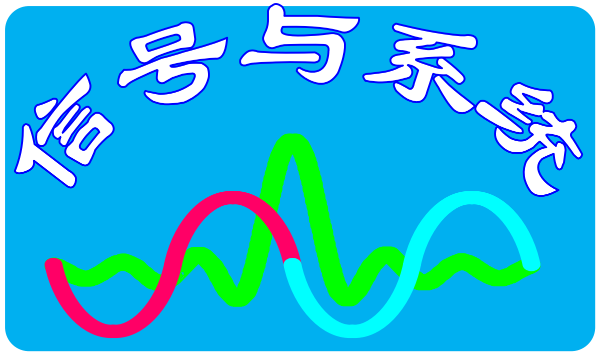


一、非周期信号的频谱

二、傅里叶变换

三、常用非周期信号的频谱

课程目标

- 掌握非周期函数的傅里叶变换：定义、条件及物理意义
- 理解矩形波的频谱及其物理意义
- 掌握常见函数的傅里叶变换对。（考点）
- 理解傅里叶变换的指数形式的物理意义。

一、傅里叶变换

1. 引出 $T \to \infty$

$f(t)$： 周期信号 ➡ 非周期信号

频谱 $F_n = \dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t \;\longrightarrow\; 0$

谱线间隔 $\Omega = \dfrac{2}{T} \;\longrightarrow\; 0$

离散谱 ➡ 连续谱，幅度无限小；

再用F_n表示频谱就不合适了，虽然各频谱幅度无限小，但相对大小仍有区别，引入频谱密度函数。令

$F(\mathrm{j}\omega) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{F_n}{1/T} = \lim\limits_{T\to\infty} F_n T$ （单位频率上的频谱） 称为**频谱密度函数。**

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\mathrm{d}t \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\frac{1}{T}$$

考虑到：$T\to\infty$，$\Omega\to$无穷小，记为dω；$n\Omega\to\omega$（由离散量变为连续量），而 $\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \to \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$ 同时，$\sum \to \int$

傅里叶变换式“-”

于是，$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

傅里叶反变换式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$F(\mathrm{j}\omega)$称为$f(t)$的**傅里叶变换**或**频谱密度函数**，简称**频谱**。

$f(t)$称为$F(\mathrm{j}\omega)$的**傅里叶反变换**或**原函数**。

也可简记为： $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 或 $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$

$F(j\omega)$一般是复函数，写为 $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$

说明：(1)前面推导并未遵循严格的数学步骤。可证明，函数$f(t)$傅里叶变换存在的充分条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < \infty$

