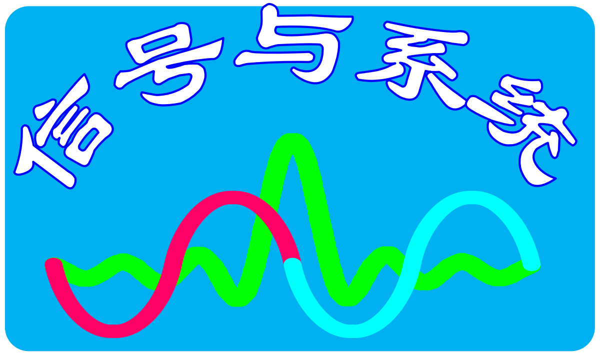


一、差分方程的经典解

二、零输入响应和零状态响应

三、单位序列响应和阶跃响应

课程目标

- 掌握离散系统时域分析的基本思想及求解方法
- 掌握离散系统时域分析与连续系统有哪些类似，有哪些不同
- 掌握不进位乘法、性质法、图解法求卷积和

连续系统

$$f(t) \to y(t)$$

常系数线性微分方程

卷积积分

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t)$$

离散系统

$$f(k) \to y(k)$$

常系数线性差分方程

卷积和

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$

$$y_{zs}(k) = f(k) * h(k)$$

一、差分方程的经典解

1. 差分和差分方程

设有序列$f(k)$，则

…，$f(k+2)$，$f(k+1)$，…，$f(k-1)$，$f(k-2)$…等称为$f(k)$的移位序列。

1）差分

（1）一阶前向差分定义：$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

（2）一阶后向差分定义：$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

式中，Δ和∇称为差分算子，无原则区别。本书主要用后向差分，简称为差分。

2)差分方程

包含未知序列y(k)及其各阶差分的方程式称为差分方程。

将差分展开为移位序列，得一般形式

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = b_m f(k) + \ldots + b_0 f(k-m)$$

差分方程本质上是递推的代数方程，若已知初始条件和激励，利用迭代法可求得其数值解。

例 差分方程的迭代解法

一般不易得到解析形式的(闭合)解。

2、差分方程的经典解

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = b_m f(k) + \ldots + b_0 f(k-m)$$

与微分方程经典解类似，$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$

1)齐次解：

齐次方程

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \ldots + a_0 y(k-n) = 0$$

特征方程

$$1 + a_{n-1}\lambda^{-1} + \ldots + a_0\lambda^{-n} = 0 ,$$

即

$$\lambda^{n} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

其根λ_i($i = 1，2，\ldots，n$)称为差分方程的特征根。

根据特征根，齐次解的两种情况

(1) 无重根　$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$　n阶方程

$$y_h(k) = C_1(\lambda_1)^k + C_2(\lambda_2)^k + \cdots + C_n(\lambda_n)^k$$

(2)有重根　特征根λ为r重根时

$$y_h(k) = (C_{r-1}k^{r-1} + C_{r-2}k^{r-2} + \cdots + C_1 k + C_0)\lambda^k$$

2)特解$y_p(k)$:

特解的形式与激励的形式类似

例

激励$f(k)$	响应$y(k)$的特解$yp(k)$
F(常数)	P(常数)
k^m	$P_m k^m + P_{m-1}k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0$(特征根均不为0) $k^r(P_m k^m + P_{m-1}k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0)$(有$r$重为0的特征根)
a^k	Pa^k(a不等于特征根) $(P_1 k + P_0)a^k$(a等于特征单根) $(P_r k^r + P_{r-1}k^{r-1} + \cdots + P_0)a^k$($a$等于$r$重特征根)
$\cos(\beta k)$ $\sin(\beta k)$	$P_1\cos(\beta k) + P_2\sin(\beta k)$(特征根不等于$e^{\pm j\beta}$)

