NPCבעיות מספרים ב

מצגת 13

$$\alpha = (x_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x'_2 \vee x_3 \vee x'_4)$$

3-SAT

3-SAT

- נגדיר α נוסחה בולאנית בCNF- 3 כלומר, הנוסחה בצורת CNF ובכל קלוז מופיעים בדיוק 3 משתנים.

- $\alpha = (x_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x'_2 \vee x_3 \vee x'_4)$

- 3-SAT ={α | נוסחה בCNF -3 והיא ניתנת לסיפוק α}

- משפט: 3-SAT היא בעיה בNPC

שלב א בהוכחה, 3-SAT ∈NP

3-SAT ={α | α נוסחה בCNF -3 והיא ניתנת לסיפוק}

יש להראות שקימת מ"ט ל"ד N שפועלת בזמן פולינומי בגודל הקלט, שמקבלת את 3-SAT.

N יכולה לעצור אם
α ∈ 3-SAT

↓

N יכולה לעצור אם
ל α, שהיא מצורת 3-CNF , קיימת השמה שנותנת TRUE

N לא תעצור אם
. α ∉ 3-SAT

↓

N לא תעצור אם
כל השמה ל α , שהיא מצורת -3 CNF , נותנת FALSE

שלב א בהוכחה, 3-SAT ∈NP

- הוכחה : נשתמש במ"ט ל"ד N – שעבור קלט של נוסחה α,

1. תנחש ערכים לכל המשתנים שבנוסחה, באופן שיגרמו לנוסחה להיות TRUE. – <u>זמן ליניארי בגודל הקלט</u>
2. N תציב את הערכים של הניחוש בנוסחה ותבדוק למה הנוסחה שווה. – <u>זמן ליניארי בגודל הקלט</u>
3. אם הנוסחה היא TRUE המכונה N תעצור.
4. אם הנוסחה היא FALSE, המכונה N לא תעצור

סה"כ הניחוש והבדיקה פולינומים בגודל הקלט.

הוכחה: שלב א – $3\text{-}SAT \in NP$

- מתקיים: אם $\alpha \in 3\text{-}SAT$

קיימת ל-α השמה שמספקת אותה

N יכולה לנחש השמה זו.

בבדיקות N תגלה ש ניתנת לסיפוק

N תעצור

- מתקיים: אם $\alpha \notin 3\text{-}SAT$

לא קיימת ל-α השמה שמספקת אותה

כל השמה שN תנחש, לא תיתן T ל-α

בבדיקות N תגלה ש-α לא מגיעה לT

N לא תעצור

שלב ב - 3-SAT שלמה בNP

3-SAT ={α | נוסחה בCNF -3 והיא ניתנת לסיפוק α}

טענה : 3-SAT ∈NPC

הוכחה: יש להראות כי א. 3-SAT ∈NP ✓

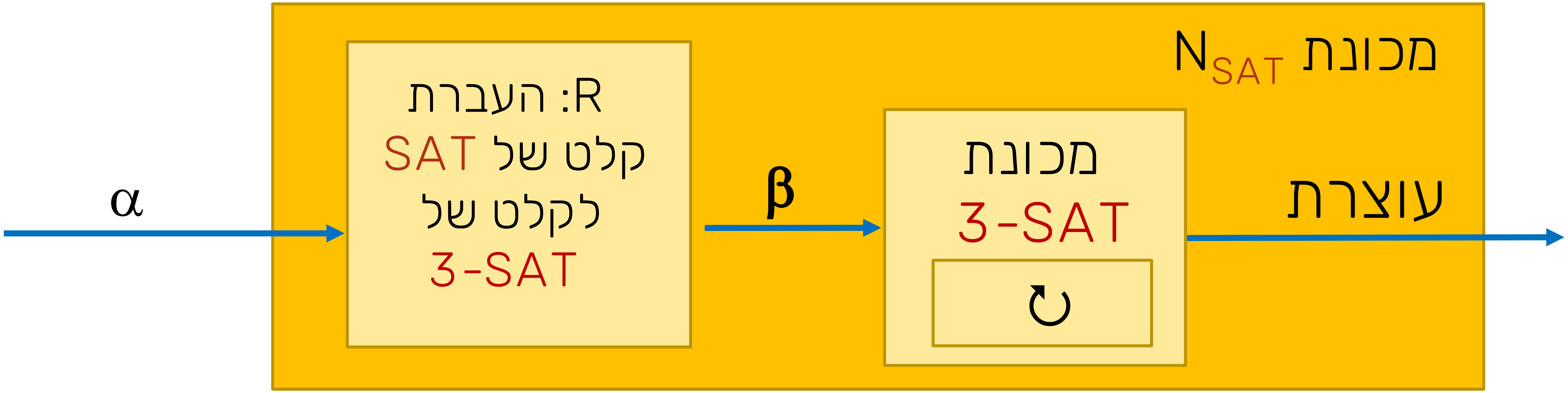
ב. לכל B∈NP מתקיים $B \leq_p$ 3-SAT או לחילופין להראות

