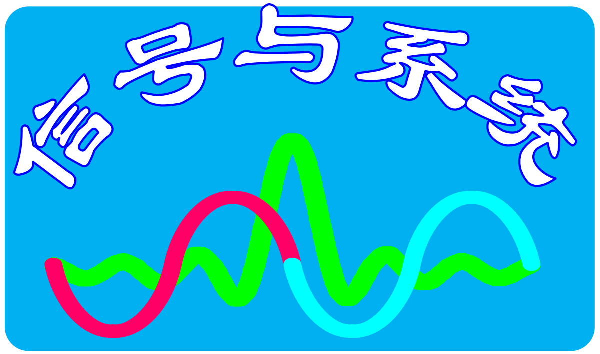


一、拉普拉斯逆变换

二、线性系统拉普拉斯变换分析法

课程目标

- 掌握拉普拉斯逆变换的求解，特别是单阶实数根和二重实数根的求解（重点）
- 掌握拉普拉斯变换（S域）系统分析法（重点）
- 了解电路S域模型

§5.5 拉普拉斯逆变换

直接利用定义式求反变换---复变函数积分，比较困难。

通常的方法：

（1）查表 （2）利用性质 （3） 部分分式展开 -----结合

若象函数F(s)是s的有理分式，可写为

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+....+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0}$$

若$m \geq n$（假分式），可用多项式除法将象函数F(s)分解为有理多项式P(s)与有理真分式之和。

$$F(s)=P(s)+\frac{B_0(s)}{A(s)}$$

一、零、极点的概念

若F(s)是s的实系数有理真分式（$m<n$)，则可写为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+....+a_1 s+a_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+...+b_1 s+b_0}$$

分解 $$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

零点 $z_1,z_2,z_3\cdots z_m$是$B(s)=0$的根,称为$F(s)$的零点 （因为$B(s)=0\Rightarrow F(s)=0$）

极点 $p_1,p_2,p_3\cdots p_n$是$A(s)=0$的根,称为$F(s)$的极点 （因为$A(s)=0\Rightarrow F(s)=\infty$）

二、拉氏逆变换的过程

求F(s)的极点

将F(s)展开为部分分式

查变换表求出原函数$f(t)$

部分分式展开

1.第一种情况：单阶实数极点

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$p_1,p_2,p_3\cdots p_n$为不同的实数根

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$$K_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{s-p_i}\right]=\mathrm{e}^{p_i t}\varepsilon(t)$$

例题

假分式情况：

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}$$

作长除法

$$\begin{array}{r l}
 & \qquad\qquad\qquad\quad s+2 \\
\cline{2-2}
s^2+3s+2 \big) & s^3+5s^2+9s+7 \\
 & s^3+3s^2+2s \\
\cline{2-2}
 & \qquad 2s^2+7s+7 \\
 & \qquad 2s^2+6s+4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad +
\end{array}$$

$$F(s)=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=s+2+F_1(s)$$

$$F_1(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)\quad+2\mathrm{e}^{-t}\,\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-2t}\,\varepsilon(t)$$

2.第二种情况：有重根存在

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{(s+1)^2}$$

K_1 为单根系数,K_3为重根最高次系数

$$K_1=(s+2)\left.\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}\right|_{s=-2}=4$$

$$K_3=(s+1)^2\left.\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}\right|_{s=-1}=1$$

K_2的求法

对原式两边乘以 $(s+1)^2$ $\dfrac{s^2}{s+2}=(s+1)^2\dfrac{K_1}{s+2}+K_2(s+1)+K_3$

令$s=-1$时，只能求出 $K_3=1$，若求K_2，两边再求导

$$右边=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2\frac{K_1}{s+2}+(s+1)K_2+K_3\right]$$

$$=\frac{2(s+1)(s+2)K_1-K_1(s+1)^2}{(s+2)^2}+K_2+0$$

$$左边=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2F(s)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s^2}{s+2}\right]=\frac{2s(s+2)-s^2}{(s+2)^2}=\frac{s^2+4s}{(s+2)^2}$$

此时令$s=-1$，右$=K_2$ $\quad 左边=\left.\dfrac{s^2+4s}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=-3$ $\quad$ 所以 $K_2=-3$

逆变换

$$F(s)=\frac{4}{s+2}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

所以 $f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=(4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-t}+t\,\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

举例 $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{13}}{(s+1)}+\frac{K_2}{s}$$

$$K_{11}=(s+1)^3F(s)|_{s=-1}=\frac{s-2}{s}|_{s=-1}=3$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+1)^3F(s)]|_{s=-1}=\frac{s-(s-2)}{s^2}|_{s=-1}=2$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s+1)^3F(s)]|_{s=-1}=\frac{1}{2}\frac{1-4s}{s^4}|_{s=-1}=2$$

$$K_2 = sF(s)|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3}|_{s=0} = -2$$

$$F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} + \frac{-2}{s}$$

$$\therefore\ f(t) = (\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-t} + 2t\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{-t} - 2)\varepsilon(t)$$

3.第三种情况：极点为共轭复数

$$F(s)=\frac{B(s)}{A_1(s)\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]} \qquad =\frac{F_1(s)}{(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)}$$

共轭极点出现在 $-\alpha \pm \mathrm{j}\beta$

$$F(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}+\ldots\ldots$$

$$F(s)=\frac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

$F(s)$具有共轭极点，不必用部分分式展开法

利用 $L\left[e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]=\frac{\beta}{\beta^2+(s+\alpha)^2}$

$$L\left[e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\right]=\frac{s+\alpha}{\beta^2+(s+\alpha)^2}$$

$$F(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}-\frac{-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

