a tutti i componenti che lo costituiscono. Confrontare i vari contributi ed evidenziare la sorgente di rumore più importante. Indicare le precauzioni da prendere in fase di progetto dell'amplificatore in modo da avere la densità spettrale di rumore più piccola possibile.



Evidenziando ad uno ad uno i generatori di rumore dei vari componenti circuitali si ottiene l'espressione della densità spettrale totale :

$$S_u(f) = 4kTR_1 \cdot \frac{(R_{eq} \parallel R_2)^2}{(R_1 + R_{eq} \parallel R_2)^2} \cdot g_m^2 \cdot R_L^2 + 4kTR_2 \cdot \frac{(R_{eq} \parallel R_1)^2}{(R_2 + R_{eq} \parallel R_1)^2} \cdot g_m^2 \cdot R_L^2 + 4kTR_{eq} \cdot \frac{(R_1 \parallel R_2)^2}{(R_{eq} + R_1 \parallel R_2)^2} \cdot g_m^2 \cdot R_L^2 + \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot R_L^2 + 4kTR_L$$

- Confrontiamo i primi 3 addendi, che si riferiscono alle resistenze in ingresso R_1 , R_2 e R_{eq} . Come ben sappiamo (in base a motivi di ottimizzazione del trasferimento di segnale da v_{in} a v_{gs} , di minimizzazione della potenza dissipata stazionaria e altro), siamo portati a volere R_{eq} piccola e R_1 ed R_2 grandi, come effettivamente è nel circuito. Così facendo anche il rumore viene ridotto al minimo !

Infatti, i primi 3 termini, quando $R_{eq} \ll R_1$ e R_2 , diventano:

$$\cong 4kT \cdot \left(\frac{R_{eq}^2}{R_1} + \frac{R_{eq}^2}{R_2} + R_{eq} \right) \cdot g_m^2 \cdot R_L^2 \approx 4kT \cdot R_{eq} \cdot g_m^2 \cdot R_L^2 = 1.6 \cdot 10^{-15} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}$$

dove si vede che se le resistenze di polarizzazione R1 e R2 sono di valore elevato, il loro rumore si scarica sulla bassa impedenza Req dello stadio di pilotaggio e non danno contributi significativi all'uscita: più piccola è Req (resistenza di uscita dello stadio di pilotaggio) meglio è per il rumore !

Quindi il rumore totale in uscita è sostanzialmente pari a :

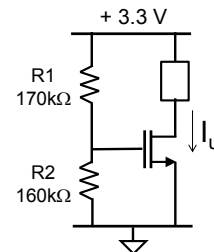
$$S_u(f) \cong 4kT \cdot R_{eq} \cdot g_m^2 \cdot R_L^2 + \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot R_L^2 + 4kT \cdot R_L$$

- Confrontando di nuovo gli addendi, ed in particolare i primi due, si vede che è prevalente il primo od il secondo termine a secondo che sia più grande Req o $1/g_m$. Come più volte visto in varie altre occasioni e per altri motivi, **polarizzare il transistore con alte correnti (e quindi transconduttanze elevate) è vantaggioso anche dal punto di vista del rumore !** (ma non dimenticare che così facendo si preleva più potenza dalle alimentazioni). Nel nostro caso il primo termine è maggiore di circa 5 volte rispetto al secondo.

- L'ultimo termine difficilmente introduce un contributo di rumore prevalente; basta infatti che il guadagno sia maggiore di 1 (nel nostro caso $g_m R_L = 10$) perché esso sia trascurabile. Complessivamente il rumore totale in uscita è dato prevalentemente dalla resistenza Req e pari circa a $1.9 \cdot 10^{-15} \text{ V}^2/\text{Hz}$ ($140 \frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}}$).

E 8.3

Si consideri il generatore di corrente qui accanto. Valutare l'entità del rumore presente nella corrente I_U prodotta al drain, identificando i singoli contributi dati da ogni componente.



Il circuito è molto simile a quello dell'esercizio precedente e l'espressione della densità spettrale della corrente di uscita è ricavata in maniera analoga, ottenendo

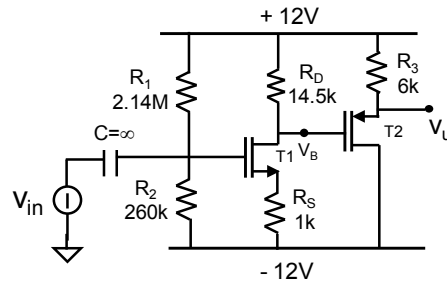
$$S_u(f) = 4kT R_1 \cdot \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot g_m^2 + 4kT R_2 \cdot \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot g_m^2 + \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right)$$

Le conseguenze della mancanza di Req sono però enormi. Ora le due resistenze R1 ed R2 producono un gran rumore che non trova più modo di scaricarsi in Req e viene pertanto riproposto in uscita, diventando la fonte di rumore prevalente ! Si potrebbe scegliere R1 ed R2 molto piccole, ed avere così una bassa densità spettrale di rumore, a scapito però di un elevato consumo di potenza elettrica statica al circuito. Una migliore soluzione verrà analizzata in un esercizio successivo.

E 8.4 Come cambia il rumore quando si aggiunge al generatore di corrente appena visto una resistenza di degenerazione tra il Source e massa ? Aumenta o diminuisce e perché ? .

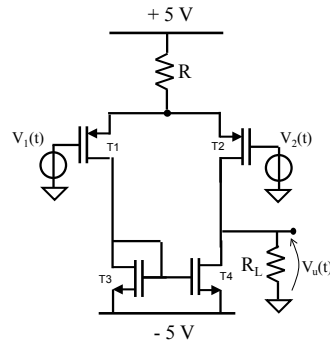
E 8.5 Considerare il circuito accanto, già visto in E 7.4, in cui T_1 : $V_T=0.6V$, $k=1mA/V^2$ e $V_A=\infty$ e T_2 : $V_T=0.5V$, $k=500\mu A/V^2$ e $V_A=\infty$.

- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuto alle resistenze di polarizzazione R_1 ed R_2 .
- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuto allo stadio amplificante centrale, in particolare alle resistenze R_S , R_D ed T_1 .
- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuto all'ultimo stadio a Source follower, in particolare R_3 e T_2 .
- Confrontare i 3 risultati ottenuti e convincersi del termine dominante.



