CSAD
CH 1

Calcul scientifique et Analyse de données

I/ Introduction

→ Reconstruction de données manquantes
  ↳ - Collection de données
  - Reduction de dimension du pb (recherche de valeurs propres, diagonalisation de matrice).
    les recherches de ttes les vp n'est pas utile → méthode de la puissance itérée

→ Reconnaissance de visages
  ↳ - Collection d'images de visages
  - Reduction de dim. du pb : construction de sous-espaces pertinents
  - Classification de la nouvelle image.

→ Moteurs de recherche. (classement des pages web).
  ↳ - Internet graphe orienté
  - Importance relative d'une page dans le graphe de l'internet. ($r = Qr$)
  - Recherche de vecteurs propres (méthode de la puissance itérée).

→ Prévision de l'évolution de notre milieu naturel. (~EDP)
  ↳ - Assimilation de données
  - Minimisation d'une fonctionnelle
  - Résolution en pratique

→ Partitionnement de données

UE : Calcul Scientifique (CS) 25% ; Analyse de Données (AD) 25% ; Projet 50%. (CS + AD)

II/ Rappel d'algèbre linéaire.

- $A = [a_{ij}]$
- Matrice transposée : ${}^tA = A^T = [a_{ji}]$ $(A.B)^T = B^T.A^T$ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(.|.)$: produit scalaire euclidien : $(x|A.y) = (A^T.x|y) = x^T.A.y$.
- A symétrique : $A = A^T$
- Déterminant de A : $\det(A) = |A|$ $|\alpha A| = \alpha^n|A|$ $|A| = |A^T|$ $|A.B| = |A||B|$ $|A^{-1}| = 1/|A|$.
- A inversible $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow$ A régulière
- A définie positive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{n*}$ $x^T A.x = (x|A.x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$ $(x|A.x) \geq 0$ et $(x|A.x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- A orthogonale $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$
- $\lambda \in \mathbb{C}$ vp de A $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^{n*}$ $\vec{vp}$ tq $A.x = \lambda.x$.

→ Matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_n(K)$.
- Base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$: $E_{ij} = [\delta_{p,i}\delta_{q,j}]_{1 \leq p \leq m;\, 1 \leq q \leq n}$.
- Matrice de Permutation : $P_\sigma = \sum_{j=1}^{n} E_{\sigma(j),j}$ (σ permutation de $\{1, \dots n\}$) On a $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

- Matrice de transvection : $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$ et $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.
- Matrice de dilatation : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ avec $\lambda \neq 0$ $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(1/\lambda)$.

→ Opérations élémentaires sur les matrices.
- $E_{ij}.A$: ttes lignes nulles sauf la ième qui est la j-ième ligne de A.
- $P_\sigma.A$: permutation σ^{-1} sur les lignes de A
- $T_{ij}(\lambda).A$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec L_i, L_j les ième et jième lignes de A.
- $D_i(\lambda).A$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- $A.E_{ij}$: ttes col nulles sauf la jième qui est la i-ème colonne de A.
- $A.P_\sigma$: Permutation σ sur col de A.
- $A.T_{ij}(\lambda)$: $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$
- $A.D_j(\lambda)$: $C_j \leftarrow \lambda C_j$.

→ Normes matricielles.