Intégration

Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

9 novembre 2021

INP TOULOUSE ENSEEIHT

Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
4.2. Ensembles négligeables
4.3. Introduction à l'espace L^1
4.4. Liens entre dérivée et intégrale

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
4.2. Ensembles négligeables
4.3. Introduction à l'espace L^1
4.4. Liens entre dérivée et intégrale

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Remarque 4.1.1. On considère des fonctions mesurables de signe quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour éviter les formes indéterminées comme

$$+\infty - +\infty.$$

Nous avons déjà noté $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{M}$ celui des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, *i.e.* $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, donc nous n'introduisons pas de nouvelles notations pour $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Remarque 4.1.2. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Nous pouvons toujours écrire f sous la forme

$$f = f^+ - f^-$$

avec

$$f^+ := f\, \mathbb{1}_{f>0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad f^- := -f\, \mathbb{1}_{f<0} \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Définition 4.1.1 – Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ **admet une intégrale** si f^+ ou f^- est intégrable.

Si f^+ et f^- sont intégrables alors on dit que f est **μ-intégrable** (ou **intégrable**).

Si f admet une intégrale, ce qui est le cas si f est intégrable, alors on définit **l'intégrale de f sur E par rapport à μ** par

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition 4.1.2

On notera $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou $\mathcal{L}^1$, l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 4.1.3. Bien noter $\mathcal{L}^1$ car la notation L^1 fera référence à un autre espace.

Proposition 4.1.3

Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Alors
$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$
Réciproquement, pour $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si $|f|$ est intégrable alors f l'est aussi, *i.e.* $|f| \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$.

- Par définition, f^+ et f^- sont intégrables et

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \leq \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

par **additivité** (on rappelle que $|f| = f^+ + f^-$). De même, on démontre que $-\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$. ■

Théorème 4.1.4 – Linéarité de l'intégrale

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

L'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel** et l'application

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & T(f) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu \end{array}$$

est une **forme linéaire croissante**.

Remarque 4.1.4. L'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$ souvent noté l^1 est l'ensemble des suites dont la série est absolument convergente.

- Montrons que $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace vectoriel**.

Soient f, g dans $\mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$$

et puisque par **additivité et positive homogénéité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$

$$\int (|\lambda||f| + |g|) \,\mathrm{d}\mu = |\lambda| \int |f| \,\mathrm{d}\mu + \int |g| \,\mathrm{d}\mu,$$

alors par le **théorème de comparaison**, $|\lambda f + g|$ est intégrable, donc d'après la **proposition précédente**, $\lambda f + g \in \mathcal{L}^1$.

- Montrons que $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$ pour f, g dans $\mathcal{L}^1$.

Tout d'abord, par définition

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Ainsi

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \geq 0$$

et donc par **additivité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ on a

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu + \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int g^-\,\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu + \int f^+\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu$$

ce qui donne puisque toutes ces quantités sont finies

$$\int (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu - \int (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu = \int f^+\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int g^+\,\mathrm{d}\mu - \int g^-\,\mathrm{d}\mu$$

autrement dit

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu.$$

- Montrons que $\int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\mu$ pour f dans $\mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $\lambda f = \lambda(f^+ - f^-) = \lambda f^+ - \lambda f^-$ mais surtout que

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ &= \lambda f^+ \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-, \\ \lambda < 0 \Rightarrow (\lambda f)^+ &= -\lambda f^- \quad \text{et} \quad (\lambda f)^- = -\lambda f^+. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la **positive homogénéité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \int \lambda f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int \lambda f^- \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \lambda \int f^- \, \mathrm{d}\mu,$$
$$\lambda < 0 \Rightarrow \int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \int -\lambda f^- \, \mathrm{d}\mu - \int -\lambda f^+ \, \mathrm{d}\mu = -\lambda \int f^- \, \mathrm{d}\mu - (-\lambda) \int f^+ \, \mathrm{d}\mu.$$

et donc dans les deux cas $\int \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Les deux points précédents démontrent la linéarité de l'application T : $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. Ainsi T est bien une forme linéaire, car définie sur un espace vectoriel et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Montrons que $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$ pour f, g dans $\mathcal{L}^1$ si $f \leq g$, *i.e.* montrons que T est croissante.

En fait, T est une forme linéaire **positive** donc croissante.

En effet, posons $h := g - f$. Alors $h = h^+ \geq 0$ et puisque alors $h \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ il vient que $T(h) \geq 0$ (T est donc positive).

