

一、引言

二、周期信号的傅里叶级数

三、周期信号的频谱

- 了解完备正交函数集作为子信号的意义
- 掌握周期函数的傅里叶级数展开：三角函数形式及复指数形式（考点）
- 掌握周期函数频谱的概念、特点及带宽。（考点）

一、引言



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

时域分析，以**冲激函数**为基本信号，任意输入信号可分解为一系列冲激函数之和；而

$$r_{zs}(t) = h(t) * e(t)$$

本章将以**正弦信号**和**虚指数信号** $e^{j\omega t}$ 为基本信号，任意输入信号可分解为一系列**不同频率**的正弦信号或虚指数信号之和。

用于系统分析的独立变量是**频率**，故称为**频域分析**。



从本章开始由时域转入变换域分析，首先讨论傅里叶变换。傅里叶变换是在傅里叶级数正交函数展开的基础上发展而产生的，这方面的问题也称为傅里叶分析（频域分析）。将信号进行正交分解，即分解为三角函数或复指数函数的组合。

频域分析将时间变量变换成频率变量，揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽以及滤波、调制等重要概念。

二、傅里叶级数



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

- 信号正交
- 傅里叶级数的三角形式
- 波形的对称性与谐波特性
- 傅里叶级数的指数形式
- 周期信号的功率——Parseval等式

1.信号正交与正交函数集



1) 信号正交:

定义在 (t_1, t_2) 区间的 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) \varphi_2^*(t) dt = 0 \quad (\text{两函数的内积为0})$$

则称 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。

2) 正交函数集:

若 n 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ 构成一个函数集, 这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间 (t_1, t_2) 的正交函数集。



3) 完备正交函数集:

如果在正交函数集 $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 之外, 不存在函数 $\varphi(t)(\neq 0)$ 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi^*(t) \varphi_i(t) dt = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例如:

三角函数集 $\{1, \cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t), n=1, 2, \dots\}$

虚指数函数集 $\{e^{jn\Omega t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

是两组典型的在区间 $(t_0, t_0+T)(T=2\pi/\Omega)$ 上的完备正交函数集。

2.傅里叶级数的三角形式



1)三角函数集

$$\{1, \cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t), n=1, 2, \dots\}$$

在一个周期内是一个完备的正交函数集。

由积分可知

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t) \cdot \sin(m\Omega t) dt = 0$$
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t) \cdot \cos(m\Omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\Omega t) \cdot \sin(m\Omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$



2) 级数形式

设周期信号 $f(t)$ ，其周期为 T ，角频率 $\Omega=2\pi/T$ ，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，它可分解为如下三角级数——称为 $f(t)$ 的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

系数 a_n, b_n 称为**傅里叶系数**

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

可见， a_n 是 n 的偶函数， b_n 是 n 的奇函数。



$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

式中, $A_0 = a_0$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$

可见: A_n 是 n 的偶函数, φ_n 是 n 的奇函数。

上式表明, 周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

- $A_0/2$ 为直流分量
 - $A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$ 称为基波或一次谐波, 其角频率与原周期信号相同
 - $A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$ 称为二次谐波, 其频率是基波的2倍
- 一般而言, $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ 称为 n 次谐波。

3.波形的对称性与谐波特性



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\Omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\Omega t) dt$$