E 8.6 Nel circuito accanto i MOSFET abbiano $V_T=0.5V$, $k=3mA/V^2$ e $V_A=\infty$.

- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuto ai transistori dello specchio T_3 e T_4 .
- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuto allo stadio di ingresso T_1 e T_2 .
- Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuto alla resistenza R .
- Confrontare i risultati ottenuti e convincersi del termine dominante.



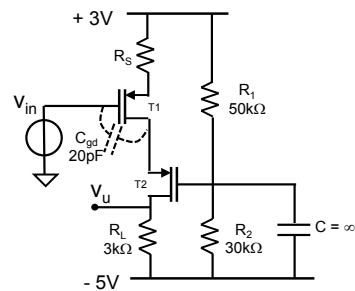
a) T_3 : il generatore di rumore riesce a modificare la tensione di comando di T_3 attraverso il collegamento a transdiodo (vario la carica al Gate all'istante dell'accensione). Quindi la corrente di rumore viene chiusa in T_3 e riproposta identica in T_4 : $S_u(f)=4kTg_mR_L^2$

T_4 : il generatore di rumore non riesce a modificare la tensione di Gate (quindi non cambia la corrente in esso) e quindi tutta la corrente di rumore va direttamente in uscita : $S_u(f)=4kTg_mR_L^2$.

- b) Facendo con attenzione i conti delle partizioni di corrente e considerando l'effetto dello specchio si trova che ognuno dei due transistori di ingresso, T1 e T2, concorrono a produrre in uscita un rumore $S_u(f)=4kTg_mR_L^2$
- c) Se seguiamo il segnale nel tempo del rumore vediamo che grazie allo specchio non scorre corrente nella resistenza R_L . Pertanto il suo contributo di rumore all'uscita sarà nullo.

E 8.7 Considerare l'amplificatore a destra, in cui i MOSFETs abbiano $k=500\mu A/V^2$, $V_T=0.6V$ e $V_a=\infty$.

- a) Dimensionare R_S affinché i MOSFET portino una corrente di $500\mu A$.
- b) Calcolare la densità spettrale di rumore in uscita dovuta a tutte le sorgenti di rumore presenti nel circuito.



- (a) $R_S=2.8k\Omega$
- (b) Si noti che il cascode (sia T2 che le resistenze di polarizzazione) non contribuiscono al rumore in uscita a bassa frequenza. Ottimo!

8.4.3 Trasferimento diretto dei generatori di densità spettrale

In alternativa alla modalità illustrata nel §8.4.1 si può procedere nel modo seguente per calcolare la densità spettrale di rumore in uscita in funzione delle densità spettrali delle varie sorgenti di rumore :

- Associa al componente il suo generatore di rumore (tensione o corrente a seconda della causa fisica o della comodità di calcolo), identificandolo come generatore che produce una densità spettrale di potenza $S_n(f)$ nota.
- Calcola il trasferimento dei generatori $S_n(f)$ verso l'uscita, ricordando che devo considerare il quadrato della funzione di trasferimento perché la densità spettrale è una grandezza quadratica e quindi la legge di Ohm va applicata al quadrato.
- La trovata densità spettrale di rumore in uscita, $S_U(f)$ sarà la somma dei contributi delle singole sorgenti.

La strada proposta con questa modalità sembra altrettanto efficace di quella proposta nel §8.4.1 ma va seguita con cautela perché ha i seguenti "svantaggi":

- Non permette di considerare le correlazioni tra i segnali quando il cammino verso l'uscita può avere due percorsi, come ad esempio nei circuiti differenziali. Riprovate infatti a svolgere l'esercizio E8.6 e scoprirete che non riuscireste a comporre correttamente i segnali correlati.
- Se nel circuito sono presenti degli elementi conservativi (capacità ed induttanze), il calcolo può essere più complicato e generare dubbi.

8.5 TRASFERIMENTO DELLA DENSITA' SPETTRALE DI RUMORE IN PRESENZA DI ELEMENTI CAPACITIVI

Se nel trasferimento del rumore dall'elemento che lo genera al nodo di interesse si incontrano lungo il circuito degli elementi conservativi (capacità e/o induttanze), questi devono essere considerati nello stesso modo in cui li si considera nel trasferimento di un segnale. Il modulo della funzione di trasferimento lineare così trovata dovrà poi essere elevato al quadrato per farne il valore quadratico medio.

Nel caso ad esempio del semplice amplificatore Source a massa con carico capacitivo della Fig.8.6, in cui si voglia valutare come si riflette il rumore del MOSFET all'uscita, si otterrebbe:

$$V_{out}(s) = -i_{nMOS}(s) \cdot \frac{R_L}{1 + sR_L C}$$

dove si individua la funzione di trasferimento $T(s) = R_L / (1 + sR_L C)$ tra la corrente del Drain del MOSFET e la tensione ai capi del carico, responsabile ora anche del trasferimento di ogni componente di corrente di rumore del canale del MOSFET. Questa funzione di trasferimento è riportata nella Fig.8.6 ed indicata con (a). Facendo il valore quadratico medio di ognuno degli impulsi sinusoidali in cui

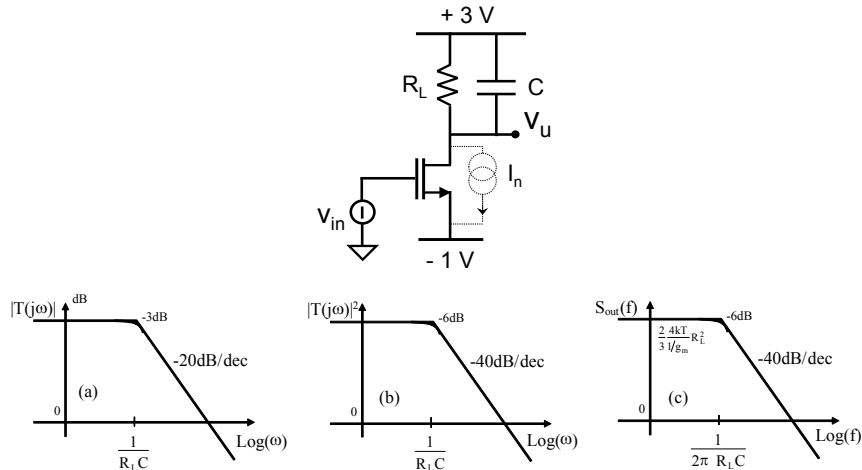


Fig. 8.6 *Trasferimento del rumore di canale di un MOSFET in un amplificatore Source a massa con carico capacitivo e corrispondenti rappresentazioni del modulo della Funzione di Trasferimento per (a) il "segnale" di rumore, (b) il suo valore quadratico medio e (c) l'effettiva densità spettrale del rumore all'uscita.*

