

# 同濟大學 控制科学与工程系

## 计算机控制系统设计与应用 课程

### 第二次仿真报告



实验名称 采样定理及ZOH频率特性

开课学期 2019-2020 学年第2 学期

实验学生 黄定梁 1751700

姚宇璇 1750631

叶哲惟 1751732

方哲全 1751648

任课教师 赵霞

实验日期 2020/4/12

PS: 该报告中部分图片来自于Matlab实时脚本, 该报告打印成PDF版本后部分图片显示不完整, 请老师参考word版本查看完整图像。

## 一、实验目的

1. 掌握采样定理及不满足采样定理产生的频率混淆现象。
2. 掌握ZOH的传递函数表达关系, 及幅值频率特性。
3. 掌握连续时间信号经过周期采样和零阶保持器后的频谱变化、时间域信号的变化。
4. 熟悉Matlab在离散时间系统中的应用及采样定理。

## 二、实验设备

Matlab R2018a

## 三、人员分工

小组成员	工作内容
黄定梁1751700	完成仿真2.3.3的ab题、撰写相应文档、材料整合
姚宇璇1750631	完成仿真2.3.2、撰写相应文档
叶哲惟1751732	完成仿真2.3.3的cd题、撰写相应文档
方哲全1751648	完成仿真2.3.1、撰写相应文档

## 四、实验内容

### 1. 采样定理

题:

$$e_1(t) = \sin(2t), e_2(t) = \sin(18\pi t + 1), e_3(t) = \sin(22\pi t)$$

三种连续时间信号, 用采样频率 10Hz 进行周期采样, 试用 MATLAB 画出  $t=0$

到 1 秒的采样信号。分析发生了什么现象及原因?

画出所有连续时间信号。

如果采样周期变为 20Hz、30Hz 时, 重复完成上述要求, 并从频域解释产生

上述现象的原因, 定性分析, 也可通过画出信号的频谱进行分析。

解:

·对 $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ 用采样频率10Hz进行周期采样, 画出 $t=0\sim 1$ 的采样信号(离散)

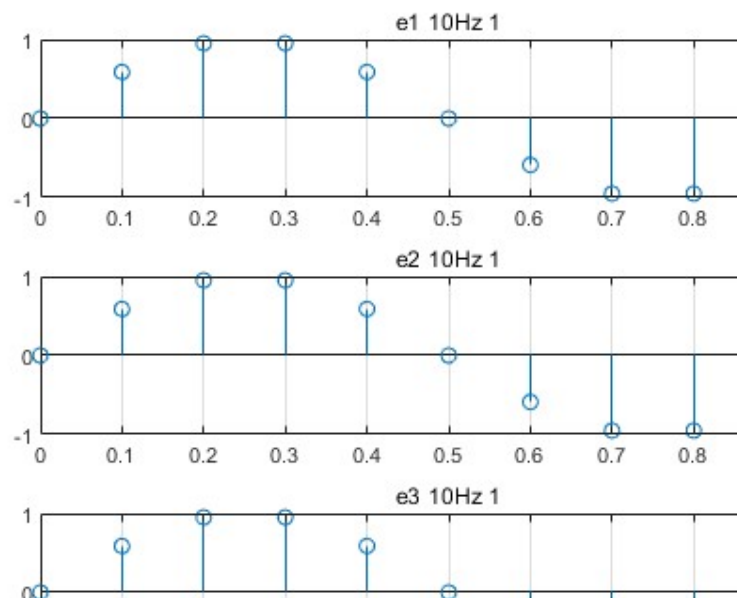
```
%e1 10Hz
f=1;fs=10;%f信号频率, fs信号采样频率

t=0:1/fs:1;
e1=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,1);
stem(t,e1);grid on
```

```

title('e1 10Hz 1');
%e2 10Hz
f=9;fs=10;
t=0:1/fs:1;
e2=sin(2*pi*f*t+pi);
subplot(3,1,2);
stem(t,e2);grid on
title('e2 10Hz 1');
%e3 10Hz
f=11;fs=10;
t=0:1/fs:1;
e3=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,3);
stem(t,e3);grid on
title('e3 10Hz 1');

```



·对e1、e2、e3用采样频率20Hz进行周期采样，画出t=0~1的采样信号（离散）

```

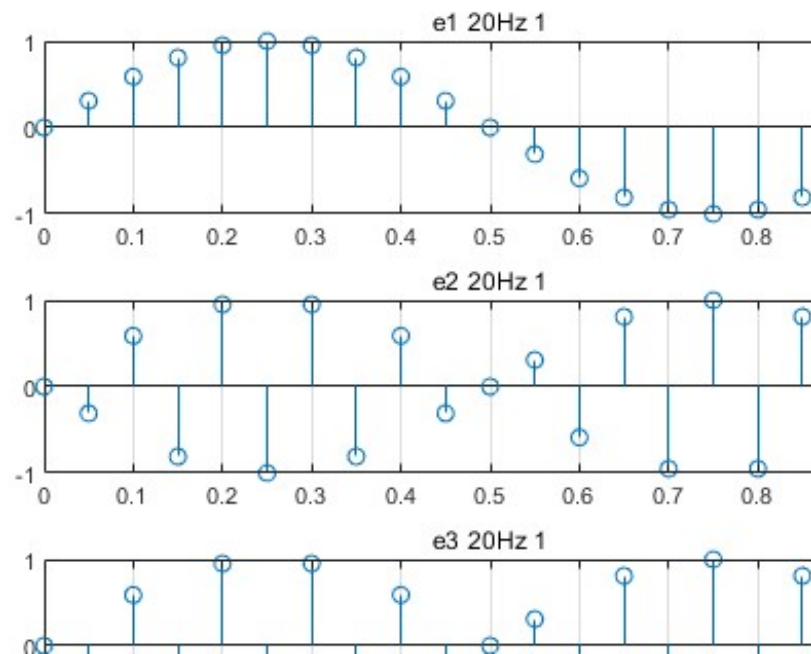
%e1 20Hz
figure(2);
f=1;fs=20;
t=0:1/fs:1;
e1=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,1);
stem(t,e1);grid on
title('e1 20Hz 1');
%e2 20Hz
f=9;fs=20;

