EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

Mardi 22 Octobre 2019 (14h-15h30)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Somme de deux lois de Bernoulli (6 points)

On considère deux variables aléatoires (mutuellement) indépendantes X et Y de lois de Bernoulli telles que

$$\begin{array}{l} P[X=1]=p, P[X=0]=1-p \\ P[Y=1]=p, P[Y=0]=1-p \end{array} \tag{1}$$

avec $p \in]0,1[$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la loi de la variable aléatoire $T = X + Y$ de plusieurs manières.

1. En recherchant les valeurs possibles de T et les probabilités associées, montrer que T suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Déterminer la fonction caractéristique de T et retrouver la loi obtenue à la question précédente.

3. On pose $U = X$. Quelle est la loi du couple (T, U) ? En déduire la loi marginale de T.

4. Déterminer la fonction de répartition de la variable $T = X + Y$ notée $F(t) = P[T < t]$, représenter la graphiquement et expliquer comment retrouver la loi de T à partir de F.

Exercice 2 : Somme de deux lois exponentielles (8 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de paramètre λ de densités

$$p(x,.) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(.,y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$. On remarquera que la loi exponentielle de paramètres λ est une loi gamma $\Gamma(\lambda, 1)$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la loi de la variable aléatoire $T = X + Y$ de plusieurs manières.

1. Déterminer la fonction caractéristique de T et en déduire sa loi.

2. On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Quelle est la loi du couple (T, Z) ? (on accordera une attention particulière au domaine de définition de ce couple que l'on représentera graphiquement). En déduire la loi marginale de T et montrer qu'on retrouve le résultat de la question précédente.

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $T = X + Y$ notée $F(t) = P[T < t]$ à partir de la densité du couple (X, Y) notée $p(x, y)$ et retrouver la loi de T à partir de F.

Exercice 3 : Vecteurs Gaussiens (6 points)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X + Y - Z$ et $V = aX + bY$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

1. Quelle est la loi du vecteur $(X, Y, Z)^T$?

2. Déterminer la loi du vecteur $(U, V)^T$ et les lois marginales de U et de V. A quelle condition les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

3. On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = -1$. Déterminer les densités de $(U, V)^T$ et de V. En déduire que la loi conditionnelle de $U\,|V = v$ est une loi normale dont on déterminera la moyenne et la variance.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	$\mathbf{m}$	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

$\mathbf{m}$: moyenne σ^2 : variance   **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	$\mathbf{m}$	σ^2	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Inverse gamma IG(θ, ν)	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ x \geq 0$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t \rvert}$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)