penso scomposto il rumore, si ottiene

$$\overline{V_u^2} = \overline{i_{nMOS}^2} \cdot \left(\frac{R_L}{1 + sR_L C} \right)^2$$

che fornisce il modulo della desiderata densità spettrale di rumore in uscita all'amplificatore:

$$S_u(f) = S_I(f) \cdot \frac{R_L^2}{1 + \omega^2 R_L^2 C^2}$$

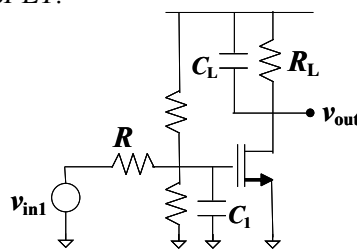
Questa funzione di trasferimento, che vale quindi solo per la densità spettrale di rumore, è riportata nella Fig.8.6(b).

Posto $S_I(f) = (2/3)4kT/(1/g_m)$, costante nell'intervallo di frequenze di nostro interesse, l'andamento dello spettro del rumore che si rileverebbe ai morsetti del condensatore è quello riportato schematicamente nella Fig.8.6 (c). Il valore di $S_u(f)$ a bassa frequenza è pari a $S_I(f)R_L^2$, mentre le componenti armoniche del rumore a più alta frequenza sono attenuate per il filtraggio determinato dal condensatore.

Si tenga presente che la funzione di trasferimento trovata è specifica di quella sorgente di rumore e di quel nodo di uscita. Per un'altra sorgente di rumore la funzione di trasferimento verso lo stesso punto sarà in generale diversa. Pertanto ***una singola capacità in un circuito produce effetti diversi a seconda della posizione della singola sorgente di rumore presa in esame.***

E 8.8

Si consideri il seguente amplificatore di tensione, in cui siano presenti due capacità. Calcolare la densità spettrale in uscita della resistenza di sorgente R e del MOSFET.



Notare come le due funzioni di trasferimento siano diverse.

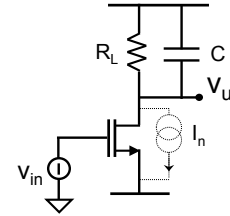
8.6 CALCOLO DEL VALORE RMS DEL RUMORE IN USCITA.

Data la densità spettrale di potenza del rumore in un dato punto del circuito, ed in particolare all'uscita, $S_u(f)$, si può ottenere la potenza complessiva del rumore (cioè il valore quadratico medio totale) sommando (integrando) tutti i suddetti singoli contributi alle diverse frequenze come visto nella (8.2):

$$\overline{v_u^2} = \int_0^\infty S_u(f) df$$

Benché l'integrale sia calcolato su un intervallo idealmente infinito di frequenze, le capacità inevitabilmente presenti nel circuito renderanno $S_u(f)$ evanescente ad alte frequenze, facendo convergere il valore dell'integrale ad un valore finito.

Se riprendiamo il risultato della densità di rumore all'uscita dell'amplificatore con il Source a massa dovuta al solo rumore generato dal MOSFET precedentemente calcolata, si otterrebbe un valore quadratico medio del rumore di tensione ai capi del condensatore pari a:



$$\overline{V_u^2} = \int_0^\infty S_u(f) df = \frac{2}{3} \frac{4kT}{1/g_m} R_L^2 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1 + \omega^2 R_L^2 C^2} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8.12)$$

In forma grafica, l'operazione di integrale equivale a calcolare l'area sottesa dalla densità spettrale di rumore $S_u(f)$ nella Fig.8.7 a sinistra. Per risolvere l'integrale, si

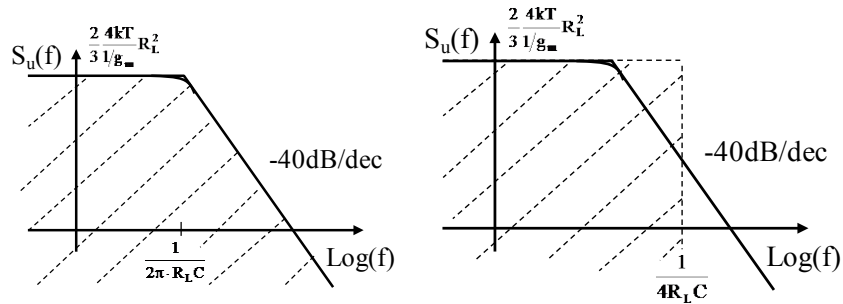


Fig. 8.7 *Rappresentazione grafica (a sinistra) della (8.12) in cui si evidenzia l'area sottesa dalla densità spettrale, il cui valore equivale a $\overline{V_n^2}$; (a destra) rettangolo di area equivalente, che definisce la Banda Equivalente di rumore di un circuito a singolo polo.*

ricordi che $\int \frac{dx}{1+b^2x^2} = \frac{1}{b} \cdot \arctg(bx)$ così da ottenere :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2 R_L^2 C^2} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_L C} [\arctg(R_L C \cdot \omega)]_0^\infty = \frac{1}{4R_L C}$$

Da cui:

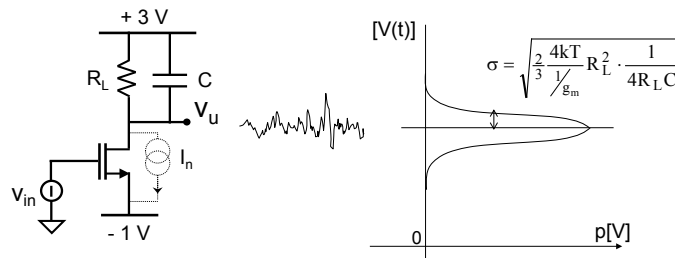
$$\overline{V_u^2} = \int_0^\infty S_u(f) df = \frac{2}{3} \frac{4kT}{1/g_m} R_L^2 \cdot \frac{1}{4R_L C} \quad (8.13)$$

Come abbiamo visto all'inizio di questo capitolo, la radice quadrata del valore trovato (RMS significa Root Mean Square, cioè radice del valore quadratico medio) fornisce l'ampiezza della “fascia” di rumore che si vede in quel punto del circuito guardandone l'evoluzione nel tempo con un oscilloscopio:

$$RMS_{rumore} = \sqrt{\overline{V_u^2}} \quad (8.14)$$

Questa è la grandezza da confrontarsi eventualmente con il segnale (hanno infatti le stesse dimensioni) per calcolare il rapporto del segnale sul rumore (S/N).