3-SAT $\leq_p$ L כאשר L ∈NPC

הרדוקציה $SAT \le_p 3\text{-}SAT$

SAT ={α | נוסחה בCNF והיא ניתנת לסיפוק α}

3-SAT ={α | נוסחה בCNF -3 והיא ניתנת לסיפוק α}



מה תעשה פרוצדורה R כדי להבטיח $\alpha \in SAT \Leftrightarrow \beta \in 3\text{-}SAT$

כלומר β שהיא ב 3-CNF ניתנת לסיפוק ⇔ α שהיא ב CNF ניתנת לסיפוק

הרדוקציה $SAT \le_p 3\text{-}SAT$

R: העברת קלט α של SAT לקלט **β** של 3-SAT

נייצר קלוז ל**β**	עבור קלוז ב **α**
$x \vee x \vee x$	x
$x \vee y \vee x$	$x \vee y$
$x \vee y \vee z$	$x \vee y \vee z$
?	$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6 \ldots$

$$(x_1 \vee x_2 \vee z_1) \wedge (z_1' \vee x_3 \vee z_2) \wedge (z_2' \vee x_4 \vee z_3) \wedge (z_3' \vee x_5 \vee x_6)$$

- מתקיים: אם SAT $\alpha\in$, יש השמה שנותנת לנוסחה מסוג CNF ערך T.

$\Leftarrow$ בכל קלוז יש משתנה אחד לפחות x_i שנותן לו T.

$\Leftarrow$נבנה השמה עבור β לפי ההשמה של α.(יש לבדוק ספיקות רק לקלוזים שהכילו מעל 3 משתנים בα)

אם x_i =T אזי ניתן T לקלוזים שלפניו על ידי $z_j = T$ עבור $j < i\text{-}1$

וניתן T לקלוזים שאחריו על ידי $z_j = F$ עבור $j \geq i\text{-}1$

$\Leftarrow$בכל קלוז מצורת 3-CNF יש משתנה T $\Leftarrow$ יש סיפוק לβ $\Leftarrow$ $\beta \in$ 3-SAT

- אם 3-SAT $\beta\in$ ⇐ יש השמה שנותנת לנוסחה β מסוג 3-CNF ערך T.

⇐ נתבונן בקלוזים שפיצלנו מקלוזים ארוכים יותר. בכל קלוז יש משתנה אחד לפחות שנותן לו T. נרצה להראות שחייב להיות משתנה אחד מקורי מ α, x_i שנותן T כדי שגם α תהיה מסופקת.

אם נניח על דרך השלילה $F=x_i$, אזי נספק את β על ידי נתינת T למשתני z_i :

בקלוז הראשון חייבים להציב $z_1=T$ כדי שהקלוז יהיה T.

ולכן בקלוז השני חייבים להציב גם כן $z_2=T$ וכן הלאה..

$$(x_1 \vee x_2 \vee z_1) \wedge (z_1' \vee x_3 \vee z_2) \wedge (z_2' \vee x_4 \vee z_3) \wedge (z_3' \vee x_5 \vee x_6)$$

בקלוז <u>האחרון צריך להציב</u> z_j =F ולכן בקלוז הלפני אחרון שני משתני z_i מקבלים F לפי ההצבות מימנם ומשמאלם. סתירה לספיקות של כל הקלוזים.

⇐ חייב להיות משתנה שאינו z_i באחד הקלוזים, שיהיה שווה לT כדי שכל הקלוזים יקבלו T.

⇐בכל קלוז ארוך שפוצל לקלוזים עם 3 משתנים, יש משתנה אחד לפחות שהוא מקורי מ α, x_i שהוא T.

⇐ בכל קלוז מקורי של α יש משתנה השווה לT.

⇐הנוסחה α ניתנת לסיפוק ⇐ SAT $\alpha \in$

SUBSETSUM

SubsetSum

SubsetSum= { S, t | t קבוצת מספרים בה יש תת קבוצה שסכומה שווה S }

there exists $S' \subseteq S$, such that $\Sigma_{s_i \in S'} s_i = t$.

S= {9, 4, 5, 2}

(S, 7) ∈? SubsetSum

(S, 8) ∈? SubsetSum

שלב א בהוכחה, SubsetSum $\in$NP

SubsetSum= { S, t | t קבוצת מספרים בה יש תת קבוצה שסכומה שווה S }

יש להראות שקימת מ"ט ל"ד N שפועלת בזמן פולינומי בגודל הקלט,

שמקבלת את SubsetSum.

N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט אם SubsetSum $\in$ S,t

$\downarrow$

N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט אם ל S קיימת תת קבוצה שסכומה שווה לt

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט אם SubsetSum $\notin$ S,t .

$\downarrow$

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט אם ל S לא קיימת תת קבוצה שסכומה שווה לt

הוכחה: שלב א – SubsetSum $\in$NP

נבנה מ"ט ל"ד N שתקלוט קבוצה S, t,

א. תנחש תת קבוצה של S, שסכומה שווה לt. – <u>זמן ריבועי בגודל |S|</u>

ב. N תבדוק: 1. האם כל האיברים של s' שונים. – <u>בדיקה ריבועית בגודל |S|.</u>

2. האם סכום הערכים של תת הקבוצה שווה לt. – <u>בדיקה לינארית בגודל |S|,t.</u>

ג. אם הבדיקות תקינות, המכונה N תעצור.

