בעיות גרפים בNPC

Clique בעיית

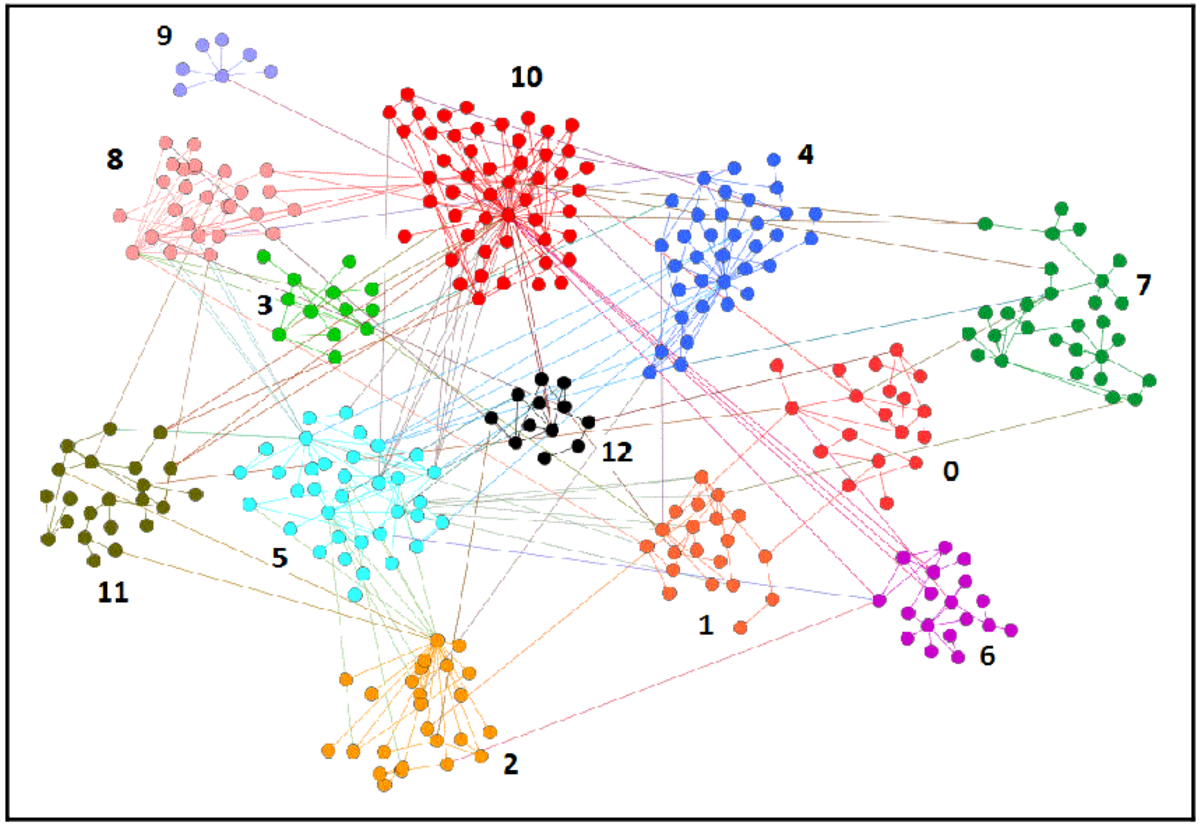
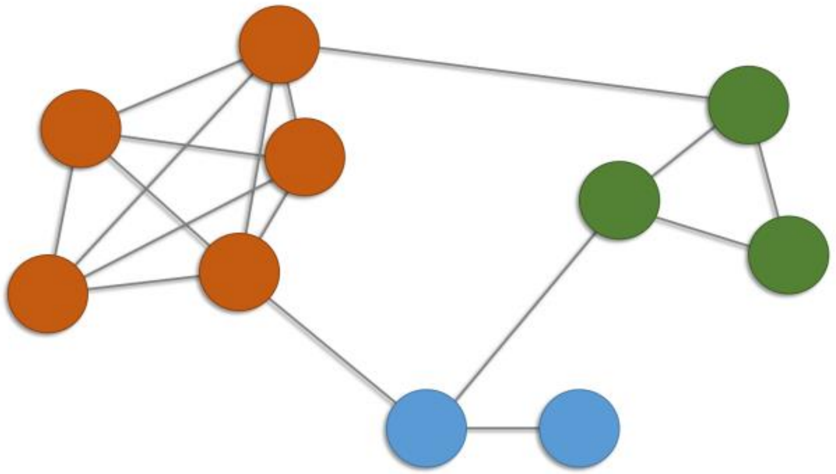


Fig. 2. Communication graph of scientific and educational Web.