Nel caso del nostro esempio :



8.6.1 Banda equivalente per il rumore

La (8.13) ci dice che l'area sottesa dalla curva di $S_u(f)$ (Fig.8.7 a sinistra) è equivalente all'area sottesa dal rettangolo tratteggiato nella Fig.8.7 a destra, la cui quota è la densità spettrale di rumore quando la capacità non interviene e la cui estensione in frequenza è pari a $\Delta f = 1/(4R_L C)$. Questo valore è un poco maggiore della frequenza del polo $f = 1/(2\pi R_L C)$ della funzione di trasferimento per il segnale in modo da compensare l'area persa dalla parte destra della curva.

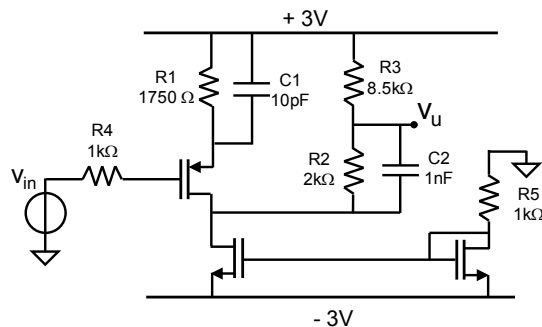
Il fattore $1/(4R_L C)$ ha le dimensioni di una frequenza e rappresenta quindi la banda su cui si deve considerare lo spettro costante pari al valore in continua per avere il valore quadratico medio esatto del rumore. Essa è detta **banda equivalente ai fini del rumore della rete a singolo polo**.

Si faccia attenzione, quando si vuole confrontare il valore della “barba” di rumore prevista dai calcoli di progetto con quella misurata sperimentalmente sul prototipo del circuito, che la banda passante sia la stessa nei due casi. Può succedere infatti che lo strumento di misura (o di visualizzazione dell'andamento nel tempo della tensione di uscita, tipicamente l'oscilloscopio) abbia una banda passante inferiore a quella del circuito e che quindi sia esso a limitare l'integrazione del rumore alla sua banda, facendo apparire una “barba” di rumore minore che nella realtà.

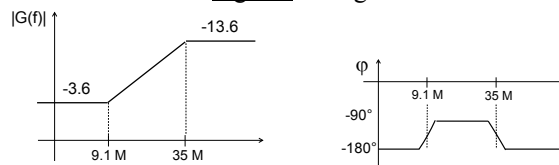
E 8.9

Nel circuito seguente si usino dei MOSFET che abbiano $|V_T|=0.6V$, $|k|=800\mu A/V^2$ e $V_A=\infty$

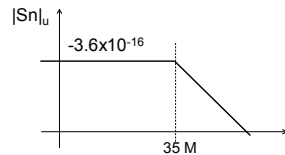
- Calcolare la tensione all'uscita in assenza di segnale.
- Disegnare i diagrammi quotati (modulo e fase) dell'andamento in frequenza del guadagno $G(s)=V_u(s)/V_{in}(s)$, calcolando gli eventuali poli e zeri introdotti dalle capacità $C1$ e $C2$.
- Calcolare il valore della densità spettrale in uscita del rumore introdotto dalla resistenza $R1$ a bassa frequenza.
- Calcolare il valore rms in uscita del rumore introdotto dalla resistenza $R1$.



- La polarizzazione porta a $V_u \approx 0V$ e $g_m|_{T1}=1600\mu A/V$.
- Il trasferimento del segnale tra ingresso ed uscita è il seguente:



- c) La densità spettrale di rumore in uscita è $S_u = 3.6 \times 10^{-16} \text{V}^2/\text{Hz} = (19 \text{nV}/\sqrt{\text{Hz}})^2$.
 d) Lo spettro della densità spettrale di rumore in uscita è invece:



e determina un rumore RMS in uscita pari a circa $140 \mu\text{V}$.

8.6.2 Stima del valore RMS in presenza di più poli e più zeri

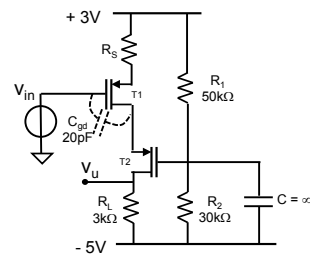
Quando in un circuito ci sono più sorgenti di rumore e più capacità, la funzione che descrive la densità spettrale di rumore $S_u(f)$ può avere un andamento in frequenza anche molto articolato e pertanto la sua integrazione per trovare il valore RMS può prospettarsi non banale. Per nostra fortuna non è solitamente necessario essere così precisi nel calcolo del valore RMS del rumore e ci si può accontentare di una buona stima del rumore entro qualche decina di %.

Aiuta molto nel fare le ipotesi semplificative rappresentare $S_u(f)$ in forma grafica. Guardando i grafici si scopre che spesso la semplificazione ad un solo polo è una ottima approssimazione dell'area sottesa dalla curva vera, a vantaggio di un calcolo quasi immediato. Così in effetti si procede nella maggior parte dei casi. Gli esempi seguenti aiuteranno ad impraticarsi in queste semplificazioni.

E 8.10 Considerare l'amplificatore a destra (vedi E8.7), in cui i MOSFETs abbiano $k=500 \mu\text{A}/\text{V}^2$, $V_T=0.6\text{V}$ e $V_a=\infty$.

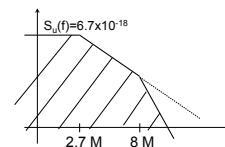
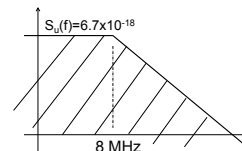
a) Calcolare il valore RMS del rumore in uscita dovuto al canale di T1 quando è presente $C_{gd}=20\text{pF}$ indicata in figura.

c) Se si considerassero le C_{gd} di entrambi i transistori, il valore RMS sarebbe maggiore o minore di prima?



a) Il trasferimento del rumore di T1 verso l'uscita V_u presenta un polo a $f_p=8\text{MHz}$. Opportunamente integrando la densità spettrale di rumore nella banda del trasferimento (banda equivalente di 12.6MHz) si ottiene la deviazione standard della barba di rumore all'uscita pari a $V_{\text{rms}}=9.1 \mu\text{V}$.