אם סכום תת הקבוצה אינו שווה לt, או ש s' אינה חוקית, המכונה N לא תעצור .

זמן: הניחוש ובדיקתו פולינומים בגודל הקבוצה S וt.

הוכחה: שלב א -$\in$NP SubsetSum

מתקיים: אם SubsetSum $\in$ S,t

↓

קיימת בS תת קבוצה שסכומה שווה ל t

↓

N יכולה לנחש תת קבוצה זו של המספרים.

↓

בבדיקות N תגלה שבאמת זוהי תת קבוצה שסכומה שווה ל t

↓

N תעצור

הוכחה: שלב א –$\in$NP SubsetSum

מתקיים: אם $S,t \notin$ SubsetSum

⇓

לא קיימת בS תת קבוצה שסכומה שווה ל t

⇓

כל תת קבוצה שN תנחש, לא תענה על הדרישות

⇓

בבדיקות N תגלה או שזו אינה תת קבוצה תיקנית, או שסכום המספרים אינו שווה ל t.

⇓

N לא תעצור

שלב ב - SubsetSum שלמה בNP

SubsetSum= { S, t | t קבוצת מספרים בה יש תת קבוצה שסכומה שווה S }

טענה : SubsetSum $\in$NPC

הוכחה: יש להראות כי א. SubsetSum $\in$NP ✓

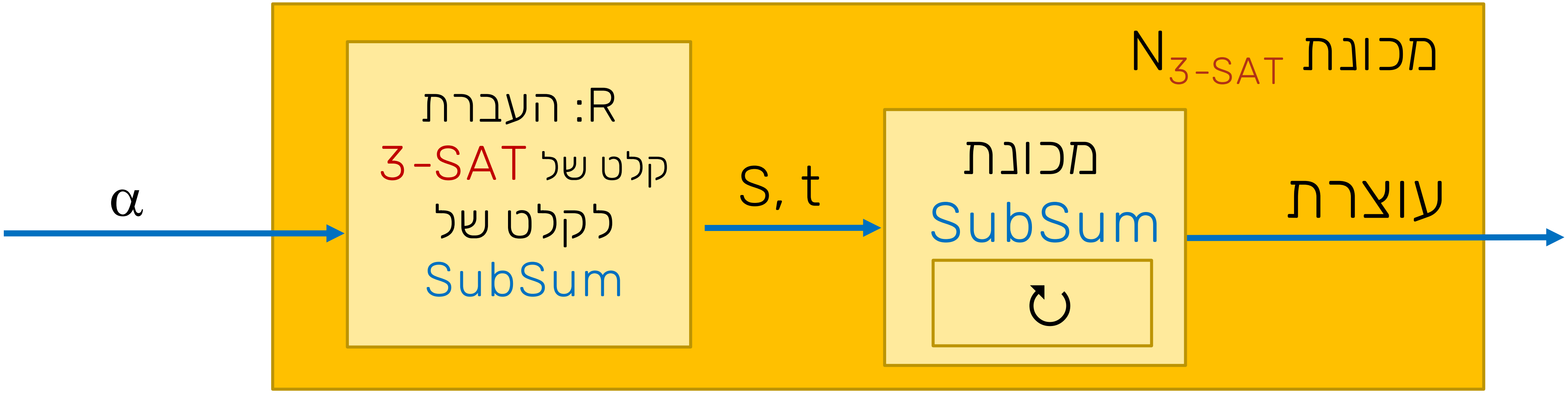
ב. לכל B$\in$NP מתקיים SubsetSum $\leq_p$ B או לחילופין להראות

SubsetSum $\leq_p$ L כאשר L $\in$NPC

הרדוקציה $3\text{-SAT} \le_p \text{SubsetSum}$

SubsetSum = { S, t | S קבוצת מספרים בה יש תת קבוצה שסכומה שווה t }

3-SAT = { α | α נוסחה ב3-CNF והיא ניתנת לסיפוק }



מה תעשה פרוצדורה R כדי להבטיח $S,t \in \text{SubsetSum} \Leftrightarrow \alpha \in \text{3-SAT}$

כלומר יש בS תת קבוצה שמשקלה שווה לt $\Leftrightarrow$ α שהיא ב 3-CNF ניתנת לסיפוק

הרדוקציה

- בהנתן נוסחה α שבה יש l משתנים ו k קלוזים (בגודל 3 כל אחד)

  נגדיר $2k+2l$ מספרים. כל מספר הוא באורך $k + l$.
- עבור כל משתנה x_i נגדיר 2 מספרים y_i, z_i - סה"כ $l(l+k)$
- עבור כל קלוז c_j נגדיר 2 מספרים h_i, g_i - סה"כ $k(l+k)$
- $t = \underbrace{11\ldots1}_{l}\,\underbrace{33\ldots3}_{k}$
- זמן הרדוקציה- פולינומי בגודל הקלט .

