# 信号与系统

一、差分方程的变换解

二、系统的z域框图

三、利用z变换求卷积和

# 一、差分方程的变换解



$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

设$f$(k)在k=0时接入，系统初始状态为$y$(-1),$y$(-2),…$y$(-n)。

取单边z变换得
$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[z^{-i}Y(z) + \sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-i}] = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j}[z^{-j}F(z)]$$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}z^{-i}]Y(z) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}[\sum_{k=0}^{i-1} y(k-i)z^{-k}] = (\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}z^{-j})F(z)$$

$$Y(z) = \frac{M(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)} F(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

令 $H(z) = \dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)} = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ 称为系统函数

$$h(k) \longleftrightarrow H(z)$$

例1：若某系统的差分方程为

$$y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) + 2f(k-2)$$

已知$y(-1)=2$，$y(-2)=-1/2$，$f(k)=\varepsilon(k)$。求系统的$y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$、$y(k)$。

解：方程取单边z变换

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+y(-1)z^{-1}]=F(z)+2z^{-2}F(z)$$

解得

$$Y(z)=\frac{(1+2z^{-1})y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}F(z)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}+\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\frac{z}{z-1}$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{z^2+4z}{(z-2)(z+1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z+1}\rightarrow y_{zi}(k)=[2(2)^k-(-1)^k]\varepsilon(k)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}\rightarrow y_{zs}(k)=[2^{k+1}+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}]\varepsilon(k)$$

例2： 某系统，已知当输入$f(k)=(-1/2)^k\varepsilon(k)$时，其零状态响应

$$y_{zs}(k)=[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^k+4(-\frac{1}{3})^k-\frac{9}{2}(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$$

求系统的单位序列响应$h(k)$和描述系统的差分方程。

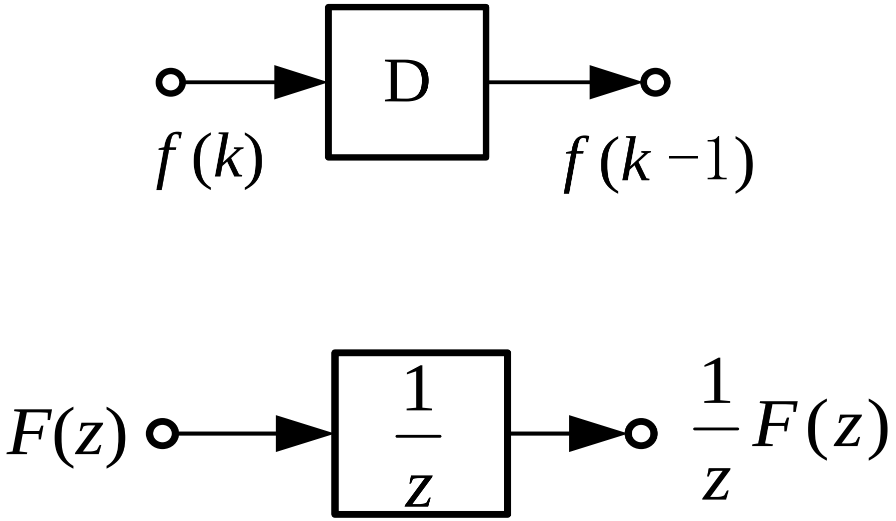
解

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$h(k)=[3(1/2)^k-2(-1/3)^k]\varepsilon(k)$$