Mais $T(h) = T(g) - T(f)$ par **linéarité** de T et donc $T(g) \geq T(f)$.

■

Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
4.2. Ensembles négligeables
4.3. Introduction à l'espace L^1
4.4. Liens entre dérivée et intégrale

$$\mu(A) = 0$$

Définition 4.2.1 – Ensemble négligeable

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un **ensemble négligeable** (ou μ-négligeable) si $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.2.1. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Au lieu d'écrire $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ si f est nulle sauf sur un **ensemble négligeable**, on notera souvent

$$f = 0 \ \mu\text{-presque partout} \quad \text{ou} \quad f = 0 \ \mu\text{-p.p.},$$

ou encore $f = 0$ p.p., et on dira que f est μ-presque partout nulle.

Cette terminologie bien pratique est définie au slide suivant de manière générale.

Définition 4.2.2 – Propriété vraie μ-p.p.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soient $A \in \mathcal{A}$ un **ensemble négligeable** et une propriété P qui dépend de $x \in E$.

Si l'on a

$$\{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\} \subset A,$$

alors on dira que $P(x)$ est vraie "pour μ-presque tout x" ou que **P est vraie μ-p.p**.

Remarque 4.2.2. Il est possible dans certains contextes que P soit fausse sur un ensemble non mesurable inclus dans un ensemble négligeable. Dans ce cas, il serait **incorrect** de dire que "P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable". On peut en revanche toujours dire que "P est vraie au moins sur le complémentaire d'un ensemble négligeable".

Pour éviter ces difficultés, il est commode d'introduire la notion de **tribu complétée** à laquelle on ajoute (entres autres) toutes les parties de E incluses dans un ensemble négligeable. Ainsi, dans ce contexte, on pourra alors toujours dire que "P est vraie partout sauf sur un ensemble négligeable". Cette notion est introduite au chapitre 5.

Théorème 4.2.3

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., c-a-d si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, alors

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$$

et la réciproque est vraie si $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

- Nous avons, **cf. Chapitre 3**, que pour $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-p.p.}$$

Or si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est nulle p.p., alors $f^+ = f\mathbb{1}_{f>0}$ et $f^- = -f\mathbb{1}_{f<0}$ le sont aussi, et puisque f^+ et f^- sont positives alors leurs intégrales sont nulles. Ainsi, $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Corollaire 4.2.4

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $A \in \mathcal{A}$ un ensemble négligeable. Alors

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- Par **définition**,

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu,$$

et par le **théorème précédent**, $\int_E f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = 0$. ■

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors
$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Exercice : faire l'exercice.

Proposition 4.2.5 – Relation de Chasles

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ t.q. f intégrable sur $A \cup B$ et $\mu(A \cap B) = 0$.

Alors

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

► On a toujours $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$. Puisque f intégrable sur $A \cup B$, alors f intégrable sur A, B et $A \cap B$, cf. $|f \mathbb{1}_A| \leq |f \mathbb{1}_{A \cup B}|$, etc.

Par **linéarité** de l'intégrale

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu - \int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu$$

mais $\int_{A \cap B} f \, \mathrm{d}\mu = 0$ car $\mu(A \cap B) = 0$, cf. **corollaire précédent**. ■

***Lemme 4.2.1**. Si $f = g$ μ-p.p., alors f est intégrable (resp. admet une intégrale) ssi g est intégrable (resp. admet une intégrale).*

- Comme $f = g$ μ-p.p., alors il est clair que $f^+ = g^+$ μ-p.p. et $f^- = g^-$ μ-p.p.

Il suffit donc de montrer que pour toutes f, g dans $\mathcal{M}_+$, si $f = g$ μ-p.p. alors

$$\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{ssi} \quad \int g \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

En fait, nous avons déjà démontré mieux (cf. **Chapitre 3**) :

$\forall f, g \in \mathcal{M}_+$, si $f = g$ μ-p.p. alors on a l'égalité $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Théorème 4.2.6

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soient $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $f = g$ μ-p.p. Alors,

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

- D'après le lemme 4.2.1, $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Par **linéarité** de l'intégrale,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu - \int g \, \mathrm{d}\mu = \int (f - g) \, \mathrm{d}\mu.$$

La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc d'après le **théorème précédent**,

$$\int (f - g) \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

∎

Remarque 4.2.3. On retiendra que deux fonctions égales p.p. ont la même intégrale.

Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
4.2. Ensembles négligeables
4.3. Introduction à l'espace L^1
4.4. Liens entre dérivée et intégrale

$$f \sim_\mu g$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Définition 4.3.1

Soit F un espace vectoriel. Une fonction $N \colon F \to \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** si

i) $\forall u \in F$: $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (**séparation**) ;

ii) $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times F$: $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ (**absolue homogénéité**) ;

iii) $\forall (u, v) \in F^2$: $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (**sous-add. / inég. triangulaire**).

Si i) est remplacé par

$$\text{i')} \quad N(0_F) = 0,$$

alors on parle de **semie-norme**.

Remarque 4.3.1. On rappelle qu'une norme N sur un espace vectoriel F induit une topologie sur F, la topologie induite par la distance $d(u, v) := N(u - v)$.

On rappelle que l'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^1$) est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui sont μ-intégrable, c-a-d t.q.

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Pour toute $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, on pose

$$\|f\|_1 := \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel semi-normé.

Proposition 4.3.2

L'espace $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel semi-normé.

- Nous avons déjà que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel, cf. Section 4.1.

- Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une semie-norme.

  i) Si $f = 0 \in \mathcal{L}^1$ alors $|f| = 0$ et donc $\|f\|_1 = \int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$;

  ii) Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}^1$. Alors par **positive homogénéité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda f| \, \mathrm{d}\mu = |\lambda| \int |f| \, \mathrm{d}\mu = |\lambda| \|f\|_1 \ ;$$

  iii) Soient f, g dans $\mathcal{L}^1$. Alors $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc par **croissance** puis **additivité** de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|) \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu + \int |g| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

■

Pour passer d'une semie-norme à une norme, on identifie les vecteurs u et v dans F t.q.

$$N(u - v) = 0.$$

Rigoureusement, on définit **l'espace quotient** de F par la relation d'équivalence

$$u \sim v \iff N(u - v) = 0,$$

c-a-d l'ensemble constitué des classes d'équivalences de $\sim$:

- Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence.
  - (réflexivité). $N(u - u) = N(0_F) = 0 \Rightarrow u \sim u$;
  - (symétrie). $N(u - v) = 0 = N(v - u)$ par absolue homogénéité de N ;
  - (transitivité). $N(u - v) = N(v - w) = 0 \Rightarrow N(u - w) = N(u - v + v - w) \leq N(u - v) + N(v - w) = 0$ par l'inégalité triangulaire. ■

Notation. On note $[u] := \{v \in F \mid u \sim v\}$ la classe d'équivalence de $u \in F$ et on définit l'espace quotient de F par la relation d'équivalence $\sim$ par :

$$F/\!\sim\; := \bigcup \{[u] \mid u \in F\}.$$

Exercice 4.3.1. Montrer $(u' \in [u]$ et $v' \in [v]) \Rightarrow \lambda u' + \mu v' \in [\lambda u + \mu v]$, avec λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

On introduit pour toutes f, g dans $\mathcal{L}^1$ la relation d'équivalence notée $\sim_\mu$ définie par la semie-norme $\|\cdot\|_1$:

$$f \sim_\mu g \iff \|f - g\|_1 = 0 \iff |f - g| = 0 \ \mu\text{-p.p.} \iff f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Notation. On note pour $f \in \mathcal{L}^1$,

$$[f] := \left\{g \in \mathcal{L}^1 \;\middle|\; g \sim_\mu f\right\} = \left\{g \in \mathcal{L}^1 \;\middle|\; g = f \ \mu\text{-p.p.}\right\}$$

sa classe d'équivalence par la relation $\sim_\mu$.

Remarque fondamentale. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence ;

$$\lambda[f] + \mu[g] := [\lambda f + \mu g].$$

Ceci fait de l'espace quotient, un **espace vectoriel**.

> **Remarque 4.3.2**. On fera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer fonctions et classes d'équivalences, c-a-d qu'on utilisera le même symbole f pour la classe et la fonction. Ceci n'est bien entendu pas dangereux.

Définition 4.3.3

On note $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ou L^1, l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de $\mathcal{L}^1$ par la relation d'équivalence $f \sim_\mu g \iff f = g$ μ-p.p., *i.e.* $L^1 := \mathcal{L}^1/\sim_\mu$.

On définit la fonction $\|\cdot\|_{L^1}$ sur L^1 par

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_{L^1} : & L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & [f] & \longmapsto & \|[f]\|_{L^1} := \|f\|_1 \end{array}$$

où $f \in [f]$ est n'importe quel représentant de la classe d'équivalence, car si $f \sim_\mu g$ alors $\|f\|_1 = \|g\|_1$.

