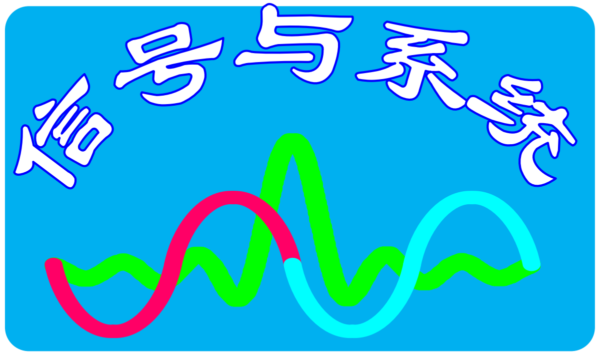


一、拉普拉斯变换的性质

课程目标

- 掌握拉普拉斯变换的性质（重点）

§ 5.6 拉普拉斯变换性质

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

- 线性性质
- 尺度变换
- 时移特性
- 复频移特性
- 时域微分
- 时域积分
- 卷积定理
- s域微分
- s域积分
- 初值定理
- 终值定理

一、线性性质

若$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$ $\mathrm{Re}[s]>\sigma_1$, $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$ $\mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

则 $a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s)$ $\mathrm{Re}[s]>\max(\sigma_1,\sigma_2)$

例1 $f(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) \longleftrightarrow 1 + 1/s$, $\sigma > 0$

$$\cos \omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \sigma > 0$$

$$\sin \omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \sigma > 0$$

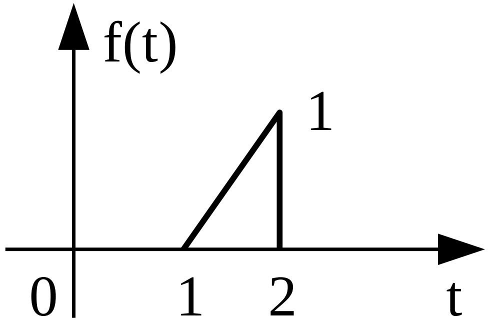
二、尺度变换

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$， 且有实数$a>0$ ，

则$f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})$

例：如图信号**f(t)**的拉氏变换$\mathbf{F(s)} = \dfrac{e^{-s}}{s^2}(1-e^{-s}-se^{-s})$ 求图中信号**y(t)**的拉氏变换**Y(s)**。

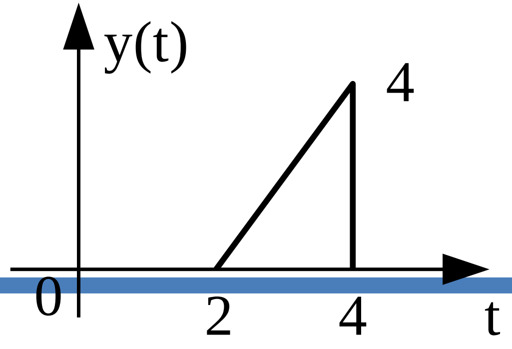
解： y(t)= 4f(0.5t)



Y(s) = 4×2 F(2s)

$$= \frac{8e^{-2s}}{(2s)^2}(1-e^{-2s}-2se^{-2s})$$

$$= \frac{2e^{-2s}}{s^2}(1-e^{-2s}-2se^{-2s})$$

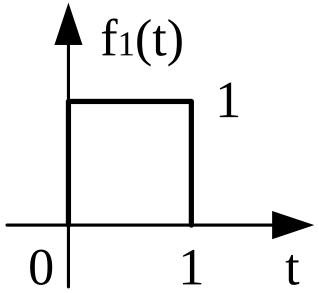


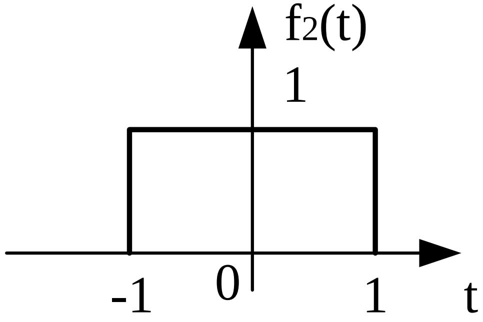
三、时移特性

若$f(t)$ <------>$F(s)$, Re[s]>σ_0, 且有实常数t_0>0 ,

则$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$<------>$e^{-st_0}F(s)$, Re[s]>σ_0

例1:求如图信号的单边拉氏变换。





解： $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$， $f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$

$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

$$F_2(s) = F_1(s)$$

四、复频移（s域平移）特性

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$ ，且有复常数$s_a=\sigma_a+j\omega_a$,

则$f(t)e^{s_a t} \longleftrightarrow F(s-s_a)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0+\sigma_a$

例1:已知因果信号f(t)的象函数$F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$

求$e^{-t}f(3t-2)$的象函数。

解： $e^{-t}f(3t-2) \longleftrightarrow \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9}e^{-\frac{2}{3}(s+1)}$

五、时域的微分特性（微分定理）

若$f(\mathrm{t}) \longleftrightarrow F(\mathrm{s})$, $\mathrm{Re}[\mathrm{s}]>\sigma_0$,

则$f'(\mathrm{t}) \longleftrightarrow \mathrm{s}F(\mathrm{s}) - f(0_-)$

推广：

$$L\left[\frac{\mathrm{d}\, f^{2}(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s[F(s) - f(0_-)] - f'(0_-)$$

$$= s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$L\left[\frac{\mathrm{d}\, f^{n}(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-)$$

