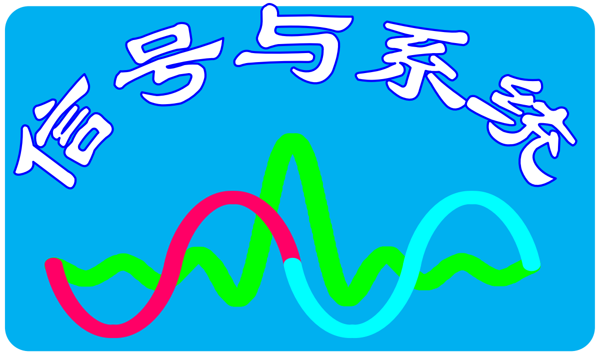
天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences



一、Z变换

二、Z变换性质

一、z变换

在连续系统中，为了避开解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。出于同样的动机，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。

1、从拉普拉斯变换到z变换

对连续信号进行均匀冲激取样后，就得到离散信号:

取样信号 $$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

两边取双边拉普拉斯变换，得

$$F_{Sb}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\mathrm{e}^{-kTs}$$

令$z = \mathrm{e}^{sT}$，上式将成为复变量z的函数，用$F(z)$表示；$f(kT) \to f(k)$ ，得

2、z变换定义

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列f(k)的双边z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

称为序列f(k)的单边z变换

若f(k)为因果序列，则单边、双边z变换相等，否则不等。今后在不致混淆的情况下，统称它们为z变换。

F(z) = Z[f(k)]， f(k)= Z^{-1}[F(z)]；

f(k)←→F(z)

3、收敛域

z变换定义为一无穷幂级数之和，显然只有当该幂级数收敛，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$$

时，其z变换才存在。上式称为绝对可和条件，它是序列$f(k)$的z变换存在的**充分必要条件**。

收敛域的定义：

对于序列$f(k)$，满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$

所有z值组成的集合称为z变换$F(z)$的收敛域。

例1：求以下有限序列的z变换(1) $f_1(k)=\delta(k)$ $\quad \downarrow k=0$

(2) $f_2(k)=\{1,2,3,2,1\}$

解（1） $$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)=1$$

其单边、双边z变换相等。与z 无关，所以其收敛域为整个z 平面。

(2) $f_2(k)$的双边z 变换为 $F_2(z)=z^2+2z+3+2z^{-1}+z^{-2}$ 收敛域为$0<|z|<\infty$

$f_2(k)$的单边z 变换为 $F_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_2(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$ 收敛域为$|z|>0$

对有限序列的z变换的收敛域一般为$0<|z|<\infty$，有时它在0或/和∞也收敛。

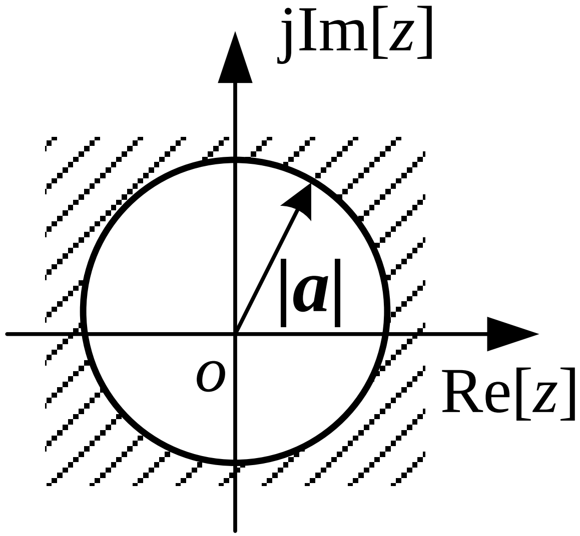
例2 求因果序列 $f_y(k)=a^k\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ a^k, & k\ge 0\end{cases}$ 的z变换

解：根据定义

$$F_y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见，仅当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，其z变换存在。

$$F_y(z)=\frac{z}{z-a}$$ 收敛域为|z|>|a|



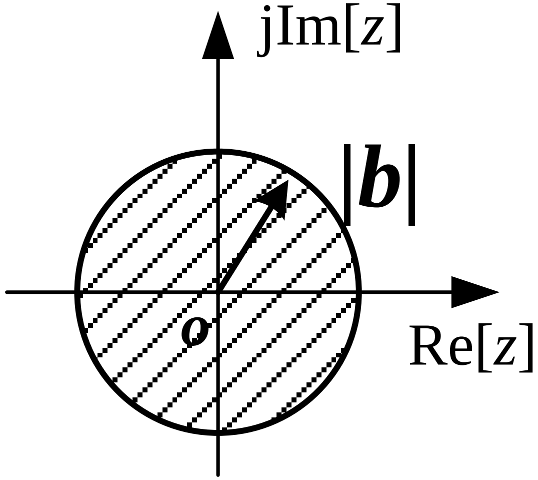
例3 求反因果序列 $f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ 0, & k\geq 0 \end{cases} = b^k\varepsilon(-k-1)$ 的z变换

