

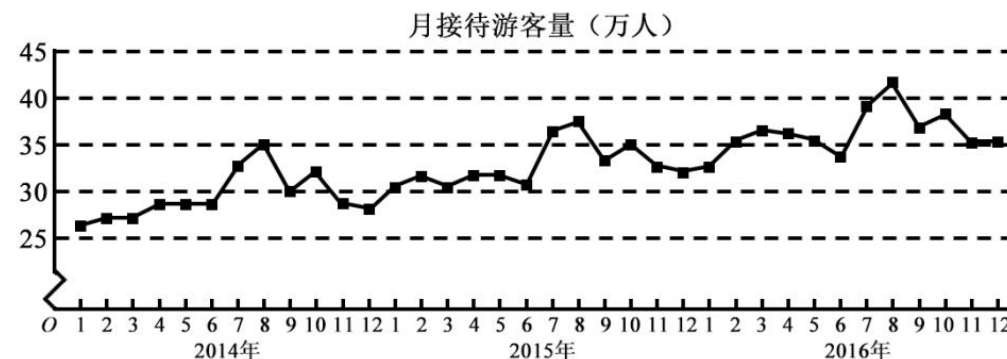
理科数学

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ ， $B = \{(x, y) | y = x\}$ ，则 $A \cap B$ 中元素的个数为
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
- 设复数 z 满足 $(1 + i)z = 2i$ ，则 $|z| =$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2
- 某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图。



根据该折线图，下列结论错误的是

- 月接待游客量逐月增加
 - 年接待游客量逐年增加
 - 各年的月接待游客量高峰期大致在 7,8 月份
 - 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳
4. $(x + y)(2x - y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为
A. -80 B. -40 C. 40 D. 80

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ ，且与椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点，则 C 的方程为

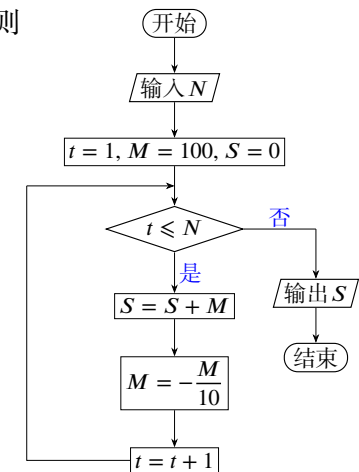
- A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

6. 设函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，则下列结论错误的是

- A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π B. $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称
- C. $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$ D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减

7. 执行右面的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为

- A. 5
B. 4
C. 3
D. 2



8. 已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为

- A. π B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. 0

9. 等差数列的首项为 1，公差不为 0. 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列，则前 6 项的和为

- A. -24 B. -3 C. 3 D. 8

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切，则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

12. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 1, AD = 2$ ，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的最大值为

- A. 3 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y-2 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ ，则 $z = 3x - 4y$ 的最小值为_____.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 a_3 = 3$, 则 $a_4 =$ _____.

15. 设函数 $\begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$ 则满足的 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) > 1$ 的 x 取值范围是_____。

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

- ① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时， AB 与 b 成 30° 角；
- ② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时， AB 与 b 成 60° 角；
- ③ 直线 AB 与 a 所称角的最小值为 45° ；
- ④ 直线 AB 与 a 所称角的最小值为 60° ；

其中正确的是_____。（填写所有正确结论的编号）

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：60 分。

17. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0$, $a = 2\sqrt{7}$, $b = 2$.

- (1) 求 c ；
- (2) 设 D 为 BC 边上一点，且 $AD \perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. (12 分)

某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处学科网理完. 根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位： $^\circ\text{C}$ ）有关. 如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间 $[25, 30)$ ，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
天数	2	16	36	25	7	4

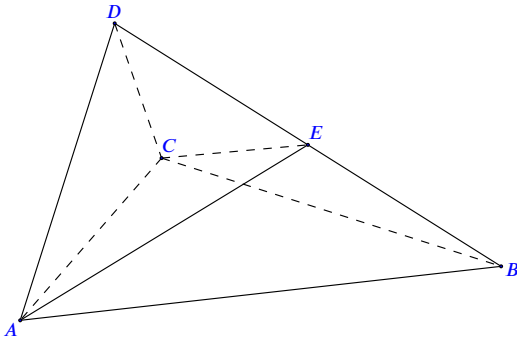
以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X （单位：瓶）的分布列；
- (2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y （单位：元），当六月份这种酸奶一天的进货量 n （单位：瓶）为多少时， Y 的数学期望达到最大值？

19. (12 分)

如图，四面体 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 是正三角形， $\triangle ACD$ 是直角三角形， $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD$.

- (1) 证明：平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ；
- (2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E ，若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分，求二面角 $D - AE - C$ 的余弦值.



20. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ ，过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交 C 与 A, B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

- (1) 证明：坐标原点 O 在圆 M 上；
- (2) 设圆 M 过点 $P(4, -2)$ ，求直线 l 与圆 M 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$.

- (1) 若 $f(x) \geq 0$ ，求 a 的值；
- (2) 设 m 为整数，且对于任意正整数 n , $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdots (1 + \frac{1}{2^n}) < m$ ，求 m 最小值.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 44：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = kt, \end{cases}$ (t 为参数)，直线 l_2 的参数方程为

$\begin{cases} x = -2 + m, \\ y = \frac{m}{k}, \end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P ，当 k 变化时， P 的轨迹为曲线 C .

- (1) 写出 C 的普通方程；
- (2) 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，设 $l_3: \rho(\cos \theta + \sin \theta) - \sqrt{2} = 0$, M 为 l_3 与 C 的交点，求 M 的极径.

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$.

- (1) 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集；
- (2) 若不等式 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 的解集非空，求 m 的取值范围.