

一、拉普拉斯变换

二、收敛域

三、单边拉普拉斯变换

四、常用信号拉普拉斯变换

- 掌握拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换的定义
- 掌握拉普拉斯变换的收敛域（重点）
- 掌握基本函数的拉普拉斯变换（必记）

## 第五章 连续系统的s域分析



天津中德应用技术大学  
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

频域分析以**虚指数信号** $e^{j\omega t}$ 为基本信号，任意信号可分解为众多不同频率的虚指数分量之和。使响应的求解得到简化。物理意义清楚。但也有不足：

- (1) 有些重要信号不存在傅里叶变换，如 $e^{2t}\varepsilon(t)$ ；
- (2) 对于给定初始状态的系统难于利用频域分析。

在这一章将通过把频域中的傅里叶变换推广到复频域来解决这些问题。

本章引入**复频率** $s = \sigma + j\omega$ ，以**复指数函数** $e^{st}$ 为基本信号，任意信号可分解为不同复频率的复指数分量之和。这里用于系统分析的独立变量是复频率  $s$ ，故称为s域分析。所采用的数学工具为拉普拉斯变换。

# 一、从傅里叶变换到拉普拉斯变换



有些函数不满足绝对可积条件，求解傅里叶变换困难。为此，可用一衰减因子 $e^{-\sigma t}$  ( $\sigma$ 为实常数) 乘信号 $f(t)$ ，适当选取 $\sigma$ 的值，使乘积信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时信号幅度趋近于0，从而使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换存在。

$$F_b(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

相应的傅里叶逆变换 为

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_b(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad \text{令 } s = \sigma + j\omega, d\omega = ds/j, \text{ 有}$$

## 双边拉普拉斯变换对

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s) e^{st} ds$$

$F_b(s)$ 称为 $f(t)$ 的双边拉氏变换（或象函数），  
 $f(t)$ 称为 $F_b(s)$ 的双边拉氏逆变换（或原函数）。

# 两种变换的对比



天津中德应用技术大学  
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

变量  
信号

时域

$t$

$f(t)$

傅里叶变换

频域

$\omega$

实数

$F(\omega)$

复函数

变量  
信号

时域

$t$

$f(t)$

拉普拉斯变换

复频域

$s$

复数

$F(s)$

复变函数

## 二、收敛域



天津中德应用技术大学  
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

只有选择适当的 $\sigma$ 值才能使积分收敛，信号 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换存在。

使 $f(t)$ 拉氏变换存在 $\sigma$ 的取值范围称为 $F_b(s)$ 的收敛域。

下面举例说明 $F_b(s)$ 收敛域的问题。

# 例1 因果信号 $f_1(t)=e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ ，求拉氏变换。

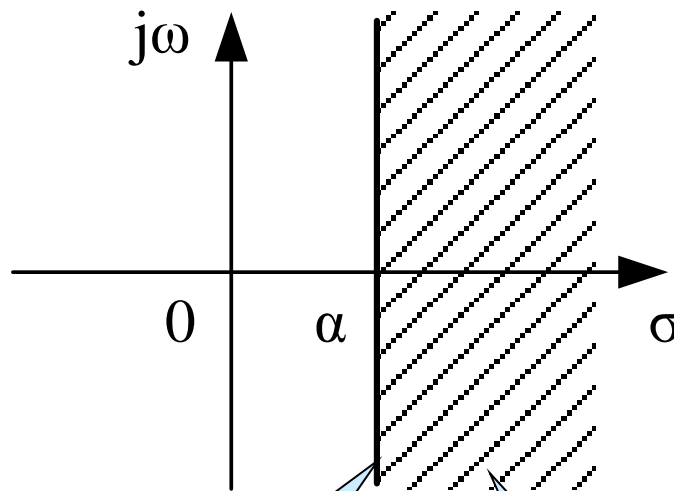


天津中德应用技术大学  
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

解

$$F_{1b}(s) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(s-\alpha)} [1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t}]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha} & , \quad \text{Re}[s] = \sigma > \alpha \\ \text{不定} & , \quad \sigma = \alpha \\ \text{无界} & , \quad \sigma < \alpha \end{cases}$$



可见，对于因果信号，仅当 $\text{Re}[s]=\sigma>\alpha$ 时，其拉氏变换存在。收敛域如图所示。

收敛边界

收敛域



## 例2 反因果信号 $f_2(t)=e^{\beta t}\varepsilon(-t)$ ，求拉氏变换。

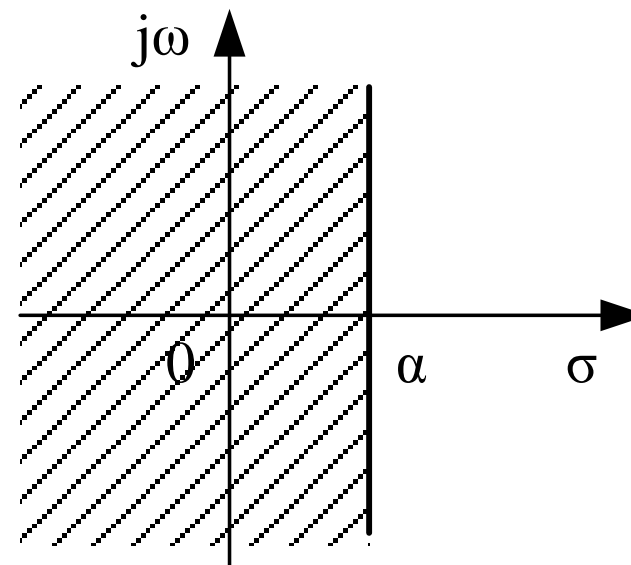


解

$$F_{2b}(s) = \int_{-\infty}^0 e^{\beta t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\beta)t}}{-(s-\beta)} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{-(s-\beta)} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s-\beta)t} e^{-j\omega t}]$$

$$= \begin{cases} \text{无界} & , \quad \text{Re}[s] = \sigma > \beta \\ \text{不定} & , \quad \sigma = \beta \\ \frac{1}{-(s-\beta)} & , \quad \sigma < \beta \end{cases}$$

