Intégration - Feuille de route

Ce document regroupe les étapes essentielles du cours d'intégration. Elle aidera à voir quels sont les objectifs principaux, quels sont les résultats les plus importants et quels exercices sont à savoir faire.

Objectif 1. Le premier objectif du cours est de définir l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, noté $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Les fonctions intégrables étant les fonctions f telles que

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty. \tag{1}$$

Pour ce premier objectif, nous voyons qu'il faut donner du sens aux symboles E, $\mathcal{A}$, $\mathrm{d}\mu$ (ou μ), f et $\int$. Le chapitre 2 s'intéresse aux symboles E, $\mathcal{A}$, μ et f. Au chapitre 3, on définit l'intégrale de Lebesgue pour des fonctions positives, c-a-d on donne du sens à l'équation 1 pour une certaine classe de fonctions, tandis qu'au chapitre 4, on répond au premier objectif. L'intégrale de Lebesgue étant une généralisation de l'intégrale de Riemann, on rappelle au chapitre 1 quelques propriétés de l'intégrale de Riemann et on donne quelques limites qui seront dépassées par l'intégrale de Lebesgue.

Chapitre 2. Bien que l'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann, elle ne s'appuie pas sur la même construction. Dit rapidement, au lieu de découper l'axe des abscisses, on découpe l'axe des ordonnées. Ainsi, en abscisse, nous ne sommes pas contraint à retrouver la droite réelle, donc la fonction f n'est pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}$. L'espace de départ n'est donc pas $\mathbb{R}$ mais un ensemble E quelconque. On a donc un ensemble E quelconque sur lequel on va intégrer des fonctions. On veut cependant pour $E = \mathbb{R}$, retrouver ce que l'on sait déjà de l'intégrale de Riemann : l'intégrale de la fonction f constante égale à 1 sur le segment $[a\,,b]$ vaut :

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \, \mathrm{d}x = b - a.$$

Autrement dit, cette intégrale donne la longueur de l'intervalle $[a\,,b]$, cet intervalle étant une partie de $E = \mathbb{R}$. Pour un ensemble quelconque E, on sera donc amener à mesurer des parties de E, il nous faut donc définir quelles parties pourront être mesurées, cet ensemble de parties formera ce que l'on appelle la tribu de E et sera notée $\mathcal{A}$, et il nous faudra définir une application qui à une partie $A \in \mathcal{A}$ nous donne "sa mesure". Cette application s'appellera une mesure et de manière générale, elle sera notée μ. Le chapitre 2 porte donc sur la théorie de la mesure qui regroupe les concepts de tribu, de mesure et d'application mesurable. Une fonction f avant d'être intégrable, devra être mesurable.

Exercices utiles pour le chapitre 2

Tribu :

- Tout d'abord, on définit la notion de tribu, qui est une famille de parties de E vérifiant certaines propriétés ensembliste. Il faudra donc revoir les opérations sur les ensembles : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Algèbre_des_parties_d%27un_ensemble`.
- Pour s'entraîner avec la définition d'une tribu, on pourra faire l'exercice sur la tribu image. On aura besoin des formules de Hausdorff, cf. TD1 (à revoir si besoin), ou au minimum : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Image_réciproque`.
- Les tribus de Borel sont des tribus particulières, elles sont engendrées par une famille d'ensemble de E formant une topologie : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_topologique`. Les tribus de Borel de $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ joueront un rôle fondamental puisque les fonctions que l'on intègrera seront à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il serait utile de faire l'exercice 7 du TD1 pour manipuler la tribu de Borel de $\mathbb{R}$.

Application mesurable

- Il est important de bien comprendre l'exemple 2.2.1.
- Ensuite, il faut comprendre que la propriété de mesurabilité est stable par de nombreuses opérations. On retiendra en particulier que la limite d'une suite d'applications mesurables est mesurable.
- On retiendra aussi qu'une application continue ou continue par morceaux est mesurable.
- Pour manipuler la définition d'application mesurable et les propriétés élémentaires, on pourra revoir l'exercice 1 du TD 1.

Mesure

- Pour manipuler la définition de mesure, on montrera que la mesure de Dirac et la mesure de comptage sont bien des mesures.
- On fera ensuite l'exercice sur la mesure image afin de mélanger mesure et application mesurable.
- Pour manipuler les propriétés élémentaires sur les mesures, on fera l'exercice sur la fonction de répartition associée à une mesure de probabilité, cf. exercice 3 du TD 1.
- On retiendra qu'il existe une mesure particulière et fondamentale, que l'on appelle la mesure de Lebesgue. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ donne la longueur, sur $\mathbb{R}^2$ l'aire et sur $\mathbb{R}^3$ le volume. Elle fera le lien avec l'intégrale de Riemann.