同濟大學 控制科学与工程系

计算机控制系统设计与应用 课程

第一次仿真报告

实验名称	模型及动态响应特性
开课学期	2019–2020 学年第2 学期
实验学生	黄定梁 1751700
	姚宇璇 1750631
	叶哲惟 1751732
	方哲全 1751648
任课教师	赵霞
实验日期	2020/4/2

一、实验目的

1.掌握离散时间控制系统各种模型的表示及转换关系，熟悉z变换的方法和z域的相关知识，如差分方程转换成有理分式表示的脉冲传递函数，零极点形式的脉冲传递函数，状态空间表示形式等。

2.掌握因式分解逆z变换法，熟悉逆z变换的基本方法。

3.初步了解闭环系统极点位于z平面不同位置时，所对应的单位冲激响应形式。熟悉z域极点的相关性质。

4.熟悉Matlab在离散时间系统中的应用。

二、实验设备

Matlab R2018a

三、人员分工

小组成员	工作内容
黄定梁1751700	完成仿真1.3.2和思考题、撰写相应文档、材料整合
姚宇璇1750631	完成仿真1.3.3、撰写相应文档
叶哲惟1751732	完成仿真1.3.1、撰写相应文档
方哲全1751648	制作PPT、汇报

四、实验内容

1.模型表示及转换

题：

一离散时间系统的输入信号u和输出信号y之间的差分方程描述：

$$y(k+3)-2.7y(k+2)+2.42y(k+1)-0.72y(k)=0.1u(k+2)+0.03u(k+1)-0.07u(k)$$

a 计算该系统输入u与输出y间的z传递函数(零初始条件)——有理分式形式；

b 将此传递函数表示成零极点形式；

c 在z平面中画出上述z传递函数的零极点，同时画出一个单位圆；

d 将此系统描述成状态空间形式，并求其特征根、特征多项式。

解：

a：u 与 y 间的 z 传递函数：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{0.1s^2+0.03s-0.07}{s^3-2.7s^2+2.42s-0.72}$$

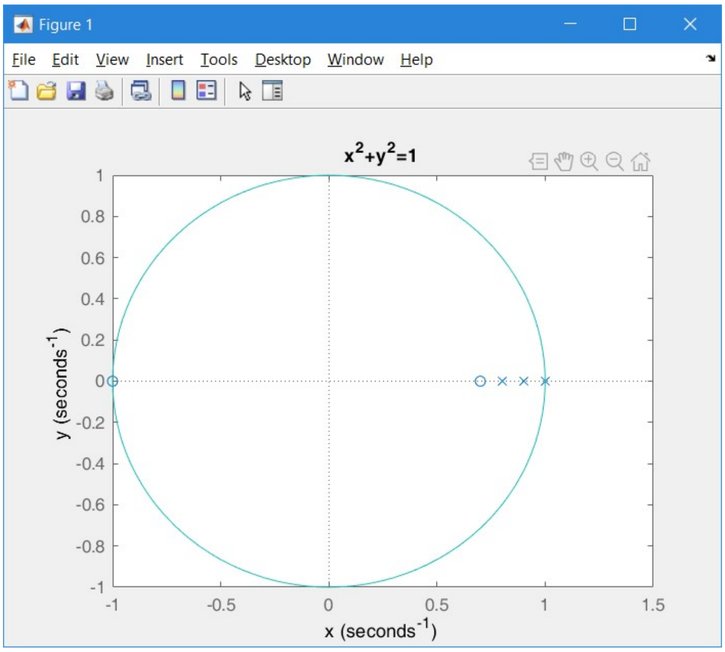
b：零极点形式的传递函数：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{0.1(s+1)(s-0.7)}{(s-1)(s-0.9)(s-0.8)}$$

C：在 z 平面中画出上述 z 传递函数的零极点，同时画出一个单位圆；

将此系统描述成状态空间形式，并求其特征根、特征多项式。

零极点图：



状态空间形式：

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.4359 & 0.3162\\ 0 & 0.9 & 1.378\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0.5\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0.06325 & 0.2757 & 0.2\end{bmatrix}x$$