1) $f(t)$ 为偶函数——对称纵坐标

$$f(t) = f(-t)$$

$b_n = 0$, 展开为余弦级数。

2) $f(t)$ 为奇函数——对称于原点

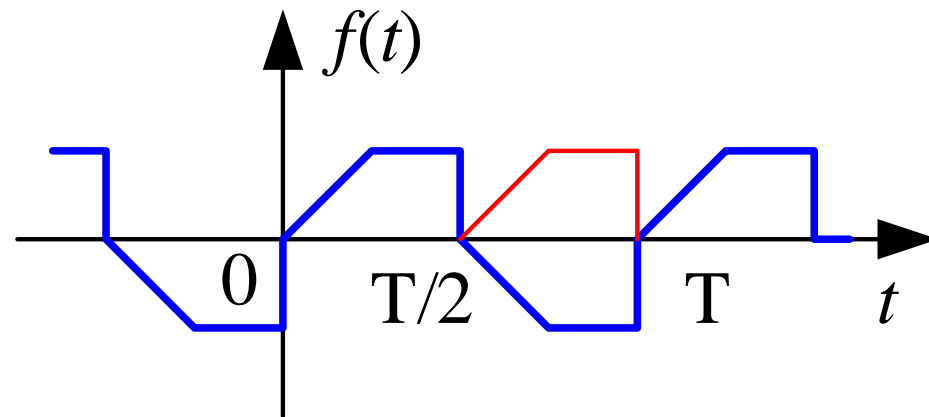
$$f(t) = -f(-t)$$

$a_n = 0$, 展开为正弦级数。

3) $f(t)$ 为奇谐函数—— $f(t) = -f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中只含奇次谐波分量，而不含偶次谐波分量即

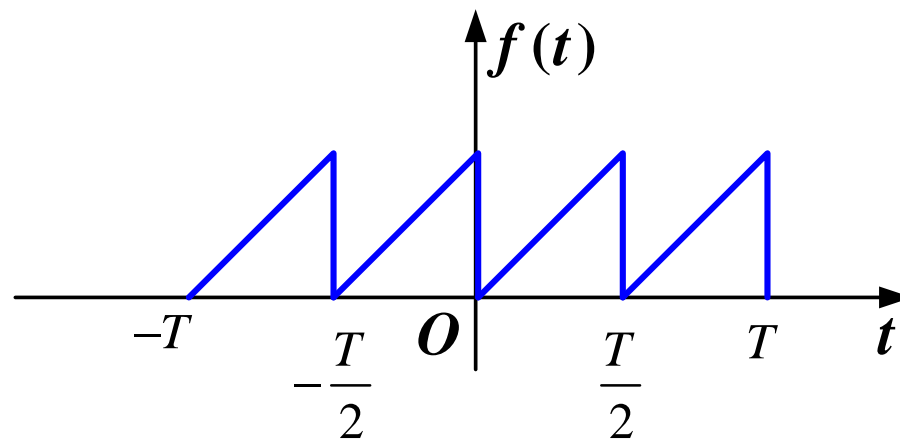
$$a_0 = a_2 = \dots = b_2 = b_4 = \dots = 0$$



4) $f(t)$ 为偶谐函数—— $f(t) = f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中只含偶次谐波分量，而不含奇次谐波分量即

$$a_1 = a_3 = \dots = b_1 = b_3 = \dots = 0$$



4.傅里叶级数的指数形式



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

三角形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用**指数形式**的傅里叶级数。

虚指数函数集 $\{e^{jn\Omega t}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

系数 F_n 称为**复傅里叶系数**

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

利用 $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$ 可从三角形式推出



傅里叶系数之间关系

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \quad a_n = A_n \cos \varphi_n \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n$$