二、零输入响应和零状态响应

$$y(\mathrm{k}) = y_{\mathrm{zi}}(\mathrm{k}) + y_{\mathrm{zs}}(\mathrm{k})$$

1.零输入响应：输入为零，差分方程为齐次

齐次解形式：$C(\lambda)^k$

C由初始状态定

2.零状态响应：初始状态为0，即

$$y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = \ldots = 0$$

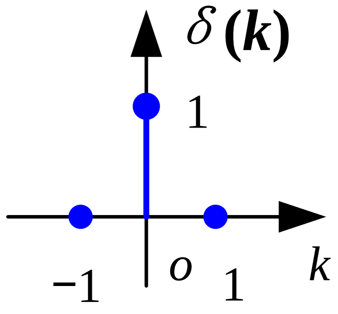
求解方法
- 经典法：齐次解+特解
- 卷积法

例

三、单位序列响应和阶跃响应

1.序列$\delta(k)$和$\varepsilon(k)$

1) 单位(样值)序列$\delta(k)$



- 定义

$$\delta(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

- 取样性质： $f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$

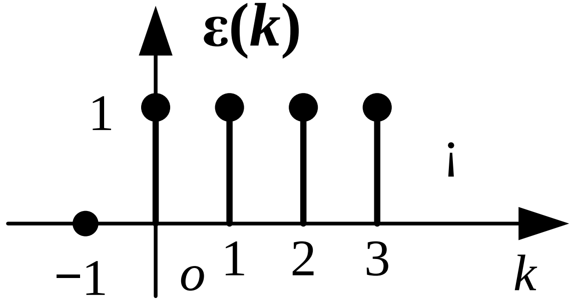
$$f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k) = f(0)$$

- 例 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k) = ?$ $\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}(k-5)\delta(k) = ?$ $\quad \sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(k-i) = ?$

2)单位阶跃序列ε(k) 定义

- 定义 $\varepsilon(k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$



- ε(k)与δ(k)的关系

$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) \qquad \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i)$$

或 $$\varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j) \qquad \varepsilon(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \ldots$$

2.单位序列响应

单位序列$\delta(k)$所引起的零状态响应，记为$h(k)$。

$$h(k)=T[\{0\},\delta(k)]$$

$$h(-i)=0 \quad i=1,2,3,\cdots N$$

例1　例2

3.阶跃响应

$$g(k)=T[\varepsilon(k), \{0\}]$$

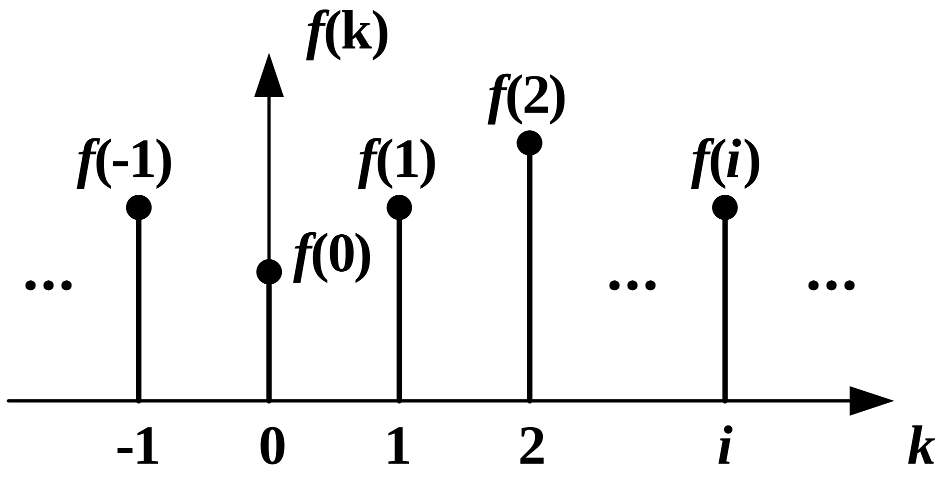
由于 $\varepsilon(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)$ ， $\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\nabla\varepsilon(k)$

所以 $g(k)=\sum_{j=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)$ ， $h(k)=\nabla g(k)$

两个常用的求和公式：

$$\begin{cases} \sum_{j=k_1}^{k_2} a^j = \begin{cases} \dfrac{a^{k_1}-a^{k_2+1}}{1-a} & a\neq 1 \\ k_2-k_1+1 & a=1 \end{cases} \quad (k_2\geq k_1) \\ \sum_{j=k_1}^{k_2} j = \dfrac{(k_2+k_1)(k_2-k_1+1)}{2} \end{cases}$$

一、卷积和



1.序列的时域分解

任意序列$f(k)$ 可表示为

$$f(k)=\ldots+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+f(2)\delta(k-2)$$
$$+\ldots+f(i)\delta(k-i)+\ldots$$
$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)$$

2.任意序列作用下的零状态响应

$$f(k) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统 零状态}} \longrightarrow y_{zs}(k)$$

