

- 一、系统函数的零、极点分布图
- 二、系统函数与系统的因果性
- 三、系统函数与时域响应
- 四、系统函数与频率响应

- 掌握S域极零图来表达系统函数 $H(s)$ 的方法
- 掌握系统函数 $H(s)$ 与系统因果性、时域特性 $h(t)$ 、频域特性 $H(j\omega)$ 之间的对应关系

§ 6.2 一、系统函数的零、极点分布图



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

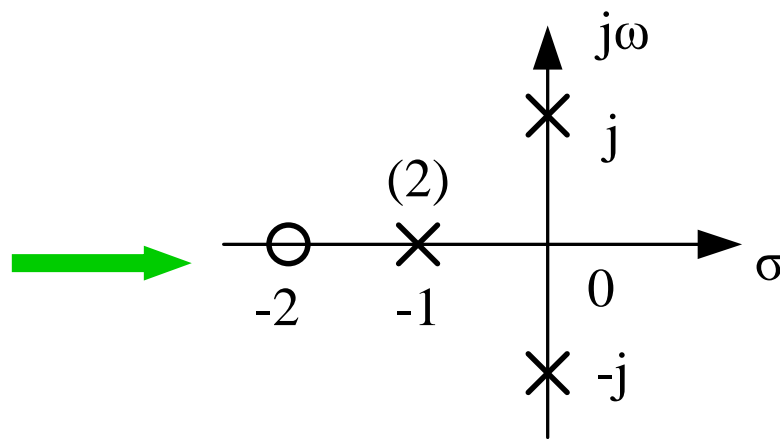
LTI系统的系统函数是复变量 s 的有理分式，即

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

将零极点画在复平面上，得零、极点分布图。

例

$$H(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s^2+1)}$$





例：已知 $H(s)$ 的零、极点分布图如图示，并且 $h(0_+)=2$ 。求 $H(s)$ 的表达式。

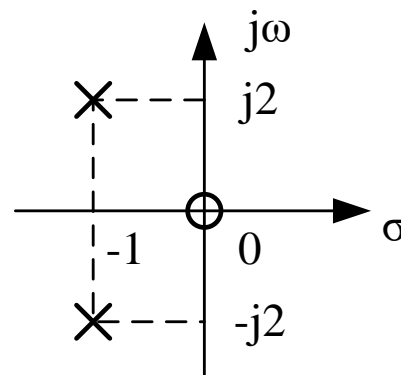
解：由分布图可得

$$H(s) = \frac{Ks}{(s+1)^2 + 4} = \frac{Ks}{s^2 + 2s + 5}$$

根据初值定理，有

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^2 + 2s + 5} = K$$

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}$$





二、系统函数 $H(\cdot)$ 与系统的因果性

因果系统是指，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 不会出现于 $f(t)$ 之前的系统。

连续因果系统的充分必要条件是：冲激响应 $h(t)=0, t<0$

或者，系统函数 $H(s)$ 的收敛域为： $\text{Re}[s]>\sigma_0$

三、系统函数 $H(s)$ 与时域响应 $h(t)$



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

冲激响应的函数形式由 $H(s)$ 的极点确定。

下面讨论 $H(s)$ 极点的位置与其时域响应的函数形式。

所讨论系统均为因果系统。

1. 连续因果系统

$H(s)$ 按其极点在 s 平面上的位置可分为:在左半开平面、虚轴和右半开平面三类。

(1) 在左半平面

(a) 若系统函数有负实单极点 $p = -\alpha (\alpha > 0)$, 则 $D(s)$ 中有因子 $(s + \alpha)$, 其所对应的响应函数为 $Ke^{-\alpha t}\epsilon(t)$



(b) 若有一对共轭复极点 $p_{12}=-\alpha \pm j\beta$, 则 $D(s)$ 中有因子 $[(s+\alpha)^2+\beta^2] \rightarrow$
 $K e^{-\alpha t} \cos(\beta t+\theta) \varepsilon(t)$

(c) 若有 r 重极点, 则 $D(s)$ 中有因子 $(s+\alpha)^r$ 或 $[(s+\alpha)^2+\beta^2]^r$, 其响应为
 $K_i t^i e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$ 或 $K_i t^i e^{-\alpha t} \cos(\beta t+\theta) \varepsilon(t)$ ($i=0,1,2,\dots,r-1$)

