1. Основні типи подій (приклади)

а) Події бувають достовірні, випадкові та неможливі. Достовірною називають таку подію, яка при розглянутих умовах обов'язково трапиться. Неможливою називають таку подію, яка при розглянутих умовах не може трапитись. Випадковою називають таку подію, яка при умовах, що розглядаються, може трапитися, а може й не трапитися. Наприклад, якщо в урні є лише білі кулі, то добування білої кулі з урни — достовірна подія, а добування з цієї урни кулі іншого кольору — неможлива подія. Якщо кинути монету на площину, то поява герба буде випадковою подією, тому що замість герба може з'явитися надпис.

б) Події називають несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні. Приклад. Серед однорідних деталей у ящику є стандартні та нестандартні. Навмання беруть із ящика одну деталь. Події А — взята стандартна деталь, В — взята нестандартна деталь несумісні тому, що взята лише одна деталь, яка не може бути одночасно стандартною та нестандартною.

Події називають сумісними, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно). Приклад. Два стрільця стріляють у мішень. Події A_1 — перший стрілок влучив у мішень, A_2 — другий стрілок влучив у мішень будуть сумісними випадковими подіями.

в) Випадкові події А та В називають залежними, якщо імовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події. Якщо імовірність появи однієї події не залежить від появи або непояви другої, то такі події називають незалежними. Приклад. В урні 10 куль: 3 білих і 7 чорних. Навмання беруть дві кулі. Нехай подія А — взята біла куля; подія В — взята чорна куля. Якщо кулю, яку взяли першою, повертають до урни, то імовірність появи другої кулі не залежить від того, яка взята перша куля. Якщо перша куля не повертається до урни, то імовірність другої події залежить від результату першого випробування. Якщо першою взяли білу кулю, то в урні залишилося 2 білих кулі та 7 чорних, тому $P_A(B)=7/9$.

Якщо першою взяли чорну кулю, то в урні залишилося 3 білих кулі та 6 чорних куль, тому $P_B(B)=6/9=1/3$. Отже імовірність події В залежить від появи або непояви події А.

2. Предмет теорії ймовірностей та її становлення

Теорія ймовірностей – наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах.

Випадковим називається таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж досліду відбувається кожного разу неоднаково. Теорія ймовірностей вивчає ті випадкові явища, які можуть спостерігатися практично необмежено. Виявляється, що незалежно від конкретної природи випадкових явищ, які повторюються багато разів, їх кількість відповідає певним імовірнісним закономірностям. Встановленням цих закономірностей і займається теорія ймовірностей. Отже, предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірних закономірностей масовий однорідних випадкових явищ.

3. Алгебра випадкових подій (приклади).

Об'єднанням (сумою) випадкових подій AUB (або A + B) називають таку випадкову подію, яка полягає у появі події А або В або А та В. Якщо А та В — несумісні, то AUB означає появу події А або події В.

Різницею В — А (або В\А) двох випадкових подій В, А називають усі наслідки, які полягають у тому, що подія А не з'являється.

Добутком (перетином) A∩B (або A B) випадкових подій А, В називають таку випадкову подію, яка полягає у появі події А та В одночасно.

Випадкові події A_1 , A_2 , …, A_n утворюють повну групу подій, якщо внаслідок випробування хоча б одна з них з'явиться обов'язково. Приклад. Кидають шестигранний кубик. Позначимо події так A_1 — випала грань 1; A_2 — випала грань 2; A_3 — випала грань 3; A_4 — випала грань 4; A_5 — випала грань 5; A_6 — випала грань 6. Події A_1 , A_2 ,..., A_6 утворюють повну групу.

Дві несумісні події, які утворюють повну групу, називають протилежними. Подія, протилежна події А, позначається A . Якщо позначити через А подію, що при стрільбі по мішені вибито 8 очок, то подія A — при стрільбі по мішені вибито будь-яке інше число очок.

4. Яка класифікація подій використовується при класичному визначенні ймовірності подій(приклади)?

Класифікація подій.

Події поділяються на вірогідні, неможливі та випадкові.

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається вірогідною. Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Наведемо приклади вірогідних подій.

Приклад 1

1. У земних умовах вода, нагріта до температури 100 °С, набуває стану кипіння.

2. Якщо в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то кулька, навмання взята із цієї урни, має номер, що міститься в межах від 1 до 10.

Подія називається неможливою, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом ∅ (порожня множина).

5. Класичне та геометричне визначення ймовірності (приклади).

(Класична)Нехай простір елементарних подій Ω = {ω₁, ω₂,..., ωₙ} є скінченною множиною, тобто є тільки n можливих результатів випробування N(Ω) = n. Всі події рівноможливі. Нехай А — випадкова подія, що містить m сприятливих елементарних подій. Імовірність події А дорівнює відношенню числа елементарних наслідків, які сприяють появі події А, до загального числа усіх єдиноможливих та рівноможливих елементарних наслідків. Імовірність події А позначають P(A) = m/n. Приклад. В урні 6 однакових за розміром куль: 2 червоні, 3 сині, 1 біла. Знайти ймовірність появи червоної кулі, якщо беруть одну кулю з урни навмання. Нехай подія А — навмання взята червона куля. З урни можна взяти будь-яку кулю із шести, тому усіх можливих наслідків 6 (n = 6). Для появи червоної кулі сприяти будуть лише 2 кулі, тому m = 2. За формулою одержуємо P(A) = 2/6 = 1/3

(Геометрична) Нехай Ω — деяка область на прямій, площині чи в просторі, А — деяка частина на області Ω. В області Ω навмання вибирають точку, вважаючи, що вибір точок області рівноможливий. Ймовірність того, що вибрана точка з А визначається за формулою P(A) = mesA/ mes Ω. Приклад. Яка ймовірність того, що монета радіусом 1 см впаде в квадратну область зі стороною 3см? Розв'язання.

mes Ω = a^2 = 3*3 = 9$см^2$

mes A = πR^2 = 1*3.14 = 3.14$см^2$

P(A) = mes A/mes Ω = 3.14/9

6. Основні властивості ймовірності (доведення)

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

Тепер розглянемо ***основні властивості імовірності***, використовуючи формулу (1) класичного означення імовірності події *A*.

