# Probabilités

Thierry Malon et Jean-Yves Tourneret[1]

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT

Thierry.Malon@enseeiht.fr,jyt@n7.fr

# Images optique et radar

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Eléments de base du calcul des probabilités
  - Triplet de Probabilité $(\Omega, C, P)$
  - Équiprobabilité - Dénombrement
  - Probabilités conditionnelles
  - Indépendance
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

# Bibliographie


- B. Lacaze, M. Maubourguet, C. Mailhes et J.-Y. Tourneret, Probabilités et Statistique appliquées, Cépadues, 1997.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

# Triplet de Probabilité $(\Omega, \mathcal{C}, P)$

- $\Omega$ : Ensemble des résultats d'expérience
- $\mathcal{C}$ : Ensemble des événements
  - $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
  - $\Omega \in \mathcal{C}$ (événement certain)
  - si $A \in \mathcal{C}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{C}$ (événement contraire)
  - si $A_i \in \mathcal{C}, i \in I$ (I fini ou infini dénombrable), alors $\cup A_i \in \mathcal{C}$
- $P$ : application probabilité de $\mathcal{C}$ dans $[0, 1]$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
  - $P\left(\cup A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ si les événements $A_i$ sont disjoints.

# Propriétés

- Événements
  - $\emptyset \in \mathcal{C}$
  - si $A_i \in \mathcal{C}, i \in I$ (I fini ou infini dénombrable), alors $\cap A_i \in \mathcal{C}$
- Probabilité
  - $P(\emptyset) = 0$
  - si $A \subset B$, alors, $P(A) \leq P(B)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

# Vocabulaire

- si $a \in \Omega$ alors $\{a\}$ est un événement élémentaire
- si $\Omega = \cup_{i \in I} A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, on dit que $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements
- $(\Omega, \mathcal{C})$ espace probabilisable
- $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ espace probabilisé
- $\mathcal{C}$ tribu ou $\sigma$-algèbre

# Équiprobabilité - Dénombrement

- Définition

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

- Exemples
  - Jet d'un dé
  - Tirages avec remise dans une urne à $2$ catégories

$$P(k \text{ succès sur } n \text{ expériences}) = \binom{n}{k} P_s^k (1 - P_s)^{n-k}$$

avec $k = 0, ..., n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $P_s$ est la probabilité du succès sur une expérience et $n$ est le nombre d'expériences identiques et indépendantes.

# Probabilités conditionnelles

- Définition

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Théorème des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

pour tout système complet d'événements $\{A_i\}$.

- Formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

# Indépendance

- Deux événements
  Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si et ssi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ ou } P(A|B) = P(A)$$

- Généralisation
  On dit que $\{A_i\}_{i \in I}$ est famille d'événements mutuellement indépendants si et ssi

$$P\left(\cap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i),\ \forall J \subset I$$

☞ **Exercice d'application**

# Que faut-il savoir ?

- Probabilité d'une réunion d'événements : $P\left(A \cup B\right) =?$
- Probabilité de l'évènement contraire : $P\left(\overline{A}\right) =?$
- Equiprobabilité : $P(A) =?$
- Loi Binomiale : $P(k \text{ succès sur } n \text{ expériences}) =?$
- Probabilité conditionnelle : $P(A|B) =?$
- Indépendance : $P(A \cap B) =?$
- Formule de Bayes : $P(A|B) =?$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Eléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
  - Définition
  - Loi d'une variable aléatoire
  - Fonction de répartition
  - Exemples fondamentaux
  - Espérance mathématique
  - Changements de variables
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- ...

# Variable aléatoire réelle

- Définition
  Soient $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un triplet de probabilité qui est associé à l'expérience et $(\Omega', \mathcal{C}')$, avec $\Omega' \subset \mathbb{R}$ un espace probabilisable qui résume les quantités qui nous intéressent. Une variable aléatoire réelle $X$ est une application de $\Omega$ dans $\Omega'$ qui possède la propriété de mesurabilité :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{C}', \{\omega | X(\omega) \in (a, b)\} \in \mathcal{C}.$$

- Exemple : somme des résultats de deux dés

$$X : \begin{array}{c} \Omega \longrightarrow \Omega' \\ (m, n) \longmapsto m + n \end{array}$$

# Variable aléatoire discrète

- Loi d'une variable aléatoire discrète
  $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est fini ou infini dénombrable. La loi de $X$ est définie par
  - l'ensemble des valeurs possibles de $X$ : $\{x_i, i \in I\}$
  - les probabilités associées $p_i = P[X = x_i]$ avec

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \text{ et } P[X \in \Delta] = \sum_{x_i \in \Delta} p_i$$

- Exemples
  - Jet d'un dé
  - Jet d'une pièce
  - ...

# Variables aléatoires continues

- Loi d'une variable aléatoire continue
  $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est infini non dénombrable avec $P[X = x_i] = 0, \forall x_i$. La loi de $X$ est définie par
  - l'ensemble des valeurs possibles de $X$ qui est en général une réunion d'intervalles
  - une densité de probabilité $p$ : $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto p(x) \end{array}$ telle que

$$p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(u)du = 1,$$

$$P[X \in \Delta] = \int_{\Delta} p(u)du.$$

# Variables aléatoires continues

- Remarques
  - On peut avoir $p(x) > 1$.
  - $\lim\limits_{dx \to 0} \frac{P[X \in [x, x+dx[]}{dx} = \lim\limits_{dx \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x+dx} p(u)du - \int_{-\infty}^{x} p(u)du}{dx}$.
    Donc
    $$\lim_{dx \to 0} \frac{P\left[X \in [x, x+dx[\right]}{dx} = F'(x) = p(x)$$
  - $P\left[X \in [x, x+dx[\right] \simeq p(x)dx$ pour $dx$ “petit”
  - lien avec l’histogramme
- Exemples
  - Loi uniforme sur $[a, b]$
  - Loi normale

# Variable aléatoire mixte

- Loi d'une variable aléatoire mixte
  $\{X(\omega), \omega \in \Omega)\} = E \cup \{x_i, \in I\}$ est la réunion de deux ensembles, le premier $E$ est infini non dénombrable avec $P[X = x] = 0, \forall x \in E$, le deuxième est fini ou infini dénombrable avec $p_i = P[X = x_i] > 0$ . La loi de $X$ est définie par
  - $\{x_i, \in I\}$ avec $p_i = P[X = x_i] > 0$
  - $E$ et une densité de probabilité $p$ telle que

$$
\begin{gathered}
p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\
\int_{\mathbb{R}} p(u)du + \sum_{i \in I} p_i = 1 \\
P[X \in \Delta] = \int_{\Delta} p(u)du + \sum_{x_i \in \Delta} p_i
\end{gathered}
$$

- Exemple : Tension aux bornes d'un voltmètre

# Exemples Fondamentaux de Lois Discrètes

- Loi de Bernoulli : $X \sim \mathcal{B}e(p)$

$$P[X=0]=p \text{ et } P[X=1]=q=1-p$$

Lancer d'une pièce, "Succès ou Echec", ...

- Loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$$P[X=k]=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad k=0,...,n$$

Probabilité d'avoir $k$ succès sur $n$ expériences, $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i$ suit une loi de Bernoulli, ...

- Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$P[X=k]=\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda), \quad k \in \mathbb{N}$$

Loi du nombre d'arrivées pendant un temps donné

# Exemples Fondamentaux de Lois Continues

- Loi uniforme : $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$$

- Loi normale ou Gaussienne : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

- Loi gamma : $X \sim \mathcal{G}a(\alpha, \beta)$

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0$$

Pour $\alpha = 1$, on a la loi exponentielle

**LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES**

**m** : moyenne $\sigma^2$ : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\ldots,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

| LOI | Probabilités | m | $\sigma^2$ | F. C. |
|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $p_k = \frac{1}{n}$ <br> $k \in \{1, ..., n\}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $\frac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$ |
| Bernoulli | $p_1 = P[X=1] = p$ <br> $p_0 = P[X=0] = q$ <br> $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ | $p$ | $pq$ | $pe^{it}$ |
| Binomiale <br> $B(n,p)$ | $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ <br> $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ <br> $k \in \{0, 1, ..., n\}$ | $np$ | $npq$ | $\left(pe^{it}+q\right)^n$ |
| Binomiale négative | $p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ <br> $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ <br> $k \in \mathbb{N}$ | $n\frac{q}{p}$ | $n\frac{q}{p^2}$ | $\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$ |
| Multinomiale | $p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ <br> $p_j \in [0,1]$ $q_j = 1-p_j$ <br> $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ <br> $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$ | $np_j$ | Variance : <br> $np_j q_j$ <br> Covariance : <br> $-np_j p_k$ | $\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{it}\right)^n$ |
| Poisson <br> $P(\lambda)$ | $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ <br> $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\exp\left[\lambda\left(e^{it-1}\right)\right]$ |
| Géométrique | $p_k = pq^{k-1}$ <br> $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ <br> $k \in \mathbb{N}^*$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ | $\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$ |

**LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES**

$\mathbf{m}$ : moyenne $\sigma^2$ : variance **F. C. :** fonction caractéristique

| LOI | Densité de probabilité | $\mathbf{m}$ | $\sigma^2$ | F. C. |
|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $f(x) = \frac{1}{b-a}$ <br> $x \in \, ]a,b[$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$ |
| Gamma <br> $\Gamma(\theta,\nu)$ | $f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ <br> $\theta > 0,\ \nu > 0$ <br> $x \geq 0$ <br> avec $\Gamma(n+1) = n! \ \forall n \in \mathbb{N}$ | $\dfrac{\nu}{\theta}$ | $\dfrac{\nu}{\theta^2}$ | $\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$ |
| Inverse gamma <br> IG$(\theta,\nu)$ | $f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ <br> $\theta > 0,\ \nu > 0$ <br> $x \geq 0$ <br> avec $\Gamma(n+1) = n! \ \forall n \in \mathbb{N}$ | $\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$ | $\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$ | (*) |
| Première loi <br> de Laplace | $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}$ | $0$ | $2$ | $\dfrac{1}{1+t^2}$ |
| Normale <br> $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ | $m$ | $\sigma^2$ | $e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |
| Khi$_2$ <br> $\chi^2_\nu$ <br> $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ | $f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ <br> $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ <br> $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$ | $\nu$ | $2\nu$ | $\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$ |
| Cauchy <br> $c_{\lambda,\alpha}$ | $f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ <br> $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ | (-) | (-) | $e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$ |
| Beta <br> $B(a,b)$ | $f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ <br> $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ <br> $a > 0,\ b > 0$ <br> $x \in \, ]0,1[$ <br> avec $\Gamma(n+1) = n! \ \forall n \in \mathbb{N}$ | $\frac{a}{a+b}$ | $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ | (*) |

# Fonction de répartition

- Définition

$$F : \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \\ x \longmapsto F(x) = P[X < x] \end{array}$$

- Propriétés
  - $F$ croissante
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
  - $F$ caractérise une loi de probabilité
  - Si $X$ est une va discrète, le graphe de $F$ est une fonction en escaliers
  - Si $X$ est une va continue, $F$ est continue et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$, i.e., $p(x) = F'(x)$

# Espérance mathématique

- Définition

$$E[\alpha(X)] = \begin{cases} X \text{ va discrète : } & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i \\ X \text{ va continue : } & \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \\ X \text{ va mixte : } & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \end{cases}$$

- Propriétés
  - Constante : $E(\text{cste}) = \text{cste}$
  - Linéarité : $E(aX + b) = aE(X) + b$
- Exemples
  - Moments non centrés : $E(X^n)$ ($n = 1$ : moyenne)
  - Moments centrés : $E\left([X - E(X)]^n\right)$ ($n = 2$ : variance)
  - Fonction caractéristique : $\phi_X(t) = E\left[\exp(itX)\right]$

# Exemples simples

- Variables aléatoires discrètes

$$E\left[X\right] = \sum_{i \in I} x_i P[X = x_i], \quad E\left[X^2\right] = \sum_{i \in I} x_i^2 P[X = x_i]$$

$$E\left[e^{jtX}\right] = \sum_{i \in I} e^{jtx_i} P[X = x_i]$$

- Variables aléatoires continues

$$E\left[X\right] = \int_{\mathbb{R}} up(u)du, \quad E\left[X^2\right] = \int_{\mathbb{R}} u^2 p(u)du$$

$$E\left[e^{jtX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{jtu} p(u)du$$

# Propriétés

- Variance
  - var$(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$
  - Ecart Type : $\sqrt{\text{variance}}$
  - var$(aX + b) = a^2$var$(X)$
- Fonction caractéristique
  - Caractérise une loi de probabilité
  - Cas continu

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} p(u) du$$

    est la transformée de Fourier de $p$.

- Exemples de calculs

# Changements de variables

- Problème

  Étant donnée une variable aléatoire réelle $X$ de loi connue, on cherche à déterminer la loi de $Y = g(X)$ où $g$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Variables aléatoires discrètes
  - Définition

$$P[Y = y_j] = \sum_{i|y_j = g(x_i)} p[X = x_i]$$

  - Exemple

$Y = (X-2)^2$ avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

# Changements de va continues

- $g$ bijective
  - Théorème : si $X$ est une va continue à valeurs dans un ouvert $O_X \subset \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ application bijective de $O_X$ dans un ouvert $O_Y \subset \mathbb{R}$ différentiable ainsi que son inverse $g^{-1}$, alors $Y = g(X)$ est une va continue de densité

$$p_Y(y) = p_X\left[g^{-1}(y)\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

    où $\frac{dx}{dy}$ est le Jacobien de la transformation.
  - Exemple 1 : $Y = 1/X$ avec $X \sim \mathcal{E}(1)$.
  - Idée de preuve et preuve
  - Exemple 2 : $Y = aX + b$ avec $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

# Changements de va continues

- $g$ bijective par morceaux
  On suppose que $g$ est différentiable sur chaque morceau ainsi que son inverse.
  - Méthode : On ajoute la contribution de chaque bijection.
  - Exemple : $Y = X^2$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

# Que faut-il savoir ?

- Loi d'une variable aléatoire discrète : $?$
- Loi d'une variable aléatoire continue : $?$
- Appartenance à un intervalle : $P[X \in \Delta] =?$
- Signification d'une densité : $P\left[X \in [x, x+dx[\right] \simeq ?$
- Fonction de répartition : $F(x) =?$
- Espérance mathématique : $E[X] =?$, $E[X^2] =?$
- Variance : Var$[X] =?$, Ecart-type : ?
- Relations utiles : $E[aX+b] =?$, Var$[aX+b] =?$
- Fonction caractéristique : $\phi(t) =?$
- Changement de variables : ?

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Eléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
  - Définition
  - Fonction de répartition
  - Lois marginales, lois conditionnelles, indépendance
  - Espérances mathématiques
  - Changements de variables
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

# Couple de va réelles

- Définition
  Soit $(\Omega, C, P)$ un espace probabilisé et $(\Omega', C')$ un espace probabilisable avec $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ et $C'$ construit à partir des réunions et intersections finies ou dénombrables des pavés $(a, b) \times (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$. Un couple $(X, Y)$ de variables aléatoires réelles est une application mesurable de $\Omega$ dans $\Omega'$.
- notation
  On notera $P\left[(X, Y) \in \Delta\right], \Delta \subset \mathbb{R}^2$, la probabilité que le couple $(X, Y)$ prenne ses valeurs dans $\Delta$.

# Loi d'un couple de va

- Variables aléatoires discrètes
  La loi du couple $(X, Y)$ est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) noté $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$ et par les probabilités associées $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$, $i \in I, j \in J$ telles que $p_{ij} > 0$ et $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.
- Variables aléatoires continues
  La loi du couple $(X, Y)$ est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable), en général une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}^2$, et par une densité de probabilité $p(x, y)$ telle que

$$p(x, y) \geq 0, \text{ et } \int\int_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1.$$

# Propriétés

- Couples de va discrètes

$$P\left[(X,Y)\in\Delta\right]=\sum_{(i,j)|(x_i,y_j)\in\Delta} P[X=x_i,Y=y_j].$$

- Couples de va continues

$$P\left[(X,Y)\in\Delta\right]=\int\int_{\Delta} p(u,v)dudv$$

Remarque : signification de $p(u,v)$

# Fonction de répartition

- Définition

$$F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1] \\ (x,y) \longmapsto F(x,y) = P[X < x, Y < y] \end{array}$$

- Propriétés
  - C'est une fonction étagée lorsque $(X,Y)$ est un couple de va discrètes
  - C'est une fonction continue lorsque $(X,Y)$ est un couple de va continues avec

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u,v) du dv \text{ d'où } p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

# Lois marginales

- Cas discret

$$\begin{aligned} P[X = x_i] &= p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij} \\ P[Y = y_j] &= p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij} \end{aligned}$$

- Cas continu

$$\begin{aligned} \text{densité de } X &: \quad p(x, .) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy \\ \text{densité de } Y &: \quad p(., y) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dx \end{aligned}$$

# Lois marginales

- Cas discret

$$p_{00} = \frac{1}{2}, p_{01} = \frac{1}{6}, p_{10} = \frac{1}{6}, p_{11} = \frac{1}{6}.$$

Lois de $X$ et de $Y$ ?

- Cas continu

$$p(x,y) = \begin{cases} \theta^2 e^{-\theta x} \text{ si } x > y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $X \sim \Gamma(\theta, 2)$ et que $Y \sim \Gamma(\theta, 1)$.

# Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles d'un couple $(X, Y)$ sont les lois de $X|Y = y$ et de $Y|X = x$.

- Cas discret

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

- Cas continu

densité de $X|Y = y$ $\qquad p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(., y)}$

densité de $Y|X = x$ $\qquad p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x, .)}$

# Théorème de Bayes

- Cas discret

$$P\left[X = x_i \middle| Y = y_j\right] = \frac{P\left[Y = y_j \middle| X = x_i\right] P\left[X = x_i\right]}{P\left[Y = y_j\right]}$$

- Cas continu

$$p(x | y) = \frac{p(y | x) p(x, .)}{p(., y)}$$

# Indépendance

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si

$$P\left[X \in \Delta, Y \in \Delta'\right] = P\left[X \in \Delta\right] P\left[Y \in \Delta'\right], \forall \Delta, \forall \Delta'$$

- Cas discret

$$p_{ij} = p_{i.}p_{.j} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J$$

- Cas continu

$$p(x,y) = p(x,.)p(.,y) \; \forall x, \forall y$$

ou

$$p(\, x |\, y) = p(x,.), \; \forall x, \forall y$$

# Propriété

si $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires indépendantes et $\alpha$ et $\beta$ sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\alpha\,(X)$ et $\beta(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes. La réciproque est vraie si $\alpha$ et $\beta$ sont des applications bijectives. Par contre, dans le cas où $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas bijectives, la réciproque est fausse. On vérifiera par exemple que le couple $(X\,Y)$ de densité

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,(1+xy) \text{ si } |x|<1 \text{ et } |y|<1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est tel que $X^2$ et $Y^2$ sont indépendantes alors que $X$ et $Y$ ne le sont pas.

# Espérance mathématique

- Définition

$$E[\alpha(X,Y)] = \begin{cases} X \text{ et } Y \text{ va discrètes :} & \sum_{i,j \in I \times J} \alpha(x_i, y_j) p_{ij} \\ X \text{ et } Y \text{ va continues :} & \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u,v) p(u,v) du dv \end{cases}$$

- Propriétés
  - Constante : $E(\text{cste}) = \text{cste}$
  - Linéarité :
    $E\left[a\alpha(X,Y) + b\beta(X,Y)\right] = aE\left[\alpha(X,Y)\right] + bE\left[\beta(X,Y)\right]$
  - Définition cohérente (cas continu) :

$$E\left[\alpha(X)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u) p(u,v) du dv = \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u,.) du$$

  - Indépendance : si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$E\left[\alpha(X)\beta(Y)\right] = E\left[\alpha(X)\right] E\left[\beta(Y)\right], \ \forall \alpha \forall \beta$$

# Exemples

- Moments centrés et non centrés

$$m_{ij} = E\left(X^i Y^j\right),\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

$$\mu_{ij} = E\left([X - E(X)]^i [Y - E(Y)]^j\right),\ i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

- Covariance et matrice de covariance

$$\text{cov}(X,Y) = E\left([X - E(X)][Y - E(Y)]\right) = E\left(XY\right) - E(X)E(Y)$$

$$E\left[\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T\right] = \begin{pmatrix} \text{var}X & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & \text{var}Y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} X - E[X] \\ Y - E[Y] \end{pmatrix}$$

- Fonction caractéristique

$$\phi_{X,Y}(u_1,u_2) = E\left[\exp(i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{W})\right],\ \boldsymbol{u} = (u_1,u_2)^T, \boldsymbol{W} = (X,Y)^T.$$

# Coefficient de Corrélation

- Définition

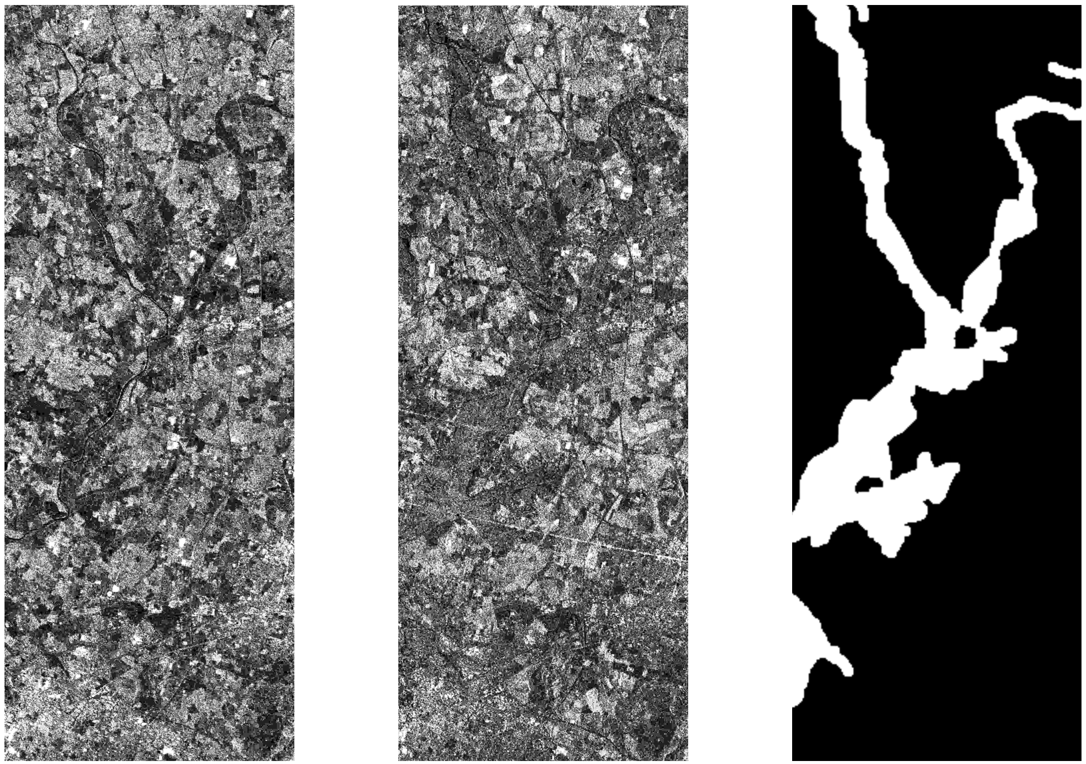
$$r(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où $\sigma_X$ et $\sigma_Y$ sont les écart-types des va $X$ et $Y$.

- Propriétés
  - $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$
  - $r(X,Y) = \pm 1$ si et ssi $X$ et $Y$ sont reliées par une relation affine
  - si $X$ et $Y$ sont des va indépendantes, alors $r(X,Y) = 0$ mais la réciproque est fausse
- Conclusion

$r(X,Y)$ est une mesure imparfaite mais très pratique du lien entre les va $X$ et $Y$.

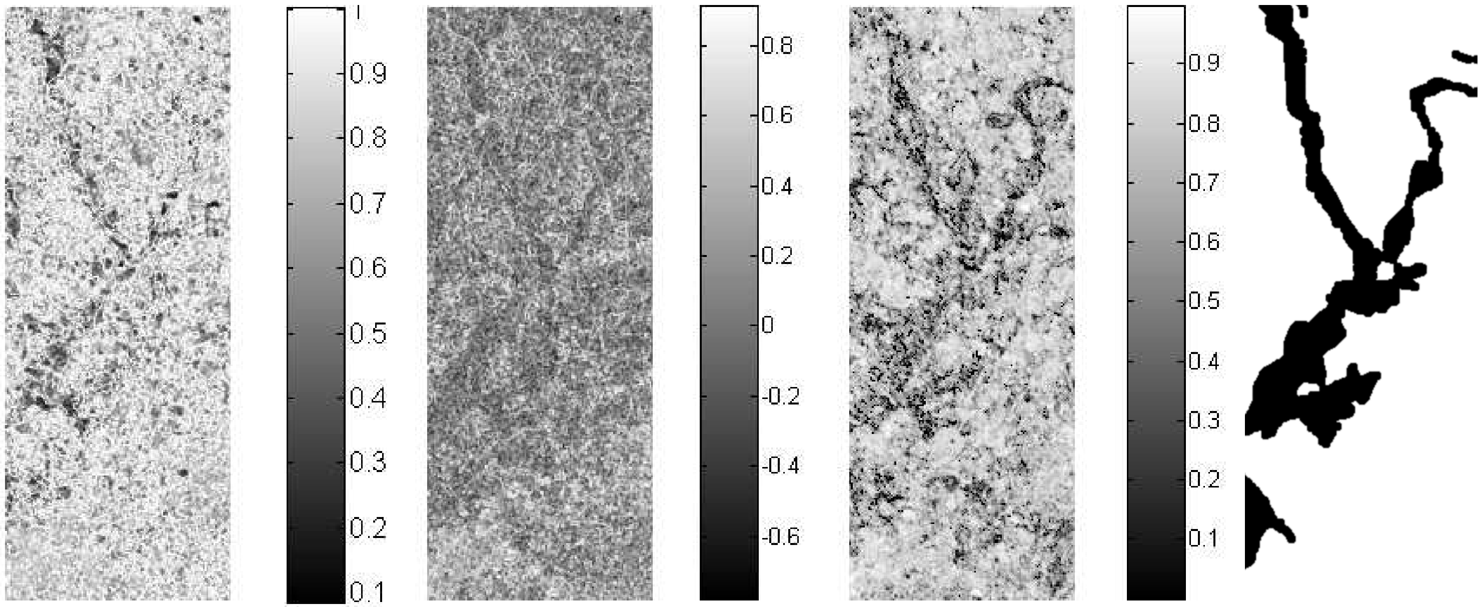
## Données réelles : images de Gloucester



(a) Avant (b) Après (c) Masque

Images radar ERS (3049 × 1170 pixels) de Gloucester, Angleterre, avant et après une inondation

# Application aux images de Gloucester : cartes de changement




(a) Ratio Edge (b) Correlation Moment (c) Correlation MV (d) Masque

Cartes de changement pour les images de Gloucester obtenues pour une fenêtre d'estimation de taille $n = 15 \times 15$

# Espérance conditionnelle

- Théorème

$$E\left[\alpha(X,Y)\right] = E_X\left[E_Y\left[\alpha(X,Y)|X\right]\right]$$

- Exemple

Déterminer $E[Y_N]$ lorsque

$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

où $P[X_i = 1] = p$, $P[X_i = 0] = q = 1 - p$ et $N$ est une va de loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

# Changements de variables

- Problème
  Étant donné un couple de variables aléatoires réelles $(X, Y)$ de loi connue, on cherche à déterminer la loi de $(U, V) = g(X, Y)$ où $g$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $U$ et $V$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- Variables aléatoires discrètes
  - Définition

$$P[(U, V) = (u_k, v_l)] = \sum_{i,j|g(x_i,y_j)=(u_k,v_l)} p[X = x_i, Y = y_j]$$

  - Exemple
    voir TD

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- Théorème pour $g$ bijective
  si $(X, Y)$ est un couple de va continues à valeurs dans un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application bijective de $O$ dans un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ continument différentiable ainsi que son inverse $g^{-1}$, alors $(U, V) = g(X, Y)$ est un couple de va continues de densité

$$p_{U,V}(u, v) = p_{X,Y}\left[g^{-1}(u, v)\right] |\text{det}(J)|,$$

  où $J$ est la matrice Jacobienne définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- Exemples
  - Exemple $1$
    $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$, $X$ et $Y$ indépendantes.
    Quelle est la loi du couple $(U,V)$ avec $U = X + Y$ et $V = X$ ?
  - Exemple $2$
    $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X$ et $Y$ va indépendantes.
    Quelle est la loi de $(R,\Theta)$ avec $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$ ?
- Généralisation
  Si $g$ est bijective par morceaux, on ajoute les contributions de chaque morceau.

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- Problème
  Si $(X, Y)$ est un couple de va continues de loi connue et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on cherche la loi de $U = g(X, Y)$.
- Solution $1$
  - Variable intermédiaire : on introduit une va $V = h(X, Y)$ (e.g., $V = X$ ou $V = Y$), on cherche la loi du couple $(U, V)$, puis la loi marginale de $U$
  - Exemple : $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $X$ et $Y$ indépendantes. Quelle est la loi de $U = X + Y$ ?

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- Problème
  Si $(X, Y)$ est un couple de va continues de loi connue et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on cherche la loi de $U = g(X, Y)$.
- Solution $2$
  - Calcul de la fonction de répartition de $U$

$$\begin{aligned} P[U < u] &= P[g(X, Y) < u] \\ &= P[(X, Y) \in \Delta_u] \\ &= \int_{\Delta_u} p(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

  - Exemple : $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $X$ et $Y$ indépendantes. Quelle est la loi de $U = X + Y$ ?

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- Problème
  Si $(X, Y)$ est un couple de va continues de loi connue et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on cherche la loi de $U = g(X, Y)$.
- Solution $3$ : Cas particulier de $U = X + Y$, $X$ et $Y$ indépendantes
  - Calcul de la fonction caractéristique de $U$.
  - Exemple : $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, $X$ et $Y$ indépendantes. Quelle est la loi de $U = X + Y$ ?

# Que faut-il savoir ?

- Loi d'un couple de va discrètes et continues : $?$
- Appartenance à un intervalle : $P[(X,Y) \in \Delta] =?$
- Comment calculer les lois marginales d'un couple ?
- Comment calculer les lois conditionnelles d'un couple ?
- Indépendance de deux variables aléatoires ?
- Espérance mathématique : $E[XY] =?$
- Covariance : $\text{cov}(X,Y) =?$
- Coeff. de corrélation : $r(X,Y) =?$, $r(X,Y) \in ?$ Intérêt ?
- Espérances conditionnelles : ?
- Trois méthodes de changements de variables : ?

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Eléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
  - Définition
  - Transformation affine
  - Lois marginales, lois conditionnelles, indépendance
  - Lois du chi2, de Student et de Fisher
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

# Vecteur Gaussien

- Définition
  On dit que $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ suit une loi normale à $n$ dimensions et on notera $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$, si la densité de probabilité de $\boldsymbol{X}$ s'écrit

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\right]$$

  où $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive.
- Cas particuliers
  - $n = 1$
  - $\Sigma$ diagonale

# Vecteur Gaussien

- Exercice

$$p(x,y) \propto \exp\left(-x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy + 4x + 7y\right)$$

Quelle est la loi de $(X,Y)$ ?

# Signification de $m$ et $\Sigma$

- Fonction caractéristique

$$\phi(\boldsymbol{u}) = E\left(e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{X}}\right) = \exp\left(i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}\right)$$

- Fonction génératrice des moments

$$\theta(\boldsymbol{u}) = E\left(e^{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{X}}\right) = \exp\left(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{m} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}\right)$$

- $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$
  - $\boldsymbol{m}$ est le vecteur moyenne
  - $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice de covariance

# Cas Bivarié

- Fonction caractéristique

$$\phi(\boldsymbol{u}) = \exp\left[i(u_1 m_1 + u_2 m_2) - \frac{1}{2}\Sigma_{11} u_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma_{22} u_2^2 - \Sigma_{12} u_1 u_2\right]$$

- Dérivées partielles

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} = \phi(\boldsymbol{u})(im_1 - \Sigma_{12} u_2 - \Sigma_{11} u_1)$$
$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{u})}{\partial u_2} = \phi(\boldsymbol{u})(im_2 - \Sigma_{12} u_1 - \Sigma_{22} u_2)$$
$$\frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{u})}{\partial u_1 \partial u_2} = \phi(\boldsymbol{u})(im_1 - \Sigma_{12} u_2 - \Sigma_{11} u_1)(im_2 - \Sigma_{12} u_1 - \Sigma_{22} u_2) - \Sigma_{12}\phi(\boldsymbol{u})$$

- Moments

$$\left.\frac{\partial \phi(\boldsymbol{u})}{\partial u_1}\right|_{u=0} = iE[X_1] = im_1, \quad \left.\frac{\partial \phi(\boldsymbol{u})}{\partial u_2}\right|_{u=0} = iE[X_2] = im_2$$
$$\left.\frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{u})}{\partial u_1 \partial u_2}\right|_{u=0} = -E[X_1 X_2] = -m_1 m_2 - \Sigma_{12}$$

# Transformation affine

- Problème : Soit $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$ un vecteur Gaussien. Quelle est la loi de $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, où $\boldsymbol{Y}$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{A}$ est une matrice de taille $p \times n$ avec $p \leq n$ ?
- Idée : on calcule la fonction génératrice de $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$

$$\theta_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{v}) = \exp\left[\boldsymbol{v}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T v\right]$$

- Conclusion

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}_p\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T\right)$$

si $\boldsymbol{A}$ est de rang $p$ (i.e., de rang maximal).

# Lois marginales

- Hypothèses

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{X}'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma}),\ \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}' \\ \boldsymbol{m}'' \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M}^T & \boldsymbol{\Sigma}'' \end{pmatrix}$$

- Problème
  Quelle est la loi de $\boldsymbol{X}'$ ?
- Conclusion

$$\boldsymbol{X}' \sim \mathcal{N}_p\left(\boldsymbol{m}', \boldsymbol{\Sigma}'\right)$$

  où $p$ est la dimension de $\boldsymbol{X}'$.

# Indépendance

- Hypothèses

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{X}'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma}), \ \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}' \\ \boldsymbol{m}'' \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M}^T & \boldsymbol{\Sigma}'' \end{pmatrix}$$

- Conclusion
  $\boldsymbol{X}'$ et $\boldsymbol{X}''$ sont des vecteurs indépendants si et ssi $\boldsymbol{M} = 0$.
- Résultat admis
  Les lois conditionnelles d'un vecteur gaussien sont des lois gaussiennes

# Loi du chi2

- Définition
  Si $X_1, ..., X_n$ sont $n$ va indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$ suit une loi du chi2 à $n$ degrés de liberté.
- Propriétés
  - Densité de probabilité : $p_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)$
  - Fonction caractéristique : $\phi_n(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
  - Moyenne et variance : $E(Y) = n$ et var$(Y) = 2n$
  - Additivité : si $Y \sim \chi_n^2$, $Z \sim \chi_m^2$, $Y$ et $Z$ ind. alors

$$Y + Z \sim \chi_{n+m}^2$$

# Loi de Student

- Définition

  Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \chi_n^2$, $X$ et $Y$ indépendantes, alors

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$$

- Propriétés
  - Densité de probabilité

$$p_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(z)$$

  - Moyenne et variance (pour $n > 2$)

$$E(Z) = 0 \text{ et } \mathrm{var}(Z) = \frac{n}{n-2}$$

  - pour $n = 1$, on a une loi de Cauchy

# Loi de Fisher

- Définition

  Si $X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$, $X$ et $Y$ indépendantes, alors

$$Z = \frac{X/n}{Y/m} \sim f_{n,m}$$

- Propriétés
  - Densité de probabilité connue (voir livres)
  - Moyenne et variance (pour $m > 4$)

$$E(Z) = \frac{m}{m-2} \text{ et } \mathrm{var}(Z) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2}$$

# Théorème de Cochran

- Hypothèses
  Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, où $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma^2 > 0$ et $\boldsymbol{I}_n$ la matrice identité de taille $n \times n$. Soient $p$ sous-espaces vectoriels orthogonaux $E_1, ..., E_p$ de dimensions $d_1, ..., d_p$ tels que $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus ... \oplus E_p$ et $\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{X}$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{X}$ sur $E_k$ ($\boldsymbol{P}_k$ matrice de projection orthogonale sur $E_k$).
- Conclusions
  - Les vecteurs $\boldsymbol{Y}_1, ..., \boldsymbol{Y}_p$ sont indépendants et $\boldsymbol{Y}_k \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{P}_k \boldsymbol{m}, \sigma^2 \boldsymbol{P}_k)$
  - Les variables aléatoires $Z_k = \|\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{m}\|^2$ sont indépendantes et $\frac{Z_k}{\sigma^2} \sim \chi^2_{d_k}$.

# Preuve

- Vecteurs $\boldsymbol{Y}_k$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_p \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

  avec $\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_k^T = \boldsymbol{P}_k^2$ et $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{0}$ for $i \neq j$.

- Variables $Z_k$
  Si $\boldsymbol{e}_{k,1}, ..., \boldsymbol{e}_{k,d_k}$ est une base orthonormée de $E_k$, alors le vecteur $\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{m}$ s'écrit $\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{m} = \sum_{i=1}^{d_k} \tilde{y}_{k,i}\boldsymbol{e}_{k,i}$ avec $\tilde{y}_{k,i}$ projection de $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m}$ sur $\boldsymbol{e}_{k,i}$ donc $\tilde{y}_{k,i} = \boldsymbol{e}_{k,i}^T(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Comme les vecteurs $\boldsymbol{e}_{k,1}, ..., \boldsymbol{e}_{k,d_k}$ sont orthogonaux, les variables $\tilde{y}_{k,1}, ..., \tilde{y}_{k,d_k}$ sont indépendantes, donc

$$\sum_{i=1}^{d_k} \frac{\tilde{y}_{k,i}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{d_k}.$$

  **Remarque** : $E(\tilde{y}_{k,i}^2) = \boldsymbol{e}_{k,i}^T(\sigma^2 I_n)\boldsymbol{e}_{k,i} = \sigma^2$.

# Statistiques des échantillons gaussiens

- Théorème

  Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ un échantillon de variables aléatoires réelles indépendante de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et la variance empirique $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ et } \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

- Preuve

  Utiliser le fait que $Y_1 = \bar{X}\mathbf{1}$ est la projection orthogonale de $\boldsymbol{X}$ sur $F$ engendré par $\mathbf{1} = (1, ..., 1)^T$ (car $\langle \boldsymbol{X} - \bar{X}\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 0$) et que $Y_2 = \boldsymbol{X} - \bar{X}\mathbf{1}$ est la projection de $\boldsymbol{X}$ sur $F^\perp$.

# Que faut-il savoir ?

$$\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$$

- Signification de $\boldsymbol{m}$ et de $\boldsymbol{\Sigma}$ ?
- Transformation affine ($\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$) d'un vecteur gaussien ? Condition sur la matrice $\boldsymbol{A}$ associée ?
- Lois marginales d'un vecteur gaussien ?
- Indépendance de deux sous vecteurs d'un vecteur gaussien ? Application: théorème de Cochran.
- loi de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$ ?

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Eléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites
  - Convergence (en loi, en probabilité, en moyenne quadratique, presque sure)
  - Théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale)

# Convergence en loi

- Définition
  La suite de va $X_1, ..., X_n$ converge en loi vers la va $X$ si et ssi la suite des fonctions de répartition $F_n(x) = P[X_n < x]$ converge simplement vers $F(x) = P[X < x]$ en tout point $x$ où $F$ est continue.
- Notation

$$X_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$$

- Exemple

$$P[X_n = 1] = \frac{1}{n} \text{ et } P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$$

# Convergence en loi

- Propriétés
  - Théorème de Levy
    $X_n$ cv en loi vers $X$ si et ssi $\phi$ continue en $t = 0$ et

$$\phi_n(t) = E\left[e^{itX_n}\right] \underset{n \to \infty}{\to} \phi(t) = E\left[e^{itX}\right], \forall t.$$

  - Si $X_n$ est une suite de va continues de densités $p_n(x)$ et que $p_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} p(x)$ p.p., alors $X_n \overset{\mathcal{L}}{\underset{n \to \infty}{\to}} X$.
  - Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\underset{n \to \infty}{\to}} X$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors

$$g(X_n) \overset{\mathcal{L}}{\underset{n \to \infty}{\to}} g(X).$$

# Convergence en probabilité

- Définition
  La suite de va $X_1, ..., X_n$ converge en probabilité vers la va $X$ si et ssi $\forall \epsilon > 0$, on a

$$P\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

- Notation

$$X_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{P}}{\to}} X$$

- Exemple : $X_n$ de densité $p_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$.
- Propriété
  Si $X_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{P}}{\to}} X$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors

$$g(X_n) \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{P}}{\to}} g(X).$$

# Convergence en moyenne quadratique

- Définition

  La suite de va $X_1, ..., X_n$ converge en moyenne quadratique vers la va $X$ si et ssi

$$E\left[(X_n - X)^2\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

- Notation

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{MQ}}{\to}} X$$

- Exemple

$$P[X_n = n] = \frac{1}{n^p} \text{ et } P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^p}$$

avec $p = 2$ et $p = 3$.

# Convergence presque sûre

- Définition
  La suite de va $X_1, ..., X_n$ converge presque sûrement vers la va $X$ si et ssi

$$X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} X(\omega), \quad \forall \omega \in A|P(A) = 1.$$

- Notation

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{PS}}{\to}} X$$

- Comparaison entre les différents types de convergence

# Loi faible des grands nombres

- Loi faible des grands nombres
  Si $X_1, ..., X_n$ sont des va indépendantes et de même loi de moyenne $E[X_k] = m < \infty$, alors la va $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers $m$.
- Preuve

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = E\left[e^{it\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}X_k}\right] = \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

Dév. de Taylor de $\phi$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\lambda(t) = 1 + itm + t\lambda(t)$$

# Preuve

On en déduit

$$\ln\left[\varphi_{\overline{X}_n}(t)\right] = n\ln\left[1 + i\frac{t}{n}m + \frac{t}{n}\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right] = n\left[i\frac{t}{n}m + \frac{t}{n}\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right]$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\overline{X}_n}(t) = e^{itm} \qquad \forall t$$

i.e.,

$$\overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} m \Leftrightarrow \overline{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\to}} m$$

# Loi forte des grands nombres

- Loi forte des grands nombres
  Si $X_1, ..., X_n$ sont des va indépendantes et de même loi de moyenne $E\left[X_k\right] = m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, alors la va $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en moyenne quadratique vers $m$.
- Preuve

$$E\left[\left(\overline{X} - m\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E\left[\left(X_k - m\right)\left(X_l - m\right)\right]$$

Mais

$$E\left[\left(X_k - m\right)\left(X_l - m\right)\right] = \begin{cases} \sigma^2 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{cases}$$

# Preuve

Donc

$$E\left[\left(\overline{X}_n - m\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

i.e.,

$$\overline{X}_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{MQ}}{\to}} m$$

# Théorème de la limite centrale

- Théorème de la limite centrale
  Si $X_1, ..., X_n$ sont des va indépendantes et de même loi de moyenne $E[X_k] = m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, alors la va centrée réduite $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Preuve

$$\varphi_{Y_n}(t) = E\left[e^{itY_n}\right] = e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}} \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right]$$

Mais

$$E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right] = \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

# Preuve

Donc

$$\ln\left[\varphi_{Y_n}(t)\right] = -\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + n \ln \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

En utilisant le développement de Taylor de $\varphi$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + t^2\lambda(t)$$

On en déduit

$$\ln\left[\varphi_{Y_n}(t)\right] = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n}\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \forall t \;\Leftrightarrow\; Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$$

# Que faut-il savoir ?

- Convergence en loi ?
- Convergence en moyenne quadratique ?
- $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers ? Conditions ?
- $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en moyenne quadratique vers ? Conditions ?
- $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - ?}{?}$ converge en loi vers ?