n 的偶函数: a_n , A_n , $|F_n|$

n 的奇函数: b_n , φ_n

5.周期信号的功率—Parseval等式（了解）



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

周期信号一般是功率信号，其平均功率为

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

直流和n次谐波分量在1Ω电阻上消耗的平均功率之和。

$$n \geq 0 \text{ 时, } |F_n| = A_n/2。$$

这是Parseval定理在傅里叶级数情况下的具体体现。

三、周期信号的频谱



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

- 信号频谱的概念
- 周期信号频谱的特点
- 频带宽度



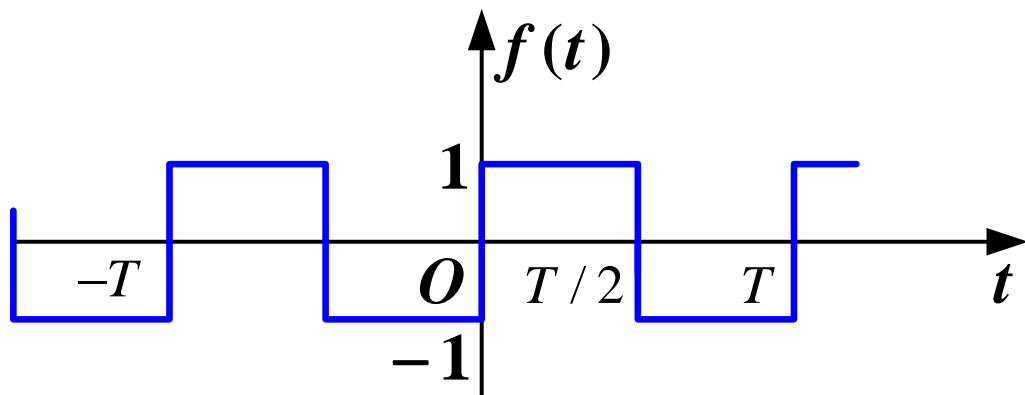
1.信号频谱的概念

从广义上说，信号的某种特征量随信号频率变化的关系，称为信号的频谱，所画出的图形称为信号的频谱图。

周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即将 $A_n \sim \omega$ 和 $\varphi_n \sim \omega$ 的关系分别画在以 ω 为横轴的平面上得到的两个图，分别称为振幅频谱图和相位频谱图。因为 $n \geq 0$ ，所以称这种频谱为**单边谱**。

也可画 $|F_n| \sim \omega$ 和 $\varphi_n \sim \omega$ 的关系，称为**双边谱**。若 F_n 为实数，也可直接画 F_n 。

图示



频谱概念演示

例1

例2

既是奇函数又是奇谐函数
只含奇次谐波,且为正弦波.

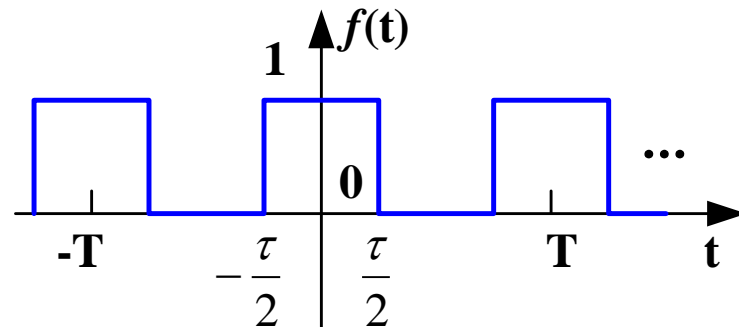
对于双边频谱, 负频率, 只有数学意义, 而无物理意义。为什么引入负频率?

$f(t)$ 是实函数, 分解成虚指数, 必须有共轭对 $e^{jn\Omega t}$ 和 $e^{-jn\Omega t}$, 才能保证 $f(t)$ 的实函数的性质不变。