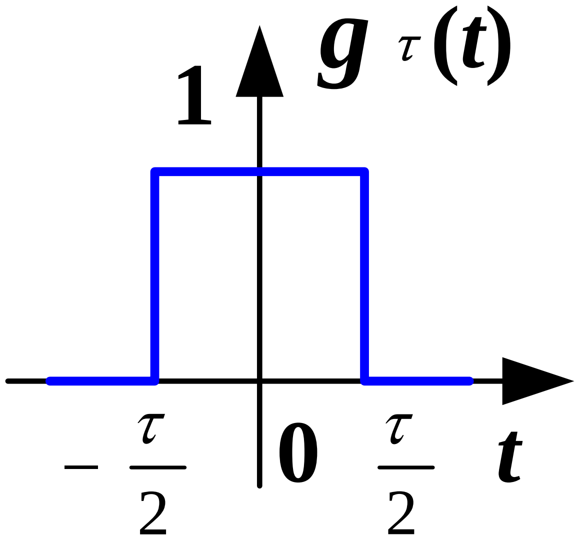
(2)用下列关系还可方便计算一些积分

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\mathrm{d}\omega$$

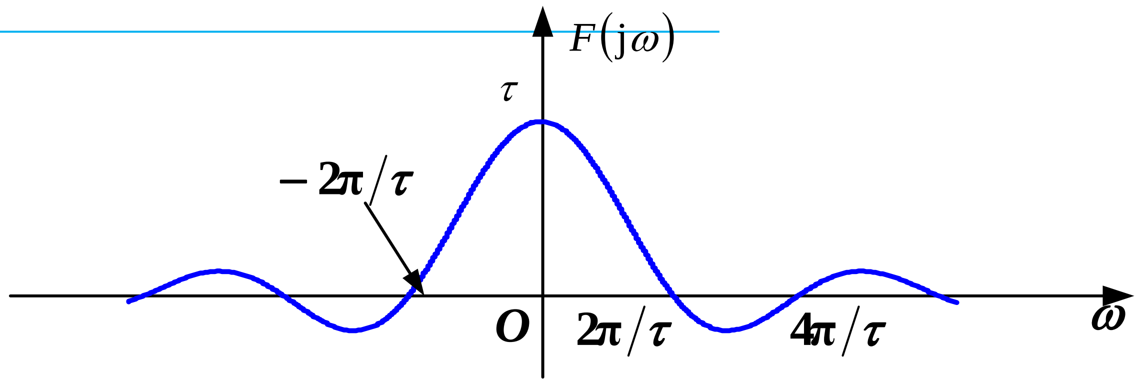
1.矩形脉冲（门函数）

记为$g_\tau(t)$

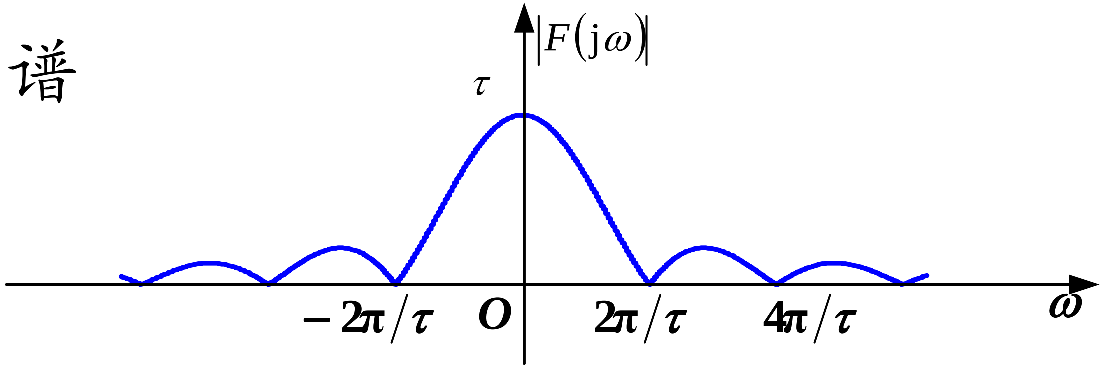


$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{-\mathrm{j}\omega}$$

$$=\frac{2\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\omega}=\tau\ \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