1. Якщо подія *A* достовірна, то її імовірність дорівнює одиниці, тобто $p(A) = 1$.

2. Якщо подія *A* неможлива, то її імовірність дорівнює нулеві, тобто $p(A) = 0$.

3. Якщо подія *A* випадкова, то її імовірність задовольняє співвідношення

$$0 < P(A) < 1. \qquad (3)$$

Дійсно, при розглянутих умовах достовірна подія обов'язково з'явиться, як наслідок, усі можливі елементарні наслідки сприяють події A, тобто $n = m$ і з формули (1) одержимо

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(\varnothing)=0$
3. $P(\Omega)=1$
4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, якщо А та В несумісні
5. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

7. Розміщення, сполучення, перестановки та їх використання в теорії ймовірностей (приклади).

Перестановкою із n елементів називається будь-яка скінченна послідовність), яка одержується в результаті упорядкування деякої скінченної множини, складеної з n елементів. Число всіх перестановок із n елементів P_n = 1*2*...*n позначається P_n. Це число дорівнює добутку всіх цілих чисел від 1 до n. Позначають: 1*2*...*n = n!

Добуток n перших натуральних чисел прийнято позначати символом n!

Приклад. Якою кількістю способів можна розсадити 8 студентів в ряд з 8 місць: P_8 =1*2*3*4*5*6*7*8 = 40320

Сполучення (комбінації)

Нехай є множина M, яка складається з n різних елементів. Будь-яка підмножина множини M, яка містить k елементів (k=0, 1, 2, ..., n), називається сполученням) або комбінацією з даних n елементів по k елементів, якщо ці підмножини відрізняються хоча б одним елементом. Число різних сполучень із n елементів по k позначається C_n^k . Іноді замість C_n^k пишуть $\binom{k}{n}$.

Приклад. Із множини цифр 1, 2, 3, 4 можна утворити такі сполучення по два елементи: 1,2; 1,3; 1,4; 2,3; 2,4; 3,4.

Розміщення

Кожна впорядкована підмножина, яка містить k елементів даної множини з n елементів, називається розміщенням із n по k елементів. Таким чином, два різних розміщення із даних n елементів по k відрізняються хоча б одним або складом елементів, або порядком їх розміщення.

Приклад. Із трьох цифр 1, 2, 3 можна утворити такі розміщення по два: 1,2; 2,1; 1,3; 3,1; 2,3; 3,2. Число розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k . Число всіх можливих розміщень із n елементів по k дорівнює добутку k послідовних чисел, з яких найбільшим є n, тобто:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \qquad A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{P_n}{P_{n-k}}$$

8. Теорема додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій (доведення).

2.5. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема 5. *Якщо випадкові події A та B сумісні, то ймовірність їх об'єднання дорівнює сумі їх імовірностей без імовірності їх сумісної появи, тобто*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (1)$$

Доведення. Згідно з умовою теореми події A та B сумісні, тому $A\cup B$ з'явиться, якщо з'явиться одна з трьох несумісних подій $A\cdot\bar B$, $\bar A\cdot B$ або $A\cdot B$.

Згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій одержимо

$$P(A\cup B)=P(A\cdot\bar B)+P(\bar A\cdot B)+P(A\cdot B). \qquad (2)$$

Подія A з'явиться, якщо з'явиться одна з двох несумісних подій $A\cdot\bar B$ або $A\cdot B$.

Згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій

$$P(A)=P(A\cdot\bar B)+P(A\cdot B)\Rightarrow P(A\cdot\bar B)=P(A)-P(A\cdot B). \qquad (3)$$

Аналогічно одержимо

$$P(B)=P(\bar A\cdot B)+P(A\cdot B)\Rightarrow P(\bar A\cdot B)=P(B)-P(A\cdot B). \qquad (4)$$

Підставимо (3) та (4) у формулу (2), тоді одержимо рівність (1), яку треба було довести.

Зауваження. *Якщо події A та B незалежні, то формула (1) приймає вигляд*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Для залежних випадкових подій маємо

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B).$$

9. Теорема множення ймовірностей для залежних та незалежних випадкових подій (доведення).

Добутком двох подій A і B називається подія C, що полягає у здійсненні під час одиничного випробовування і події A, і події B.

Подія A називається від події B, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулась чи ні подія B.

Дві події A та B називають залежними, якщо ймовірність настання однієї з них залежить від того, настала друга подія чи ні.

Умовною ймовірністю PA(B) події B називається ймовірність події B, знайдена в припущенні, що подія A вже настала.

З означення незалежних подій випливає, що настання однієї з них не змінює ймовірності настання другої. Тому для незалежних подій справджуються рівності:

$$P_A(B) = P(B),\ P_B(A) = P(A)$$

Отже, умовні ймовірності незалежних подій дорівнюють їх безумовним імовірностям.

Теорема 1. Імовірність добутку двох залежних подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, яка знайдена з припущенням, що перша подія настала, тобто

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

Доведення. Нехай з усієї кількості n елементарних подій k сприяють події A і нехай з цих подій l сприяють події B, а, отже і події AB. Тоді:

$$P(AB) = l/n = k/n * l/k = P(A)P_A(B)$$

що й треба було довести.