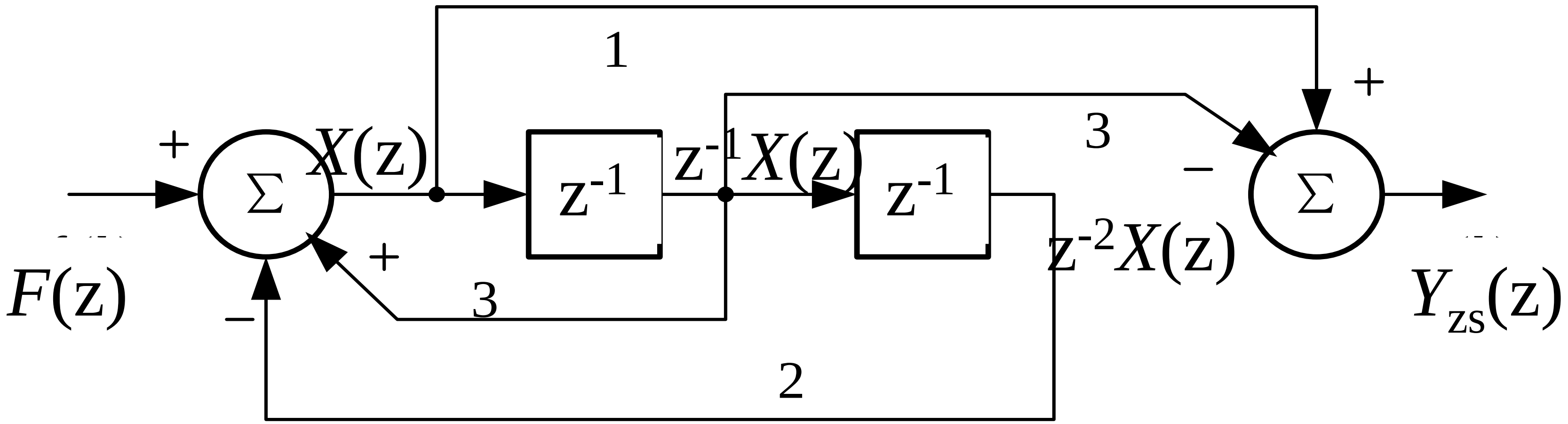
$$y(k)-\frac{1}{6}y(k-1)-\frac{1}{6}y(k-2)=f(k)+2f(k-1)$$

# 二、系统的z域框图




另外两个基本单元：数乘器和加法器，k域和z域框图相同。

例3：某系统的k域框图如图，已知输入$f(k)=\varepsilon(k)$。(1) 求系统的单位序列响应$h(k)$和零状态响应$y_{zs}(k)$。(2) 若$y(-1)=0$，$y(-2)=0.5$，求零输入响应$y_{zi}(k)$




解:(1)画z域框图　　设中间变量$X(z)$

$$X(z)=3z^{-1}X(z)-2z^{-2}X(z)+F(z) \qquad X(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$Y_{zs}(z)=X(z)-3z^{-1}X(z)=(1-3z^{-1})X(z)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}F(z)$$

$$H(z)=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}$$

$$h(k) = [\,2-(2)^k]\varepsilon(k)$$

当$f(k)=\varepsilon(k)$时，$F(z)=z/(z-1)$

$$Y_{zs}(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{3z}{z-1}+\frac{-2z}{z-2}$$

$$y_{zs}(k) = [\,2k+3-2\,(2)^k]\varepsilon(k)$$

(2)由$H(z)$可知，差分方程的特征根为$\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$

$$y_{zi}(k) = C_{zi1} + C_{zi2}\,(2)^k$$

由$y(-1)=0$，$y(-2)=0.5$，有

$$\begin{cases} C_{zi1} + C_{zi2}\,(2)^{-1} = 0 \\ C_{zi1} + C_{zi2}\,(2)^{-2} = 0.5 \end{cases}$$

$$C_{zi1} = 1,\ C_{zi2} = -2$$

$$y_{zi}(k) = 1 - 2\,(2)^k$$

# 三、利用z变换求卷积和

例： 求$2^k\varepsilon(-k)*[2^{-k}\varepsilon(k)]$

解：

$$2^{-k}\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-0.5},|z|>0.5$$

$$2^{k}\varepsilon(-k)\longleftrightarrow\frac{z^{-1}}{z^{-1}-0.5}=\frac{-2}{z-2},|z|<2$$

原式象函数为 $$\frac{-2z}{(z-0.5)(z-2)}=\frac{\frac{4}{3}z}{z-0.5}+\frac{\frac{-4}{3}z}{z-2}$$

原式= $$\frac{4}{3}(0.5)^k\varepsilon(k)+\frac{4}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

# 四、离散系统的因果性、稳定性

离散因果系统的充分必要条件是：单位响应 $h(k)=0, k<0$

或者，系统函数$H(z)$的收敛域为：$|z|>\rho_0$

离散系统稳定的充分必要条件

时域： $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|\le M$$

Z 域：若$H(z)$的收敛域包含单位圆，则该系统必是稳定系统。

对于因果系统：若$H(z)$的极点均在单位圆内，则该系统必是稳定系统。

例： 某离散系统的系统函数

$$H(z)=\frac{z}{z+0.5}+\frac{z}{z-3}$$

(1) 若系统为因果系统，求单位序列响应h(k);