(c) La C_{gd} di T2 aggiunge un ulteriore polo alla funzione di trasferimento del rumore di T1 verso l'uscita V_u .

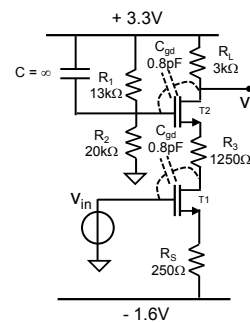


Questo sarebbe sufficiente per dire che il valore RMS del rumore dovrà diminuire. Poiché in questo caso il secondo polo è a frequenza più bassa del primo, una ottima stima per eccesso del rumore la si ottiene integrando l'area come se ci fosse solo il primo polo e quindi ottenendo una diminuzione di rumore RMS rispetto a prima di circa un fattore radice di 3. Guardando la figura, la stima non computa il piccolo triangolo dopo il secondo polo, effettivamente trascurabile.

E 8.11

Considerare l'amplificatore a destra, in cui i MOSFETs abbiano (Consider the amplifier on your right, whose MOSFETs have) $k=400\mu A/V^2$, $V_T=0.5V$ e $V_a=\infty$.

- Calcolare la tensione dell'uscita V_u in DC. (Find the value of V_u when no signal is applied)
- Calcolare il guadagno del circuito a bassa frequenza, $G=V_u/V_{in}$. (Find the ideal gain of the circuit, $G=V_u/V_{in}$)
- Calcolare la dinamica di ingresso positiva e negativa del circuito a bassa frequenza. (Find the input dynamic range at low frequency)
- Considerare la capacità C_{gd} di entrambi i MOSFET di $C_{gd}=0.8pF$ e calcolare il valore RMS del rumore in uscita dovuto al rumore di canale del transistor T_2 . (Take into account the capacitance $C_{gd}=0.8pF$ of both MOSFETs. Find the RMS noise at the output due to the noise of the channel of T_2 .)

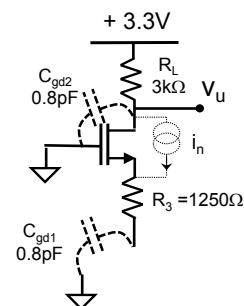


a) $V_u=2.1V$

b) $G=-2$

c) $V_{in+}=187mV$; $V_{in-}=-1.1V$

d) Per calcolare il trasferimento del rumore dal punto dove è generato verso l'uscita, si visualizza la sorgente di rumore con un generatore di corrente i_n posto tra S e D di T_2 e si calcola il trasferimento i_u di questa corrente sul carico $R_L || 1/sC_{gd}$ dell'uscita. Facendo attenzione al fatto che in entrambi i nodi del generatore di corrente debba essere soddisfatto il bilancio di correnti, la partizione di corrente al nodo di Source ed il calcolo della corrente in R_3 fornisce direttamente la corrente i_u desiderata:

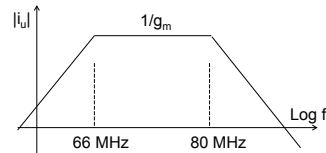


$$i_u = \frac{1/g_m}{1/g_m + R_3 + \frac{1}{sC_{gd1}}} \cdot i_n$$

Moltiplicando per il carico e evidenziando i poli e gli zeri si ottiene:

$$v_u = i_n \cdot \frac{1/g_m \cdot sC_{gd1}}{1 + sC_{gd1}(1/g_m + R_3)} \cdot \frac{R_L}{1 + sC_{gd2}R_L}$$

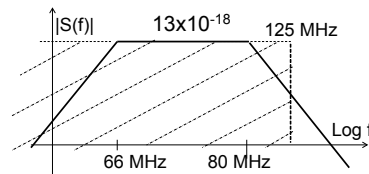
Questo trasferimento dell'impulso di rumore può essere visualizzato nel diagramma di Bode del suo modulo (notare che la quota della parte piatta vale $1/g_m$):



Elevando al quadrato il modulo della relazione e facendone il valor medio e sostituendo il valore quadratico medio di ogni componente spettrale dell'impulso di rumore con la densità spettrale di potenza di rumore della sorgente, si ottiene l'andamento in frequenza della densità spettrale di potenza $[V^2/Hz]$ di rumore dell'uscita :

$$S_u(\omega) = \frac{4kT}{1/g_m} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(1/g_m)^2 \cdot \omega^2 \cdot C_{gd1}^2}{1 + \{\omega C_{gd1}(1/g_m + R_3)\}^2} \cdot \frac{R_L^2}{1 + \{\omega C_{gd2}R_L\}^2}$$

E' sempre comodo visualizzarne l'andamento in un grafico :



Per calcolarne l'area si nota come una buona stima per eccesso la si ottiene integrando come se ci fosse solo il secondo polo. Infatti così facendo si sovrastimerebbe solo per il triangolo a sinistra del primo polo, che è piccolo in area in quanto le frequenze lì considerate sono piccole. Così facendo il valore di rumore stimato è quindi :

$$RMS = \sqrt{\int_0^{\infty} S_u(f) \cdot df} < 41 \mu V$$

8.7 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE SUL RAPPORTO S/N

Quanto visto ci permette di calcolare, in un circuito comunque complesso, l'entità del rumore complessivo che si manifesta in un punto di interesse (ad esempio al morsetto di uscita) dovuto ai singoli componenti rumorosi presenti nel circuito. L'importanza di questo calcolo risiede nella considerazione che quando applichiamo un segnale al circuito, affinché esso sia rilevabile all'uscita è necessario che sia riconoscibile rispetto alle fluttuazioni statistiche presenti nello stesso punto e dovute al rumore. Questa affermazione può essere tradotta in termini quantitativi facendo riferimento al **rapporto S/N** tra l'ampiezza del segnale, S (in V o A a seconda della situazione), ed il valore RMS della fascia di rumore ad esso sovrapposto, N, nella stessa unità di misura del segnale:

$$\frac{S}{N} = \frac{\text{Ampiezza segnale [V, A]}}{\text{RMS rumore [V, A]}}$$

Il rapporto S/N è quindi un numero adimensionale.