בעיית Clique

Clique = { G, k | k בגרף G יש תת גרף מלא בגודל k }



http://compbio.ucsd.edu/communities-and-cliques/ ©

משפט : Clique שלמה בNP

Clique = { G, k | בגרף G יש תת גרף מלא בגודל k }

טענה : Clique $\in NPC$

הוכחה: יש להראות כי א. Clique $\in NP$

ב. לכל $A \in NP$ מתקיים $A \leq_p$ Clique או לחילופין להראות

$L \leq_p$ Clique כאשר $L \in NPC$

שלב א בהוכחה, $\in$NP Clique

Clique = { G, k | k יש תת גרף מלא בגודל k בגרף G }

יש להראות שקימת מ"ט ל"ד N שפועלת בזמן פולינומי בגודל הקלט,

שמקבלת את Clique.

N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט, אם $G,k \in$ Clique

$\downarrow$

N יכולה לעצור בזמן פולינומי

בגודל הקלט אם בG יש תת גרף

מלא בגודל k

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט אם $G,k \notin$ Clique .

$\downarrow$

N לא תעצור בזמן פולינומי

בגודל הקלט אם בG אין תת

גרף מלא בגודל

שלב א בהוכחה, Clique $\in$NP

Clique = { G, k| k יש תת גרף מלא בגודל G בגרף }

יש להראות שקיימת מ"ט ל"ד N
שפועלת בזמן פולינומי בגודל הקלט, ומקבלת את Clique.

N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט,
אם **Clique** $\in$ G,k

$\downarrow$

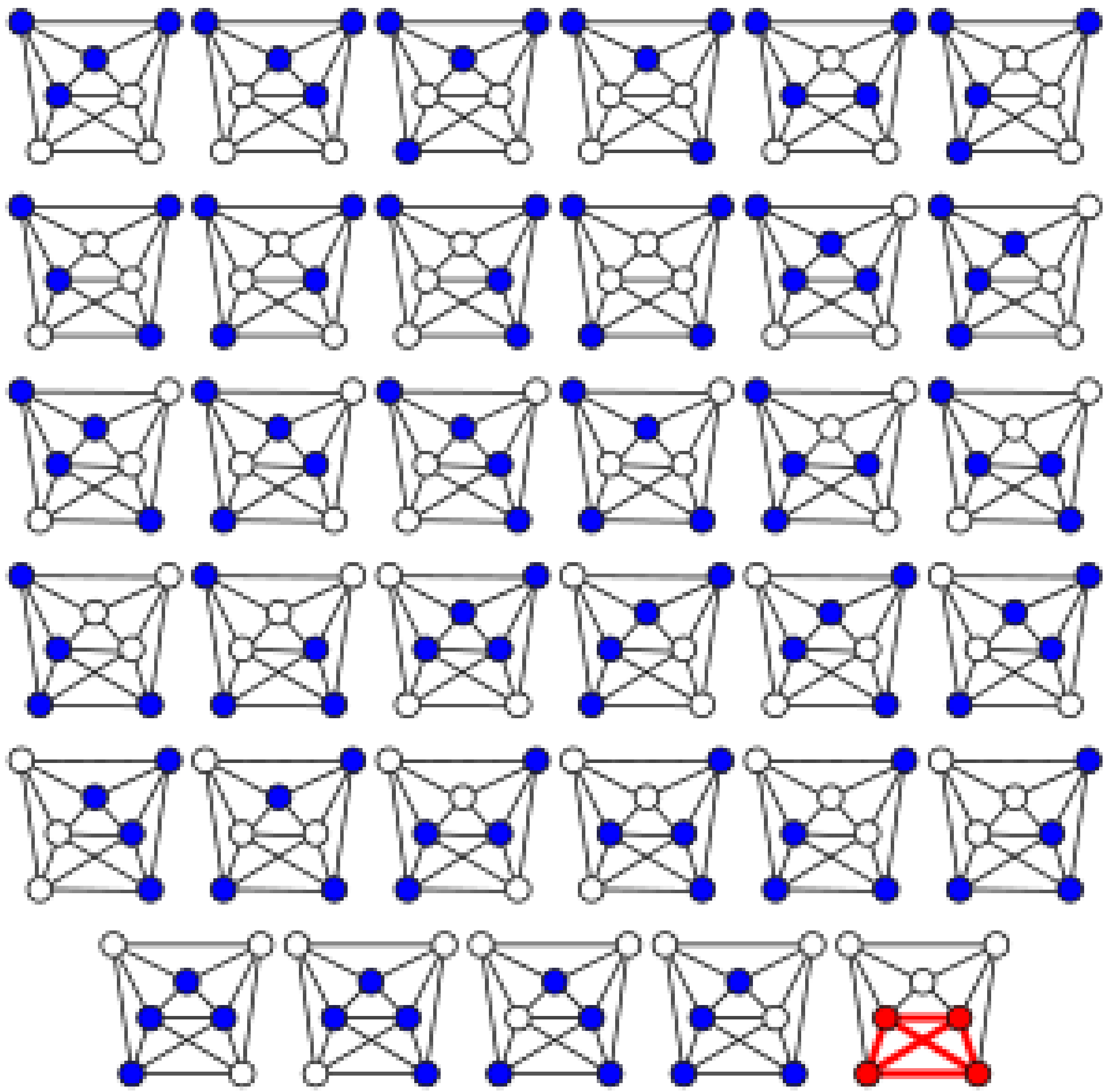
N יכולה לעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט
אם בG יש תת גרף מלא בגודל k