Теорема 2. Імовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку імовірностей цих подій, тобто

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Доведення. Якщо A і B - незалежні події, то

$$P_A(B) = P(B)$$

і формула $P(AB) = P(A)P_A(B)$

перетворюється в формулу

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

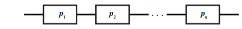
10. За якою формулою можна обчислити ймовірність появи хоча б однієї з n незалежних подій (доведення)?

Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій.

$P(A)=1-q_1q_2\ldots q_n$

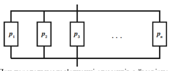
Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мають однакову ймовірність, яка дорівнює p, то ймовірність появи хоча б однієї з них $P(A) = 1-(1-p)^n = 1-q^n$

11. Імовірність безвідмовної роботи блоку, всі елементи якого з'єднані послідовно (паралельно).



При послідовному з'єднанні елементів з ймовірностями роботи $p_1, p_2, \ldots, p_n$ безвідмовна робота блоку можлива, лише якщо всі елементи блоку працюють. Для обчислення надійності такої системи необхідно виконати множення незалежних подій (робота кожного блоку окремо):

$p = p_1 * p_2 * \ldots * p_n$.



При паралельному з'єднанні елементів з ймовірностями роботи $p_1, p_2, \ldots, p_n$ безвідмовна робота блоку можлива, якщо хоча б один елемент працює. Так як сприятливих складних подій для роботи блоку буде багато (безліч), використовуючи особливість протилежних подій визначимо ймовірність роботи блоку з ймовірності відмови блоку, так як ця подія вимагаю відмову усіх елементів блоку.

$p = 1 - q = 1 - q_1 * q_2 * \ldots * q_n$.

12. Формула повної ймовірності (доведення)

Нехай подія A може з'явитись лише сумісно з однією з подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, що утворюють повну групу подій і є попарно несумісними та називаються гіпотезами, тоді має місце формула формула повної ймовірності.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)*P(A/H_i)$$

Формула повної ймовірності використовується у випадку коли випадковість відбувається в 2 етапи, при цьому перший етап розкладається на гіпотези, які утворюють повну групу подій.

Формула повної ймовірності використовується якщо питають про ймовірність останньої події.

13. Формули Байє

Теорема 6. *Якщо випадкова подія A може з'явитись лише сумісно з однією із несумісних між собою подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу, тоді ймовірність події A обчислюється за формулою*

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A). \qquad (1)$$

Доведення. За умовою теореми подія A означає появу однієї з подій $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$, тобто

$$A=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n.$$

Події $B_1, B_2, \ldots, B_n$ несумісні, тому й події $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ також несумісні. Згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(A)=P(AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n)=\sum_{k=1}^{n}P(AB_k). \qquad (2)$$

Події A та B_k - залежні, тому для обчислення $P(AB_k)$ можна використати теорему множення ймовірностей залежних подій, тобто

$$P(AB_k)=P(B_k)P_{B_k}(A). \qquad (3)$$

Підставимо (3) у формулу (2) і одержимо рівність (1), яку треба було довести.

Формулу (1) називають формулою повної ймовірності.

Тепер ознайомимось з формулами Байєса.

В умовах Теореми 1 невідомо, з якою подією із несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$ з'явиться подія A. Тому кожну з подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$ можна вважати гіпотезою. Тоді $P_A(B_k)$ – імовірність k-тої гіпотези.

Якщо випробування проведено і в результаті його подія A з'явилась, то умовна ймовірність $P_A(B_k)$ може не дорівнювати $P(B_k)$.

Порівняння імовірностей $P(B_k)$ та $P_A(B_k)$ дозволяє переоцінити імовірність гіпотези при умові, що подія A з'явилась.

Для одержання умовної імовірності використаємо теорему множення ймовірностей залежних подій

$$P(AB_k)=P(B_k)P_{B_k}(A)=P(A)P_A(B_k)\Rightarrow$$

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}. \qquad (5)$$

Підставимо у формулу (5) замість P(A) її значення з формули повної ймовірності. Одержимо

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P_{B_k}(A)},\quad k=1,2,\cdots,n. \qquad (6)$$

*Формули (6) називають **формулами Байєса**. Вони дозволяють переоцінювати імовірності гіпотез. Це важливо при контролі або ревізіях.*

Нехай випадкова подія A може з'явитись у кожному випробуванні з імовірністю $P(A)=p$ або не з'явитись з імовірністю $q=P(\bar A)=1-p$.

Поставимо задачу: знайти ймовірність того, що при n випробуваннях подія A з'явиться m разів і не з'явиться n − m разів. Шукану імовірність позначимо $P_n(m)$.

У загальному випадку, коли подія A з'являється m разів у n випробуваннях, таких складних подій буде

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Обчислимо ймовірність однієї складної події, наприклад,

$$\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{m}\cdot\underbrace{\bar A\cdot\bar A\cdots\bar A}_{n-m}.$$

Імовірність сумісної появи n незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій згідно з теоремою множення ймовірностей, тобто

$$P=\Big(\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{m}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\bar A\cdot\bar A\cdots\bar A}_{n-m}\Big)=P\Big(\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{m}\Big)\cdot P\Big(\underbrace{\bar A\cdot\bar A\cdots\bar A}_{n-m}\Big)=$$

$$=P^m(A)P^{n-m}(\bar A)=p^mq^{n-m}.$$

Кількість таких складних подій C_n^m і вони несумісні. Тому, згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій, маємо

$$P_n(m)=C_n^mp^mq^{n-m}. \qquad (1)$$

Формулу (1) називають **формулою Бернуллі**. Вона дозволяє знаходити імовірність появи події A m разів при n випробуваннях, які утворюють схему Бернуллі.

14. Формула Бернуллі(доведення на прикладі).

Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах і імовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова та не залежить від появи або непояви A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають схемою Бернуллі.

15. Імовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях (доведення).

P(|m/n-p|<=ε) = 2Φ(ε*sqrt(n/pq))

де m – настання події A в n незалежних випробуваннях з ймовірністю p. Відхилення відносної частоти не перевищує ε>0.

Знайдемо ймовірність виконання нерівності

- ε<=m/n-p<= ε або -ε<=(m-np)/n<= ε

Домножимо на sqrt(n/pq)

-ε*sqrt(n/pq)<=(m-np)/sqrt(npq)<= ε*sqrt(n/pq)

За інтегральною теоремою Лапласа

x' = -ε*sqrt(n/pq), x'' = ε*sqrt(n/pq) пишемо

P(ε*sqrt(n/pq)<=(m-np)/sqrt(npq)<= ε*sqrt(n/pq)) =

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

P(|m/n-p|<=ε) = 2Φ(ε*sqrt(n/pq))

16. Найбільш імовірне значення числа появ події A у схемі Бернуллі (особливості визначення).

Число m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається найімовірнішим, якщо ймовірність появи цієї події не менша ймовірності інших подій.

Це число у випадку схеми Бернуллі визначається співвідношенням $np-q\le m_0\le np+p$ або $(n+1)p-1\le m_0\le(n+1)p$

Число m_0 має бути цілим. Якщо (n+1)p - ціле число, тоді найбільше значення ймовірності мають два числа: $m_0=(n+1)p-1$ та $m_0=(n+1)p$

Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то к-сть n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз знаходять за формулою:

$$n>\frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

17. Формула Пуассона (приклади та особливості використання).

Теорема 1 (Теорема Пуассона). *Якщо $n\to\infty$ і $p\to 0$ так, що $np\to\lambda$, $0<\lambda<\infty$, то*

$$P_n(m)=C_n^mp^mq^{n-m}\to\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

для будь-якого постійного $m=0,1,2,\cdots$.

Наслідок. Імовірність появи події A m разів у n випробуваннях схеми Бернуллі можна знаходити за наближеною формулою Пуассона

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad (1)$$

де $\lambda=np$.

Формулу (1) доцільно застосовувати при великих n та малих p.

Приклад 1. Підручник надруковано тиражем 100000 екземплярів. Імовірність невірного брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має 5 бракованих підручників.

Розв'язання. Брошурування кожного підручника можна розглядати як випробування. Випробування незалежні і мають однакову імовірність невірного брошурування, тому задача вкладається у схему Бернуллі. Згідно з умовою задачі

n = 100000 досить велике; p = 0,0001 мала; m = 5.

Застосовуючи формулу Пуассона (1), одержимо

$$P_{100000}(5)\approx\frac{10^5}{5!}e^{-10}\approx 0{,}0375.$$

18. Локальна формула Муавра-Лапласа (приклади та особливості використання).

(локальна теорема Муавра_Лапласа). Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в усіх випробуваннях однакова, то ймовірність появи події A т разів може бути знайдена за наближеною формулою

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m),$$

$$де\ \ x_m=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Формулу доцільно використовувати при n>100 та npq>20 .

Приклад 2. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка імовірність того, що кількість очок, кратна трьом, з'явиться 267 разів.

Розв'язання. У даному випадку n та m досить великі. Тому для знаходження $P_{800}(267)$ можна використати формулу (2). Маємо

$$P(A)=p=\frac{2}{6},\ q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

$$x_{267}=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{267-800\cdot\frac{1}{3}}{\frac{40}{3}}=\frac{801-800}{40}=\frac{1}{40}=0{,}025.$$

Отже, за формулою (2) одержимо

$$P_{800}(267)=\frac{3}{40}\cdot\varphi(0{,}025)=\frac{3}{40}\cdot 0{,}3988=0{,}03.$$

Значення $\varphi(0{,}025)$ взято з таблиці так

19. Інтегральна формула Лапласа (приклади та особливості використання).

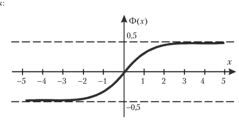
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Інтегральною функцією Лапласа називають функцію

Основні властивості:

1. Інтегральна функція Лапласа є непарною функцією Φ(-x) = -Φ(x)
2. Φ(0) = 0
3. Φ(x) = 0.5 для x>=5

Графік:



Якщо у схемі Бернуллі в кожному із n незалежних випробувань подія A може з'явитися з постійною імовірністю p, тоді імовірність появи події A не менш m_1 та не більш m_2 разів може бути знайдена

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

де Φ(x) – інтегральна функція Лапласа,

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}},\qquad x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}.$$

Приклад. Монету кидають 400 разів. Яка ймовірність того, що орел випав не менше 205 і не більше 332 разів?

Розв'язання. Для знаходження ймовірності P_{400}(205<=m<=332) використаємо формули:

x_2 = (332-400*0.5)/(20*0.5) = 13.2

x_1 = (205-400*0.5)/(20*0.5) = 0.5

P_{400}(205<=m<=332) = Φ(13.2) - Φ(0.5) = 0.5 - 0.191482 = 0.308518

20. Послідовність незалежних випробувань з різними ймовірностями. Визначення ймовірності Pn(k).

Якщо ймовірність P настання події A в кожному з випробувань стала, то ймовірність $P_n(k)$того, що подія A настане k разів в n незалежних випробуваннях дорівнює

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}\quad або\quad P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$

Якщо відбувається декілька випробувань, причому ймовірність події A в кожному з випробувань не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називають незалежними відносно події A.

В різних незалежних випробуваннях подія A може мати або різні ймовірності, або одну й ту ж саму ймовірність. Будемо розглядати тільки варіант з сталою ймовірністю.