解： $$F_f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

可见， $|b^{-1}z|<1$,即 $|z|<|b|$时，其z变换存在，

$$F_f(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为$|z|<|b|$

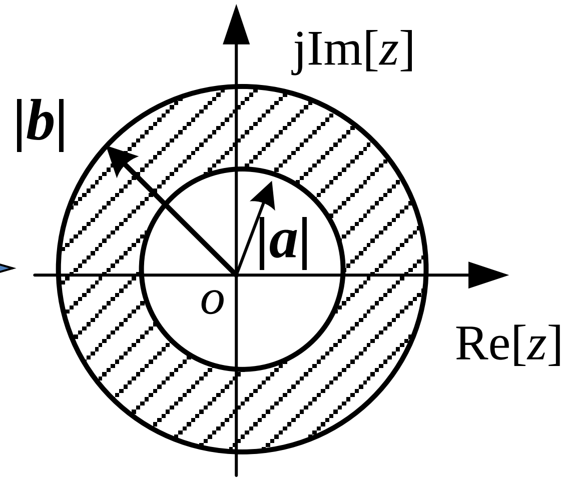


例4 双边序列$f(k)=f_y(k)+f_f(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\geq 0 \end{cases}$ 的z变换

解

$$F(z)=F_y(z)+F_f(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{-z}{z-b}$$

可见，其收敛域为$|a|<|z|<|b|$（显然要求$|a|<|b|$，否则无共同收敛域)



序列的收敛域大致有一下几种情况：

（1）对于有限长的序列，其双边z变换在整个平面；

（2）对因果序列，其z变换的收敛域为某个圆外区域；

（3）对反因果序列，其z变换的收敛域为某个圆内区域；

（4）对双边序列，其z变换的收敛域为环状区域；

注意：对双边z变换必须表明收敛域，否则其对应的原序列将不唯一。

例

$$f_1(k)=2^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-2}\quad,\quad |z|>2$$

$$f_2(k)=-2^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-2}\quad,\quad |z|<2$$

对单边z变换，其收敛域比较简单，一定是某个圆以外的区域。可以省略。

常用序列的z变换：

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1\quad,\quad |z|>0$$

$$\varepsilon(k)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\quad,\quad |z|>1$$

$$-\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\quad,\quad |z|<1$$

二、z变换的性质

- 线性性质
- 移位特性
- z域尺度变换
- 卷积定理
- z域微分
- z域积分
- k域反转
- 部分和
- 初值定理
- 终值定理

本节讨论z变换的性质，若无特殊说明，它既适用于单边也适用于双边z变换。

1、线性性质

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$,

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

对任意常数a_1、a_2，则

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$$

其收敛域至少是$F_1(z)$ 与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例：$2\delta(k) + 3\varepsilon(k) \longleftrightarrow 2 + \dfrac{3z}{z-1} \quad , \quad |z| > 1$

二、移位特性

单边、双边差别大！

双边z变换的移位：

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $\alpha<|z|<\beta$，且对整数m>0，则

$$f(k\pm m) \longleftrightarrow z^{\pm m}F(z),\ \alpha<|z|<\beta$$

单边z变换的移位：后向移位

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$, $|z| > \alpha$，且有整数m>0, 则

$$f(k-1) \longleftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1)$$

$$f(k-2) \longleftrightarrow z^{-2}F(z) + f(-2) + f(-1)z^{-1}$$

$$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}$$

前向移位：

$$f(k+1) \longleftrightarrow zF(z) - f(0)z$$

$$f(k+2) \longleftrightarrow z^2F(z) - f(0)z^2 - f(1)z$$

$$f(k+m) \longleftrightarrow z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{m-k}$$

特例：若$f(k)$为因果序列，则$f(k-m) \longleftrightarrow z^{-m}F(z)$

例1：求周期为N的有始周期性单位序列

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)$$ 的z变换。

解 $$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)\longleftrightarrow\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^N}{z^N-1}\qquad |z|>1$$

例2：求$f(k)=k\varepsilon(k)$的单边z变换$F(z)$.