```

```

t=0:1/fs:1;
e2=sin(2*pi*f*t+pi);
subplot(3,1,2);
stem(t,e2);grid on
title('e2 20Hz 1');
%e3 20Hz
f=11;fs=20;
t=0:1/fs:1;
e3=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,3);
stem(t,e3);grid on
title('e3 20Hz 1');

```



·对e1、e2、e3用采样频率30Hz进行周期采样，画出t=0~1的采样信号（离散）

```

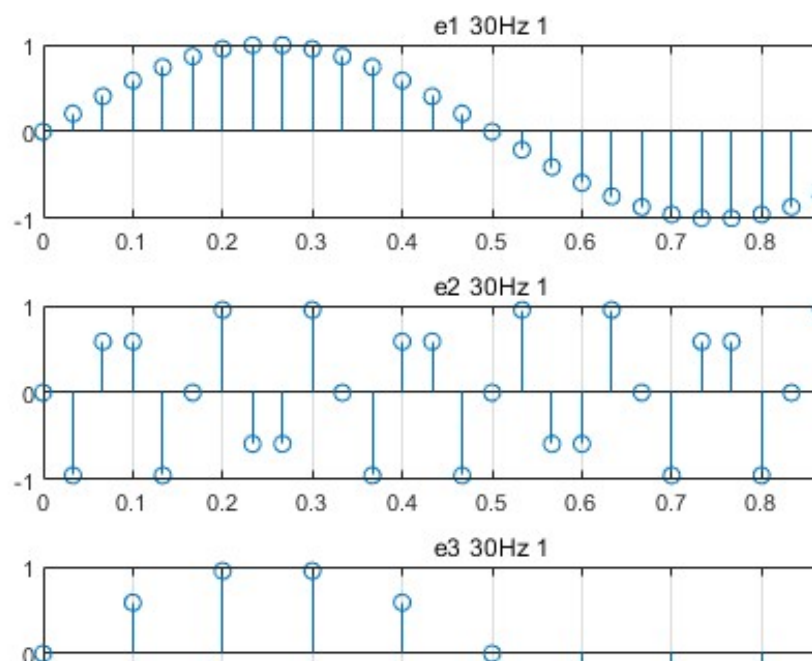
%e1 30Hz
figure(3);
f=1;fs=30;
t=0:1/fs:1;
e1=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,1);
stem(t,e1);grid on
title('e1 30Hz 1');
%e2 30Hz
f=9;fs=30;
t=0:1/fs:1;

```

```

e2=sin(2*pi*f*t+pi);
subplot(3,1,2);
stem(t,e2);grid on
title('e2 30Hz 1');
%e3 30Hz
f=11;fs=10;
t=0:1/fs:1;
e3=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,3);
stem(t,e3);grid on
title('e3 30Hz 1');

```



·对e1、e2、e3用200Hz进行采样以得到比较接近的连续函数

```

%e1 200Hz
figure(4);
f=1;fs=200;
t=0:1/fs:1;
e1=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,1);
plot(t,e1);grid on
title('e1 200Hz 1');

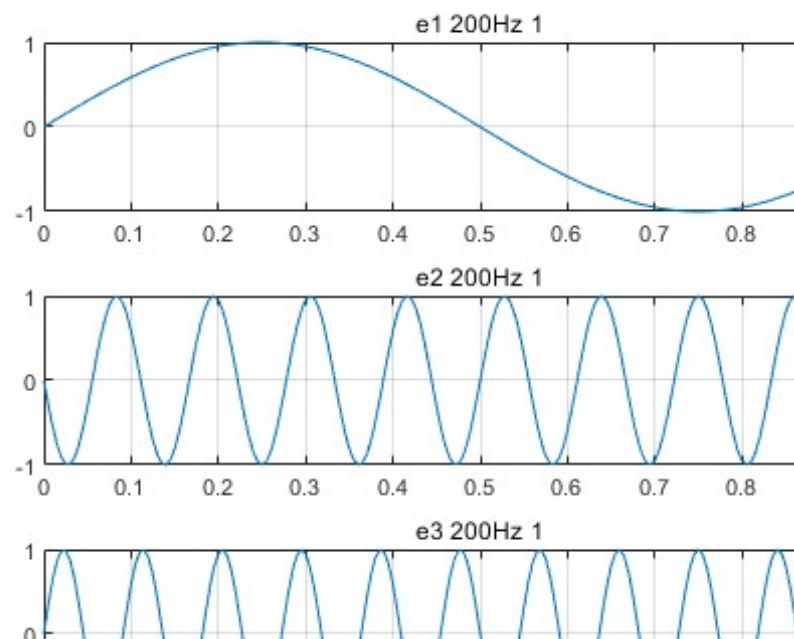
%e2 200Hz
f=9;fs=200;
t=0:1/fs:1;