可见，对于反因果信号，仅当 $\text{Re}[s]=\sigma<\beta$ 时，其拉氏变换存在。  
收敛域如图所示。





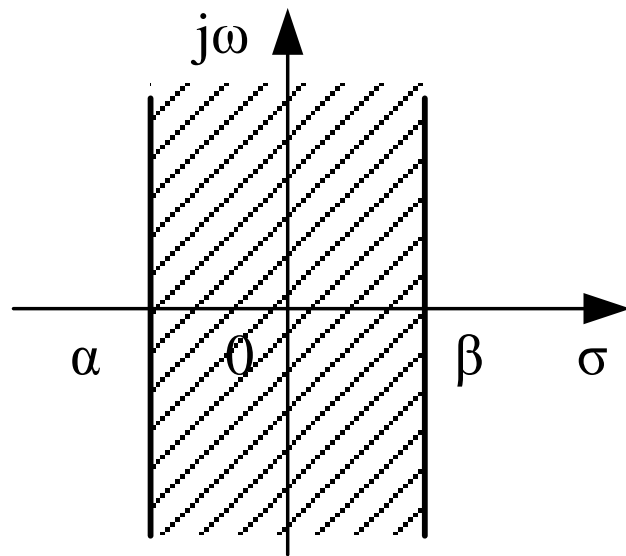
### 例3 双边信号求其拉普拉斯变换。

$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t > 0 \end{cases}$$

求其拉普拉斯变换。

解 其双边拉普拉斯变换  $F_b(s) = F_{b1}(s) + F_{b2}(s)$

仅当  $\beta > \alpha$  时，其收敛域为  $\alpha < \text{Re}[s] < \beta$  的一个带状区域，如图所示。



## 例4 求下列信号的双边拉普拉斯变换。



$$f_1(t) = e^{-3t} \varepsilon(t) + e^{-2t} \varepsilon(t)$$

$$f_2(t) = -e^{-3t} \varepsilon(-t) - e^{-2t} \varepsilon(-t)$$

$$f_3(t) = e^{-3t} \varepsilon(t) - e^{-2t} \varepsilon(-t)$$

解  $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}[s] = \sigma > -2$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}[s] = \sigma < -3$$

$$f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad -3 < \sigma < -2$$

可见，象函数相同，但收敛域不同。双边拉氏变换**必须标出收敛域**。

## 例



计算下列信号Laplace变换的收敛域:

1、 $u(t) - u(t - \tau)$

收敛域为全S平面

2、 $u(t)$

$\sigma > 0$ , 收敛域为S右半平面

3、 $\sin(\omega_0 t)u(t)$

$\sigma > 0$ , 收敛域为S右半平面

4、 $t$ 的正次幂信号： $tu(t), t^n u(t)$

$\sigma > 0$ , 收敛域为S右半平面

5、指数信号 $e^{3t}u(t)$

收敛域为S平面 $\sigma > 3$ 的区域，可表示为 $\text{Re}(s) > 3$ 的区域



通常遇到的信号都有初始时刻，不妨设其初始时刻为坐标原点。这样， $t < 0$  时， $f(t) = 0$ 。从而拉氏变换式写为

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

称为单边拉氏变换。简称拉氏变换。其收敛域一定是  $\text{Re}[s] > \alpha$ ，可以省略。本课程主要讨论单边拉氏变换。

### 三、单边拉氏变换



$$F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \right] \varepsilon(t)$$

简记为  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

或

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

## 四、常见函数的拉普拉斯变换



1、  $\delta(t) \longleftrightarrow 1, \sigma > -\infty$

2、  $\varepsilon(t)$  或  $1 \longleftrightarrow 1/s, \sigma > 0$

3、 指数函数  $e^{-s_0 t} \longleftrightarrow \frac{1}{s + s_0} \quad \sigma > -\text{Re}[s_0]$

$$\cos \omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\sin \omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$



## 4、周期信号 $f_T(t)$

$$\begin{aligned} F_T(s) &= \int_0^{\infty} f_T(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^T f_T(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} f_T(t) e^{-st} dt + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f_T(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\underbrace{\text{令 } t = t + nT}_{\text{令 } t = t + nT} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} \int_0^T f_T(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f_T(t) e^{-st} dt$$

$$\text{特例: } \delta_T(t) \longleftrightarrow 1/(1 - e^{-sT})$$



本节课我们主要讨论了

- (1) 拉普拉斯变换的定义、收敛域。
- (2) 单边拉普拉斯变换的定义。
- (3) 常见函数的拉普拉斯变换（必记）。

课后习题：无

下节课我们将要讨论拉普拉斯变换的性质

(1) 请对比傅里叶变换，总结拉普拉斯变换的性质。