Il minimo segnale misurabile è convenzionalmente e per semplicità definito come il segnale la cui ampiezza eguaglia il valore RMS delle fluttuazioni (S/N=1).

L'espressione (8.13) di $\overline{v_u^2}$ ci fa intuire che per avere un circuito poco rumoroso bisogna limitarne la banda, in modo da sommare le potenze di rumore di un limitato numero di componenti in frequenza. Naturalmente bisogna contemporaneamente consentire al segnale di essere trasmesso all'uscita, per cui la banda non può essere ristretta più di quanto il segnale non conceda. Sintetizzando, si potrebbe dire che non bisogna **mai fare circuiti con banda maggiore di quanto richiesto dal segnale**: tutta la banda in più porta solo rumore senza apportare alcun vantaggio al segnale e pertanto non può che peggiorare le prestazioni del circuito in termini di rapporto S/N.

8.8 CONTRIBUTI DI RUMORE DOMINANTI NEGLI STADI BASE

Come riassunto di tutti gli aspetti visti fino ad ora, analizziamo i più comuni stadi circuitali a singoli transistori.

8.8.1 Stadio amplificatore Source a massa.

La densità spettrale di rumore all'uscita dell'amplificatore contiene i due termini legati ai rumori prodotti dal MOSFET e dalla resistenza di carico:

$$S_u(f) = \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot R_L^2 + \frac{4kT}{R_L} \cdot R_L^2$$

Come già accennato prima, basta che il guadagno sia maggiore di 1 ($R_L > 1/g_m$) perché il rumore della resistenza di carico sia trascurabile rispetto al rumore del MOSFET. Pertanto in un amplificatore con source a massa idealmente pilotato, il rumore in uscita è sostanzialmente dato da

$$S_u(f) \cong \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot R_L^2$$

Poiché l'ampiezza del segnale disponibile all'uscita è pari a $V_{out} = -V_{in} g_m R_L$, il rapporto tra il segnale ed il rumore in uscita su una definita banda avrà la forma:

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{V_{in}^2 \cdot g_m^2 \cdot R_L^2}{\frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot R_L^2 \cdot \text{BANDA}}} = \sqrt{\frac{V_{in}^2}{4kT \cdot \frac{1}{g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot \text{BANDA}}}$$

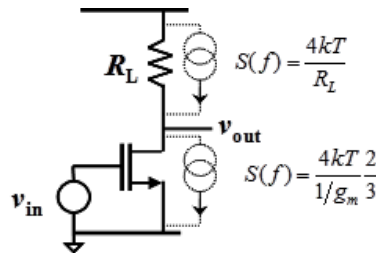


Fig. 8.8 Contributi di rumore dominanti in uno stadio Source a massa.

Poiché siamo interessati a massimizzare tale rapporto, il risultato evidenzia quanto sia importante polarizzare il transistor con tanta corrente in modo da avere alta transconduttanza. Ciò sottolinea ancora una volta, se mai ce ne fosse ancora bisogno, che le alte prestazioni di un circuito possono essere raggiunte ma a scapito di una elevata dissipazione di potenza !

8.8.2 Stadio amplificatore Source a massa con resistenza di degenerazione.

Come mostrato nella Fig.8.9, la densità spettrale di rumore in uscita all'amplificatore contiene i tre termini legati al rumore prodotto dal MOSFET, dalla resistenza di degenerazione e dalla resistenza di carico secondo la seguente relazione:

$$S_u(f) = \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{(1/g_m)^2}{(R_S + 1/g_m)^2} \cdot R_L^2 + \frac{4kT}{R_S} \cdot \frac{R_S^2}{(R_S + 1/g_m)^2} \cdot R_L^2 + \frac{4kT}{R_L} \cdot R_L^2$$

Poiché il segnale disponibile all'uscita è pari a $V_{out} = V_{in} \frac{R_L}{(R_S + 1/g_m)}$

il rapporto tra il segnale in uscita ed il rumore in uscita su una definita banda avrà la forma:

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{V_{in}^2 \cdot \frac{R_L^2}{(R_S + 1/g_m)^2}}{\left\{ 4kT \frac{1}{g_m} \frac{2}{3} \cdot \frac{R_L^2}{(R_S + 1/g_m)^2} + 4kT \cdot R_S \cdot \frac{R_L^2}{(R_S + 1/g_m)^2} + 4kT \cdot R_L \right\} \cdot \text{BANDA}}}$$

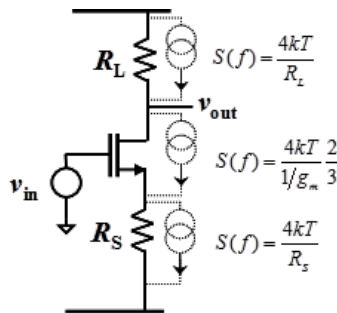


Fig. 8.9 Contributi di rumore dominanti in uno stadio Source a massa con resistenza di degenerazione.

che assume la seguente forma :

$$\frac{S}{N} = \frac{V_{in}^2}{\sqrt{\left\{ 4kT \left[\left(\frac{1}{g_m} \frac{2}{3} + R_s \right) \cdot \left(1 + \frac{(R_s + 1/g_m)}{R_L} \right) \right] \right\}} \cdot BANDA}$$

Come già accennato prima, basta che il guadagno sia maggiore di 1 ($R_L > (1/g_m + R_s)$) perché il rumore della resistenza di carico possa essere trascurabile rispetto al rumore del MOSFET e della resistenza di degenerazione. Confrontando questi ultimi due termini, si possono trarre le seguenti considerazioni:

- il S/N massimo lo si ha per $R_s=0$. La degenerazione quindi comunque introduce rumore in più, sostanzialmente perché introduciamo un ulteriore dispositivo che a sua volta genera rumore !
- Ho sempre vantaggio ad avere la transconduttanza g_m alta !
- Ho vantaggio a tenere $(1/g_m + R_s)$ globalmente piccoli !
- Se $R_s \gg 1/g_m$, il rumore in uscita è determinato da R_s e non dal MOSFET (come nel caso di $R_s=0$). Questo può essere un bene a basse frequenze dove R_s produce rumore bianco a differenza del MOSFET che produce anche rumore $1/f$.