Нехай відбувається n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитися або не з'явитися. Домовимося вважати, що ймовірність події A в кожному з випробувань стала, а саме дорівнює p. Тоді, ймовірність ненастання події A в кожному з випробувань також стала і дорівнює q = 1 - p.

Поставимо собі задачу обчислити ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів і, відповідно, не відбудеться n - k разів. Важливо підкреслити, що не вимагається, щоб подія A повторилась рівно k разів в певній послідовності.

Поставлену задачу можно вирішити за допомогою формули Бернуллі.

21. Закон розподілу випадкової величини

Нехай випадкова дискретна величина X приймає значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з відповідними імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Задати закон розподілу такої випадкової величини – це задати рівність $p_k=P(X=x_k)$, яку можна розглядати як функцію.

Тому закон розподілу X можна задати ***аналітично, таблично, графічно***. Функція розподілу для дискретної випадкової величини має вигляд

$$F(x)=P(X<x)=\sum_{x_i<x}p(x_i).$$

Найчастіше використовують табличний спосіб задання ДВВ, який називають ***рядом розподілу*** і зображують у вигляді

X	x_1	x_2	…	x_n
P(X)	p_1	p_2	…	p_n

У першому рядку записані усі можливі значення X, а у другому рядку – відповідні імовірності, які мають властивість

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=1.$$

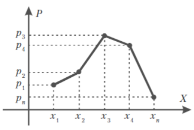
Графічний спосіб. Візьмемо прямокутну систему координат. На осі абсцис будемо відкладати можливі значення ДВВ, а на осі ординат – відповідні значення імовірності. Одержимо точки з координатами (x_1,p_1), (x_2,p_2), $\cdots$, (x_n,p_n).

Поєднавши ці точки прямими, одержимо графік (див. мал. 11) у вигляді ***многокутника розподілу випадкової дискретної величини***.

Значення ДВВ, імовірність якого найбільша, називають ***модою***.

На малюнку 11 мода – x_3.

Аналітичний спосіб задання випадкової дискретної величини базується на заданні певної функції, за якою можна знайти імовірність p відповідного значення x_k, тобто $p_k=f(x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$.



22. Вказати основні закони розподілу дискретної випадкової величини

1. Біноміальний закон розподілу. Цей закон має вигляд

$$P(X=m)=C_n^mp^m(1-p)^{n-m},\ m=0,1,2,\ldots,n$$

і використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з'являється з імовірністю p.

2. Закон розподілу Пуассона. ДВВ X приймає злічену множину значень $(m=0,1,2,\ldots)$ з імовірностями

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}\quad(a>0).$$

Цей розподіл використовують у задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування, для обчислення: кількості вимог на виплату страхових сум за рік, кількості дефектів однакових виробів.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n досить велике, а p або 1 – p прямує до нуля, то біноміальний розподіл апроксимує розподіл Пуассона, параметр якого $a=np$, причому при $p\le 0{,}1$ або $p\ge 0{,}9$ ця апроксимація дає добрі результати незалежно від величини n.

3. Геометричний розподіл. Цей розподіл має вигляд

$$P(X=m)=pq^{m-1},$$

де p = P(A) – імовірність появи події A в кожному випробуванні, q = 1 – p, X – кількість випробувань до появи події A в серії незалежних повторних випробувань.

Ряд імовірностей цього розподілу буде нескінченно спадною геометричною прогресією із знаменником q, сума якої дорівнює одиниці.

Геометричний розподіл застосовують у різноманітних задачах статистичного контролю якості виробів, в теорії надійності та у страхових розрахунках.

4. Гіпергеометричний розподіл. Цей розподіл має вигляд

$$P(X=m)=\frac{C_k^m\cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,2,\ldots,n,\ k\ge n.$$

Він вказує імовірність появи m елементів з певною властивістю серед n елементів, взятих із сукупності N елементів, яка містить k елементів саме такої властивості.

Цей розподіл використовують у багатьох задачах статистичного контролю якості.

Зауваження 3. *Якщо об'єм вибірки n малий у порівнянні з об'ємом N сукупності, тобто $\frac{n}{N}\le 0{,}1$; $\frac{n}{k}\le 0{,}1$, то імовірності у гіпергеометричному розподілі будуть близькими до відповідних імовірностей біноміального розподілу з $p=\frac{k}{N}$.*

5. Поліноміальний розподіл. Цей розподіл має вигляд

$$P_n=(X_1=m_1;\ X_2=m_2;\ \ldots;\ X_s=m_s)=\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_s!}\cdot p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}$$

Він застосовується тоді, коли внаслідок кожного із здійснених повторних незалежних випробувань може з'явитися s різних подій A_i з імовірністю p_i, причому $\sum_{i=1}^{s}p_i=1$.

23. Числові характеристики дискретної випадкової величини.

Математичним сподіванням дискретної випад- кової величини X називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності.

Математичне сподівання характеризує центр розподілу дискретної випадкової величини.

Дисперсією дискретної випадкової величини X називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ X від її математичного сподівання.

Використовується для характеристики розсіювання можливих значень X відносно центру розподілу

У більшості випадків випадкова величина X має розмірність, наприклад, метр, міліметр, грам, тому її дисперсія D(X) буде вимірюватись у квадратних одиницях цієї розмірності. У практичній діяльності доцільно знати величину розсіювання випадкової величини в розмірності цієї величини. Для цього використовують середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює квадратному кореню з дисперсії.

Початковим моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k

Центральним моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X – M(X))^k$

24. Наведіть формули обчислення числових характеристик дискретних випадкових величин.

ДВВ називають таку величину, яка може приймати відокремлені, ізольовані одне від одного, числові значення з відповідними ймовірностями.

Приклади:

1.кількість влучень у мішень при трьох пострілах: X:0;1;2;3.

2. кількість викликів швидкої допомоги: У:0;1;2;..n.