特征根：

```
1.0000
0.9000
0.8000
```

特征方程

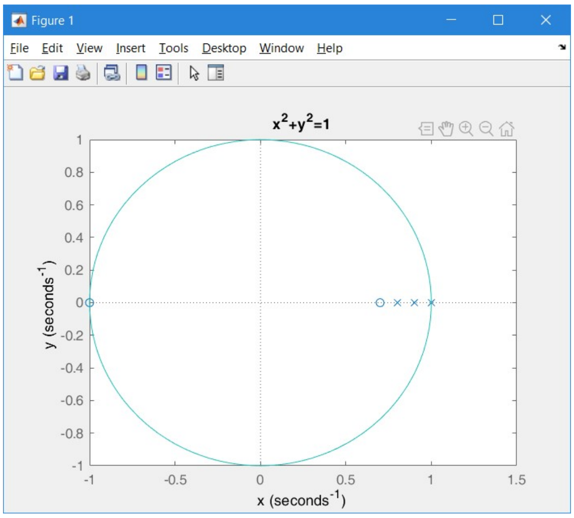
$$z^3-2.7z^2+2.42z-0.72=0$$

代码：

```
%a计算该系统输入 u 与输出 y 间的 z 传递函数(零初始条件)——有理分式形式;
>> num=[0.1 0.03 -0.07];den=[1 -2.7 2.42 -0.72];
>> sys=tf(num,den)

sys =

    0.1 s^2 + 0.03 s - 0.07
  ----------------------------
  s^3 - 2.7 s^2 + 2.42 s - 0.72

Continuous-time transfer function.
%b 将此传递函数表示成零极点形式;
>> sys1=zpk(sys)
```

```
sys1 =

    0.1 (s+1) (s-0.7)
  ---------------------
  (s-1) (s-0.9) (s-0.8)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
%c 在 z 平面中画出上述 z 传递函数的零极点，同时画出一个单位圆；
>> pzmap(sys)
```




```
%d 将此系统描述成状态空间形式，并求其特征根、特征多项式。
>> gss=ss(sys1)
```

```
gss =

  A =
             x1      x2      x3
   x1       0.8  0.4359  0.3162
   x2         0     0.9   1.378
   x3         0       0       1

  B =
        u1
   x1    0
   x2    0
   x3  0.5

  C =
              x1        x2        x3
   y1    0.06325    0.2757       0.2
```

```
  D =
 
       u1
   y1   0
 
Sample time: unspecified
Discrete-time state-space model.
>> eigen=eig(sys)

eigen =

    1.0000
    0.9000
    0.8000

>> P=poly(eigen)

P =

    1.0000   -2.7000    2.4200   -0.7200

>> z=poly2str(P,'z')

z =

    '   z^3 - 2.7 z^2 + 2.42 z - 0.72'
```

2.部分因式逆z变换

题：

线性时不变系统的传递函数：

$$X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

a 用residue命令对 X(z)和X(z)/z分别进行部分因式展开；

b 分别求逆z变换，比较两个x(k)是否相同；

c 总结原因。

解：

a.

X(z)部分因式展开结果：

$$X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}=\frac{20}{z-2}-\frac{10}{z-1}$$

X(z)/z 部分因式展开结果：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{10}{z-2}-\frac{10}{z-1}$$

b.

由 X(z)部分因式展开结果求X(z)的逆z变换：

$$x(k)=\begin{cases}0,k\le -1\\ 20\cdot 2^{k-1}-10,k\ge 0\end{cases}=\{\ldots,0,0,10,30,\ldots\}$$

由X(z)/z部分因式展开结果求X(z)的逆z变换：

$$x(k)=\begin{cases}0,k\le -1\\ 10\cdot 2^{k}-10,k\ge 0\end{cases}=\{\ldots,0,0,10,30,\ldots\}$$

两种方法求出的$x(k)$是一样的。

c.