以上三种情况: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 响应均趋于0。暂态分量。

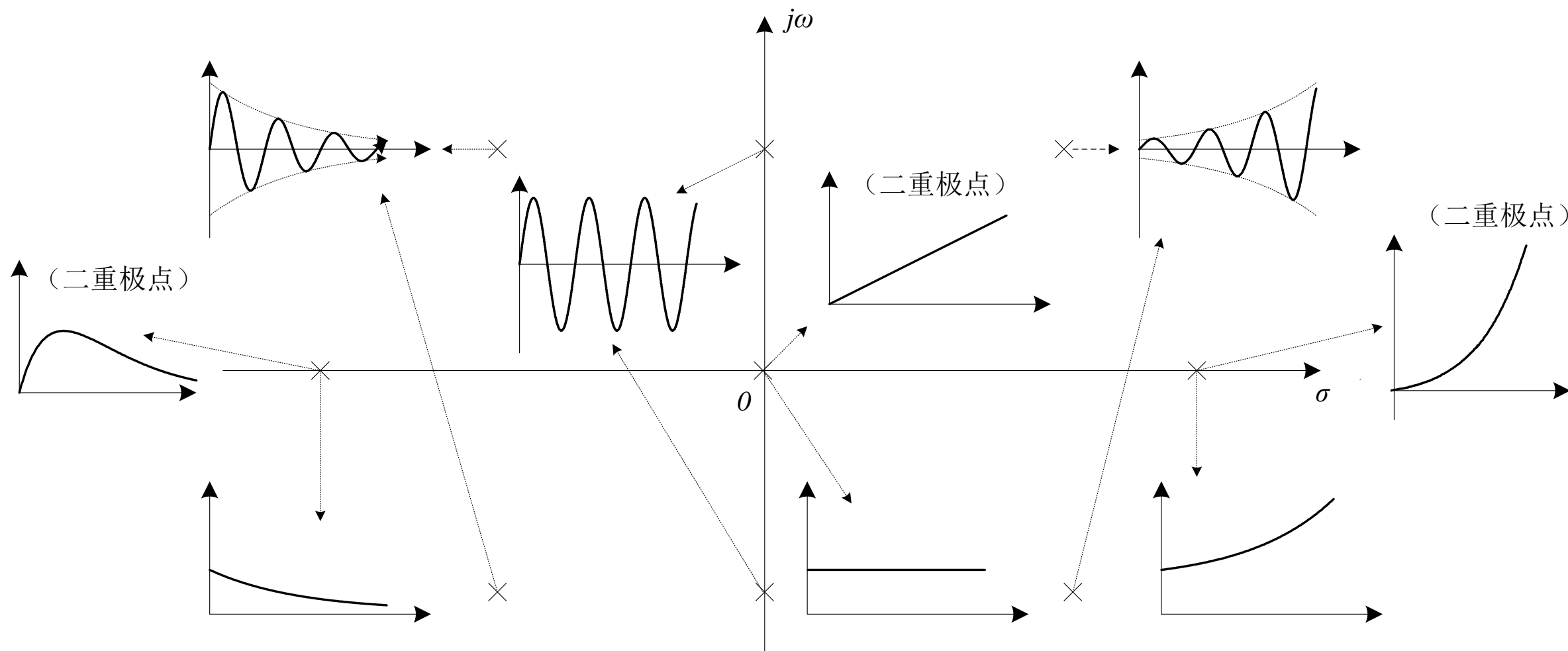


(2) 在虚轴上

(a) 单极点 $p=0$ 或 $p_{12}=\pm j\beta$, 则响应为 $K\varepsilon(t)$ 或 $K\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$ -----稳态分量

(b) r 重极点, 相应 $D(s)$ 中有 s^r 或 $(s^2+\beta^2)^r$, 其响应函数为 $K_i t^i \varepsilon(t)$ 或 $K_i t^i \cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t) (i=0,1,2,\dots,r-1)$ ——递增函数

(3) 在右半开平面：均为递增函数。



LTI连续因果系统的 $h(t)$ 的函数形式由 $H(s)$ 的极点确定。

- ① $H(s)$ 在左半平面的极点所对应的响应函数为衰减的。即当 $t \rightarrow \infty$ 时，响应均趋于0。
- ② $H(s)$ 在虚轴上的一阶极点所对应的响应函数为稳态分量。
- ③ $H(s)$ 在虚轴上的高阶极点或右半平面上的极点，其所对应的响应函数都是递增的。即当 $t \rightarrow \infty$ 时，响应均趋于 ∞ 。