(2) 若系统为反因果系统，求单位序列响应h(k);

解 (1) $|z|>3$， $h(k)=[(-0.5)^k+(3)^k]\varepsilon(k)$

(2) $|z|<0.5$， $h(k)=[-(-0.5)^k-(3)^k]\varepsilon(-k-1)$

例 $y(k)+1.5y(k-1)-y(k-2)= f(k-1)$

(1) 若为因果系统，求$h(k)$，并判断是否稳定。

(2) 若为稳定系统，求$h(k)$.

解 $$H(z)=\frac{z^{-1}}{1+1.5z^{-1}-z^{-2}}=\frac{z}{z^2+1.5z-1}=\frac{z}{(z-0.5)(z+2)}=\frac{0.4z}{z-0.5}+\frac{-0.4z}{z+2}$$

(1) 为因果系统，故收敛域为$|z|>2$，所以

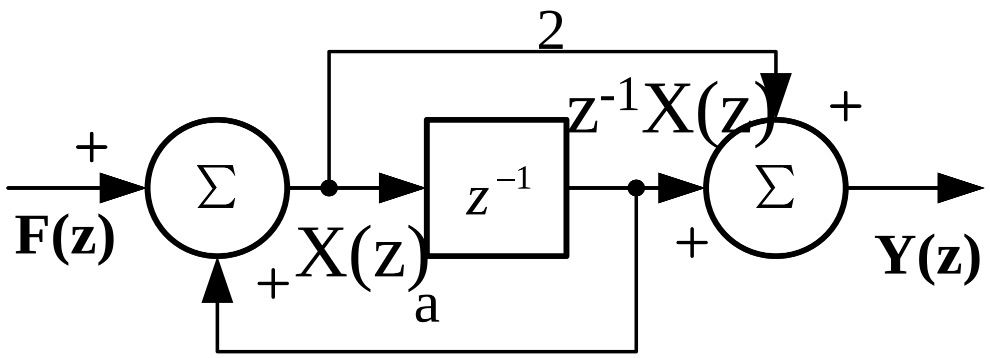
$h(k)=0.4[0.5^k-(-2)^k]\varepsilon(k)$，不稳定。

(2) 若为稳定系统，故收敛域为$0.5<|z|<2$，所以

$h(k)=0.4(0.5)^k\varepsilon(k)+0.4(-2)^k\varepsilon(-k-1)$

例：如图离散因果系统框图，为使系统稳定，求常量a的取值范围

解：设加法器输出信号X(z)




$$X(z)=F(z)+z^{-1}aX(z)$$

$$Y(z)=(2+z^{-1})X(z)=(2+z^{-1})/(1-az^{-1})F(z)$$

$$H(z)=(2+z^{-1})/(1-az^{-1})=(2z+1)/(z-a)$$

为使系统稳定，$H$(z)的极点必须在单位圆内，故$|a|<1$

# 系统函数/频率响应

- 当s和z是一般复数时,$H(s)$和$H(z)$就称为该系统的**系统函数**.
  - 一般复数就是指:
    - 在连续时间情况下仅涉及s的纯虚部值,即$s = jw$,因此仅考虑$e^{jwt}$形式的复指数.
    - 在离散时间情况下仅限于单位振幅的zz值,即z=ejwz=ejw,因此仅考虑ejwnejwn形式的复指数.
- 对连续信号,具有$s = jw$形式的系统函数即$H(s) = H(jw)$就称为该系统的**频率响应**.

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jwt}dt$$

- 对离散信号,具有$z = e^{jw}$形式的系统函数即$H(z) = H(e^{jw})$就称为该系统的**频率响应**.

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-jwk}$$

离散时间系统在单位圆上的z变换即为傅氏变换，即系统的频率响应特性:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\sim\omega$ ： 幅频特性 反映的是输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)\sim\omega$ ： 相频特性 反映的是输出对输入序列的相移

- $H(e^{jw})$即$h(k)$的离散时间傅里叶变换（DTFT）
- $e^{jw}$为周期函数，所以$H(e^{jw})$为周期函数， 其周期为2p 。