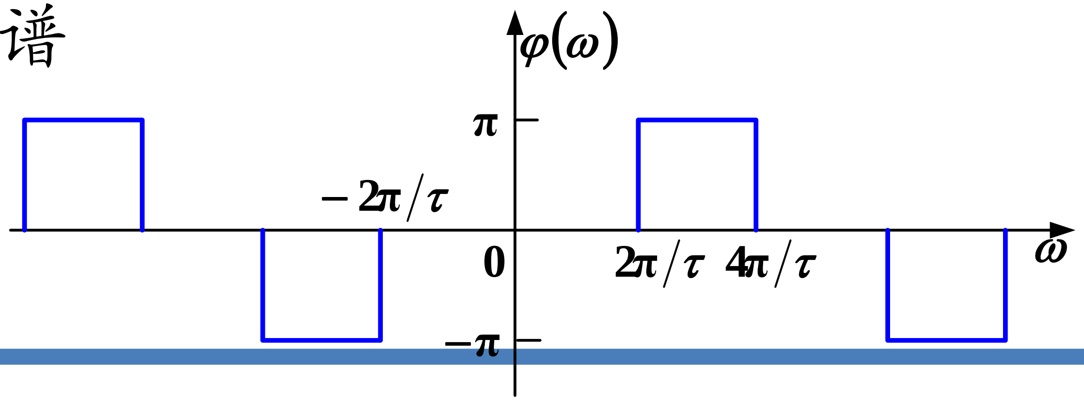


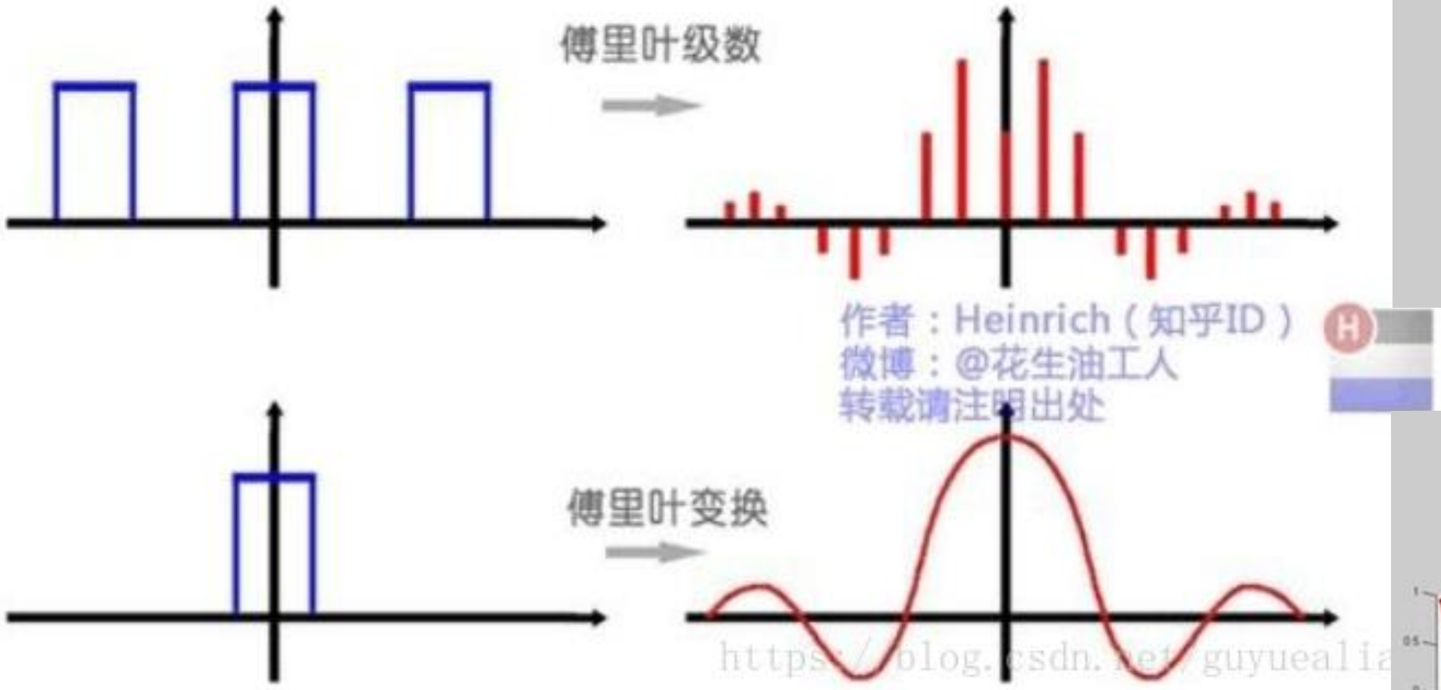
幅度频谱

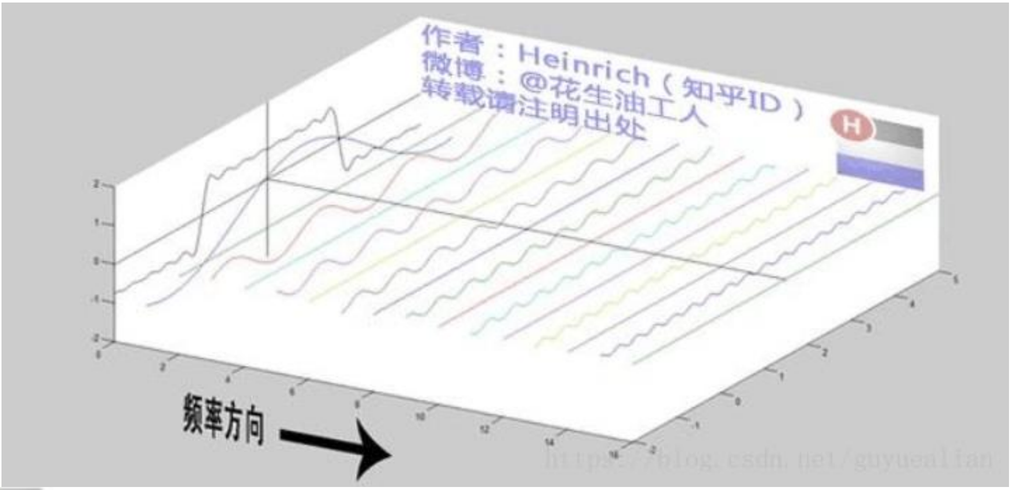


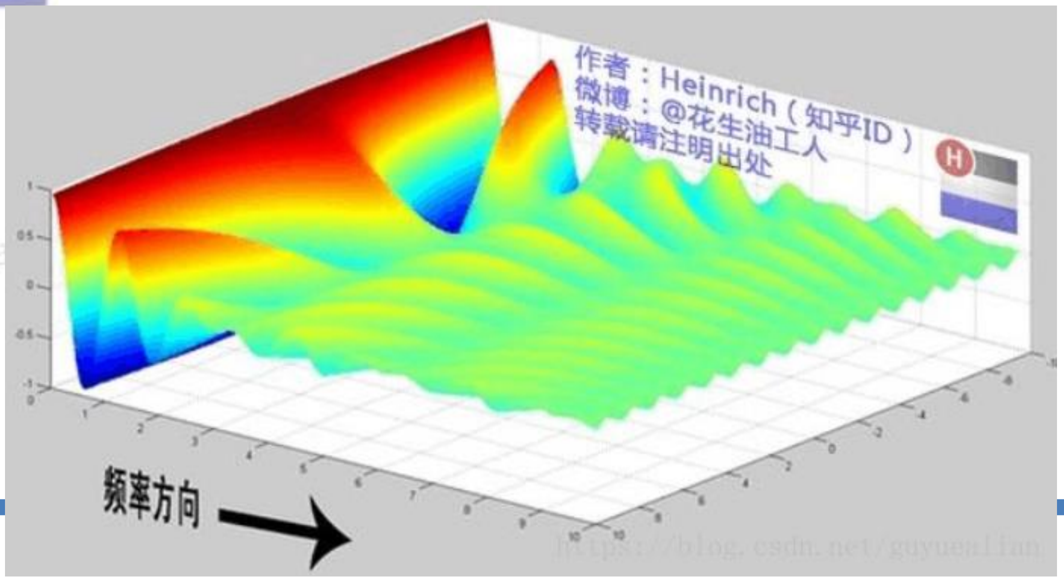
频宽：$B_\omega \approx \dfrac{2}{\tau}$或$B_f \approx \dfrac{1}{\tau}$

相位频谱



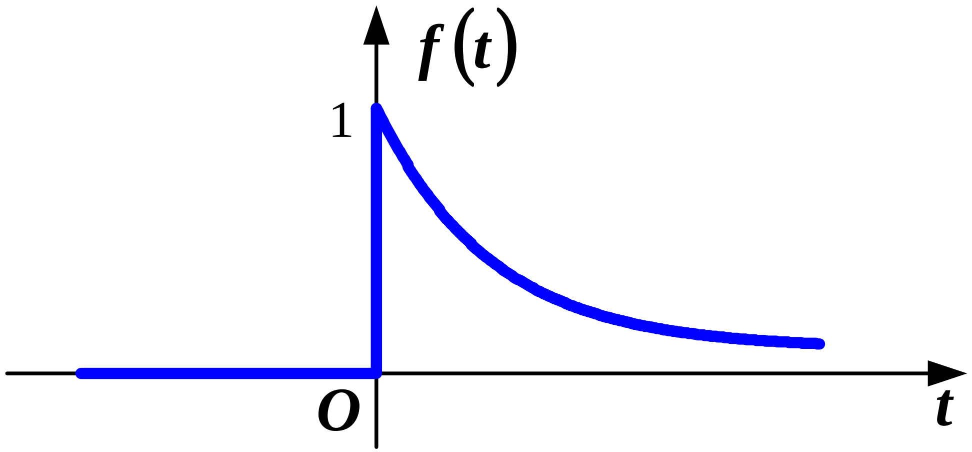

傅里叶级数
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处
傅里叶变换