8.8.3 Stadio buffer del tipo Source follower.

Come mostrato nella Fig.8.10, la densità spettrale di rumore in uscita al buffer contiene i due termini legati al rumore prodotto dal MOSFET e dalla resistenza di degenerazione secondo la seguente relazione:

$$S_u(f) = \frac{4kT}{1/g_m} \left(\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{(1/g_m)^2}{(R_s + 1/g_m)^2} \cdot R_s^2 + \frac{4kT}{R_s} \cdot \frac{(1/g_m)^2}{(R_s + 1/g_m)^2} \cdot R_s^2$$

Poiché il segnale disponibile all'uscita è pari a

$$V_{out} = V_{in} \frac{R_s}{(R_s + 1/g_m)}$$

il rapporto tra il segnale in uscita ed il rumore in uscita su una definita banda avrà la forma:

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{V_{in}^2 \cdot \frac{R_S^2}{(R_S + 1/g_m)^2}}{\left\{ 4kT \frac{1}{g_m} \frac{2}{3} \cdot \frac{R_S^2}{(R_S + 1/g_m)^2} + \frac{4kT}{R_S} \cdot \frac{(1/g_m)^2 R_S^2}{(R_S + 1/g_m)^2} \right\} \cdot \text{BANDA}}}$$

$$= \sqrt{\frac{V_{in}^2 \cdot}{\left\{ 4kT \left(\frac{1}{g_m} \frac{2}{3} + \frac{(1/g_m)^2}{R_S} \right) \right\} \cdot \text{BANDA}}}$$

Da questo risultato possiamo trarre utili informazioni di progetto:

- Poiché in generale $R_S \gg (1/g_m)$, il rumore della resistenza di degenerazione non conta !
- Il rumore di un follower è in pratica pari a tutto quello del MOSFET che si chiude su se stesso e produce un corrispondente rumore di tensione V_{gs} che si mostra tutto all'uscita essendo il gate a potenziale fisso.
- Quindi, più corrente faccio scorrere (transconduttanza g_m alta) migliore sarà S/N !
- In generale, per i motivi citati, il follower difficilmente introduce un rumore apprezzabile in un circuito. Ricordando che il follower difficilmente introduce non-linearità nel circuito, possiamo concludere che un buon follower è un circuito "trasparente" che non peggiora quanto già ottenuto dalle altre parti del circuito, né come rumore né come distorsione né come banda passante.

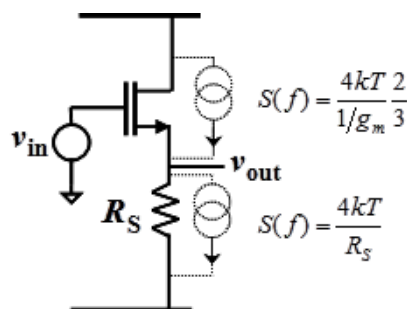
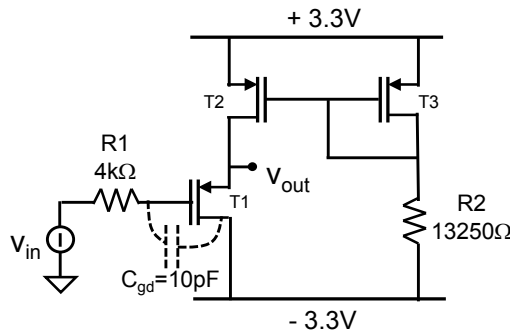


Fig. 8.10 Contributi di rumore dominanti in uno stadio Buffer del tipo Source follower.

E 8.12 Considerare il circuito seguente in cui i MOSFET abbiano $V_T=0.8V$, $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=1.6mA/V^2$ e curve caratteristiche ideali ($V_A=\infty$). Inoltre si consideri presente la capacità $C_{gd}=10pF$ del solo transistor T1. (Please consider the circuit shown on the right whose MOSFETs have $V_T=0.8V$, $k=\frac{1}{2}\mu C_{ox}W/L=1.6mA/V^2$ and ideal characteristic curves ($V_A=\infty$). Transistor T1 has also a $C_{gd}=10pF$)



- (a) Calcolare il valore stazionario dell'uscita V_{out} . (Find V_{out} when no signal is applied)
- (b) Calcolare quale resistenza, tra $R1$ ed $R2$, produce una densità spettrale di rumore a bassa frequenza maggiore all'uscita. (Find which resistor, between $R1$ and $R2$, produces a larger noise spectral density at the output at low frequency)
- (c) Supponendo che il rumore in uscita sia prodotto solo dalla resistenza $R1$, calcolare il rapporto segnale/rumore (S/N) all'uscita quando in ingresso viene applicato un segnale in banda ampio $3mV$ (Find the value of S/N at the output when only resistor $R1$ generates noise and an input voltage of $3mV$ within the bandwidth is applied to the input).

(d) $V_{out}=+1.3V$

(e) Il rumore di tensione di $R1$ si trasferisce con guadagno unitario all'uscita:

$$S_{out} \Big|_{R1} = 4kTR1 = 6.4 \cdot 10^{-17} \frac{V^2}{Hz} = \left(8 \frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right)^2$$

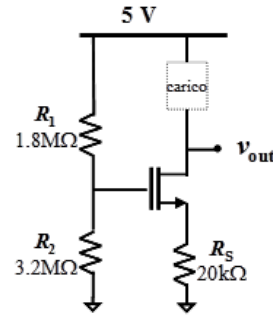
La componente di rumore di corrente di $R2$ assorbita da $T3$ viene specchiata e si manifesta in uscita come

$$S_{out} \Big|_{R2} = \frac{4kT}{R2} \left(\frac{R2}{R2 + \frac{1}{g_{m3}}} \right)^2 \left(\frac{1}{g_{m1}} \right)^2 = 4.5 \cdot 10^{-19} \frac{V^2}{Hz} = \left(670 \frac{pV}{\sqrt{Hz}} \right)^2$$

(f) Il valore rms del rumore di $R1$ all'uscita vale $20\mu V$ per cui $S/N=150$.

E 8.13 Si consideri il generatore di corrente della figura accanto, in cui è stato usato un MOSFET avente $k = \frac{1}{2} \mu\text{Cox} W/L = 2.5 \text{ mA/V}^2$ e $V_T = 1 \text{ V}$.