Remarque 4.3.3. Bien entendu, $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme sur L^1.

Théorème 4.3.4

L'espace $(L^1(E, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 4.3.2. On note l^1 l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où $m := \mathrm{card}$ est la mesure de comptage. Soit $u \in l^1$, alors

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^1$ car $\|u\|_1 = 0$ implique $u = 0$.

Chapitre 4 : Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

4.1. Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque
4.2. Ensembles négligeables
4.3. Introduction à l'espace L^1
4.4. Liens entre dérivée et intégrale

On s'intéresse dans cette partie au lien entre intégrale et dérivée, les fonctions seront ici définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va considérer l'espace $L^1([a\,,b],\mathcal{B}([a\,,b]),\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue et où $[a\,,b]$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans ce cadre particulier, on note l'espace L^1 de la manière suivante :

$$L^1([a\,,b],\mathbb{R})$$

où $\mathbb{R}$ est ici l'espace d'arrivée.

On se pose les questions suivantes :

- Soit $f \in L^1([a\,,b],\mathbb{R})$, on pose

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\lambda$$

  et on se demande alors si F est dérivable en certains points et que vaut sa dérivée si elle existe. Cette première question reviendra à se demander si la dérivée de l'intégrale de f vaut f à quelque chose près.
- La seconde question revient à se demander pour quelles fonctions F on retombe sur nos pattes après dérivation puis intégration. C'est donc en quelque sorte, la question inverse à la première question.

Le théorème suivant répond à la première question.

Théorème 4.4.1 – Fondamental de l'analyse I [1, Théorème 2.40.2]

Soit $f \in L^1([a\,,b],\mathbb{R})$. Alors, la fonction

$$F: \begin{array}{ccc} [a\,,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) := \displaystyle\int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\lambda \end{array}$$

est continue, dérivable presque partout et $F' = f$ p.p..

Remarque 4.4.1. Si f est continue sur $[a\,,b]$ alors F est une primitive de f, *i.e.* F est dérivable sur $[a\,,b]$ et $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a\,,b]$.

Nous savons donc d'après ce théorème, que toute fonction f intégrable sur $[a\,,b]$ est égale presque partout à la dérivée de son intégrale.

[1] C. Wagschal, *Dérivation, intégration*, Hermann, 1999.

D'après un résultat fondamental de l'analyse, nous savons que si F est une **primitive** (au sens donné ci-avant) d'une fonction f sur un intervalle compact, et si f est intégrable, alors F est égale à l'intégrale de sa dérivée f.

Par contre, une fonction F **continue et presque partout dérivable**, même si sa dérivée est intégrable, peut ne pas être égale à l'intégrale de sa dérivée. **L'escalier du diable**, ou escalier de Cantor, en est un exemple. Nous introduisons alors les fonctions **absolument continues** qui sont construites pour être égales à l'intégrale de leur dérivée.

Définition 4.4.2 – Absolue continuité

On dit que la fonction $F\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est **absolument continue** si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute famille finie $(]a_i\,,b_i[)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts contenus dans $[a\,,b]$ et disjoints deux à deux, on ait

$$\sum_{i\in I}(b_i - a_i) \leq \delta \Longrightarrow \sum_{i\in I} \|F(a_i) - F(b_i)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 4.4.2. On note $AC([a\,,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant répond à la seconde question.

Théorème 4.4.3 – Fondamental de l'analyse II [1, Théorème 2.41.3]

$F \in AC([a\,,b],\mathbb{R})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifées :

i) F est dérivable presque partout et il existe $f \in L^1([a\,,b],\mathbb{R})$ t.q. $F' = f$ p.p. ;

ii) On a

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\lambda, \quad \forall\, x \in [a\,,b].$$

- Pour répondre à la seconde question, nous pouvons dire que les fonctions absolument continues sont égales à l'intégrale de leur dérivée, à une constante près.