若f(t)为因果信号，则$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^n F(s)$

举例

若$f(\mathrm{t})$为因果信号，则$f^{(\mathrm{n})}(\mathrm{t}) \longleftrightarrow \mathrm{s}^{\mathrm{n}}F(\mathrm{s})$

例1: $\delta^{(\mathrm{n})}(\mathrm{t}) \longleftrightarrow ?$

例2: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\right] \longleftrightarrow ?$

例3: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t] \longleftrightarrow ?$

例4: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos 2t\varepsilon(t)] \longleftrightarrow ?$

举例

例1: $\because\ \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

$\therefore\ \delta(t) \leftrightarrow s\cdot\frac{1}{s} - \varepsilon(0\_) = 1$

$\delta'(t) \leftrightarrow s \qquad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$

例2: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)] \leftrightarrow ?$

解: $\because\ e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$

$\therefore\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)] \leftrightarrow \frac{s}{s+\alpha}$

举例

例3: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\cos 2t] \leftrightarrow ?$

方案(一)：直接微分运算

$$\frac{d}{dt}\cos 2t = -2\sin 2t \leftrightarrow -2\times\frac{2}{s^2+2^2} = -\frac{4}{s^2+4}$$

方案(二)：时域微分特性

$$\cos 2t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+2^2} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\cos 2t\Big|_{0^-} = 1$$

$$\frac{d}{dt}\cos 2t \leftrightarrow s\times\frac{s}{s^2+2^2} - 1 = -\frac{4}{s^2+4}$$

举例

例4: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\cos 2t\,\varepsilon(t)\right] \leftrightarrow ?$

方案(一)：直接微分运算

$$\frac{d}{dt}\left[\cos 2t\,\varepsilon(t)\right] = -2\sin 2t\,\varepsilon(t) + \cos 2t\,\delta(t) = \delta(t) - 2\sin 2t\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\cos 2t\,\varepsilon(t)\right] \leftrightarrow 1 - 2\times\frac{2}{s^2+2^2} = \frac{s^2}{s^2+4}$$

方案(二)：时域微分特性

$$\cos 2t\,\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+2^2} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\cos 2t\,\varepsilon(t)\right] \leftrightarrow s\times\frac{s}{s^2+2^2} = \frac{s^2}{s^2+4}$$

六、时域积分特性（积分定理）

若$L\left[f(t)\right]=F(s)$，则 $L\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

证明：

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\underbrace{\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{①}+\underbrace{\int_{0_-}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{②}$$

① $f^{(-1)}(0_-) \rightarrow \dfrac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

② $$\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0_-}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\int_{0_-}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]_{0}^{\infty}+\frac{1}{s}\int_{0_-}^{t} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}\int_{0_-}^{t} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{F(s)}{s}$$

$$\left(\int_{0-}^{t}\right)^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \frac{1}{s^{n}}F(s)$$

例1: $t^2\varepsilon(t)$<---->?

$$\int_{0}^{t}\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = t\varepsilon(t)$$

$$\left(\int_{0}^{t}\right)^{2}\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{t}x\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2}}{2}\varepsilon(t)$$

$$t^{2}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{2}{s^{3}}$$

七、卷积定理

时域卷积定理

若因果函数 $f_1(\mathrm{t}) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{s})$, $\mathrm{Re}[\mathrm{s}]>\sigma_1$,

$f_2(\mathrm{t}) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{s})$, $\mathrm{Re}[\mathrm{s}]>\sigma_2$

则 $f_1(\mathrm{t})*f_2(\mathrm{t}) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{s})F_2(\mathrm{s})$

复频域（s域）卷积定理

$$f_1(t)\,f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta)F_2(s-\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

例1： $t\,\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$　$t\,\varepsilon(t)=\varepsilon(t)*\varepsilon(t) \longleftrightarrow (1/\mathrm{s})\bullet(1/\mathrm{s})=1/\mathrm{s}^2$

例2： 已知$F(\mathrm{s})=\dfrac{1}{\mathrm{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})} \longleftrightarrow ?$　$\varepsilon(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-2n)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon(t-2n)$

八、s域微分和积分

若$f(t) \longleftrightarrow F(s)$, $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$, 则

$$(-t)f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} \qquad (-t)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta)\mathrm{d}\eta$$

例1： $t^2 e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow ?$

$$e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow 1/(s+2)$$

$$t^2 e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{(s+2)^3}$$

九、初值定理和终值定理

初值定理和终值定理常用于由$F(s)$直接求$f(0_+)$和$f(\infty)$，而不必求出原函数$f(t)$。

初值定理

设函数$f(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数（即$F(s)$为真分式，若$F(s)$为假分式化为真分式），则

$$f(0+)=\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

这个条件意味着什么？

终值定理

若$f(t)$当$t\to\infty$时存在，并且$f(t)\longleftrightarrow F(s)$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$，$\sigma_0<0$，则

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

举例

例1：$F(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+2}$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=2$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{2s^2}{s^2+2s+2}=0$$

例2：$F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+2s+2}$

$$F(s)=1-\frac{2s+2}{s^2+2s+2}$$

$$f(0+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s^2-2s}{s^2+2s+2}=-2$$

总结

本节课我们主要讨论了

（1）拉普拉斯变换的性质。

课后习题：5.9， 5.11，5.14

预 习

下节课我们将要讨论拉普拉斯逆变换及系统分析

（1）请对比算子法，思考部分分式法与算子法有哪些异同，能不能互相借鉴。

（2）对比傅里叶分析法，思考拉普拉斯系统分析与傅里叶分析有哪些相似点？哪些不同点？