四、系统函数与频率响应

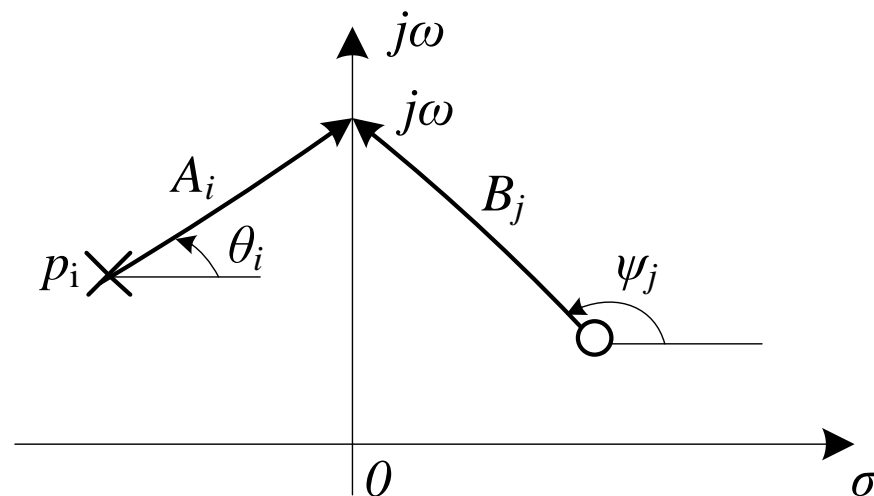
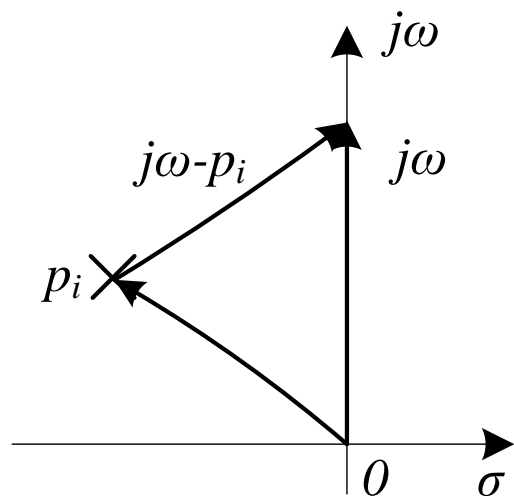


天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

若系统函数 $H(s)$ 的收敛域包含虚轴（对于因果系统， $H(s)$ 的极点均在左半平面），则系统存在频率响应，频率响应与系统函数之间的关系为

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{H_0 \prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$

在s平面上，任意复数（常量或变量）都可表示为一个矢量，即用有向线段表示复数。例如，某极点可看作是自s平面的原点指向该极点的矢量，矢量的长度是该极点的模，辐角是自实轴正方向逆时针旋转至该矢量的夹角。变量也可看作矢量，如图所示。





将差向量写成模与相角的形式

$$\left. \begin{aligned} j\omega - p_i &= A_i e^{j\theta_i} \\ j\omega - z_j &= B_j e^{j\psi_j} \end{aligned} \right\}$$

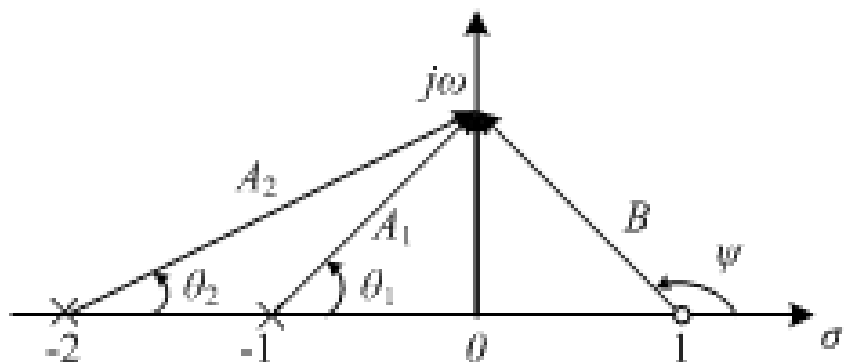
$$H(j\omega) = \frac{H_0 B_1 B_2 \cdots B_m e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m)}}{A_1 A_2 \cdots A_n e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