ДВВ задають в три основні способи:табличним, аналітичним, графічним.

Для того, щоб зобразити графічно з'єднують точки з координатами (xi; pi) від найменшого до найбільшого відрізками і утворюють ламану.

ДВВ також задають аналітично (формулою). Цей спосіб використовується у випадку основних законів розподілу: біноміальний, геометричний, гіпергеометричний та закон Пуассона.

25. Функція розподілу та щільність розподілу ймовірностей випадкової величини.

Означення 4. *Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) називають імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x.*

Функцію розподілу позначають $F(x)$. Таким чином,

$$F(x) = P(X < x).$$

Якщо НВВ X може приймати будь-яке значення з (a, b), то

$$P(a<X<b) = F(b) - F(a), \tag{1}$$

тобто імовірність прийняття величиною X значень з (a, b) дорівнює приросту функції розподілу.

*Формулу (1) часто називають **основною формулою теорії імовірностей**.*

Зауваження. *Неперервна випадкова величина X, що приймає значення у проміжку (a, b), має незліченну кількість можливих значень, тому набуття X певних значень $X = a$ або $X = b$ буде майже неможливою подією. Це означає, що $P(X = a)$ та $P(X = b)$ будуть нескінченно малими величинами, які у практичних розрахунках можна не враховувати. Тому мають місце рівності*

$$P(a<X<b) = P(a\le X<b) = P(a<X\le b) = P(a\le X\le b).$$

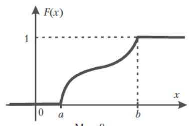
Означення інтегральної функції розподілу та властивості імовірності P дозволяють одержати такі властивості функції розподілу:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – зростаюча функція, тобто $F(x_2) > F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

3) $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Графік функції розподілу $F(x)$ може мати вигляд, зображений, наприклад, на мал. 9.



Мал. 9.

Означення 5. ***Диференціальною функцією розподілу** або **щільністю імовірностей неперервної випадкової величини** називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають*

$$f(x) = F'(x). \tag{2}$$

Назва «щільність імовірностей» випливає з рівності

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(X<x+\Delta x) - P(X<x)}{\Delta x}.$$

Із формули (2) випливає, що функція розподілу $F(x)$ є первісною для диференціальної функції розподілу $f(x)$.

Теорема 1. *Імовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу (a, b), можна знайти за формулою*

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Доведення. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тому згідно з формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Праві частини рівностей (1) та (4) рівні, тому і ліві їх частини рівні, тобто має місце рівність (3), яку й треба було довести.

26. Властивості функції розподілу (доведення).

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1]:*

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

Свойство 2. *$F(x)$ — неубывающая функция, т. е.*

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее x_2, можно подразделить на следующие два несовместных события: 1) X примет значение, меньшее x_1, с вероятностью $P(X<x_1)$; 2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \le X < x_2$, с вероятностью $P(x_1 \le X < x_2)$. По теореме сложения имеем

$$P(X<x_2) = P(X<x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда

$$P(X<x_2) - P(X<x_1) = P(x_1 \le X < x_2),$$

или

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2). \tag{*}$$

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $F(x_2)-F(x_1) \ge 0$, или $F(x_2) \ge F(x_1)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{**}$$

Это важное следствие вытекает из формулы (*), если положить $x_2 = b$ и $x_1 = a$.

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

Действительно, положив в формуле (**) $a = x_1$, $b = x_1 + \Delta x$, имеем

$$P(x_1 \le X < x_1+\Delta x) = F(x_1+\Delta x) - F(x_1).$$

Устремим Δx к нулю. Так как X — непрерывная случайная величина, то функция $F(x)$ непрерывна. В силу непрерывности $F(x)$ в точке x_1 разность $F(x_1+\Delta x) - F(x_1)$ также стремится к нулю; следовательно, $P(X = x_1) = 0$. Используя это положение, легко убедиться в справедливости равенств

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = \\ = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b). \tag{***}$$

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то: 1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.*

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \le a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно (так как значений, меньших x_1, величина X по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2 \ge b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно (так как все возможные значения X меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x\to \infty} F(x) = 1.$$

27. Властивості щільності розподілу (доведення).

Диференціальна функція розподілу НВВ $X \in (a, b)$ має такі властивості:

1) $f(x) \ge 0$ тому, що вона є похідною зростаючої функції $F(x)$;

2) $f(x) = 0$ при $x < a$ та $x \ge b$ тому, що є похідною $F(x) = 0$ при $x < a$ та $F(x) = 1$ при $x \ge b$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ тому, що подія $\{-\infty < X < \infty\}$ — достовірна.

28. Імовірність попадання випадкової величини в проміжок (a, b) (доведення).

Теорема 1. *Імовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу (a, b), можна знайти за формулою*

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Доведення. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тому згідно з формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Праві частини рівностей (1) та (4) рівні, тому і ліві їх частини рівні, тобто має місце рівність (3), яку й треба було довести.

29. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Найчастіше використовують три числових характеристики: ***математичне сподівання, дисперсію** та **середнє квадратичне відхилення від математичного сподівання**.*

Ознайомимось із цими числовими характеристиками та їх властивостями.

Математичне сподівання та його основні властивості

Означення 1. ***Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X** називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності.*

Математичне сподівання ДВВ X позначають $M(X)$ або m_X, тобто

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k. \tag{1}$$

Якщо X приймає нескінчену кількість значень, то

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k.$$

Математичне сподівання ДВВ X характеризує середнє значення випадкової величини X із врахуванням імовірностей його можливих значень. У практичній діяльності під математичним сподіванням розуміють центр розподілу випадкової величини.

Математичне сподівання характеризує *центр розподілу* дискретної випадкової величини. Але цієї характеристики недостатньо, бо можливе значне відхилення можливих значень від центру розподілу. Для характеристики розсіювання можливих значень X відносно центру розподілу введемо нову числову характеристику.