$$\alpha = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x_1' \vee x'_3 \vee x'_2)$$

בו הטורים הראשונים:

$M[y_i, i] = 1 \quad M[y_i, j] = 0$

$M[z_i, i] = 1 \quad M[z_i, j] = 0$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1					
מייצג את x'_1	z_1					
מייצג את x_2	y_2					
מייצג את x'_2	z_2					
מייצג את x_3	y_3					
מייצג את x'_3	z_3					
	g_1					
	h_1					
	g_2					
	h_2					
	$t=$	1	1	1	3	3

$$\alpha = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x_1' \vee x'_3 \vee x'_2)$$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1	1	0	0		
מייצג את x'_1	z_1	1	0	0		
מייצג את x_2	y_2	0	1	0		
מייצג את x'_2	z_2	0	1	0		
מייצג את x_3	y_3	0	0	1		
מייצג את x'_3	z_3	0	0	1		
	g_1					
	h_1					
	g_2					
	h_2					
	t=	1	1	1	3	3

בו הטורים הראשונים:

$M[y_i, i] = 1 \quad M[y_i, j] = 0$

$M[z_i, i] = 1 \quad M[z_i, j] = 0$

בא הטורים הבאים:

$$M[y_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$M[z_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x'_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\alpha = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x_1' \vee x'_3 \vee x'_2)$$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1	1	0	0	1	0
מייצג את x'_1	z_1	1	0	0	0	1
מייצג את x_2	y_2	0	1	0	0	0
מייצג את x'_2	z_2	0	1	0	1	1
מייצג את x_3	y_3	0	0	1	1	0
מייצג את x'_3	z_3	0	0	1	0	1
	g_1					
	h_1					
	g_2					
	h_2					
	t=	1	1	1	3	3

בו הטורים הראשונים:

$M[y_i, i] = 1 \quad M[y_i, j] = 0$

$M[z_i, i] = 1 \quad M[z_i, j] = 0$

בk הטורים הבאים:

$$M[y_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$M[z_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x'_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\alpha = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x_1' \vee x'_3 \vee x'_2)$$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1	1	0	0	1	0
מייצג את x'_1	z_1	1	0	0	0	1
מייצג את x_2	y_2	0	1	0	0	0
מייצג את x'_2	z_2	0	1	0	1	1
מייצג את x_3	y_3	0	0	1	1	0
מייצג את x'_3	z_3	0	0	1	0	1
	g_1					
	h_1					
	g_2					
	h_2					
	t=	1	1	1	3	3

בו הטורים הראשונים:

$$M[y_i, i] = 1 \quad M[y_i, j] = 0$$
$$M[z_i, i] = 1 \quad M[z_i, j] = 0$$

בא הטורים הבאים:

$$M[y_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$M[z_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x'_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

בא הטורים האחרונים:

$$M[h_i, c_i] = 1 \quad M[h_i, c_j] = 0$$
$$M[g_i, c_i] = 1 \quad M[g_i, c_j] = 0$$

$$\alpha = (x_1 \lor x'_2 \lor x_3) \land (x_1' \lor x'_3 \lor x'_2)$$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1	1	0	0	1	0
מייצג את x'_1	z_1	1	0	0	0	1
מייצג את x_2	y_2	0	1	0	0	0
מייצג את x'_2	z_2	0	1	0	1	1
מייצג את x_3	y_3	0	0	1	1	0
מייצג את x'_3	z_3	0	0	1	0	1
	g_1				1	0
	h_1				1	0
	g_2				0	1
	h_2				0	1
	t=	1	1	1	3	3

בו הטורים הראשונים:

$M[y_i, i] = 1 \quad M[y_i, j] = 0$

$M[z_i, i] = 1 \quad M[z_i, j] = 0$

בג הטורים הבאים:

$$M[y_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$M[z_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x'_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

בג הטורים האחרונים:

$M[h_i, c_j] = 1 \quad M[h_i, c_j] = 0$

$M[g_i, c_j] = 1 \quad M[g_i, c_j] = 0$

$\alpha = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x_1' \vee x'_3 \vee x'_2)$

בא k הטורים הבאים:

$$M[y_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$M[z_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x'_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1	1	0	0	1	0
מייצג את x'_1	z_1	1	0	0	0	1
מייצג את x_2	y_2	0	1	0	0	0
מייצג את x'_2	z_2	0	1	0	1	1
מייצג את x_3	y_3	0	0	1	1	0
מייצג את x'_3	z_3	0	0	1	0	1
	g_1				1	0
	h_1				1	0
	g_2				0	1
	h_2				0	1
	t=	1	1	1	3	3

עבור השמה של $x_1 = T$

$x_2 = F$

$x_3 = T$

- מתקיימים: אם $\alpha \in$ 3-SAT, יש השמה שנותנת לנוסחה מסוג 3-CNF ערך T.

$\Leftarrow$ בכל קלוז c_j יש משתנה אחד לפחות שנותן T.