因为无论是直接对于 $X(z)$ 形式进行因式分解，还是对 $\frac{X(z)}{z}$ 进行因式分解，分解后的结果并没有改变传递函数的极点，而 $\frac{X(z)}{z}$ 将 z 乘回等式右边之后，传递函数和原始形式的零极点保持一致。两者仅是同一个传递函数的不同部分因式展开形式，因此其对应的逆 z 变换应该相同。

代码：

```
%1.3.2
%X(z) parameters
a1 = [10 0]; %num
b1 = [1 -3 2]; %den
%X(z)/z parameters
a2 = [10]; %num
b2 = [1 -3 2]; %den

[r1,p1,k1] = residue(a1,b1);
sprintf('r1:%.1f\n',r1);
sprintf('p1:%.1f\n',p1);
sprintf('k1:%.1f\n',k1);
[r2,p2,k2] = residue(a2,b2);
sprintf('r2:%.1f\n',r1);
sprintf('p2:%.1f\n',p1);
sprintf('k2:%.1f\n',k1);

syms z k;

%X(z) invz
sys1 = r1(1)/(z-p1(1)) + r1(2)/(z-p1(2));
xk1 = iztrans(sys1,k);
%X(z)/z invz
sys2 = (r2(1)*z)/(z-p2(1)) + (r2(2)*z)/(z-p2(2));
xk2 = iztrans(sys2,k);
```

仿真结果：

```
[r1,p1,k1]

ans =

    20     2
   -10     1

[r2,p2,k2]

ans =

    10     2
   -10     1

xk1 =

10*2^k - 10

xk2 =

10*2^k - 10
```

3. 极点与响应

题：

线性时不变系统的传递函数，单位采样周期（即 T=1）

$$G(z)=\frac{2z^2-2.2z+0.56}{z^3-0.6728z^2+0.0463z+0.4860}$$

a. 用 residue 命令对 G(z)/z 进行部分因式展开，其中留数 A 和极点 p 采用极坐标形式表示(why?)，并在 z 平面中标出，同时画一个单位圆；

b. 为因式分解后的 G(z)的每一个独立因式输入单位冲激信号，画图表示由各个因式中的极点所引起的时间响应；

c. 通过改变 b 中极点位置（如极点为单极点 0、0.6、0.9、1、1.2、-0.6、-0.9、-1、-1.2 时，极点为共轭复极点 0.8±0.3i、-0.8±0.3i、0.3±0.8i、-0.3±0.8i、0.8±0.6i，极点为两重极点 0 等情况），总结位于 z 平面不同位置的极点，其对应的时间响应曲线的趋势和形状；

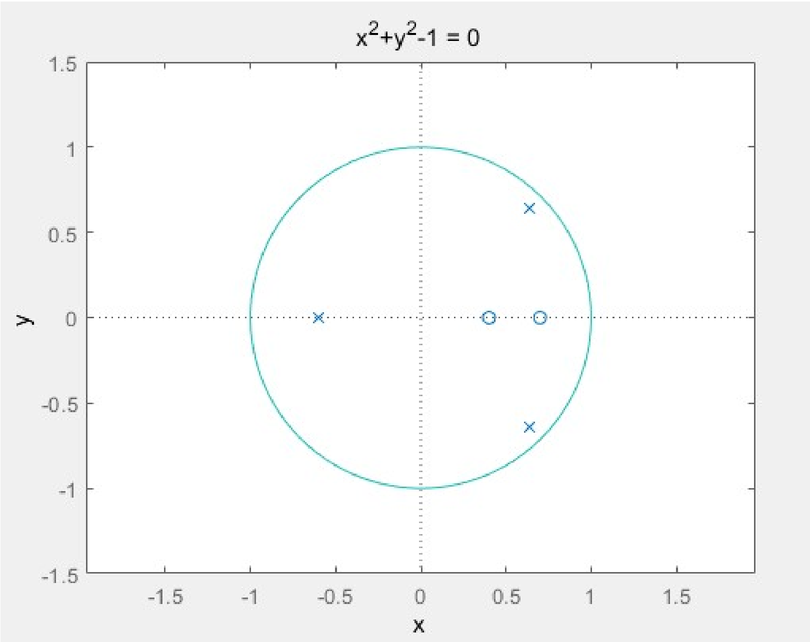
d. 当输入单位冲激信号时，画图表示系统的输出响应。比较各个极点冲激响应之和与系统的冲激响应，并说明原因。