作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处
频率方向


作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处
频率方向

2. 单边指数函数

$$f(t) = e^{-\alpha t}\varepsilon(t), \quad \alpha > 0$$

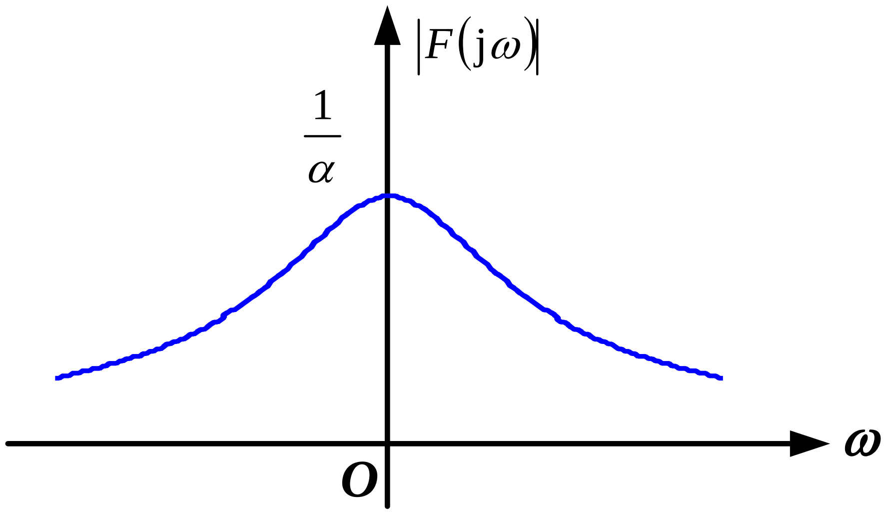


$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega} e^{-(\alpha + \mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega}$$