```

```
e2=sin(2*pi*f*t+pi);
subplot(3,1,2);
plot(t,e2);grid on
title('e2 200Hz 1');
```

```
%e3 200Hz
```

```
f=11;fs=200;
t=0:1/fs:1;
e3=sin(2*pi*f*t);
subplot(3,1,3);
plot(t,e3);grid on
title('e3 200Hz 1');
```



### • 理论依据

采样定理: 在进行模拟/数字信号的转换过程中, 当采样频率 $f_s$  max大于信号中最高频率 $f_{\max}$ 的2倍时 ( $f_s \cdot \max > 2f_{\max}$ ), 采样之后的数字信号完整地保留了原始信号中的信息, 一般实际应用中保证采样频率为信号最高频率的2.56~4倍; 采样定理又称奈奎斯特定理。

### • 现象及结论

对比200Hz采样得到的连续信号图像来看

对于e1, 三种采样信号都能满足对于还原度的要求, 因此在三种采样频率下, e1的离散信号都与连续信号相差无几;

对于e2, 10Hz的采样频率与连续信号相差较多, 通过采样定理也可得出 $10 < 2 \times 9$ , 20Hz略大于 $2 \times 9$ , 30Hz采样频率则能够比较好的还原信号图像;

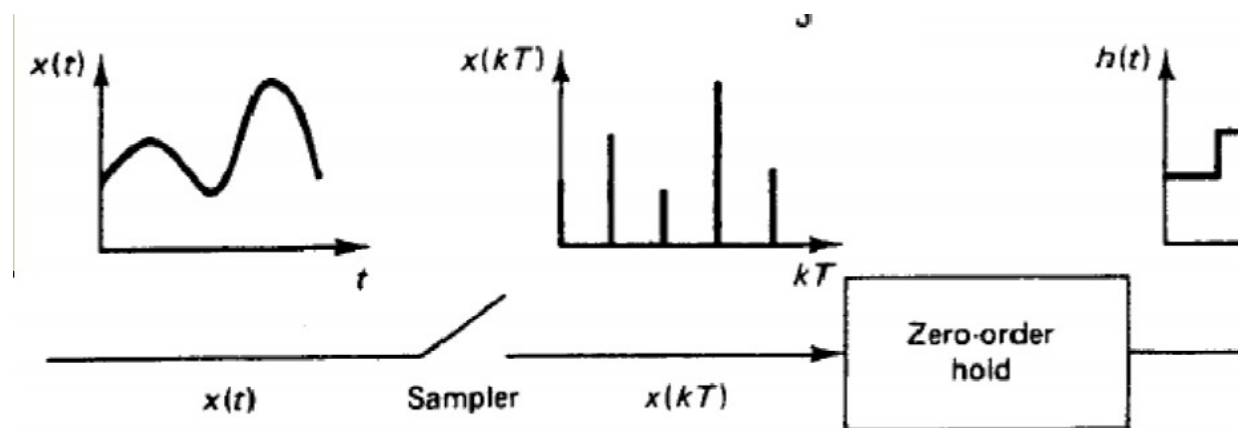
对于e3, 10Hz和20Hz都不能满足采样信号的要求, 30Hz略大于 $2 \times 11$ , 因此勉强满足信号采样频率要求。

结论: 根据采样定理, 采样频率需要大于信号最高频率两倍, 而采样频率越高, 对原始信号的还原度越好。

## 2. 零阶保持器

**题：**试画出零阶保持器的幅值谱和相位谱，和已知的学习结果比较，并进行分析（采样频率 10Hz，请计算出 0 频率处的幅值谱）。

**解：**零阶保持器的作用是在信号传递过程中，把第 $nT$ 时刻的采样信号值一直保持到第 $(n+1)T$ 时刻的前一瞬时，把第 $(n+1)T$ 时刻的采样值一直保持到 $(n+2)T$ 时刻，依次类推，从而把一个脉冲序列变成一个连续的阶梯信号。因为在每一个采样区间内连续的阶梯信号的值均为常值，亦即其一阶导数为零，故称为零阶保持器