$\Leftarrow$ נבנה את S' לפי ההשמה. אם x_i =T אזי $y_i \in S'$ ואם x_i =F אזי $z_i \in S'$

$\Leftarrow$מכיוון שבכל c_j קיים x_i שנותן T, אזי בטור c_j מופיע 1 בשורה של y_i או z_i

$\Leftarrow$ סכום הספרות בו הראשונות הוא 1, כי בחרנו הצבה אחת לכל משתנה

וסכום הספרות בא הבאות k הוא בין 1 ל 3 (3-CNF), אך לפי הצורך ניתן להוסיף ל-S' את h_i או את g_i או את שניהם כך להגיע ל3.

$\Leftarrow$ כלומר קיימת S' כך שסכום איברי S' הוא t $\Leftarrow$ SubsetSum $\in$ (S,t)

מתקיים:

- אם SubsetSum $\in$ (S,t) $\Leftarrow$ יש בS תת קבוצה S' שסכום איבריה הוא t.

$\Leftarrow$ מכיוון שבמספר t בו הספרות הראשונות יש 1, חייבים לבחור ל-S' בוודאות את y_i או את z_i עבור כל i. נייצר השמה לפי תת הקבוצה הנתונה. אם $y_i \in S'$ נציב x_i= T , אם $z_i \in S'$ נציב x_i= F. ההשמה חוקית, הצבנו ערך לx_i או לx_i - לא לשניהם

$\Leftarrow$היות שבk הספרות האחרונות בt יש 3, גם אם g_j , $h_j \in S'$, עדיין חייב להיות שבמספר שבS' יש1 נוסף בטור של c_j שתרמו y_i או z_i

$\Leftarrow$ בכל קלוז מופיע לפחות משתנה אחד שמקבל T

$\Leftarrow$ הנוסחה ניתנת לסיפוק$\Leftarrow$ $\alpha \in$ 3-SAT

$$\alpha = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x_1' \vee x'_3 \vee x'_2)$$

		1	2	3	c_1	c_2
מייצג את x_1	y_1	1	0	0	1	0
מייצג את x'_1	z_1	1	0	0	0	1
מייצג את x_2	y_2	0	1	0	0	0
מייצג את x'_2	z_2	0	1	0	1	1
מייצג את x_3	y_3	0	0	1	1	0
מייצג את x'_3	z_3	0	0	1	0	1
	g_1				1	0
	h_1				1	0
	g_2				0	1
	h_2				0	1
	t	1	1	1	3	3

בـ ℓ הטורים הראשונים:

$M[y_i, i] = 1 \quad M[y_i, j] = 0$

$M[z_i, i] = 1 \quad M[z_i, j] = 0$

בـ k הטורים הבאים:

$$M[y_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

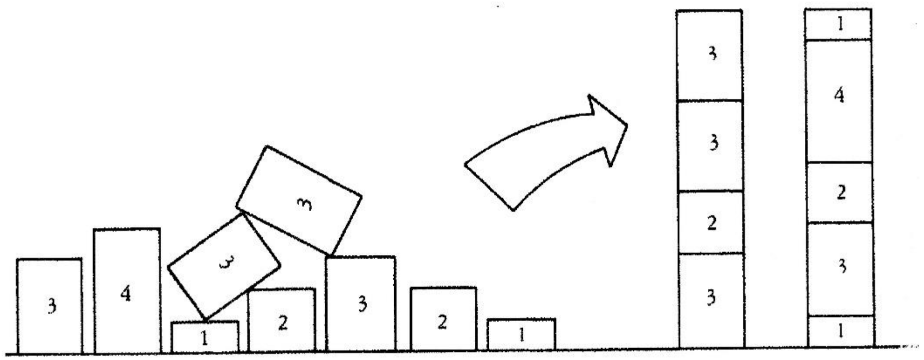
$$M[z_i, c_j] = \begin{cases} 1 & \text{if } x'_i \in C_j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

PARTITION

Partition

Partition = { A= $\{a_1,\ldots,a_n\}$ | ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה A}

there exists $A1 \subset A$, such that $\Sigma_{ai \in A1} a_i = \Sigma_{ai \in A-A1} a_i$



https://codegolf.stackexchange.com

שלב ב - Partition שלמה בNP

Partition = { A= $\{a_1,\ldots,a_n\}$ | ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה A}

טענה : Partition $\in$NPC

הוכחה: יש להראות כי א. Partition $\in$NP

ב. לכל B$\in$NP מתקיים Partition $\leq_p$ B או לחילופין להראות

Partition $\leq_p$ L כאשר L $\in$NPC

שלב א בהוכחה, $Partition \in NP$

$Partition = \{ A = \{a_1,\dots,a_n\} \mid$ A ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה$\}$

יש להראות שקימת מ"ט ל"ד N שפועלת בזמן פולינומי בגודל הקלט,
שמקבלת את PARTITION.

N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט,
אם $A \in Partition$

N יכולה בזמן פולינומי בגודל הקלט, לעצור
אם ל A קיימת חלוקה ל2 קבוצות
שסכומן שווה

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל
הקלט, אם $A \notin Partition$.