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט
אם **Clique** $\notin$ G,k .

$\downarrow$

N לא תעצור בזמן פולינומי בגודל הקלט
אם בG אין תת גרף מלא בגודל

הכרעת Clique
(באופן דטרמיניסטי)



©Wikipedia

הוכחה: שלב א – ∈NP Clique

נבנה מ"ט ל"ד N שתקלוט (G, k) ותבצע:

א. N תנחש תת קבוצה של K קודקודים שיוצרת קליק.

ב. N תבדוק שהקודקודים בקבוצה <u>שונים</u>.

ג. N תבדוק האם קודקודים אלו יוצרים תת גרף מלא.

ד. אם הבדיקות תקינות המכונה N תעצור.

אם הבדיקות אינן תקינות, N לא תעצור.

שלב א בהוכחה, $\in$NP Clique זמן

בדיקת זמן עבודת N כשהקלט שלה הוא : G,k

- N מנחשת K קודקודים מתוך G לכן זה ליניארי בגודל הקלט.
- בשלב הבדיקות, בודקת ש k הקודקודים שונים – O(k(k-1))
- N בודקת האם הקודקודים יוצרים תת גרף שלם O(k(k-1)|E|)

פעולות. לכן סה"כ זמן עבודת N פולינומי בגודל הקלט.

הוכחה: שלב א -NP∈ Clique

אם $(G, k) \in$ Clique

קיימת בG תת קבוצה של קודקודים בגודל k שיוצרת תת גרף מלא

N יכולה לנחש תת קבוצה זו של קודקודים

בבדיקות N תגלה שיש k קודקודים שונים בקבוצה והם יוצרים גרף מלא.

N תעצור

הוכחה: שלב א $\in NP$– Clique

אם Clique $(G, k) \notin$

⇩

לא קיימת בG תת קבוצה של קודקודים בגודל k שיוצרת תת גרף מלא

⇩

כל תת קבוצה שN תנחש, לא תענה על הדרישות

⇩

בבדיקות N תגלה שהקודקודים אינם שונים
או שאינם יוצרים תת גרף מלא.