零阶保持器的传递函数：

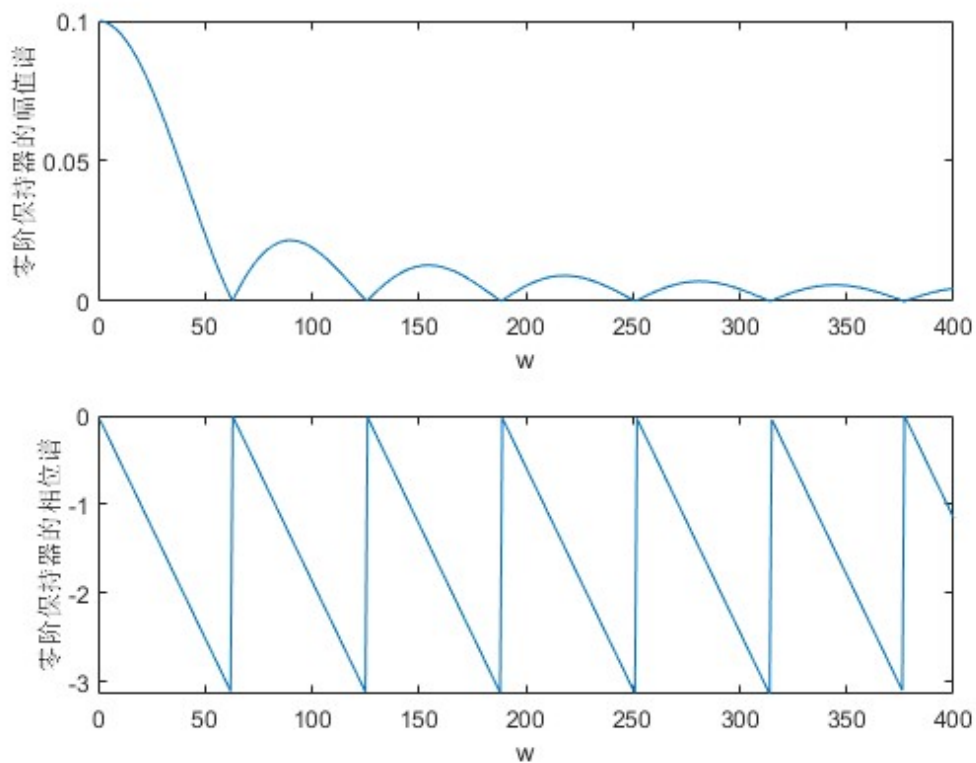
$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$G_h(w) = \frac{1 - e^{-jwT}}{jw}$$

代码：

```
fs = 10;
w = 0:400;
T = 1/fs;
g = (1-exp(-T*1i*w))./(1i*w);
% 幅值谱
subplot(2, 1, 1);
plot(w, abs(g));
ylabel('零阶保持器的幅值谱');
xlabel('w');
% 相位谱
subplot(2, 1, 2);
```

```
plot(w, angle(g));
ylabel('零阶保持器的相位谱');
xlabel('w');
```



结论：

零阶保持器的幅值随频率 $w$ 的增大而衰减；零阶保持器存在相位滞后。

零阶保持器具有低通滤波特性，还可以允许部分高频分量通过；零阶保持器结构比较简单。

零阶保持器的引入的话，可能会导致系统稳定性下降。

### 3. 采样及零阶保持

题：

一周期信号  $e_1(t) = \sin(2\pi t)$  用采样频率 10Hz 进行周期采样，后通过零阶保持器，试画出

a 周期信号  $e_1(t) = \sin(2\pi t)$  的幅值谱；

b 周期信号  $e_1(t) = \sin(2\pi t)$  被周期采样后，离散信号的幅值谱（注意离散信号频谱的幅值）



c 通过ZOH后输出信号的幅值谱和相位谱。（信号经过传递函数；预估一下幅值谱什么样子？）

d 步骤 c 输出信号频谱中前5个非零频率分量对应的时间信号，并画出5个时间域信号求和后的信号。

在同一张图上画出：采样信号  $e_1(kT) = \sin(2\pi kT)$ 、 $T = 0.1s$ 、 $K \geq 0$  经过零阶保持器的输出信号（stair命令），并与前述求和信号进行对比。