频谱图

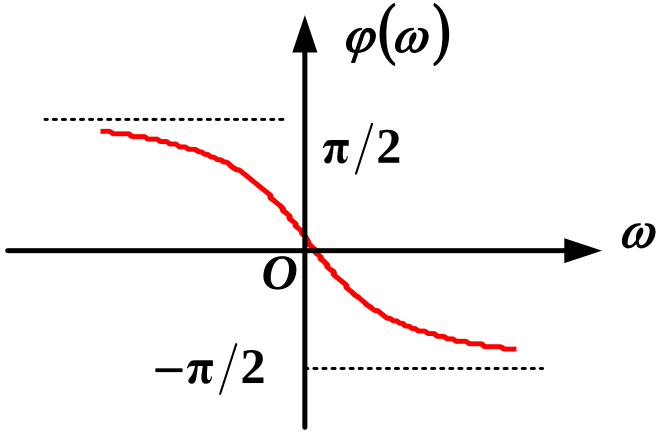
幅度频谱： $|F(\mathrm{j}\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$

$$\begin{cases} \omega = 0, & |F(\mathrm{j}\omega)| = \dfrac{1}{\alpha} \\ \omega \to \pm\infty, & |F(\mathrm{j}\omega)| \to 0 \end{cases}$$



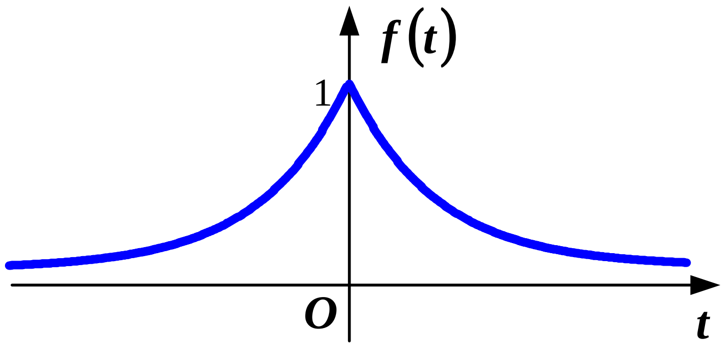
相位频谱： $\varphi(\omega) = -\arctan\dfrac{\omega}{\alpha}$

$$\begin{cases} \omega \to 0, & \varphi(\omega) = 0 \\ \omega \to +\infty, & \varphi(\omega) \to -\dfrac{\pi}{2} \\ \omega \to -\infty, & \varphi(\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

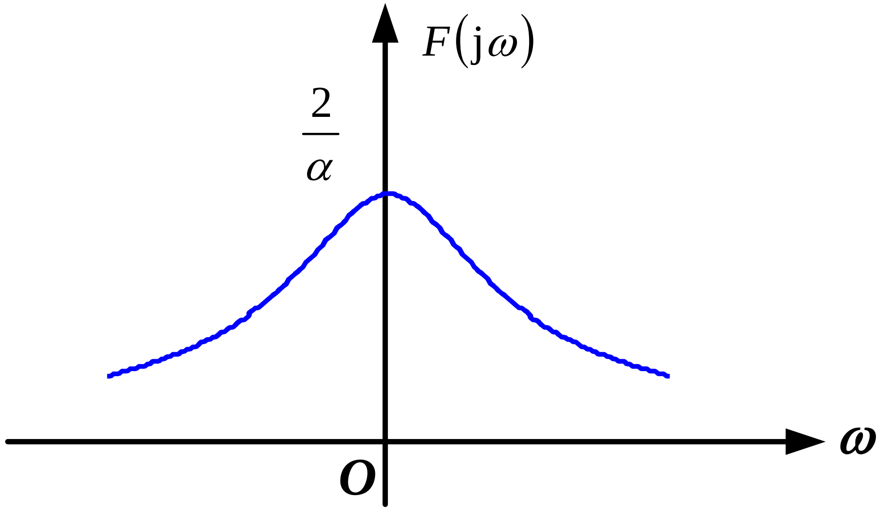


3. 双边指数函数

$f(t) = e^{-\alpha|t|}$， $\alpha > 0$



$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - \mathrm{j}\omega} + \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



4．冲激函数δ(t)、δ´(t)

$$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t = 1$$

$$\delta'(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=0} = \mathrm{j}\omega$$