2. 周期信号频谱的特点



举例：有一幅度为1，脉冲宽度为 τ 的周期矩形脉冲，其周期为 T ，如图所示。求频谱。



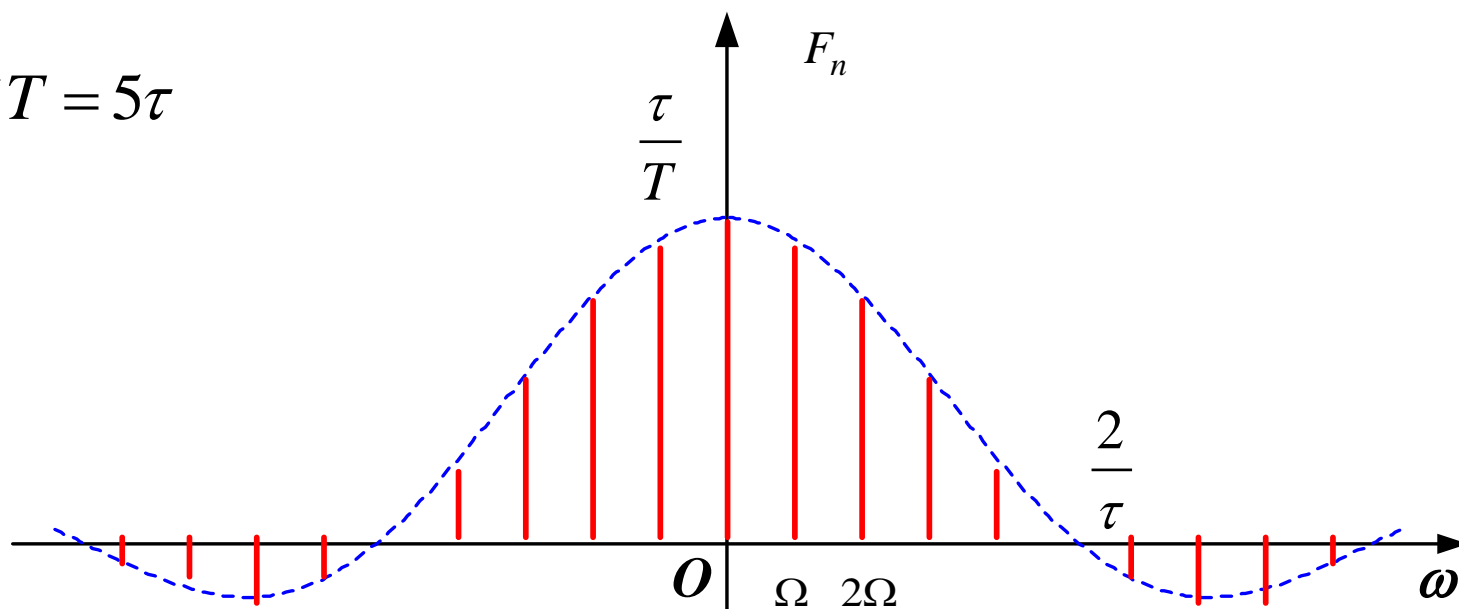
$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{e^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega} \bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{T} \frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{n\Omega} = \frac{\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}} \end{aligned}$$

令 $\text{Sa}(x) = \sin(x)/x$ (取样函数)

$$F_n = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



图中 $T = 5\tau$



- (1) 包络线形状：抽样函数； (2) 其最大值在 $n=0$ 处，为 $\frac{\tau}{T}$ ；
 (3) 离散谱（谐波性） (4) 第一个零点坐标 $\frac{2}{\tau}$ ，令 $\frac{n\Omega\tau}{2} = \pi \rightarrow \omega = n\Omega = \frac{2}{\tau}$
 (5) F_n 一般为复函数（此处为实函数）， $F_n > 0$ ，相位为 0， $F_n < 0$ ，相位为 $\pm \pi$



(1)周期信号的频谱具有谐波(离散)性。谱线位置是基频 Ω 的整数倍；(2)一般具有收敛性。总趋势减小。

谱线的结构与波形参数的关系

➤ T 一定, τ 变小, 此时 Ω (谱线间隔) 不变。两零点之间的谱线数目:
 $\omega_1/\Omega = (2\pi/\tau) / (2\pi/T) = T/\tau$ 增多。