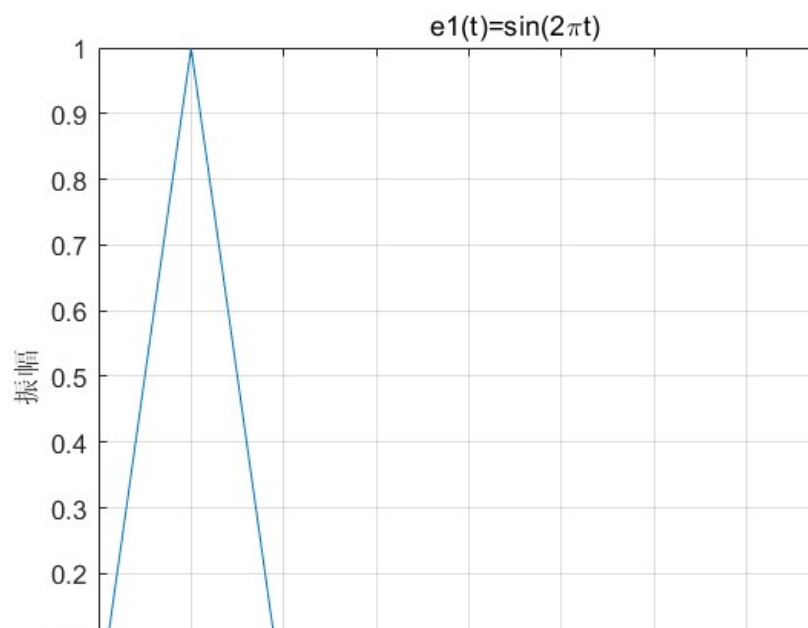
解：

a

代码：

```
fs = 10; %采样频率为10Hz
t = 0:1/fs:0.9; %采样时间为一个周期
e1 = sin(2*pi*t); %信号
N = size(e1,2); %数据点数 2对应矩阵的列数->10
y1 = fft(e1,N); %信号的快速傅里叶变换
f1 = (0:N-1)*fs/N; %频率序列
mag1 = abs(y1)*2/N; %求取幅值 abs() 计算幅值 求取Fourier变换的振幅, 其中*2/N转变为真实幅值
plot(f1,mag1);
xlabel('频率/Hz');
ylabel('振幅');
grid on;
title('e1(t)=sin(2\pit)'); %绘出幅频图
```

运行结果：



分析：

① **fft(X,N)** is the N-point fft, padded with zeros if X has less than N points and truncated if it has more.

X: 采样过后的信号 N: 采样点数量

fft() 函数输出的结果为每个采样点对应的幅值，第一个值对应的是直流分量的振幅，第二个值对应第一个采样点，第三个值对应第二个采样点... 第n个值对应第n-1个采样点。

```
y1 = fft(e1,N); %信号的快速傅里叶变换
```

② 求取真实幅值时，需要在fft() 函数输出幅值的基础上进行  $\times 2 \div l$  的运算

$\times 2$ 原因如下：

现有一周期函数的傅里叶级数：

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2) = F_0 + F_{-1} e^{j\omega_1 t} + F_1 e^{j\omega_1 t} + F_{-2} e^{j2\omega_1 t} + F_2 e^{j2\omega_1 t} + \dots$$

函数相应的分量幅度： $F_0 = c_0$ 、 $F_1 = \frac{c_1}{2} e^{j\varphi_1}$ 、 $F_{-1} = \frac{c_1}{2} e^{-j\varphi_1}$ 、 $F_2 = \frac{c_2}{2} e^{j\varphi_2}$ 、 $F_{-2} = \frac{c_2}{2} e^{-j\varphi_2}$

$\div N$ 原因如下：

由Fourier变换对：

$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j) \omega_N^{(j-k)} \Rightarrow x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(k) \omega_N^{-(j-k)} \quad \text{where } \omega_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$$

可知fft() 函数直接结算得到的  $X(k)$  并不是频谱幅值，在  $x(j)$  的Fourier级数中，谐波分量

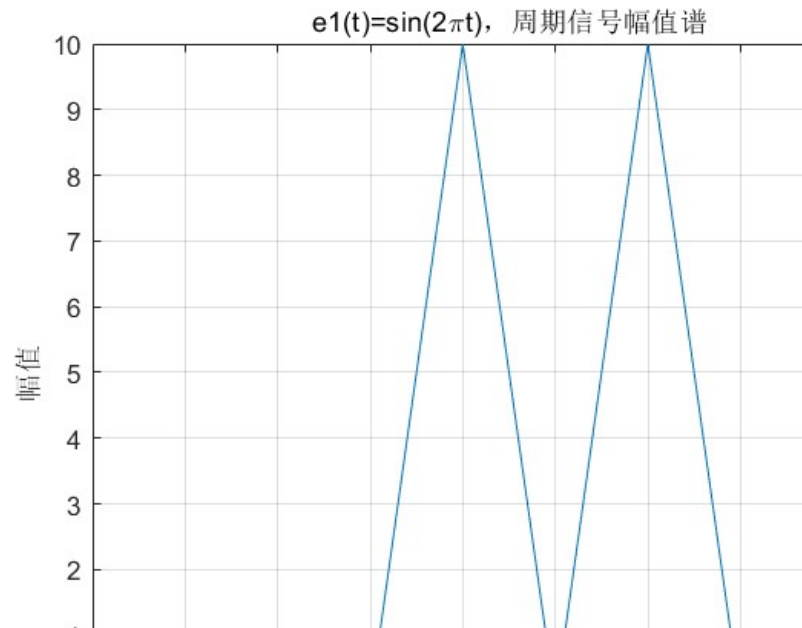
$\omega_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$  对应的幅值为  $\frac{X(k)}{N}$ 。

```
mag1 = abs(y1)*2/N; %求取幅值 abs() 计算幅值 求取Fourier变换的振幅, 其中*2/N转变为真实幅值
```

代码：

```
y2 = fftshift(y1); %将fft结果以fs/2为中心左右互换 将零频点移到频谱中间
f2 = (0:N-1)*fs/N-fs/2; %将真实频率减去fs/2
mag2 = abs(y2)*2/N*fs; %乘1/T
plot(f2,mag2);
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅值');
grid on;
title('e1(t)=sin(2\pit), 周期信号幅值谱')
```

运行结果：



分析:

① 为什么要使用fftshift()函数?

因为实信号以 $f_s$ 为采样速率的信号在  $s/2$ 处混叠, 所以实信号fft()的结果中前半部分对应 $[0, f_s/2]$ , 后半部分对应 $[-f_s/2, 0]$ , 大于 $f_s/2$ 的部分的频谱实际上是实信号的负频率加 $f_s$ 的结果, 故要得到正确的结果, 只需将视在频率减去 $f_s$ 即可得到频谱对应的真实负频率, 如果能让实信号fft的结果与 $[-f_s/2, f_s/2]$ 对应, 则要fft()后fftshift()一下即可。

`y2 = fftshift(y1);` %将fft结果以 $f_s/2$ 为中心左右互换 将零频点移到频谱中间

② 为什么在原有幅值的基础上再乘以 $1/T$ ?

原因见下图推导:

设输入连续信号： $x_a(t)$

采样输出信号为： $x_s(t)$

把采样的过程看作一段周期为 $T$ 、宽度为 $\tau$ 的矩形脉冲载  
显然， $\tau$ 越窄，采样越精，当 $\tau \ll T$ 时，采样脉冲接近 $\delta$

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

那么理想采样为： $x_s(t) = x_a(t)s(t)$

对上述几个信号作傅里叶变换：

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\omega t} dt$$

对于 $x_s(t) = x_a(t)s(t)$ ，由频域卷积定理：

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\omega) * S(j\omega) \text{*****} (1)$$

由于 $s(t)$ 是一个周期函数，可以表示为傅里叶级数

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_s t}, \text{ 其中: } \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{那么: } a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\text{所以: } s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$

$$\Rightarrow S(j\omega) = F[s(t)] = F\left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[e^{jk\omega_s t}]$$

由于 $F[e^{jk\omega_s t}] = 2\pi\delta(\omega - k\omega_s)$

$$S(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

带入(1)式得到：

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) * X_a(j\omega) \right]$$

```
mag2 = abs(y2)*2/N*fs; %乘1/T
```

b

代码：

```
y3 = [abs(y1), abs(y1), abs(y1)]*fs; %周期延拓至0: 1: 29 乘1/T
```

```
mag3 = y3*2/N;
```

```
plot(0:1:29,mag3);
```

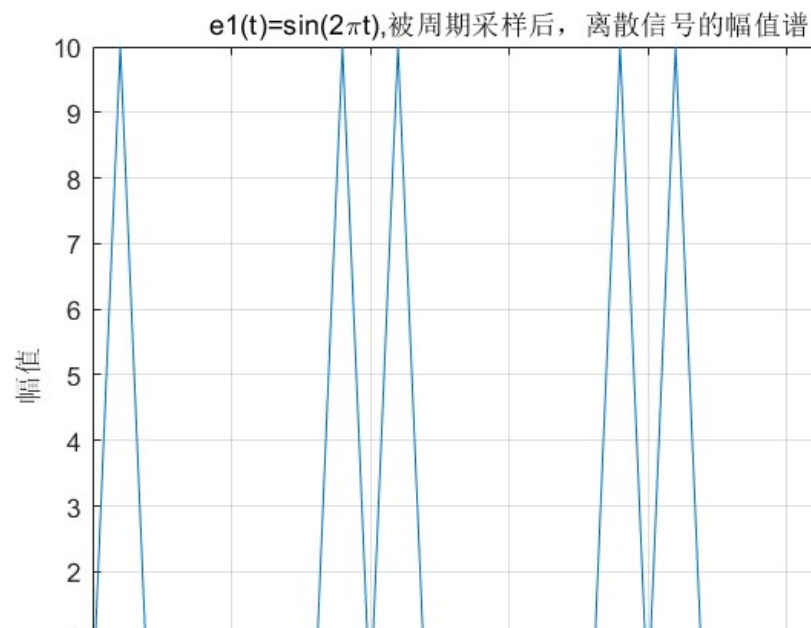
```
xlabel('频率/Hz');
```

```
ylabel('幅值');
```

```
grid on;
```

```
title('e1(t)=sin(2\pit),被周期采样后,离散信号的幅值谱')
```

运行结果:



分析:

① 周期延拓:

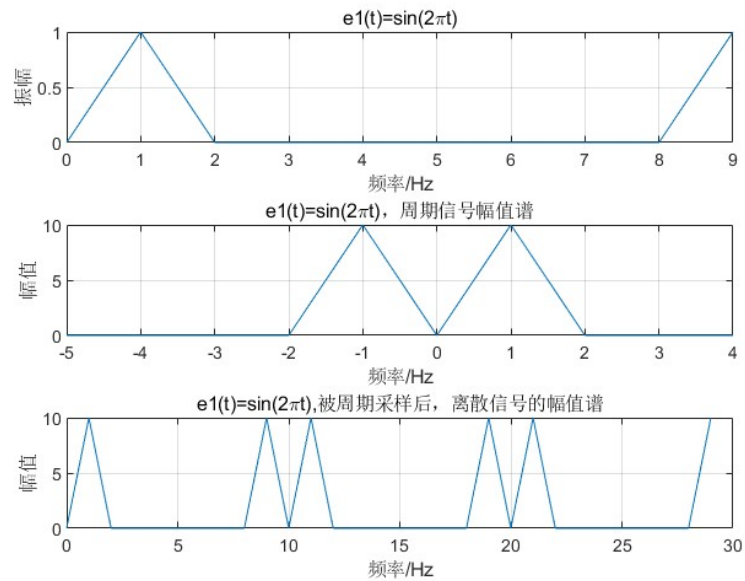
每一个 $\text{abs}(y1)$ 都代表一个周期的振幅值,每个周期的采样点对应的幅值情况相同,因此将一个周期的采样点复制成三份延拓成一个由三个周期采样点组成的采样集。

```
y3 = [abs(y1), abs(y1), abs(y1)]*fs; %周期延拓至0: 1: 29 乘1/T
```