5. 直流信号1

讨论：

有一些函数不满足绝对可积这一充分条件，如1，$\varepsilon(t)$ 等，但傅里叶变换却存在。直接用定义式不好求解。

可构造一函数序列$\{f_\alpha(t)\}$逼近$f(t)$，即

$$f(t)=\lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(t)$$

而$f_\alpha(t)$满足绝对可积条件，并且$\{f_\alpha(t)\}$的傅里叶变换所形成的序列$\{F_\alpha(j\omega)\}$是极限收敛的。则可定义$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$为

$$F(j\omega)=\lim_{\alpha\to\infty} F_\alpha(j\omega)$$

这样定义的傅里叶变换也称为广义傅里叶变换。

推导 $1 \longleftrightarrow ?$

构造 $f_\alpha(t)=e^{-\alpha|t|}$，$\alpha>0 \longleftrightarrow$ $F_\alpha(j\omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$$f(t)=1=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)$$

所以

$$F(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\begin{cases}0, & \omega\neq 0\\ \infty, & \omega=0\end{cases}$$

又

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2}d\frac{\omega}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}2\arctan\frac{\omega}{\alpha}\Big|_{-\infty}^{\infty}=2\pi$$

因此， $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

求F [1]另一种方法

将δ(t)←→1代入反变换定义式，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

将ω→-t，t→ω，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \delta(-\omega)$$

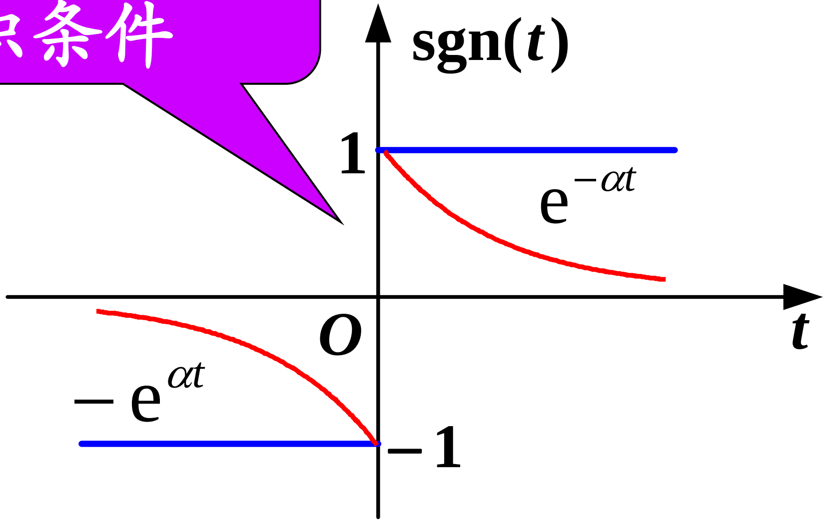
再根据傅里叶变换定义式，得

$$1 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

6. 符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

不满足绝对可积条件



$$f_\alpha(t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{\alpha t}, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0\end{cases}\qquad \alpha>0$$

$$\operatorname{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)$$

$$f_\alpha(t)\longleftrightarrow F_\alpha(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}=-\frac{\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

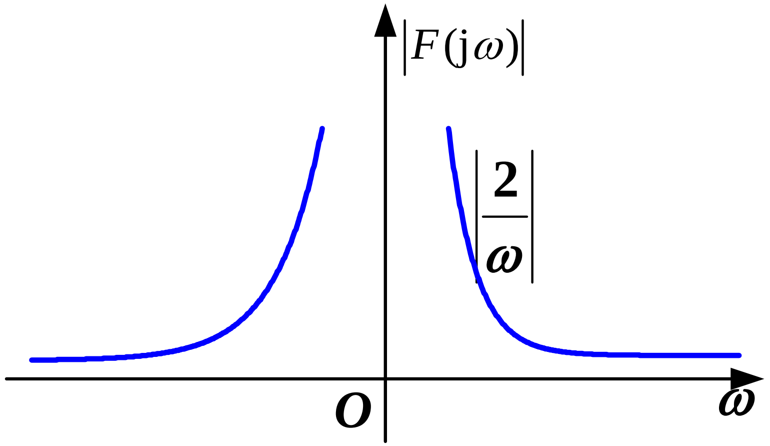
$$\operatorname{sgn}(t)\longleftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

频谱图

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}\omega} = -\mathrm{j}\frac{2}{\omega} = \frac{2}{|\omega|}e^{\pm \mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