根据h(k)的定义：　$\delta(k) \Longrightarrow h(k)$

由时不变性：　$\delta(k-i) \Longrightarrow h(k-i)$

由齐次性：　$f(i)\delta(k-i) \Longrightarrow f(i)\,h(k-i)$

由叠加性：　$\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)}_{\| \atop f(k)} \Longrightarrow \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)}_{\| \atop y_{zs}(k)}$

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i)$$　**卷积和**

3.卷积和的定义

已知定义在区间（$-\infty$，∞）上的两个函数$f_1(k)$和$f_2(k)$，则定义和

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\, f_2(k-i)$$

为$f_1(k)$与$f_2(k)$的卷积和，简称卷积；记为 $f(k)= f_1(k)*f_2(k)$

注意：求和是在虚设的变量 i 下进行的，i 为求和变量，k 为参变量。结果仍为k 的函数。

$$\boxed{y_{zs}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = f(k)*h(k)}$$

举例

二、卷积的求解方法

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

1.图解法

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\,f_2(k-i)$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元：　k换为 i→得 $f_1(i)$，　$f_2(i)$

（2）反转平移：　由$f_2(i)$反转→ $f_2(-i)$右移k → $f_2(k-i)$

（3）乘积：　$f_1(i)\,f_2(k-i)$

（4）求和：　i 从 $-\infty$到∞对乘积项求和。

注意：k 为参变量。

举例

2.不进位乘法求卷积

$$f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\, f_2(k-i)$$

$$=\ldots+f_1(-1)f_2(k+1)+f_1(0)f_2(k)+f_1(1)f_2(k-1)+f_1(2)f_2(k-2)$$

$$+\ldots+f_1(i)\, f_2(k-i)+\ldots$$

f(k)=所有两序列序号之和为k 的那些样本乘积之和。

如k=2时

$$f(2)=\ldots+f_1(-1)f_2(3)+f_1(0)f_2(2)+f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)+\ldots$$

例 $f_1(k)=\{0,\ f_1(1),\ f_1(2),\ f_1(3),\ 0\}$

$f_2(k)=\{0,\ f_2(0),\ f_2(1),\ 0\}$

排成乘法

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & f_1(1), & f_1(2), & f_1(3) & \\
\times & & & f_2(0), & f_2(1) & \\
\hline
 & & f_1(1)f_2(1), & f_1(2)f_2(1), & f_1(3)f_2(1) & \\
 & f_1(1)f_2(0), & f_1(2)f_2(0), & f_1(3)f_2(0) & & \\
+ & & & & & \\
\hline
 & f_1(1)f_2(0) & f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0) & f_1(3)f_2(1) &
\end{array}
$$

不进位乘法适用有限长序列卷积

$f(k)=\{\ 0,\ \ f_1(1)f_2(0),\ \ f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0),\ \ f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0),\ \ f_1(3)f_2(1),\ \ 0\ \}$

$y_{zs}(k)$的元素个数?

若： $f(k)$序列 $n_1 \le k \le n_2$,

$h(k)$序列 $n_3 \le k \le n_4$

则$y_{zs}(k)$序列 $(n_1 + n_3) \le k \le (n_2 + n_4)$

例如： $f(k)$: $0 \le k \le 3$ 4个元素

$h(k)$: $0 \le k \le 4$ 5个元素

$y_{zs}(k)$: $0 \le k \le 7$ 8个元素

举例

三、卷积和的性质

1. 满足乘法的三律：(1) 交换律, (2) 分配律,(3) 结合律.

2. $f(k)*\delta(k) = f(k)$ ， $f(k)*\delta(k-k_0) = f(k-k_0)$

3. $f(k)*\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

4. $f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2) = f_1(k-k_1-k_2)*f_2(k)$

举例

5. $\nabla[f_1(k)*f_2(k)] = \nabla f_1(k)*f_2(k) = f_1(k)*\nabla f_2(k)$

总结

本节课我们主要讨论了

（1）离散系统的时域分析思想及求解方法。

（2）单位序列及其响应。

（3）卷积和的定义、性质及求解方法。

课后习题：7.2、7.3、7.5、7.13、7.15、7.17、7.18、7.26

预 习

下节课我们将要讨论Z变换的定义、收敛域及性质

（1）对比拉氏变换，从定义、收敛域及性质出发，分析z变换的特点，与拉式变换相比有哪些相似或不同的地方。