TD 2 – Intégrales de fonctions mesurables positives

▷ **Exercice 1.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. On définit

$$\begin{array}{rccl} \mu_f\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \mu_f(A) := \displaystyle\int_E f\, \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu. \end{array}$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$, appelée *mesure de densité f par μ*.

▷ **Exercice 2.** Soit $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ une double suite de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} u_{k,l} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} u_{k,l}.$$

▷ **Exercice 3.** Soit f mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et positive. Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{array}{rccl} \delta_0\colon & \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \delta_0(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\delta_0$.

▷ **Exercice 4** (Inégalité de Markov)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ et positive. Montrer que

$$\forall\, a > 0, \quad \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

▷ **Exercice 5.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable positive telle que :

$$\mu(f^{-1}(\{+\infty\}) = 0.$$

f est-elle intégrable sur E ?