Intégration

Chapitre 1 : Motivations

Olivier Cots

13 décembre 2021

INP ENSEEIHT

Les contributeurs :

- Antoine Bernigaud
- Serge Gratton
- Ehouarn Simon
- Boris Wembe

Les objectifs :

- Construire l'intégrale au sens de Lebesgue :

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \; ;$$

- Calculer des intégrales par passage à la limite, changement de variables, etc ;
- Introduire l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

Les intérêts :

- L'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure et de l'intégration en général est un outil fondamental de l'analyse.

- On retrouve l'intégrale de Lebesgue dans la résolution des équations aux dérivées partielles, des équations différentielles ordinaires, dans la théorie des probabilités, ou encore dans l'analyse et le traitement de signaux via la transformée de Fourier.

Motivations :

Rappelons quelques principes et résultats de la théorie de l'intégrale de Riemann afin de présenter quelques limites et comment ces limites seront surmontées dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

L'intégrale de Riemann d'une fonction bornée $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a < b$ dans $\mathbb{R}$, se construit à partir de la notion de fonction en escalier :

Définition 1.0.1 – Subdivision

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie du type :

$$\Delta := \{x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b\}.$$

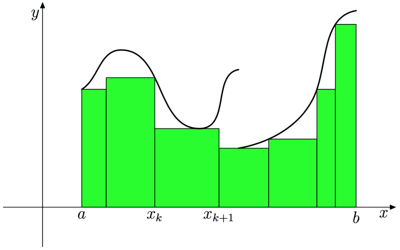
Définition 1.0.2 – Fonction en escalier

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en *escalier* s'il existe une subdivision $\Delta := \{x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b\}$ de $]a, b[$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

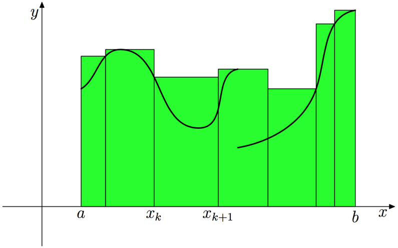
Pour une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on définit ses *sommes de Darboux inférieure* $S_\Delta(f)$ et *supérieure* $S^\Delta(f)$ par :

$$S_\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \qquad S^\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Voici une illustration :



$S_\Delta(f)$



$S^\Delta(f)$

Les *intégrales de Riemann inférieure* $I_*(f)$ et *supérieure* $I^*(f)$ sont définies par :

$$I_*(f) := \sup_{\Delta} S_\Delta(f), \qquad I^*(f) := \inf_{\Delta} S^\Delta(f),$$

le supremum et l'infimum étant pris sur toutes les subdivisions Δ de $[a\,,b]$.

On a alors :

Définition 1.0.3 – Intégrale de Riemann

On dit que $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ bornée est *Riemann intégrable* si $I_*(f) = I^*(f)$. Dans ce cas, on définit son *intégrale au sens de Riemann* par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := I_*(f) = I^*(f).$$

Proposition 1.0.4

Soit f une fonction en escalier sur $[a\,,b]$ et $\{x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b\}$ une subdivision associée à f, la valeur constante de f sur $]x_{k-1}\,, x_k[$ étant notée c_k. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, c_k.$$

Proposition 1.0.5

Toute fonction $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$, bornée et continue sauf en un nombre fini de points est Riemann-intégrable.

Proposition 1.0.6

Si f est limite uniforme sur $[a\,,b]$ d'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,b]$, alors f est elle-même Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$.

Proposition 1.0.7

Soit $[a\,,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction bornée de $[a\,,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour que f soit Riemann-intégrable, il faut et il suffit que la mesure (au sens de Lebesgue) de l'ensemble de ses points de discontinuités soit nulle.

Remarque 1.0.1. La notion de mesure sera introduite au chapitre suivant.

Exemple 1.0.1. Soit $E := [0\,,1] \cap \mathbb{Q}$, alors la fonction $f := \mathbb{1}_E$ est bornée sur $[0\,,1]$ mais elle n'y est pas Riemann-intégrable. Elle est en revanche Lebesgue-intégrable.

- Notons $R([a\,,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De même, notons $L^1([a\,,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrable (que l'on définira plus tard dans le cours) sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\mathcal{C}^0([a\,,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_M([a\,,b], \mathbb{R}) \subset R([a\,,b], \mathbb{R}) \subset L^1([a\,,b], \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{C}^0([a\,,b], \mathbb{R})$, resp. $\mathcal{C}^0_M([a\,,b], \mathbb{R})$, est l'ensemble des fonctions continues, resp. continues par morceaux, sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- L'intégrale de Lebesgue que nous allons construire dans ce cours au chapitre 3 généralise celle de Riemann.

De plus :

- L'espace de départ n'est pas nécaisserement $\mathbb{R}$: on découpe l'espace d'arrivée au contraire de l'intégrale de Riemman qui découpe l'espace de départ. On introduit pour cela la notion de fonction étagée, cf. 3.1 (dans le poly).

Remarque : si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier alors elle est étagée sur l'espace mesuré $([a\,,b], \mathcal{B}([a\,,b]), \lambda)$, où $\mathcal{B}([a\,,b])$ est la tribu des boréliens de $[a\,,b]$, cf. 2.1, et où λ est la mesure de Lebesgue, cf. 2.2.

- Pour l'intégrale de Riemann, on a

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a = \lambda([a\,,b]) = \text{ " mesure de Lebesgue de l'intervalle } [a\,,b] \text{ ",}$$

i.e. ici sa longueur. On va généraliser la notion de mesure au chapitre 2.2 (utile en probabilités par exemple).

- L'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrable est plus grand que celui de fonctions Riemann-intégrable. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est Lebesgue intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Remarque : On devra introduire la notion de fonction mesurable, cf. 2.3.

- Les théorèmes de passage à la limite que nous présenterons au chapitre 5 sont généraux et sous des hypothèses (convergence simple + domination) plus pratique que l'hypothèse de convergence uniforme.

Passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n \to +\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

- L'ensemble des fonctions (de carré) intégrables au sens de Lebesgue est complet ce qui en fait un espace approprié pour la géométrie, l'optimisation, etc.

Il y aura 6 séances de cours.

- Chapitre 1. Motivations
- Chapitre 2. Théorie de la mesure
- Chapitre 3. Intégrale de Lebesgue de fonctions mesurables positives
- Chapitre 4. Les espaces $\mathcal{L}^1$, L^1 et L^p
- Chapitre 5. Théorèmes limites et applications
- Chapitre 6. Intégration sur les produits (non évalué)
- Chapitre 7. Perspectives probabilistes (Compléments)

Il y aura 4 séances de TD :

- TD1. Fonctions mesurables, mesures, tribus
- TD2. Intégrales de fonctions mesurables positives
- TD3. Intégrales de fonctions mesurables positives (suite)
- TD4. Intégrales de fonctions mesurables