TD 4 – Intégrales de fonctions mesurables

On notera λ la mesure de Lebesgue.

▷ **Exercice 1.** Pour chacune des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+} f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

1.1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=\sin(nx)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

1.2. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=|\cos(x)|^{\frac{1}{n}}e^{-x}$.

1.3. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=(1-\frac{x}{n})^n\cos x\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

▷ **Exercice 2.** Soit F la fonction définie par :

$$F(t)=\int_{\mathbb{R}_+}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

2.1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.

2.2. Calculer $F(0)$ et $\lim_{t\to+\infty}F(t)$.

Exercices supplémentaires.

▷ **Exercice 3.** Soit la suite de fonctions $f_n(x)=\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$ sur $[0\,,1]$.

3.1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément sur $[0\,,1]$.

3.2. Pour x fixé dans $[0\,,1]$, étudier le maximum de la fonction en t :

$$g_x(t)=\frac{t^{3/2}x}{1+t^2x^2},\quad t\geq 0.$$

3.3. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}f_n\,\mathrm{d}\lambda=0.$$

▷ **Exercice 4.** On pose

$$I=\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\lambda(y)$$

4.1. Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à I.

4.2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{1+x^2y}\,\mathrm{d}\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\pi}{2}.$$

4.3. En déduire que $I = \dfrac{\pi^2}{2}$.

4.4. Retrouver ce résultat directement en utilisant le changement de variables :

$$\begin{cases} v = x\sqrt{y} \\ t = \sqrt{y} \end{cases}$$

▷ **Exercice 5.** On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)} \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

5.1. Déterminer le domaine de définition de F et son domaine de continuité.

5.2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

5.3. Montrer que F admet une dérivée à droite en 0. Dans le calcul de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$, on pourra faire le changement de variable $x = u^2t^2$ puis utiliser le théorème de convergence dominée.

5.4. F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On dit que $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, si

$$\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

On pose alors

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

▷ **Exercice 6.** Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de L^2 qui convergent vers f et g dans L^2. Montrer que la suite $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^1.

▷ **Exercice 7.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < +\infty$.

7.1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors $L^q(E, \mathcal{A}, \mu) \subset L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.

7.2. Montrer qu'il existe une constante C dépendant de p, q et $\mu(E)$ telle que :

$$\forall f \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p \leq C\|f\|_q.$$

7.3. Conclure sur l'injection de $L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.