解 $f(k+1)=(k+1)\varepsilon(k+1)=(k+1)\varepsilon(k)=f(k)+\varepsilon(k)$

$$zF(z)-zf(0)=F(z)+\frac{z}{z-1}\qquad F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

3、序列乘a^k(z域尺度变换)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$，$\alpha<|z|<\beta$， 且有常数$a\neq0$

则 $a^k f(k) \longleftrightarrow F(z/a)$, $\alpha|a|<|z|<\beta|a|$

例1： $a^k\varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$

例2： $\cos(\beta k)\varepsilon(k) \longleftrightarrow ?$

$$\cos(\beta k)\varepsilon(k)=0.5(e^{j\beta k}+e^{-j\beta k})\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{0.5z}{z-e^{j\beta}}+\frac{0.5z}{z-e^{-j\beta}}$$

4、卷积定理

若 $f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1 < |z| < \beta_1$,

$f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z) \quad \alpha_2 < |z| < \beta_2$

则 $f_1(k) * f_2(k) \longleftrightarrow F_1(z) F_2(z)$

对单边z变换，要求$f_1(k)$、$f_2(k)$为因果序列

其收敛域一般为$F_1(z)$与$F_2(z)$收敛域的相交部分。

例： 求$f(k) = k\varepsilon(k)$的z变换F(z).

解： $f(k) = k\varepsilon(k) = \varepsilon(k) * \varepsilon(k-1)$

$$\longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \frac{z^{-1}z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

5、序列乘k（z域微分）

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$

则

$$kf(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) \quad ,\ \alpha < |z| < \beta$$

例： 求$f(k)= k\varepsilon(k)$的z变换$F(z)$.

解：

$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$k\varepsilon(k) \longleftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

6、序列除(k+m)(z域积分)

若 f(k) $\longleftrightarrow$ F(z) ，α< |z |<β，设有整数m，且k+m>0，

则
$$\frac{f(k)}{k+m} \longleftrightarrow z^m \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta \qquad , \alpha < |z| < \beta$$

若m=0，且k>0，则
$$\frac{f(k)}{k} \longleftrightarrow \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta$$

例：求序列 $\frac{1}{k+1}\varepsilon(k)$ 的z变换。

解
$$\varepsilon(k) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{k+1}\varepsilon(k) \longleftrightarrow z\int_z^{\infty} \frac{\eta}{(\eta-1)\eta^2} d\eta = z\int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{\eta}\right) d\eta = z\ln\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)\Big|_z^{\infty} = z\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

7、 k域反转 (仅适用双边z变换)

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha < |z| < \beta$

则 $f(-k) \longleftrightarrow F(z^{-1})$, $1/\beta < |z| < 1/\alpha$

例： 已知 $a^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$ ， $|z| > a$ 求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的z变换。

解 $$a^{k-1}\varepsilon(k-1) \longleftrightarrow \frac{z^{-1}z}{z-a} = \frac{1}{z-a} \quad , \quad |z| > a$$

$$a^{-k-1}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{1}{z^{-1}-a} \quad , \quad |z| < 1/a$$

乘a得 $$a^{-k}\varepsilon(-k-1) \longleftrightarrow \frac{a}{z^{-1}-a} \quad , \quad |z| < 1/a$$

8、部分和

若 $f(k) \longleftrightarrow F(z)$ ，$\alpha<|z|<\beta$，则

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z) \quad , \ \max(\alpha,1)<|z|<\beta$$

例：求序列(a为实数) $\sum_{i=0}^{k} a^i$ (k≥0)的z变换。

解 $$\sum_{i=0}^{k} a^i = \sum_{i=-\infty}^{k} a^i \varepsilon(i) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\frac{z}{z-a} \quad , \ |z|>\max(|a|,1)$$

9、初值定理和终值定理

初值定理适用于右边序列，即适用于k<M(M为整数)时$f(k)=0$的序列。它用于由象函数直接求得序列的初值$f(M),f(M+1),\ldots$，而不必求得原序列。

初值定理：

如果序列在k<M时，$f(k)=0$，它与象函数的关系为

$$f(k) \longleftrightarrow F(z),\quad \alpha<|z|<\infty$$

则序列的初值 $f(M)=\lim\limits_{z\to\infty} z^m F(z)$

对因果序列$f(k)$， $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

终值定理适用于右边序列，用于由象函数直接求得序列的终值，而不必求得原序列。

如果序列在k<M时，$f(k)=0$，它与象函数的关系为

$$f(k) \longleftrightarrow F(z)\ ,\quad \alpha<|z|<\infty \text{且} 0\le\alpha<1$$

含单位圆

则序列的终值

$$f(\infty)=\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$