例：已知某LTI连续系统的冲激响应为 $h(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-t})u(t)$

运用矢量作图法，粗略画出系统的幅频特性和相频特性曲线。

解：
$$H(s) = \frac{6}{s+2} - \frac{4}{s+1} = \frac{2s-2}{s^2+3s+2}$$

零、极点坐标分布

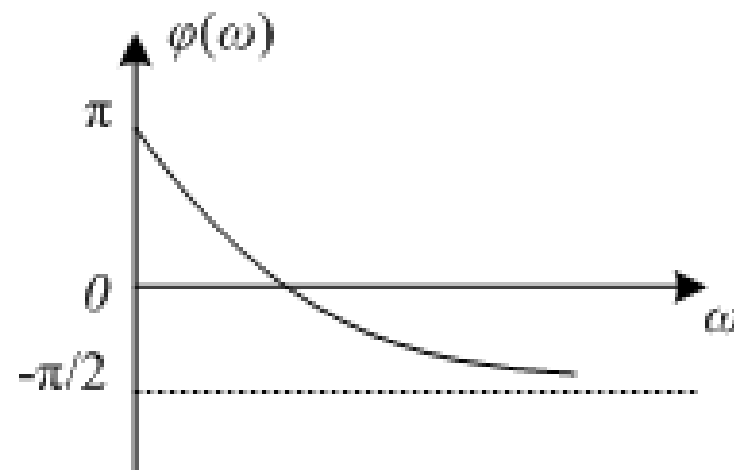
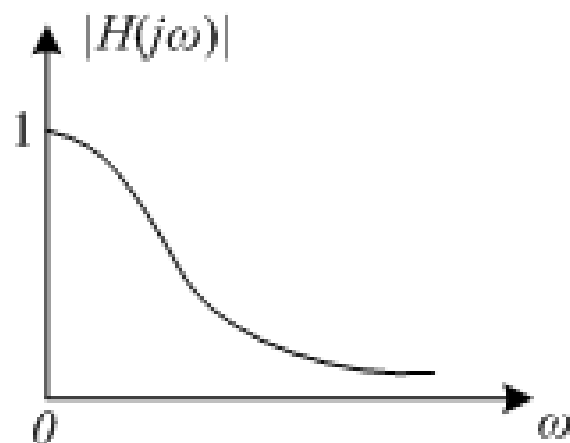


$$|H(j\omega)| = \frac{2}{A_2}$$

$$\varphi(\omega) = \pi - 2\theta_1 - \theta_2 = \pi - (2\theta_1 + \theta_2)$$

- 1) 当 $\omega = 0$ 时, $A_2 = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, 故 $|H(j\omega)| = 1$, $\varphi(\omega) = \pi$;
- 2) 当 ω 增大时, A_2 、 θ_1 和 θ_2 也随之增大, 故 $|H(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 均随之减小;
- 3) 当 ω 趋向于无穷大时, A_2 趋向于无穷大, θ_1 和 θ_2 均趋向于 $\frac{\pi}{2}$, 故 $|H(j\omega)|$ 趋向于零,

$\varphi(\omega)$ 趋向于 $-\frac{\pi}{2}$ 。





下面介绍两种常见的系统。

(1) 全通函数

若系统的幅频响应 $|H(j\omega)|$ 为常数，则称为全通系统，其相应的 $H(s)$ 称为全通函数。

凡极点位于左半开平面，零点位于右半开平面，并且所有零点与极点对于虚轴为一一镜像对称的系统函数即为全通函数。



(2) 最小相移函数

对于具有相同幅频特性的系统函数而言，右半开平面没有零点的系统函数称为最小相移函数。

本节课我们主要讨论了

- (1) S 域的系统极零图表达系统函数 $H(s)$ 。
- (2) 系统函数 $H(s)$ 与系统因果性之间的对应关系。
- (3) 系统函数 $H(s)$ 与系统冲激响应 $h(t)$ 之间的对应关系。
- (4) 系统函数 $H(s)$ 与系统频率响应 $H(j\omega)$ 之间的对应关系。

课后习题：6.1， 6.9

下节课我们将要讨论S域的系统稳定性判断

(1) 思考S域下的系统稳定性判断与时域系统稳定性判断之间的相互关系。