Remarque 4.4.3. On peut définir la notion de fonction définie presque partout et dire directement dans le théorème que $F' \in L^1([a\,,b],\mathbb{R})$. On écrit alors plus simplement

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F' \,\mathrm{d}\lambda, \quad \forall\, x \in [a\,,b].$$

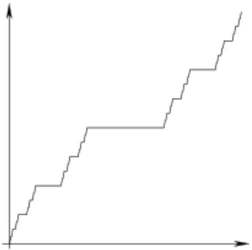
- En couplant les deux théorèmes fondamentaux on a le résultat suivant :

Corollaire 4.4.4

Soit $f \in L^1([a\,,b],\mathbb{R})$. Soit F la fonction définie sur $[a\,,b]$ par $F(x) := \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\lambda$ pour tout $x \in [a\,,b]$, Alors, $F \in AC([a\,,b],\mathbb{R})$ et $F' = f$ presque partout sur $[a\,,b]$.

Exemple 4.4.1.

L'escalier de Cantor,[1] ou escalier du diable, est le graphe d'une fonction F continue croissante sur $[0,1]$, telle que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, qui est dérivable presque partout, la dérivée étant presque partout nulle. Cette fonction ne peut donc pas être absolument continue. Cette fonction est construite de telle sorte que l'image de l'ensemble de Cantor,[2] qui est de mesure nulle, soit $[0,1]$ tout entier.



Escalier de Cantor.

1. Voir source https://fr.wikipedia.org/wiki/Escalier_de_Cantor.
2. Voir source https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor.

- Nous avons donc vu que l'ensemble L^1 des fonctions intégrables au sens de Lebesgue contient l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable, noté R. Pour récapituler, nous avons les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_M([a\,,b],\mathbb{R}) \subset R([a\,,b],\mathbb{R}) \subset L^1([a\,,b],\mathbb{R}),$$

où on rappelle que $\mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R})$, resp. $\mathcal{C}^0_M([a\,,b],\mathbb{R})$, est l'ensemble des fonctions continues, resp. continues par morceaux, sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Nous venons de faire le lien entre intégrale et dérivée. Nous savons que l'intégration d'une fonction $\mathcal{C}^0$ nous donne une fonction $\mathcal{C}^1$ et la dérivation d'une fonction $\mathcal{C}^1$ nous donne une fonction $\mathcal{C}^0$. De même entre $\mathcal{C}^0_M$ et $\mathcal{C}^1_M$ et maintenant entre L^1 et AC. On a alors les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^1([a\,,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1_M([a\,,b],\mathbb{R}) \subset AC([a\,,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0([a\,,b],\mathbb{R}).$$

> **Remarque 4.4.4**. On peut donc voir les fonctions de L^1 comme les dérivées des fonctions de AC, et les fonctions de AC comme les primitives des fonctions de L^1, en un sens généralisé. On parle parfois de dérivée faible.

Exemple 4.4.2. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0\,,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := 1. \end{array}$$

On pose pour $x \in [0\,,2]$:

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x.$$

Alors, on voit que $F'(x) = 1 = f(x)$ pour tout $x \in [0\,,2]$. Ici, $f \in \mathcal{C}^0$ et $F \in \mathcal{C}^1$.

Exemple 4.4.2. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := 1. \end{array}$$

On pose pour $x \in [0,2]$:

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x.$$

Alors, on voit que $F'(x) = 1 = f(x)$ pour tout $x \in [0,2]$. Ici, $f \in \mathcal{C}^0$ et $F \in \mathcal{C}^1$.

Exemple 4.4.3. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) := \mathbb{1}_{[0,1]}(x). \end{array}$$

On pose pour $x \in [0,2]$:

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0,2] \setminus \{1\}$, *i.e.* presque partout sur $[0,2]$. Ici, F' n'est pas définie en 1. Ici, $f \in \mathcal{C}_M^0$ et $F \in \mathcal{C}_M^1$.

Exemple 4.4.4. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [1\,,2] \text{ ou } x = 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On pose pour $x \in [0\,,2]$:

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,,1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $F'(x) = f$ p.p. car $F'(1/2) = 1 \neq f(1/2) = 0$ et F' n'est pas définie en 1.

Exemple 4.4.4. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [1\,,2] \text{ ou } x = 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On pose pour $x \in [0\,,2]$:

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,,1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $F'(x) = f$ p.p. car $F'(1/2) = 1 \neq f(1/2) = 0$ et F' n'est pas définie en 1.

Exemple 4.4.5. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := \mathbb{1}_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}(x). \end{array}$$

On pose pour $x \in [0\,,2]$:

$$F(x) := \int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\lambda = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,,1], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $F'(x) = f$ p.p. car $F' = f$ sauf sur $\mathbb{Q} \cap [0\,,1]$. Ici, $f \in L^1$ et $F \in AC$.