➤ τ 一定, T 增大, 间隔 Ω 减小, 频谱变密。幅度减小。

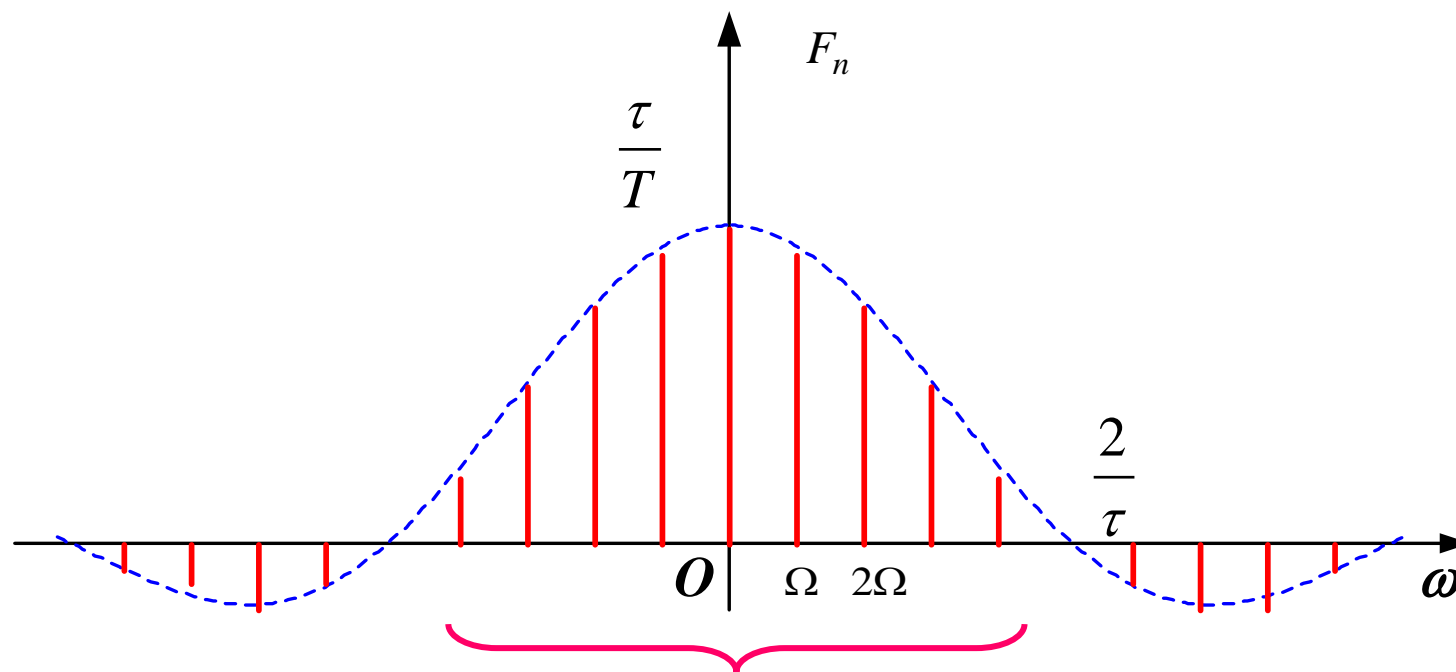
如果周期 T 无限增长 (这时就成为非周期信号), 那么, 谱线间隔将趋近于零, 周期信号的离散频谱就过渡到非周期信号的连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

3. 频带宽度



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

1) 问题提出



第一个零点集中了信号**绝大部分能量**（平均功率）
由频谱的**收敛性**可知，信号的功率集中在低频段。

周期矩形脉冲信号的功率



天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

以 $\tau = \frac{1}{20} s, T = \frac{1}{4} s$ 为例，取前 5 次谐波

$$\begin{aligned} P_{5n} &= F_0^2 + |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 + |F_{-1}|^2 + |F_{-2}|^2 + |F_{-3}|^2 + |F_{-4}|^2 \\ &= 0.181 \end{aligned}$$

而总功率 $P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = 0.2$

二者比值 $\frac{P_{5n}}{P} = 90.5\%$

2)频带宽度



在满足一定失真条件下，信号可以用某段频率范围的信号来表示，此频率范围称为**频带宽度**。

★一般把**第一个零点**作为信号的频带宽度。记为：

$$B_{\omega} = \frac{2}{\tau} \text{ 或 } B_f = \frac{1}{\tau}, \text{ 带宽与脉宽成反比。}$$

★对于一般周期信号，将幅度下降为 **$0.1|F_n|_{\max}$** 的频率区间定义为频带宽度。

3)系统的通频带>信号的带宽，才能不失真

语音信号	频率大约为	300~3400Hz,
音乐信号		50~15,000Hz,
扩音器与扬声器	有效带宽约为	15~20,000Hz。

本节课我们主要讨论了

- (1) 完备正交函数集的定义及如何进行信号分解;
- (2) 周期函数傅里叶级数展开的三角函数形式;
- (3) 周期函数傅里叶级数展开的复指数形式
- (4) 周期信号的频谱图及频带宽度的定义。

课后习题:
习题 3.10

下节课我们将要讨论傅里叶变换

(1) 请思考，傅里叶变换和傅里叶级数展开之间有无联系？有哪些联系？

(2) 周期信号频谱与非周期信号频谱有哪些不同？又有哪些相似之处？