⇩

N לא תעצור

Clique שלמה בNP

$Clique = \{\, G, k \mid$ בגרף G יש תת גרף מלא בגודל k $\}$

טענה : $Clique \in NPC$

הוכחה: יש להראות כי א. $Clique \in NP$ ✓

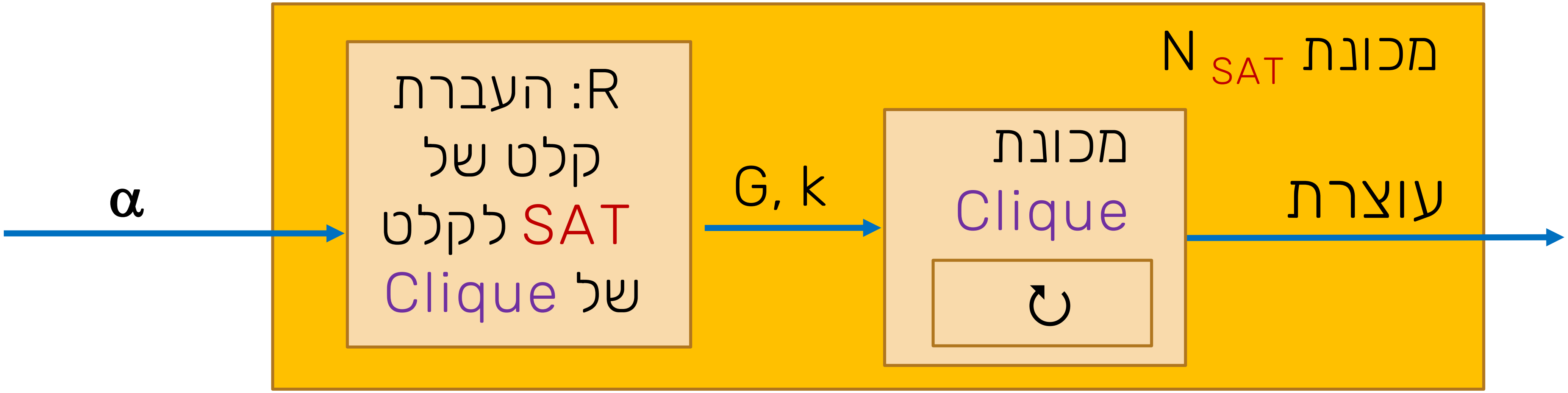
ב. <u>לכל $A \in NP$</u> מתקיים $A \le_p Clique$ או לחילופין להראות

$L \le_p Clique$ כאשר $L \in NPC$

הרדוקציה $SAT \le_p Clique$

Clique = { G, k | בגרף G יש תת גרף מלא בגודל k }

SAT ={ α | α ניתנת לסיפוק }



מה תעשה R כדי להבטיח $\alpha \in SAT \Leftrightarrow G, k \in Clique$

כלומר בG יש תת גרף מלא בגודל k $\Leftrightarrow$ קיימת השמה שמספקת את α

הרדוקציה

R קולטת נוסחה α וממנה צריכה לייצר גרף $G=(V,E)$.

$\alpha = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m,\quad c_i = (x_1 \vee x_2' \vee \dots)$

הבניה: $V = \{ v_{ij} \mid \text{for every } x_i \in c_j,\ 0 < j \le m \}$

$E = \{ (v_{ij}, v_{ab}) \mid j \neq b \ \&\ x_i \neq x_a',\ x_i \in c_j, x_a \in c_b \}$

$k = m$

הרדוקציה -

קולטת נוסחה α וממנה צריכה לייצר גרף $G=(V,E)$.

$$\alpha = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m, \quad c_i = (x_1 \vee x_2' \vee \ldots)$$

הבניה:

$$V = \{ v_{ij} \mid \text{for every } x_i \in c_j, \ 0 < j \leq m \}$$

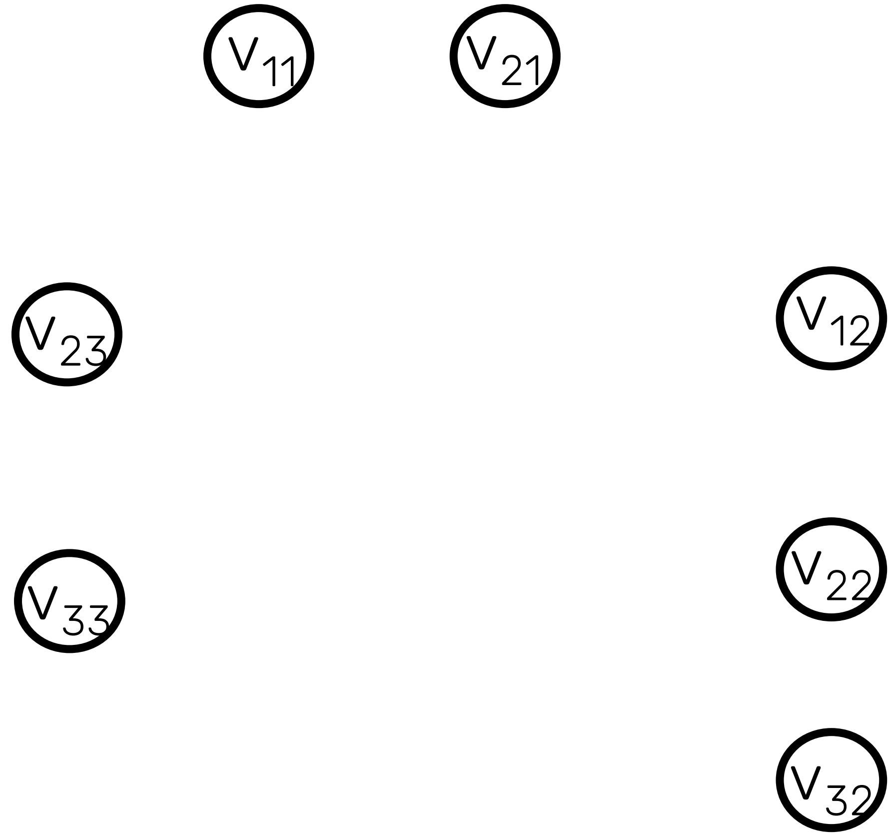
$$E = \{ (v_{ij}, v_{ab}) \mid j \neq b \ \& \ x_i \neq x_a', \ x_i \in c_j, x_a \in c_b \}$$

$$k = m$$

$c_1 \qquad c_2 \qquad c_3$

$$\alpha = (x1 \vee x2') \wedge (x' \vee x2 \vee x3') \wedge (x2' \vee x3)$$

$$(v_{11} \vee v_{21}) \wedge (v_{12} \vee v_{22} \vee v_{32}) \wedge (v_{23} \vee v_{33})$$



זמן הרדוקציה

R קולטת נוסחה $\alpha = (x_1 \vee x_2' \vee \dots)$ $c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m,\ \ c_i =$

מספר הקודקודים שR מייצרת הוא כמספר מופעי המשתנים המופיעים בנוסחה- <u>לינארי בגודל הקלט</u>.

יש קשתות בין קודקודים, כך שמספרן הוא לכל היותר <u>ריבועי בגודל הקלט</u>.

הבניה עצמה – לכל משתנה נבדוק אם שאר המשתנים בקלוזים האחרים אינם השלילה שלו – <u>ולכן ריבועי באורך הנוסחה</u>.

סה"כ כל הפעולות של R והתוצר הם פולינומים בגודל הקלט.

אם $SAT \ni \boldsymbol{\alpha}$ כלומר קיימת השמה שמספקת את α.

כיוון ש α היא בCNF כל קלוז של α ניתן לסיפוק.

בכל אחד מ k הקלוזים, לפחות ליטרל יחיד מקבל ערך T בהשמה זו.

אם נבחר משתנה שהוא T מכל אחד מ k הקלוזים –
אלו משתנים מקלוזים שונים והיות שכולם T הם לא משתנה ושלילתו,
לכן יש בניהם קשתות בG

יש בG k קודקודים שבין כולם קשתות= קליק ולכן N_{Clique} תעצור

אם $\text{Clique} \in G, k$

בגרף יש קבוצה של קודקודים שיוצרים תת גרף שלם.

לפי הגדרות הבניה יש k קודקודים שיש בניהם קשת, לכן הם מייצגים משתנים מקלוזים שונים וכן הם לא מייצגים משתנה ושלילתו.

אם נבחר לתת T למשתנים שהקודקודים של הקליק מייצגים, אזי יש T בכל אחד מ k הקלוזים – וזוהי השמה חוקית, אין T עבור משתנה ושלילתו.

יוצא ש k=m קלוזים יש בהם T ולכן הנוסחה ספיקה N_{SAT} צריכה לעצור