Означення 2. ***Дисперсією дискретної випадкової величини X** називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ X від її математичного сподівання.*

Дисперсію величини X позначають $D(X)$ або D_X. Це означення математично виглядає так

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right). \tag{2}$$

Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини

У більшості випадків випадкова величина X має розмірність, наприклад, метр, міліметр, грам, тому її дисперсія $D(X)$ буде вимірюватись у квадратних одиницях цієї розмірності.

У практичній діяльності доцільно знати величину розсіювання випадкової величини в розмірності цієї величини. Для цього використовують середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює квадратному кореню з дисперсії і позначається

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Поняття моментів розподілу

***Означення 3. Початковим моментом порядку k випадкової величини X** називають математичне сподівання величини X^k і позначають*

$$\nu_k = M\left(X^k\right), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

***Центральним моментом порядку k випадкової величини X** називають математичне сподівання величини $\left(X - M(X)\right)^k$ і позначають*

$$\mu_k = M\left(\left(X - M(X)\right)^k\right), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Відмітимо, що

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M\left(X^2\right),$$

тому

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2; \quad \mu_1 = M\left(X - M(x)\right) = 0;$$

$$\mu_2 = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = D(X).$$

Початкові та центральні моменти порядку $k \ge 2$ дозволяють краще враховувати вплив на математичне сподівання (центр розподілу випадкової величини X) тих можливих значень X, які великі та мають малу імовірність.

30.Основні властивості математичного сподівання (доведення).

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній

$$M(C) = C.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

3. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

Доведення. Якщо дві величини X та Y розподілені за законами

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
G	g_1	g_2

$X \cdot Y$	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
$P \cdot G$	p_1g_1	p_2g_1	p_1g_2	p_2g_2

$$M(X \cdot Y) = y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)\cdot(y_1g_1 + y_2g_2) = M(X) \cdot M(Y).$$

Аналогічно, але дещо складніше, можна довести наступну властивість.

4) Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто

$$M(X_1 + X_2 + \ \ldots\ + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ \ldots\ + M(X_n).$$

31. Основні властивості дисперсії (доведення).

1. Дисперсія будь-якої ДВВ X невід'ємна: D(X)>=0. Дійсно, $(X – M(X))^2$ невід'ємна, тому згідно означення математичного сподівання та властивостей імовірностей p_k , k = 1, 2, ..., n, D(X) також невід'ємна.
2. Дисперсія постійної величини С дорівнює нулеві D(C) = 0. Дійсно, якщо X=C , то M(C)=C, тому C-M(C)=0
3. Постійний множник С можна виносити за знак дисперсії, при цьому постійний множник треба піднести у квадрат $D(CX) = C^2 D(X)$. Дійсно, CX-M(CX) = C(X-M(X)), тому $(CX\text{-}M(CX))^2 = C^2 (X\text{-}M(X))^2$
4. Дисперсія ДВВ X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадрата її математичного сподівання $D(X) = M(X^2) – M^2(X)$
$D(X) = M((X – M(X))^2) = M(X^2 – 2XM(X) + M^2(X)) = M(X^2) – 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) – M^2(X)$
5. Дисперсія алгебраїчної суми ДВВ X та Y дорівнює сумі їх дисперсій D(X ± Y) = D(X)+ D(Y).

$$D(X+Y) = M\left((X+Y)^2\right) - M^2(X+Y) = M\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) -$$
$$-\left(M(X) + M(Y)\right)^2 = M\left(X^2\right) + 2M(X)M(Y) + M\left(Y^2\right) -$$
$$-M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = \left(M\left(X^2\right) - M^2(X)\right) +$$
$$+\left(M\left(Y^2\right) - M^2(Y)\right) = D(X) + D(Y).$$

П'ята властивість дисперсії має місце для алгебраїчної суми не лише двох, але й скінченого числа дискретних випадкових величин.

$$D(X-Y) = D(X) + (-1)^2 \cdot D(Y) = D(X) + D(Y).$$

32. Нормальний закон розподілу.

Нормальний ЗР.

ВВ X розподілена за нормальним законом з параметрамиа та б^2, якщо щільність розподілу задається формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} e$$

. Якщо X розподілено за X~N(a, σ^2), то

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

де μ — математичне сподівання, σ^2 — дисперсія випадкової величини. Параметр σ також відомий, як стандартний відхил. Розподіл із μ = 0 та σ^2 = 1 називають стандартним нормальним розподілом.

33. Показниковий закон розподілу.

Означення 2. *Випадкову величину X називають **розподіленою за показниковим законом**, якщо щільність її імовірностей має вигляд*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0; \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$ – параметр.

Показниковому розподілу задовольняють: час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера.

Числовими характеристиками показникового розподілу будуть

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{6}$$

Отже, якщо НВВ X розподілена за показниковим законом, то вона має математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення рівні.

Приклад 2. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. У даному випадку випадкова величина X розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda = 4$. Згідно з формулами (6) маємо

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \qquad D(X) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Зауваження 2. *Якщо випадкова величина X розподілена за показниковим законом, то її функція розподілу (інтегральна функція розподілу) має вигляд $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Тому основна формула теорії імовірностей набуде вигляду*

$$P(a<X<b) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}. \tag{7}$$

Приклад 3. Величина X розподілена за законом

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що X потрапить в інтервал (0,4; 1).

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом із параметром $\lambda = 3$. Використовуючи формулу (7), отримаємо

$$P(0{,}4 < X < 1) = e^{-0{,}4\cdot 3} - e^{-1\cdot 3} = e^{-1{,}2} - e^{-3}.$$

Відповідні значення e^x можна взяти з таблиці значень цієї функції.