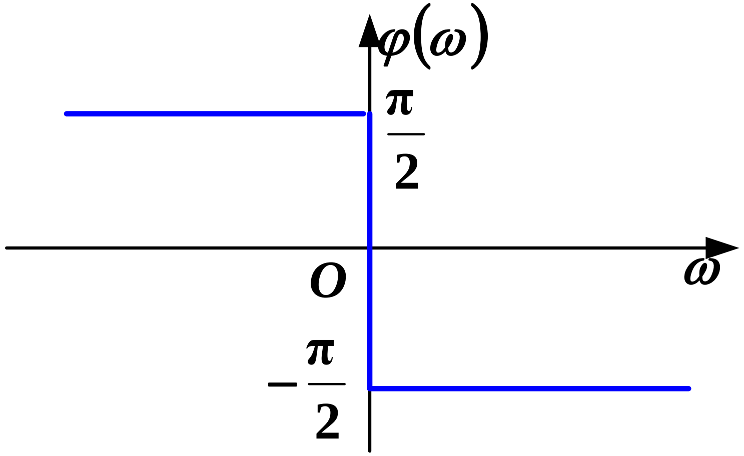
$$|F(\mathrm{j}\omega)| = \left(\sqrt{\left(\frac{2}{\omega}\right)^2} = \frac{2}{|\omega|}\right)$$

$|F(\mathrm{j}\omega)|$是偶函数

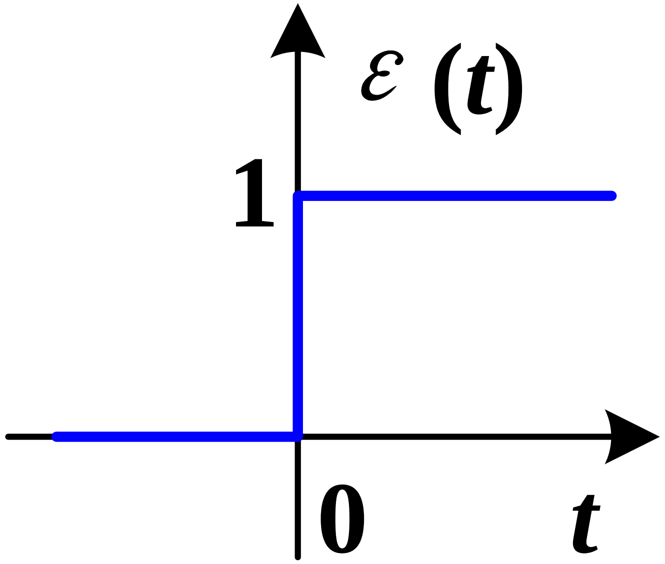


$$\arctan\frac{-\frac{2}{\omega}}{0} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$