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל
הקלט, אם אין חלוקה של A שתיתן
2 קבוצות שסכומן שווה

הוכחה: שלב א – Partition $\in$NP

נבנה מ"ט ל"ד N שתקלוט קבוצה A,

א. תנחש חלוקה שלה ל A_1 ול $A_2 = A - A_1$, כך שסכומי תתי הקבוצה יהיו שווים.

<u>זמן לינארי בגודל הקלט |A|</u>.

ב. N תבדוק שזוהי אכן חלוקה של A [כלומר כל איברי A נמצאים בתתי הקבוצות וכל איבר מופיע פעם אחת. <u>–זמן ריבועי בגודל הקלט |A|</u>.

ג. N תסכום את הערכים של כל תת קבוצה ותבדוק האם הסכומים שווים. -<u>לינארי</u>

ד. אם הסכומים שווים, המכונה N תעצור.

אם הסכומים אינם שווים, המכונה N לא תעצור

זמן: הניחוש ובדיקתו פולינומיים בגודל בקלט A.

הוכחה: שלב א –NP∈ Partition

- מתקיים: אם Partition ∈ A

⇓

קיימת לA חלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה

⇓

N יכולה לנחש חלוקה זו של המספרים.

⇓

בבדיקות N תגלה שבאמת זוהי חלוקה לשתי קבוצות שוות סכום

⇓

N תעצור

הוכחה: שלב א -NP∈ Partition

מתקיים: אם $A \notin$ Partition

⇓

לא קיימת לA חלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה

⇓

כל חלוקה שN תנחש, לא תענה על הדרישות

⇓

בבדיקות N תגלה או שזו אינה חלוקה תיקנית, או שסכום הקבוצות אינו שווה

⇓

N לא תעצור

שלב ב - Partition שלמה בNP

Partition = { $A= \{a_1,\ldots,a_n\}$ | ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה A}

טענה : Partition $\in$NPC

הוכחה: יש להראות כי א. Partition $\in$NP ✓

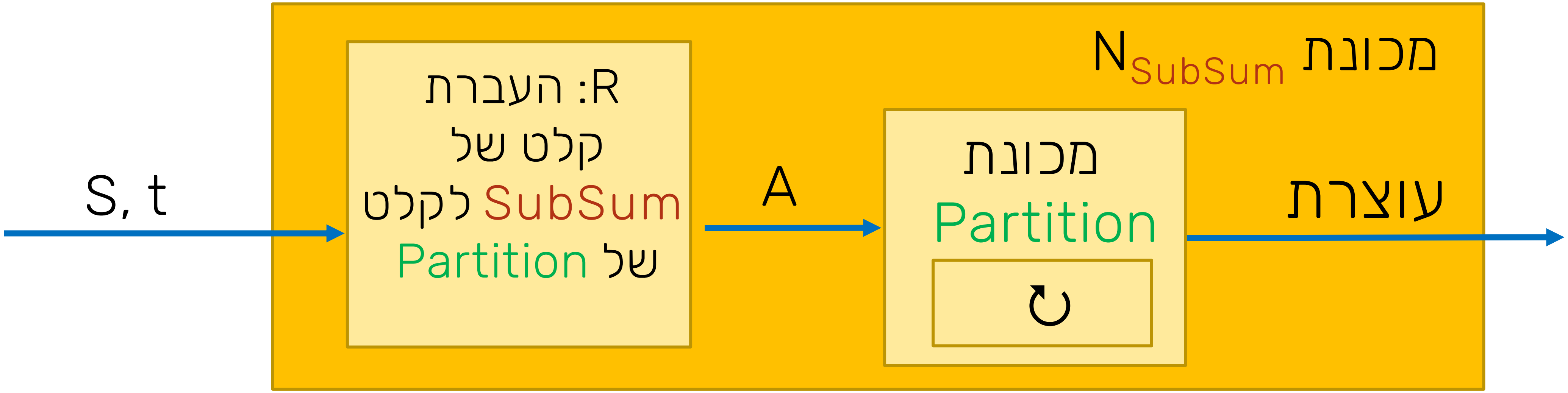
ב. לכל B$\in$NP מתקיים Partition $\leq_p$ B או לחילופין להראות

Partition $\leq_p$ L כאשר L $\in$NPC

הרדוקציה $SubsetSum \leq_p Partition$

SubsetSum= { S, t | t קבוצת מספרים בה יש תת קבוצה שסכומה שווה S }

Partition = { A = {a_1,…,a_n} | ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה A}



מה תעשה פרוצדורה R כדי להבטיח A∈ Partition ⇔ S,t ∈ SubsetSum

כלומר ניתן לחלק את A לשתי קבוצות שוות סכום ⇔ בS יש תת קבוצה שסכומה t

הרדוקציה

- בהינתן $S=\{s_1,\dots,s_m\}$ וקבוע t, הרדוקציה R מייצרת את A שבה יש מספר איברים גדול ב1 ממספר האיברים בS.
- $A=\{a_1,\dots,a_m, a_{m+1}\}$ כאשר $a_i = s_i$ עבור $i \le m$
- את האיבר הנוסף בA נגדיר כמשלים את הסכום של כל איברי A ל$2t$

  $a_{m+1} = 2t - \Sigma s_i$ לכן סכום כל איברי A הוא $2t$
- זמן הרדוקציה- לינארי בגודל הקלט .