② 奈奎斯特采样频率:

系统的频率为1Hz,根据奈奎斯特采样频率公式可得 $f_N > 2F$ ,根据仿真图像也可得出此结论,两者一致。

ab两题所绘制图像放置到一张图中进行比较,如下图:



C

代码:

```
fs = 10; %采样频率为 10Hz

t = 0:1/fs:0.9; %采样时间为一个周期

e1 = sin(2*pi*t); %信号

N = size(e1,2); %数据点数 2 对应矩阵的列数->10

y1 = fft(e1,N); %信号的快速傅里叶变换

f1 = (0:N-1)*fs/N; %频率序列

y3 = [y1,y1,y1]; %周期延拓至 0: 1: 29 乘 1/T

mag3 = abs(y3)*2/N;
plot(0:N3-1,mag3);

fs=10;T=1/fs;%采样周期

f3=29;%29Hz

N3=30;fi3=(0:N3-1).*2*pi;%输入频率序列

yzoh = (1-exp(-T.*1i.*fi3))./(1i.*fi3);%零阶保持器

subplot(3,1,1);

plot(0:N3-1,abs(yzoh))%画出图像
```

```

Youtput=yzoh.*y3*2;
subplot(3,1,2);

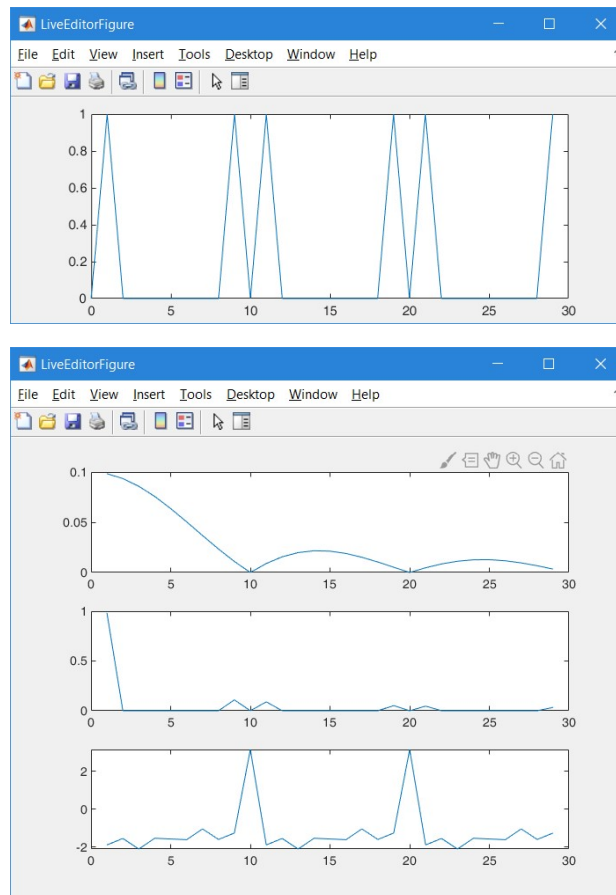
plot(0:N3-1,abs(Youtput));%幅值谱

subplot(3,1,3);

plot(0:N3-1,angle(Youtput));%相位谱

```

运行结果：



分析：

1，由于傅里叶变换可以表示为：

$$F(\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-jn\omega T_s}$$

所以 `fft` 导出的幅值如要代表真实幅值则需要  $/N$ 。又因为导出的幅值包含正负频域的两个分量，所以需要  $*2$ 。

2，对于 ZOH 幅值谱的求取，因为傅里叶变换与拉普拉斯区别在于将积分项替换

$e^{-j\omega T} = e^{-j2\pi f T} \Rightarrow e^{-sT}$  所以计算 ZOH 的频谱可以将  $0:1:29\text{Hz}$  带入

ZOH 的传递函数为： $G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$

3, 对于经过 ZOH 后没有对赋值进行/N,是因为根据书本, 经过 ZOH 输出的信号的拉普拉斯变换为  $H_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)$ , 其中没有\*Ts