$\varphi(\omega)$是奇函数



7. 阶跃函数



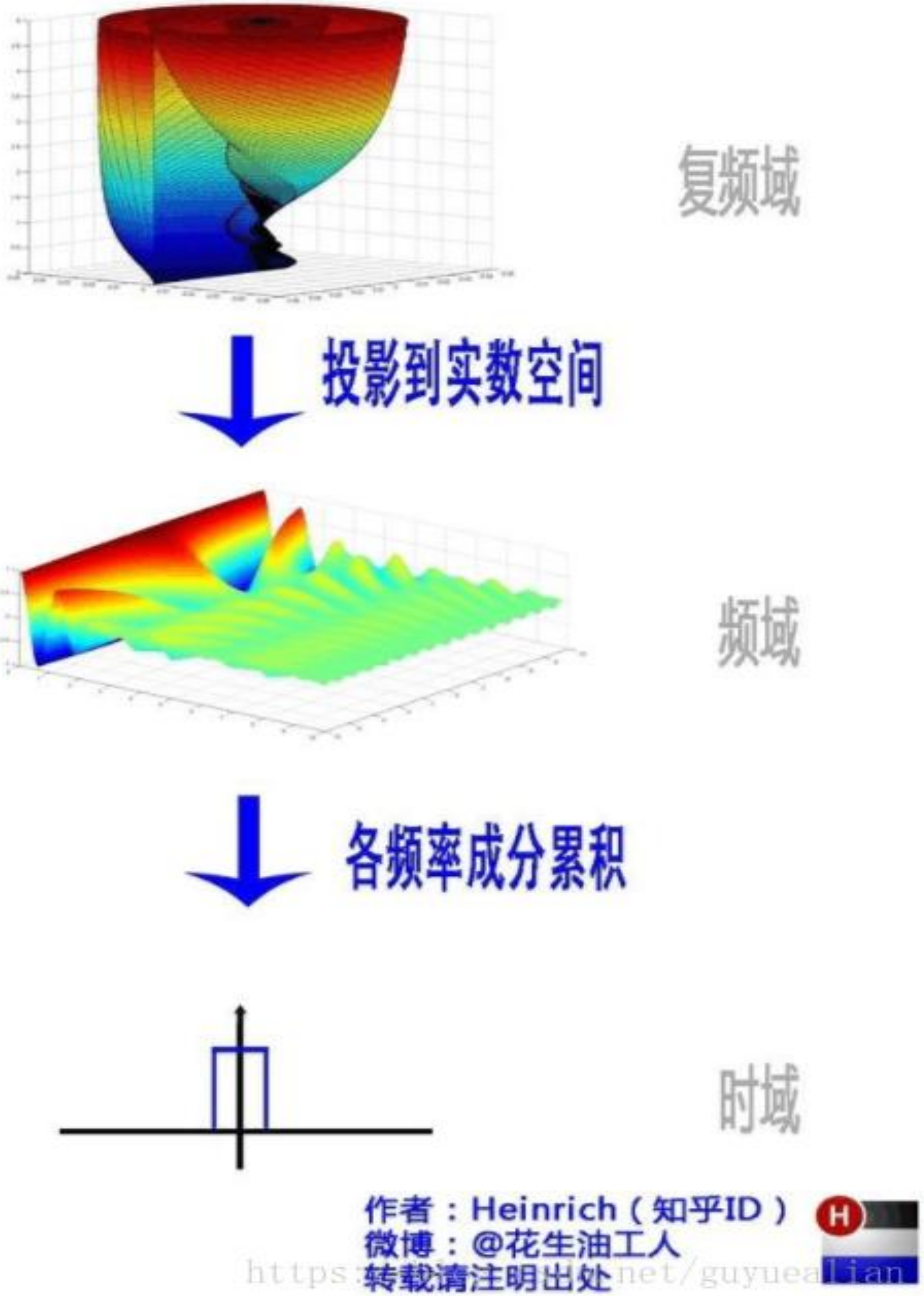
$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\longleftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

三、傅里叶变换的指数形式

从三角函数的形式来看，傅里叶变换出来的频谱是频率从0到无穷所有频率的组合。

$$\cos(t)=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

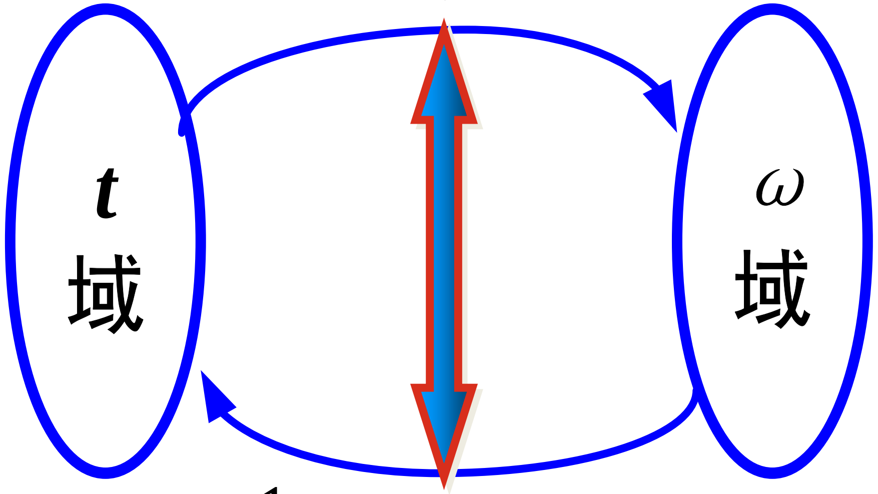
e^{it}可以理解为一条逆时针旋转的螺旋线，那么e^{-it}则可以理解为一条顺时针旋转的螺旋线。而cos(t)则是这两条旋转方向不同的螺旋线叠加的一半，因为这两条螺旋线的虚数部分相互抵消掉了！



归纳记忆：

1. 傅里叶变换对

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

2. 常用函数傅里叶变换对

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{j\,\omega}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\,\omega+\alpha}$$

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau\,Sa\left(\frac{\omega\,\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\,\omega}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

总结

本节课我们主要讨论了

（1）非周期函数的傅里叶变换的定义及条件；

（2）频谱密度函数及原函数的公式；

（3）常见函数的傅里叶变换

（4）傅里叶变换的频谱意义及指数形式。

课后习题：

预 习

下节课我们将要讨论周期信号的傅里叶变换及傅里叶变换的性质

（1）请思考，对于周期函数，它的傅里叶变换和傅里叶级数展开之间有哪些联系？