思考：带有留数 r 的实极点 p，单位冲激响应 rpk，k≥0，带有留数 r1、r2 的共轭复数极点 z1、z2，单位冲激响应是什么？从上面的仿真，再结合计算两种途 径进行验证——不同极点，分别对应响应的形式。

解：

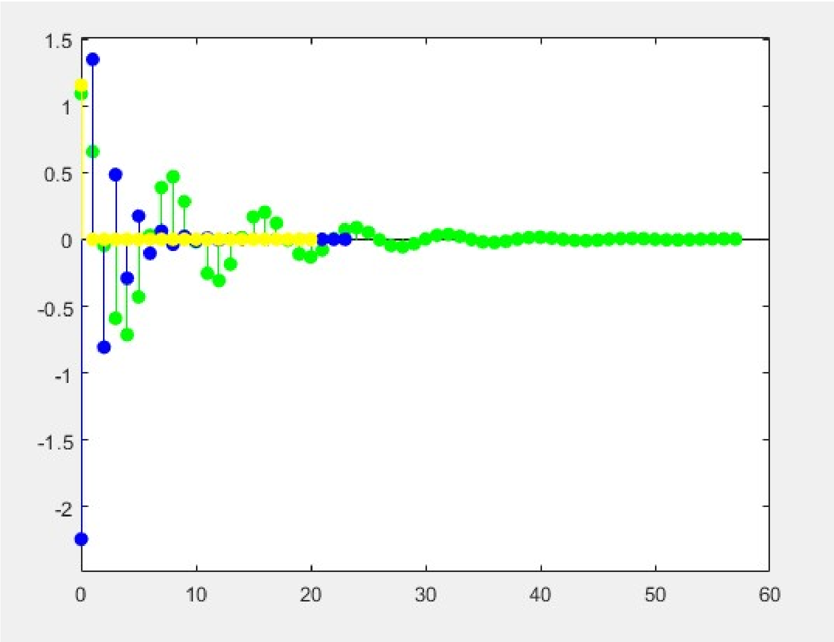
代码：

```
num=[2 -2.2 0.56];
den=[1 -0.6728 0.0463 0.4860];
T=1;
GZ=tf(num,den,T);
% a 用 residue 命令对 G(z)/z 进行部分因式展开，其中留数 A 和极点 p 采用极
% 坐标形式表示(why?)，并在 z 平面中标出，同时画一个单位圆；
[r,p,k]=residue(num,[den,0]);
rr=abs(r);
thr=angle(r);
rp=abs(p);
thp=angle(p);
% syms z;
pzmap(GZ);
hold on;
ezplot x^2+y^2-1;
axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5]);
axis equal
hold off;
```