מתקיים:

- אם $(S,t) \in SubSum$, יש בS תת קבוצה S' שסכום איבריה הוא t.

$\Leftarrow$ ניקח את האיברים ב S' והם יהיו האיברים בA1. שאר איברי A יעברו ל A2.

$\Leftarrow$ סכום האיברים ב A1 הוא t $\Leftarrow$ סכום האיברים ב A2 הוא

- $\Sigma_{a_i \in A} a_i - t = 2t - t = t$

$\Leftarrow$ כלומר סכום איברי הקבוצה השניה הוא גם כן t ולכן חילקנו את A לשתי תתי קבוצות שווֹת משקל

$\Leftarrow R(S,t)=A \in Partition$

מתקיים:

אם $A \in Partition$, יש חלוקה של A לשתי תתי קבוצות A1, A2 שסכום איבריהן שווה.

$\Leftarrow$ רק אחת מהקבוצות מכילה את a_{m+1}. נניח ללא הגבלת הכלליות שזוהי A1.

$\Leftarrow$ בתת קבוצה A2 כל האיברים לקוחים מ S.

$\Leftarrow$ סכום האיברים ב A2 ובA1 הוא שווה ולכן

- $\Sigma_{a_i \epsilon A1} a_i = \Sigma_{a_i \epsilon A2} a_i = \Sigma_{a_i \epsilon A} a_i \ /2 = 2t\ /2 = t$

$\Leftarrow$ כלומר סכום איברי A2 שכולה מורכבת מאיברים מS הוא t

$\Leftarrow (S,t) \in SubSum$

BIN PACKING

Bin Packing

$BP = \{ X=\{x_1,\dots,x_n\}, W =\{ w_1=W(x_1),\dots,w_n=W(x_n)\}, b ,c \mid$

ניתן לאחסן את כל פרטי X בעלי משקל W ב b מיכלים שכל אחד במשקל c}

טענה: בעיית ה Bin Packing היא בעיה בNP Complete.

שלב א בהוכחה, NP∋ Bin Packing

BP = { X, W, b ,c | ניתן לאחסן את כל פרטי בעלי משקל מיכלים שכל אחד במשקל}

יש להראות שקימת מ"ט ל"ד N שפועלת בזמן פולינומי בגודל

הקלט, שמקבלת את Bin Packing .

N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט

אם BP $\in$ (X, W, b ,c)

N יכולה בזמן פולינומי בגודל הקלט לעצור
אם ניתן לחלק את פרטי X בעלי משקל
W בb מיכלים שכל אחד במשקל c.

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט

אם BP Packing $\notin$ (X, W, b ,c)

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט אם
לא ניתן לחלק את פרטי X בעלי משקל
W בb מיכלים שכ"א במשקל c.

הוכחה: שלב א – $\in$NP Bin Packing

נבנה מ"ט ל"ד N שהקלט שלה הוא $\{w_1,\ldots,w_n\}$,b,c,

1. תנחש חלוקה של משקלי W ל b מכלים שסכומי המשקלים בכל מיכל יהיו $\le$ c.
2. N תבדוק:
   א. האם סכום המשקלים של כל הפריטים בכל מיכל $\le$ c. –<u>זמן ליניארי בגודל הקלט</u>
   ב. האם מספר המכלים $\le$ b –<u>זמן ליניארי בגודל הקלט</u>
   ג. האם כל המשקלים של איברי X מופיעים בתתי הקבוצות. –<u>ריבועי בגודל הקלט</u>
3. אם הבדיקה כנדרש, המכונה N תעצור.

אם אחת הבדיקות אינה תקינה המכונה N לא תעצור

הניחוש ובדיקתו פולינומיים בגודל הקלט.

הוכחה: שלב א -NP∈ Bin Packing

מתקיים: אם $(X, W, b, c) \in$ Bin Packing

⇓

ניתן לחלק את פרטי X בעלי משקל W בb מיכלים שכל אחד במשקל c.

⇓

N יכולה לנחש חלוקה זו של המשקלים.

⇓

בבדיקות N תגלה שבאמת זוהי חלוקה של המשקולות של X מיכלים שכל אחד במשקל קטן או שווה ל c

⇓

N תעצור

הוכחה: שלב א –NP∈ Bin Packing

מתקיים: אם Bin Packing ∉ (X, W, b ,c)

⇓

לא ניתן לחלק את פרטי X בעלי משקל W ב b מיכלים שכל אחד במשקל c.

⇓

כל חלוקה שN תנחש, לא תענה על הדרישות

⇓

בבדיקות N תגלה או שזו אינה חלוקה תיקנית, או שיש יותר מ b קבוצות
או שסכום המשקולות בקבוצה גדול מc.