34. Закон великих чисел.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли — простейшим. Для доказательства этих теорем мы воспользуемся неравенством Чебышева.

Неравенство Чебышева. ***Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:***

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема Чебышева. ***Если $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$ — попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства***

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

35. Характеристики системи двох випадкових величин.

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини (X, Y) характеризує координати центру розподілу випадкової величини. Ці координати у випадку неперервних величин знаходять за формулами

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy; \quad m_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy.$$

Дисперсії D_X та D_Y характеризують розсіювання випадкової точки (X, Y) вздовж координатних осей O_x та O_y, відповідно. їх знаходять за формулами

Для опису двовимірної випадкової величини крім математичного сподівання, дисперсії та середніх квадратичних відхилень, використовують також інші характеристики, а саме —

$$\operatorname{cov}(X,Y) = K_{XY} = M\left((X - m_X)(Y - m_Y)\right).$$

кореляційний момент (або коваріація)
Для неперервних величин X та Y

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y)f(x,y)dxdy.$$

Коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Коефіцієнт кореляції є кількісна характеристика залежності випадкових величин X та Y і часто використовується в статистиці.
Якщо випадкові величини X та Y дискретні, то в формулах знаки інтегралів замінюють знаками суми по усім можливим значенням випадкових величин.

36. Багатовимірні випадкові величини (приклади) функція розподілу, щільність розподілу.

На одному і тому ж самому просторі можна визначити не одну, а декілька випадкових величин. Така потреба настає, коли потрібно дослідити об'єкт відразу на декілька параметрів. Наприклад, деталь. При її виготовленні потрібно враховувати якусь похибку, ширини, довжини, висоти і т.д. Наперед ми не можемо передбачити, яка саме похибка буде. Тому потрібні багатовимірні випадкові величини.
Її функція розподілу мало чим відрізняється для одномірної:
1. 0 ≤ F(x, y) ≤ 1
2. Не спадна по кожному аргументу
3. F(-∞, y) = 0; F(x,-∞) = 0; F(-∞,-∞) = 0; F(∞,∞) = 1;
4. F(x, ∞) = F(x); F(∞,y) = F(y);
А щільність багатовимірної випадкової величини дорівнює:

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x,y)dxdy - m_X^2,$$

або

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x,y)$$

Властивості двовимірної щільності розподілу:
1, f(x,y)>=0 функція не спадна

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

об'єм під поверхнею розподілу = 1.

37. Умовна ймовірність. Використання умовної ймовірності при умовних законах розподілу. Регресія.

Известно, что если события A и B зависимы, то условная вероятность события B отличается от его безусловной вероятности. В этом случае (см. гл. III, § 2)

$$P_A(B) = P(AB)/P(A). \tag{*}$$

Аналогичное положение имеет место и для случайных величин. Для того чтобы охарактеризовать зависимость между составляющими двумерной случайной величины, введем понятие условного распределения.

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину (X, Y). Пусть возможные значения составляющих таковы: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Допустим, что в результате испытания величина Y приняла значение $Y = y_1$; при этом X примет одно из своих возможных значений: x_1, или x_2, ..., или x_n. Обозначим условную вероятность того, что X примет, например, значение x_1 при условии, что $Y = y_1$, через $p(x_1 | y_1)$. Эта вероятность, вообще говоря, не будет равна безусловной вероятности $p(x_1)$.

В общем случае условные вероятности составляющей будем обозначать так:

$$p(x_i | y_j) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

***Условным распределением* составляющей X при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1 | y_j)$, $p(x_2 | y_j)$, ..., $p(x_n | y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.**

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно, пользуясь формулой (*), вычислить условные законы распределения составляющих. Например, условный закон распределения X в предположении, что событие $Y = y_1$ уже произошло, может быть найден по формуле

$$p(x_i | y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В общем случае условные законы распределения составляющей X определяются соотношением

$$p(x_i | y_j) = p(x_i, y_j)/p(y_j). \tag{**}$$

Аналогично находят условные законы распределения составляющей Y:

$$p(y_j | x_i) = p(x_i, y_j)/p(x_i). \tag{***}$$

38. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції. Кореляція та функціональна залежність випадкових величин.

Для опису двовимірної випадкової величини крім математичного сподівання, дисперсії та середніх квадратичних відхилень $\sigma_X = \sqrt{D_X}$, $\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$ використовують також інші характеристики, а саме – ***кореляційний момент*** (або ***коваріація)***

$$\operatorname{cov}(X,Y) = K_{XY} = M\left((X - m_X)(Y - m_Y)\right).$$

Для неперервних величин X та Y

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y)f(x,y)dxdy.$$

Коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Коефіцієнт кореляції є кількісна характеристика залежності випадкових величин X та Y і часто використовується в статистиці.

Якщо випадкові величини X та Y дискретні, то в формулах (3)–(6) знаки інтегралів замінюють знаками суми по усім можливим значенням випадкових величин.

Властивості коефіцієнта кореляції

1) $|r_{XY}| \le 1$;

2) якщо X та Y незалежні, то $r_{XY} = 0$;

3) якщо між X та Y є лінійна залежність $Y = aX + b$, де a та b – постійні, то $|r_{XY}| = 1$.

Зауваження 1. *Якщо момент кореляції або коефіцієнт кореляції не дорівнює нулеві, тоді випадкові величини X та Y – корельовані. Дві корельовані величини обов'язково залежні. Але дві залежні випадкові величини можуть бути корельованими або некорельованими, тобто їх коефіцієнт кореляції може дорівнювати нулеві, а може і не дорівнювати нулеві.*

Із незалежності двох величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості ще не випливає незалежність цих величин. У випадку нормального розподілу величин із некорельованості випадкових величин випливає їх незалежність.