- Determinare la densità spettrale di rumore bianco in uscita, commentando i contributi dei singoli elementi del circuito.
- Calcolare il valore rms del rumore della corrente di uscita entro la banda di misura di 10MHz.
- Apportare le opportune modifiche al circuito affinché il valore rms del rumore della corrente di uscita sia inferiore a 5nA entro la banda di misura di 10MHz. .



La polarizzazione porta ad una corrente fornita dal generatore di $100 \mu\text{A}$ fintanto che la tensione di uscita del generatore (equivalente alla tensione sul drain del MOSFET) è superiore a 2.2V così da polarizzare il transistor in saturazione. Ne consegue che $g_m = 1 \text{ mA/V}$.

- Indicando con $R_{12} = R_1 || R_2 = 1.15 \text{ M}\Omega$ il parallelo delle resistenze di polarizzazione, si ricava la densità spettrale del rumore della corrente di uscita

$$S_I(f) = 4kT \left(R_{12} + R_S + \frac{2}{3} \frac{1}{g_m} \right) \cdot \frac{1}{(1/g_m + R_S)^2}$$

corrispondenti ai seguenti contributi costanti a tutte le frequenze:

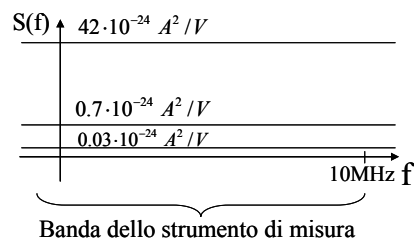
$$\text{del partitore : } S_{R12} = 4kT R_{12} \cdot \frac{1}{(1/g_m + R_S)^2} = 42 \cdot 10^{-24} \frac{\text{A}^2}{\text{Hz}}$$

$$\text{del resistore di degenerazione : } S_{R_S} = 4kT R_S \cdot \frac{1}{(1/g_m + R_S)^2} = 0.7 \cdot 10^{-24} \frac{\text{A}^2}{\text{Hz}}$$

$$\text{del MOSFET : } S_{MOS} = 4kT \frac{2}{3} \frac{1}{g_m} \cdot \frac{1}{(1/g_m + R_S)^2} = 0.03 \cdot 10^{-24} \frac{\text{A}^2}{\text{Hz}}$$

Il partitore di polarizzazione è di gran lunga l'elemento che introduce più rumore.

- Se non ci fossero elementi capacitivi nel circuito e la banda fosse solo limitata dallo strumento di misura a 10MHz, il valore quadratico medio del rumore di corrente sarebbe dato dall'integrazione dei vari contributi



fino a $f = 1/4\tau = 15.6 \text{ MHz}$ (con $\tau = 1/(2\pi 10 \text{ MHz}) = 16 \text{ ns}$):

$$\sigma_I^2 = \int_0^\infty (S_{R12} + S_{R_S} + S_{MOS}) df = \frac{S_{R12}}{4\tau} + \frac{S_{R_S}}{4\tau} + \frac{S_{MOS}}{4\tau}$$

i cui singoli contributi sarebbero:

$$\sigma_{R12}^2 = \frac{S_{MOS}}{4\tau} = 656 \cdot 10^{-18} A^2 \Rightarrow \sigma_{R12} = 25nA$$

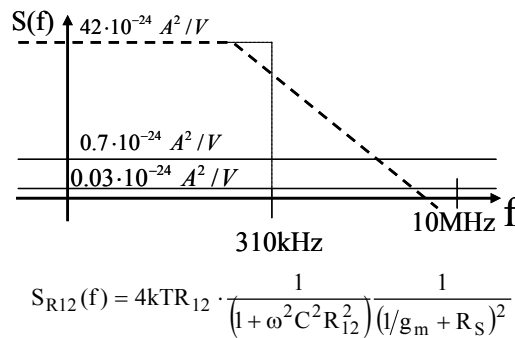
$$\sigma_{Rs}^2 = \frac{S_{Rs}}{4\tau} = 11 \cdot 10^{-18} A^2 \Rightarrow \sigma_{Rs} = 3.3nA$$

$$\sigma_{MOS}^2 = \frac{S_{MOS}}{4\tau} = 0.5 \cdot 10^{-18} A^2 \Rightarrow \sigma_{MOS} = 0.7nA$$

Se così fosse, il rumore totale sarebbe pari a $\sigma=26nA$.

c) Per rientrare nelle specifiche (valore massimo accettato di 5nA) è dunque indispensabile ridurre il contributo dovuto alle resistenze di polarizzazione. Per fare ciò si può, ad esempio, filtrarlo in frequenza mediante l'aggiunta di una capacità al nodo di gate verso massa che impedisca alle componenti ad alta frequenza del rumore di R_{12} di trasmettersi all'uscita, riducendone la banda equivalente di integrazione a $f=1/4R_{12}C$.

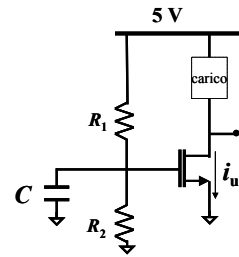
Si noti che l'aggiunta della capacità C influenza solo il rumore di R_{12} . Infatti solo la funzione di trasferimento per $S_{R12}(f)$ viene modificata dalla presenza della capacità :



Per trovare il valore di C che assicura di stare entro le specifiche di rumore bisognerà pertanto risolvere la seguente equazione:

$$\frac{S_{R12}}{4R_{12}C} = (5nA)^2 - (3.3nA)^2 - (0.7nA)^2$$

da cui si ricava una $C=0.7pF$, a cui corrisponde una banda equivalente di 310kHz (con un polo a circa 200kHz). Notare che il grafico ha sull'asse verticale una grandezza al quadrato e pertanto la sua pendenza è di 40dB/decade.



E 8.14 Si consideri il circuito della figura accanto, in cui i MOSFET abbiano $V_T=0.5V$ e $k=2.7mA/V^2$

a- Calcolare la densità spettrale del rumore all'uscita V_u dovuta ai soli 3 transistori (trascurando quindi i contributi dati da tutte le resistenze).

b- Calcolare l'ampiezza del segnale di ingresso per avere un rapporto Segnale/Disturbo uguale ad uno ($S/N=1$) alla stessa uscita V_u .

Calcolare il contributo alla densità spettrale di uscita dovuto alla sola resistenza R_2 .