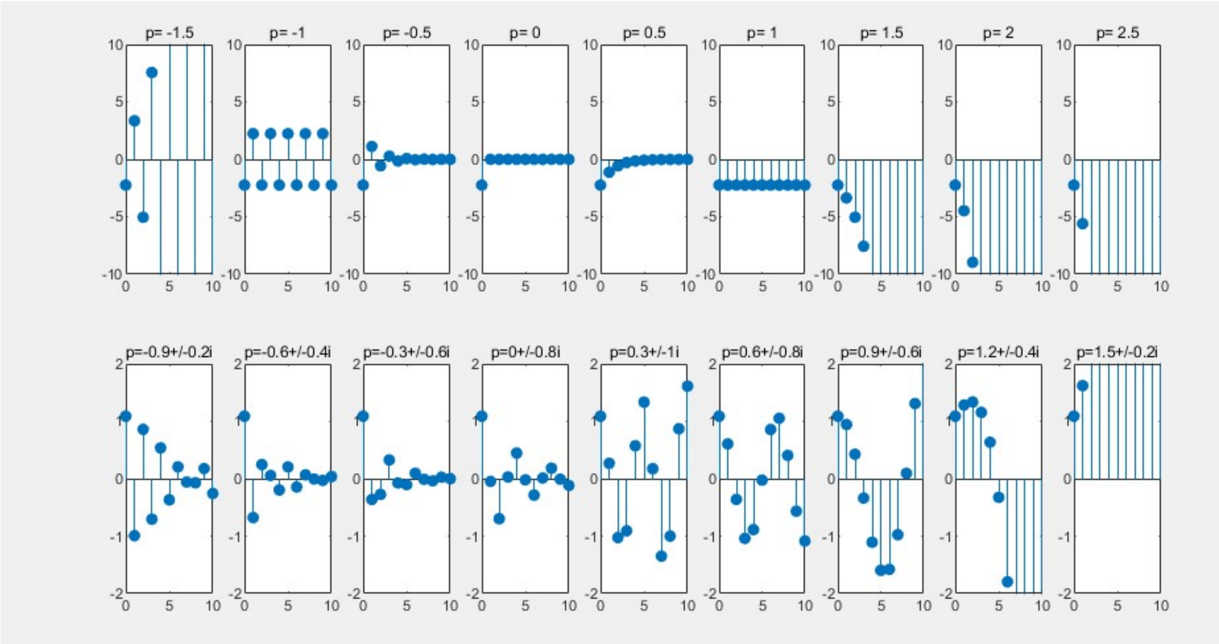

```
% b 为因式分解后的 G(z)的每一个独立因式输入单位冲激信号，画图表示由各
% 个因式中的极点所引起的时间响应；

% 复极点
sys1=tf([r(1)+r(2),-(r(1)*p(2)+r(2)*p(1)),0],[1,-(p(1)+p(2)),p(1)*p(2)],1);
[y1,k1]=impulse(sys1);
figure(2);
```

```
stem(k1,y1,'filled','g');
hold on;

% 实极点
sys2=tf([r(3),0],[1,-p(3)],1);
[y2,k2]=impulse(sys2);
stem(k2,y2,'filled','b');

sys3=tf([r(4),0],[1,-p(4)],1);
[y3,k3]=impulse(sys3);
stem(k3,y3,'filled','y');
hold off;
```