d

代码:

```
clf;

kNz=find(abs(Youtput)>=0.01&abs(Youtput)<=100);%找到非零元素

kNz5=kNz(1:5)%取前五个序号

mag=abs(Youtput(kNz5));%求取前五个信号的幅值

ang=angle(Youtput(kNz5));%求取前五个信号的相位

%绘制 5 个分量信号

for i=1:5
    t=0:1/100:1;
    eval(['sig',num2str(i),'=mag(',num2str(i),')*cos(2*pi*(kNz5(',num2str(i),')-1)*t+ang(',num2str(i),'))');]);
    eval(['subplot(5,1,',num2str(i),');']);
    eval(['plot(t,sig',num2str(i),')']);
    eval(['title(',num2str(i),')']);
end
clf;
sig=sig1+sig2+sig3+sig4+sig5;

%求和信号

plot(t,sig)

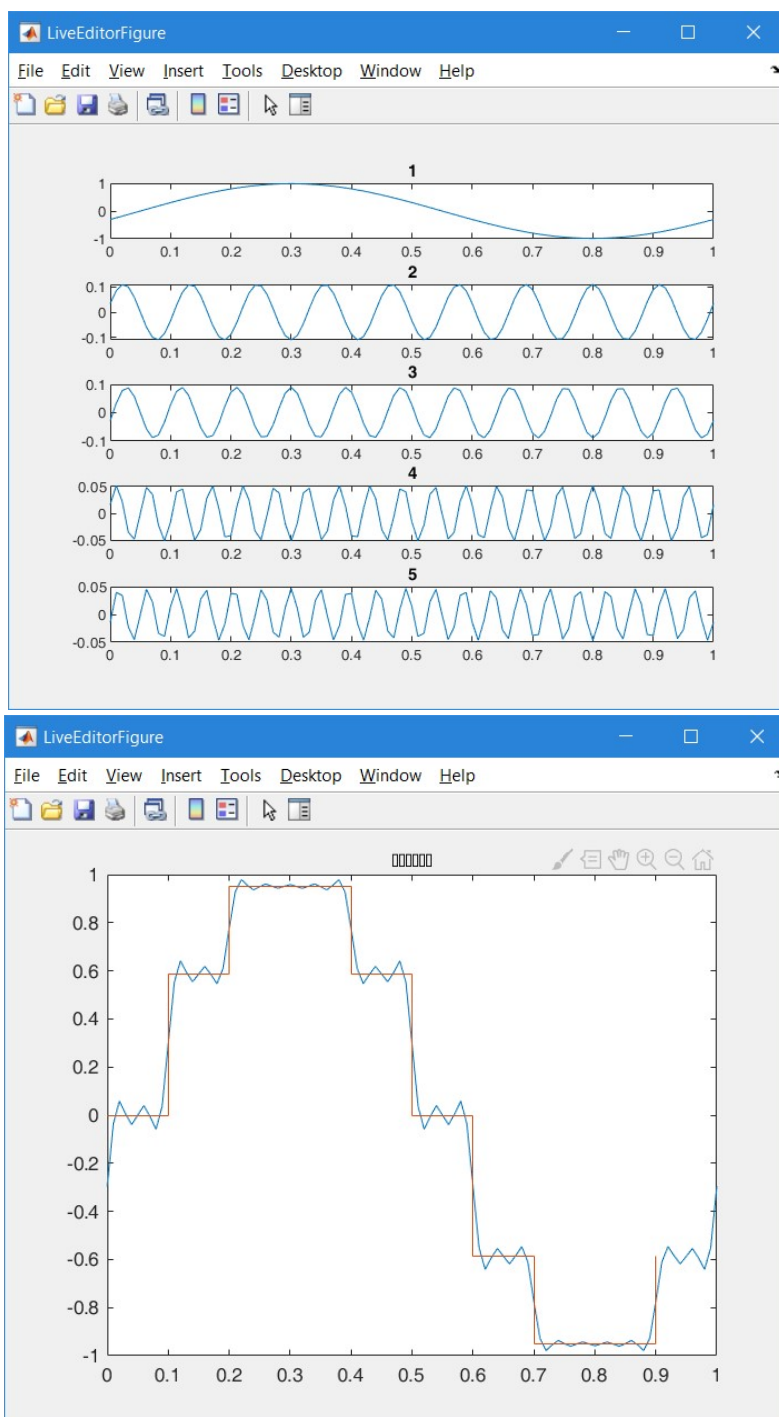
title("求和后的信号");

hold on;
stairs(0:0.1:0.9,e1);
```

运行结果:

kNz5 = 1x5					
	1	2	3	4	5
1	2	10	12	20	22





分析：

- 1, 对于筛选出的大于零的幅值, 根据  $sig_n = Mag_n * \cos(2\pi f_n * i)$ , 绘制前五个幅值所对应的时域信号分量
- 2, 寻找非零元素的 `find(abs(Youtput)>=0.01)` 函数, 是因为 matlab 在计算中, 虽然某些数值应为零, 但仍会有非常小的结果, 这是用来过滤选取的阈值
- 3, Eval 函数可以将输入的向量中的字符串当作代码执行, 这样可以使用 for 循环执行仅变量名等发生变化的重复指令

## 五、心得体会

通过此次仿真实验，我们小组对于采样定理和零阶保持有了更为全面的认识，对于采样的过程和奈奎斯特频率更深入的理解。初步掌握了ZOH的传递函数表达关系及幅值频率特性。小组仿真实验对于我们的动手实践能力和小组分工合作的能力也是一次锻炼的机会。

## 六、附件清单

类别	数量	说明
仿真实验报告	2	本次小组仿真的实验报告.docx和.pdf各一份
人员分工表	1	成员分工情况
汇报实时脚本	4	2.3.1、2.3.2、2.3.3ab题和2.3.3cd题.mlx文件各一份
汇报实时脚本pdf版	4	2.3.1、2.3.2、2.3.3ab题和2.3.3cd题.pdf文件各一份