⇓

N לא תעצור

שלב ב - Bin Packing שלמה בNP

BP = { X, W, b ,c | ניתן לאחסן את כל פרטי בעלי משקל מיכלים שכל אחד במשקל}

טענה : Bin Packing $\in$NPC

הוכחה: יש להראות כי א. Bin Packing $\in$NP ✓

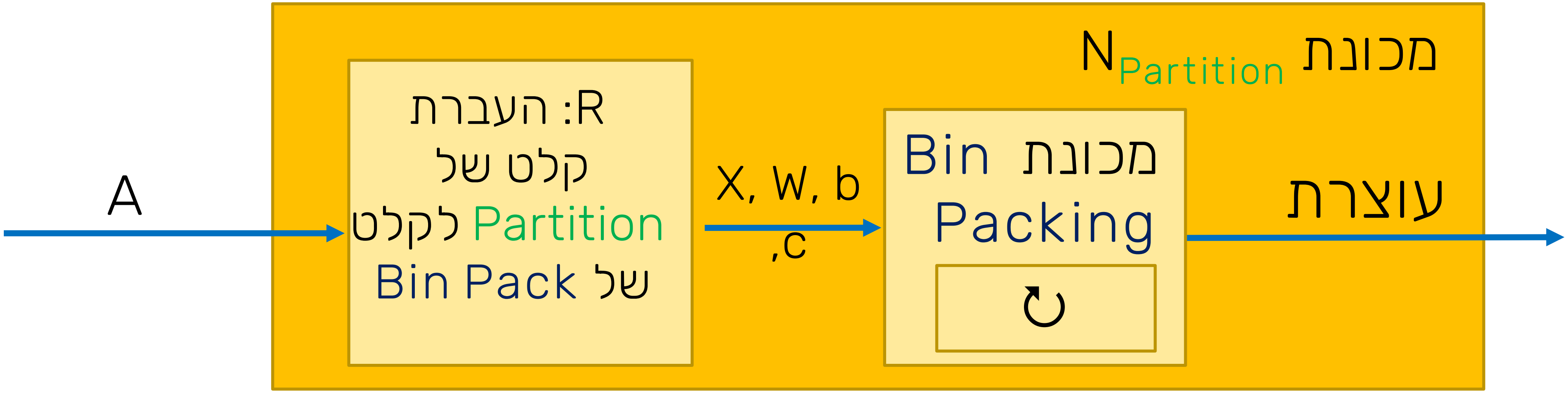
ב. לכל B$\in$NP מתקיים Bin Packing $\leq_p$ B או לחילופין להראות

L $\in$NPC כאשר L $\leq_p$ Bin Packing

הרדוקציה Partition $\leq_p$ Bin Packing

BP = { X, W, b ,c | ניתן לאחסן את כל פרטי בעלי משקל מיכלים שכל אחד במשקל}

Partition = { $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ | ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות שסכומן שווה A}



מה תעשה פרוצדורה R כדי להבטיח Bin Packing ∋(X, W, b ,c) ⇔ A∈ Partition

כלומר ש W ניתנת לחלוקה לb תתי קבוצות שסכומן ≥ c ⇔ בA יש חלוקה לשתי תתי קבוצות שסכומן שווה

הרדוקציה

- בהינתן $A=\{a_1,\dots,a_m\}$, הרדוקציה R מייצרת W, b, c
- W תהיה קבוצה בת m מספרים $(w_1, \dots, w_m)$.
  $W=\{a_1,\dots,a_m\}$ כאשר $w_i=a_i$ עבור $i \le m$
- $c = \Sigma a_i / 2$
- $b = 2$
- זמן הרדוקציה- לינארי בגודל הקלט .

- מתקיים: אם $A \in$ Partition

יש ל-A חלוקה לשתי תתי קבוצות שסכום איברי כל תת קבוצה הוא $\Sigma a_i \backslash 2$.

היות שלפי הבניה איברי W הם איברי A- יש ל-W חלוקה ל $b=2$ תתי קבוצות

שסכום איברי כל תת קבוצה $= c = \Sigma a_i \backslash 2 = \Sigma w_i \backslash 2$.

$W, b, c \in$ Bin Packing .

N_{BP} תעצור

- מתקיים: אם $W, b, c \in$ Bin Packing

אזי יש חלוקה של המשקלים בW ל b תתי קבוצות שסכום איבריהן $\leq c$.

.
היות שלפי הבניה איברי W הם איברי A- יש לA חלוקה ל $b=2$ תתי קבוצות שסכום איברי כל תת קבוצה $\leq c = \Sigma a_i \backslash 2 = \Sigma w_i \backslash 2$.

כיוון שזוהי חלוקה, כל האיברים של A מופיעים בה ולכן סכום כל האיברים בקבוצות הוא סכום איברי A לכן סכום איברי תתי הקבוצות לא יכול להיות קטן ממחצית סכום כל האיברים ולכן נקבל שסכום איברי שתי תת הקבוצות הוא = $\Sigma a_i \backslash 2$.

$A \in$ Partition ולכן $N_{Partition}$ תרצה לעצור

דוגמא למאמר עדכני של Bin Packing

Improved Approximation for Vector Bin Packing

Proceedings of the 2016 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms