Automatique
Département Sciences du numérique

Informatique, Mathématiques Appliquées, Réseaux, Télécommunications

Solutions du TD 3

27 octobre 2021

▷ **Exercice 1.** *On considère le système linéaire suivant*

$$(S)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{array}\right.$$

1.1.
Écrire le système sous la forme

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))=Ax(t)+Bu(t).$$

1.2. *Donner les points de fonctionnement, c'est-à-dire les points où* $f(x_e,u_e)=0$.

1.3. *Le système est-il contrôlable ?*

1.4. *On considère le point de fonctionnement* $(x_e,u_e)=(0,0,0)$.

(i) On considère un contrôle par retour d'état $u(t)=Kx(t)$. *Quels valeurs doivent avoir les coefficients* k_1 *et* k_2 *de* K *pour que* x_e *soit un point d'équilibre asymptotiquement stable, pour le système* $\dot{x}(t)=f(x(t),Kx(t))$, *avec comme unique valeur de pôle* -1.

(ii) On suppose maintenant que l'on a accès en sortie qu'à la première composante de l'état : $y(t)=x_1(t)$ *et on considère un contrôle par retour de sortie* $u(t)=ky(t)$. *Peut-on trouver des valeurs de* k *pour que, pour le nouveau système,* x_e *soit asymptotiquement stable, stable ?*

Correction

►

1.1.

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

1.2.

$$(x_e,u_e)=(x_{e1},0,0).$$

1.3. *La matrice de contrôlobalité* C *est*

$$C=(B\quad AB)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2. Par suite le système est commandable.

1.4. (i) *Pour* $u(t) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t)$ *on obtient le système linéaire*

$$\dot{x}(t) = Bx(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t).$$

Il faut donc que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \lambda^2 - k_2\lambda - k_1 \\ &= (\lambda + 1)^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Soit $k_1 = -1$ *et* $k_2 = -2$.

(ii) *Pour* $u(t) = kx(t)$ *on obtient le système linéaire*

$$\dot{x}(t) = Bx(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

— *Ici on est dans le cas linéaire donc on ne peut pas être asymptotiquement stable car si* k_1 *est négatif ou nul, la partie réelle est nulle et si* $k_1 > 0$ *alors il existe une valeur propre strictement positive.*
— *Pour la stabilité il faut, pour le cas ou la partie réelle est nulle, que les multiplicités géométrique et algébrique soient égales ; ceci est le cas si* $k_1 < 0$.

□

▷ **Exercice 2.** *La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule est l'accélération du déplacement que l'on peut exercer horizontalement.*

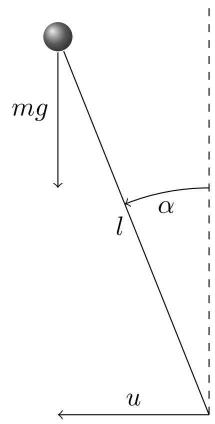

FIGURE 1 – *Pendule inversé contrôlé, version 1.*

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))u(t)}{l} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

2.1. *Le système non contrôlé est-il stable, asymptotiquement stable, pour* $x_e = (0, 0)$ *?*

2.2. (i) *Déterminer les points de fonctionnement du système.*

(ii) *On considère un point de fonctionnement où* $\cos x_{1e} > 0$, *donner les conditions sur* K *pour que le contrôle par retour d'état* $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e))$ *stabilise asymptotiquement le système.*

2.3. *On se place ici autour du point de fonctionnement* $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$. *On suppose maintenant que l'on a accès en pratique qu'à la valeur en sortie* $y(t) = x_1(t) = \alpha(t)$ *et on considère le contrôle par retour de sortie* $u(t) = ky(t)$.

(i) *Peut-on par la méthode précédente obtenir un contrôle qui stabilise le système ?*

(ii) *On considère la fonction*

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{g+k}{l}(\cos x_1 - 1) + \frac{kx_1}{l}\sin x_1 + \frac{x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

(a) *Donner une relation entre g et k pour qu'il existe $B(0,\eta)$ sur laquelle $V(x)>0$ si $x\neq 0$.*
(b) *Si $x(\cdot)$ est une solution du système montrer que $\frac{d}{dt}(V(x(t))=0$.*
(c) *En déduire que le point $(0,0)$ n'est pas asymptotiquement stable, mais qu'il est stable.*

Correction

▶

2.1. *Le système s'écrit*

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),$$

avec

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,u) & \longmapsto & f(x,u)=\begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l}\sin x_1-\frac{\cos(x_1)u}{l}\end{pmatrix}\end{array}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}\cos x_1 & 0\end{pmatrix},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0\end{pmatrix},$$

qui admet $\pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ comme valeurs propres. Par suite le système n'est pas stable.

2.2. (i) *$f(x,u)=(0,0,0)$ si et seulement si $x_2=0$ et $g\sin x_1-\cos x_1 u=0$. $\cos x_1=0$ implique alors $\sin x_1=0$ ce qui est impossible. Par suite on a $u=g\tan x_1, x_1\in]-\pi/2,\pi/2[$.*

(ii) *Posons*

$$J_g(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{l}(g\cos x_1+\sin x_1(u_e+K(x-x_e))-k_1\cos x_1) & \frac{-\cos x_1}{l}k_2\end{pmatrix}.$$

Par suite

$$J_g(x_e)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\cos x_{e1}}{l}(g-k_1)+\frac{\sin x_{e1}}{l}u_e & \frac{-\cos x_{e1}}{l}k_2\end{pmatrix}.$$

Pour stabiliser asymptotiquement ce système il suffit que

$$\begin{aligned} trace(J_g(x_e)) &= \frac{-\cos x_{e1}}{l}k_2<0 \\ \det J_g(x_e) &= -\frac{\cos x_{e1}}{l}(g-k_1)-\frac{\sin x_{e1}}{l}g\tan x_{e1}>0.\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} k_2 &> 0 \\ k_1\cos^2 x_{e1} &> g\end{aligned}$$

2.3. (i) *On obtient alors ($x_{e1}=0$ et $k_2=0$)*

$$g'(x_e)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{l}(g-k) & 0\end{pmatrix}.$$

La trace est nulle, comme on est en non linéaire, on ne peut rien conclure quand à la stabilité.

(ii) (a)

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{g+k}{l}\left(\frac{-x_1^2}{2}+\mathcal{O}(x_1^4)\right)+\frac{kx_1}{l}\left(x_1+\mathcal{O}(x_1^3)\right)+\frac{x_2^2}{2} \\ &= \frac{x_1^2}{2l}(k-g)+\mathcal{O}(x_1^4)+\frac{x_2^2}{2}\end{aligned}$$

Par suite il existe $\eta_0>0$ et $C>0$ tel que pour tout $x\in B(0,\eta)$ $\mathcal{O}(x_1^4)>-C|x_1|^4$ et

$$V(x)>x_1^2(\frac{k-g}{2l}-Cx_1^2)+\frac{x_2^2}{2}.$$

Il suffit alors de prendre

$$\eta<\min(\eta_0,\sqrt{\frac{k-g}{2lC}})$$

pour avoir le résultat.

(b) Il suffit de faire le calcul

(c) Si $x_0 \neq 0$ *alors* $V(x(t,x_0)) = V(x_0) \neq 0$ *pour tout* t*. Par suite,* V *étant continue, on ne peut avoir* $V(x(t,x_0))$ *qui tend vers 0 lorsque* t *tend vers* $+\infty$ *; et le système n'est pas asymptotiquement stable.*

Posons $U = [-\eta/2, \eta/2] \times [-\eta/2, \eta/2], U$ *est un compact par suite*

$$\delta = Min_{\partial U}(V(x)) > 0.$$

On a alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha, U_\alpha = \{x \in U, V(x) \leq min(\alpha, \delta/2)\} \subset B(0,\varepsilon).$$

Si tel n'était le cas alors $\exists \varepsilon > 0, \forall n, \exists x_n \in U, V(x_n) < (1/n)$ *et* $x_n \notin B(0,\varepsilon)$*. Mais alors en prenant une sous suite on aurait sa limite* $x^* \notin B(0,\varepsilon)$ *et* $V(x^*) = 0$*, ce qui est impossible.*

Si maintenant in prend $x_0 \in U_\alpha$*, alors pour tout* $t, V(x(t,x_0)) = V(x_0) \leq \delta/2$ *et* $x(t,x_0)$ *ne peut sortir de* U *car sinon, cette trajectoire rencontrerait la frontière de* U *et en ce point on aurait* $V(x) \geq \delta$*. Donc* $x(t,x_0) \in U_\alpha \subset B(0,\varepsilon)$ *pour tout* t*. Mais* $U_\alpha \supset \{x \in \mathring{U}, V(x) < min(\alpha, \delta/2)\}$ *qui est un ouvert contenant 0, donc* U_α *est un voisinage de O et le système est stable.*

□