

第九届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2017 年 10 月 28 日)

绝密 ★ 启用前

(14 金融工程-零蛋大)

考试形式：闭卷

考试时间：150 分钟

满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	15	15	15	20	15	20	100
得 分							

- 注意：1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得 分	
阅卷人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 设 P 为空间的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C . 求该平面的法线与 z - 轴的夹角.

得 分	
阅卷人	

二、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界, 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1} ?

答题时不要超过此线

得 分	
阅卷人	

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \{W_1, W_2, \cdots, W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭 (即, $\forall M, N \in \Gamma$, 有 $MN \in \Gamma$), 证明: $\sum_{i=1}^r W_i = 0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0$, 其中 $\text{tr}(W_i)$ 表示 W_i 的迹

得 分	
阅卷人	

四、(本题 20 分) 给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 A (即, A 的转置 A^T 等于 $-A$), 记矩阵有序对集合 T 为

$$T = \{(X, Y) | X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, XY = aI + A\},$$

其中 I 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合. 证明: 任取 T 中两元: (X, Y) 和 (M, N) 必有 $XN + Y^T M^T \neq 0$

答题时不要超过此线

密封线

得 分	
阅卷人	

存在, 求 A, B

五、 (本题 15 分) 设 $f(x) = \arctan x$, A 为常数. 若

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right)$$

得 分	
阅卷人	

六、(本题 20 分) 设 $f(x) = 1 - x^2 + x^3$ ($x \in [0, 1]$),
计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln(x+2) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx}$$