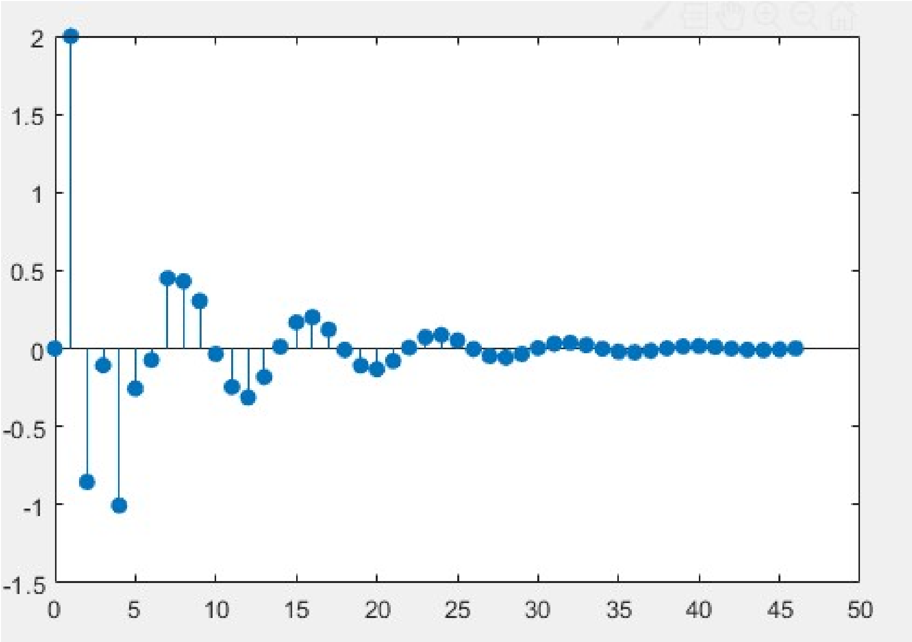



```
% c 不同极点

% 实极点
figure
for i=1:9
    p=0.5*i-2;
    subplot(2,9,i);
    sys4=tf([r(3),0],[1,-p],1);
    [y4,k4]=impulse(sys4);
    stem(k4,y4,'filled');
    axis([0,10,-10,10]);
    str=['p= ',num2str(p)];
    title(str);
end
```

```
% 复极点
b=[0.2,0.4,0.6,0.8,1,0.8,0.6,0.4,0.2];
for i=1:9
    a=0.3*i-1.2;
    p1=a+b(i)*1i;
    p2=a-b(i)*1i;
    subplot(2,9,i+9);
    sys4=tf([r(1)+r(2),-(r(1)*p2+r(2)*p1),0],[1,-(p1+p2),p1*p2],1);
    [y4,k4]=impulse(sys4);
    stem(k4,y4,'filled');
    axis([0,10,-2,2]);
    str=['p=',num2str(a),'+/-',num2str(b(i)),'i'];
    title(str);
end
```




```
% d 当输入单位冲激信号时，画图表示系统的输出响应。比较各个极点冲激响
% 应之和与系统的冲激响应，并说明原因。
figure
[y,q]=impulse(GZ);
stem(q,y,'filled');
```



问题回答：
a、更好地判断极点与零点的相对位置
c、位于z平面的极点，离原点越近，系统冲击响应速度越快。
d、各个响应之和与系统的响应相等，因为极点的作用是叠加的；由部分分式法可以看出，展开后的各式之和等于原式，也反映出极点的作用具有叠加性。
离散时间系统的冲激响应完全由其零极点决定，其中极点起最主要的作用，决定冲激响应的模式，衰减/增长的快慢以及振荡的频率；而零点只影响幅度和相位。G(z)能展开为这些极点线性叠加，每个极点都影响了冲激响应，那整个系统的冲激响应就应该是各极点的冲激响应线性叠加，再加上系统零点的影响及增益对幅值和相位的影响，最终系统的冲激响应与各极点冲激响应之和相同。

思考：带有留数 r 的实极点 p，单位冲激响应 rp^k，$k\geqslant 0$，带有留数 r1、r2 的共轭复数极点 z1、z2，单位冲激响应是什么？从上面的仿真，再结合计算两种途径进行验证——不同极点，分别对应响应的形式。
答：

单位冲激信号的z变换为 $X(z)=1$，单极点p对应的单位冲激响应的z变换为 $H(z)=\dfrac{rz}{z-p}$，由此得到带有留数r的实极点p的系统函数z变换为 $G(z)=\dfrac{rz}{z-p}$。因此带有留数r1、r2的共轭复数极点z1、z2的系统函数z变换为 $G(z)=\dfrac{r_1 z}{z-z_1}+\dfrac{r_2 z}{z-z_2}$。

①z域计算验证：

设 $z_{1,2}=ae^{\pm j\omega}, r_{1,2}=be^{\pm j\varphi}$，代入 $G(z)$ 则可做以下计算：

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{2b\left[\cos\varphi z^2 - a\cos(\omega-\varphi)z\right]}{z^2-2a\cos\omega z+a^2} \\
&= \frac{2b\left[\cos\varphi z(z-a\cos\omega)+a\cos\omega\cos\varphi z-a\cos(\omega-\varphi)z\right]}{z^2-2a\cos\omega z+a^2} \\
&= \frac{2b\left[\cos\varphi z(z-a\cos\omega)-a\sin\varphi z\sin\omega\right]}{z^2-2a\cos\omega z+a^2}
\end{aligned}
$$

对$G(z)$进行逆z变换可得系统函数的离散表达式$g(k)$为：

$$g(k)=2ba^k\left[\cos\varphi\cos(k\omega)-\sin\varphi\sin(k\omega)\right]=2ba^k\cos(k\omega+\varphi)$$

因为$H(z)=G(z)$，所以$h(k)=g(k)=2ba^k\cos(k\omega+\varphi)$，此即为带有留数 r1、r2 的共轭复数极点 z1、z2的系统对应的单位冲激响应形式。

由上式可以看出，不同极点对应的响应形式不同。

②仿真验证：

取$z_{1,2}=0.85e^{\pm j\frac{\pi}{3}}, r_{1,2}=3e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

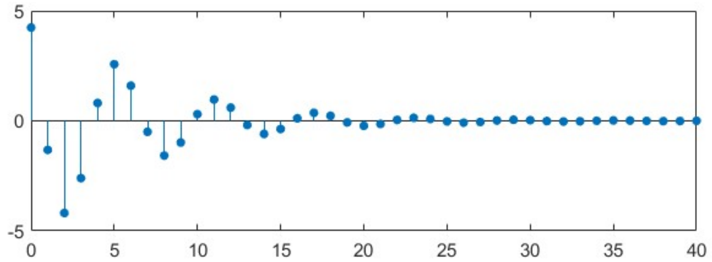
代码：

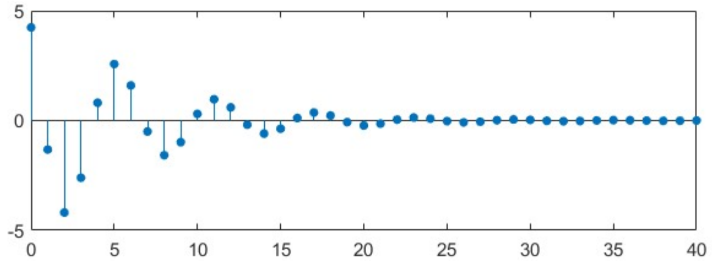
```
%思考题
%T=1
a=0.85;
w=pi/3;
b=3;
fai=pi/4;
z1=a*(cos(w)+1i*sin(w));
z2=a*(cos(w)-1i*sin(w));
r1=b*(cos(fai)+1i*sin(fai));
r2=b*(cos(fai)-1i*sin(fai));
sys1=tf([r1,0],[1,-z1],1);
sys2=tf([r2,0],[1,-z2],1);
sys=parallel(sys1,sys2);
subplot(211);
y1=impulse(sys,0:40);
stem(0:40,y1,'.','Markersize',15);
subplot(212)
k=0:40;
y2=2*b*a.^k.*cos(w*k+fai);
stem(0:40,y2,'.','Markersize',15);
```

仿真结果：

通过分别绘制变换前传递函数$G(z)$所对应的单位冲激响应离散域图像和经逆z变换过后的系统函数的离散表达式$g(k)$所对应的响应图像，比较两者发现两者完全一致，而图像

会根据选取的留数和极点的变化而变化，可以得出不同极点对应不同响应形式的结论。





五、心得体会

通过此次仿真实验，我们小组对于z域传递函数模型有了更为全面的认识，对于模型中一些要素所起到的作用及其性质也有了更深入的理解。初步掌握了对离散时间系统建立z域模型的z变换和z逆变换方法。小组仿真实验对于我们的动手实践能力和小组分工合作的能力也是一次锻炼的机会。

六、附件清单

类别	数量	说明
仿真实验报告	2	本次小组仿真的实验报告.docx和.pdf各一份
仿真代码	4	1.3.1、1.3.2、1.3.3、思考题仿真代码各一份
人员分工表	1	成员分工情况
汇报PPT	1	汇报演示