求得 $f(t)=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t) \quad (t\geq 0)$

一、微分方程的变换解

描述n阶系统的微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

系统的初始状态为$y(0\text{-})$,$y^{(1)}(0\text{-})$,… , $y^{(n\text{-}1)}(0\text{-})$。

思路：用拉普拉斯变换微分特性

$$y^{(i)}(t) \longleftrightarrow s^i Y(s) - \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)$$

若$f(t)$在$t=0$时接入系统，则 $f^{(j)}(t) \longleftrightarrow s^j F(s)$

$$[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i]Y(s) - \sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} y^{(p)}(0_-)] = [\sum_{j=0}^{m} b_j s^j]F(s)$$

s域的代数方程

$$Y(s) = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} F(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$\Rightarrow$ $y(t)$， $y_{zi}(t)$， $y_{zs}(t)$

举例

例1 描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+6f(t)$
已知初始状态 $y(0\text{-})=1$，$y'(0\text{-})=-1$，激励 $f(t)=5\cos t\,\varepsilon(t)$，求系统的全响应 $y(t)$

解： 方程取拉氏变换，并整理得

$$Y(s)=\underbrace{\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+5y(0_-)}{s^2+5s+6}}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

$$F(s)=\frac{5s}{s^2+1}$$

$$Y(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}+\frac{2}{s+2}\frac{5s}{s^2+1}$$

二、系统函数

系统函数$H(s)$定义为 $$H(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

它只与系统的结构、元件参数有关，而与激励、初始状态无关。

$$y_{zs}(t) = h(t) * f(t) \longrightarrow Y_{zs}(s) = L[h(t)]F(s)$$

$$H(s) = L[h(t)]$$

已知当输入$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$时，某LTI因果系统的零状态响应$y_{zs}(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})\varepsilon(t)$，求该系统的冲激响应和描述该系统的微分方程。

解 $$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{4}{s+2}+\frac{-2}{s+3}=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

$$h(t)=(4e^{-2t}-2e^{-3t})\,\varepsilon(t)$$

$$s^2Y_{zs}(s)+5sY_{zs}(s)+6Y_{zs}(s)=2sF(s)+8F(s)$$

取逆变换 $y_{zs}''(t)+5y_{zs}'(t)+6y_{zs}(t)=2f'(t)+8f(t)$

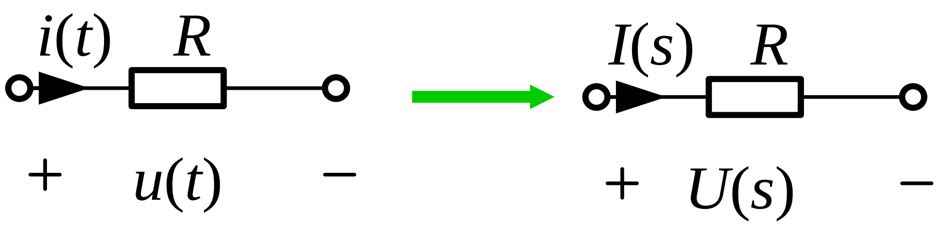
微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+8f(t)$

三、电路的s域模型（略）

对时域电路取拉氏变换

1、电阻元件的s域模型

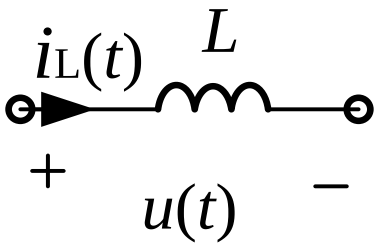
$$u(t) = R\,i(t) \longrightarrow U(s) = R\,I(s)$$



电阻元件的s域模型

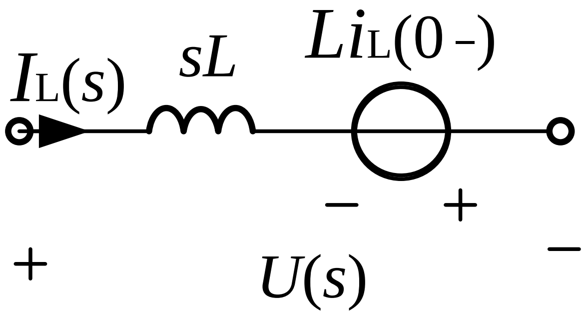
2、 电感元件的s域模型

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

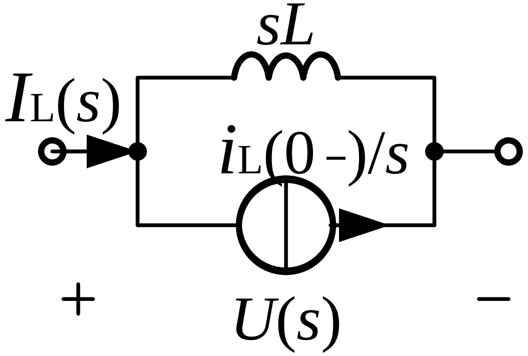


$$U(s)=sLI_L(s)-Li_L(0\text{-})$$

$$I_L(s)=\frac{1}{sL}U(s)+\frac{i_L(0_-)}{s}$$



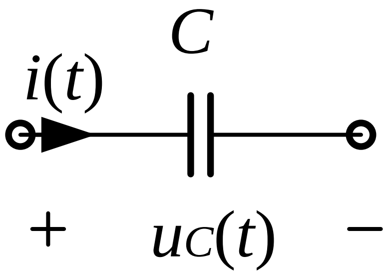
或



电感元件的s域模型

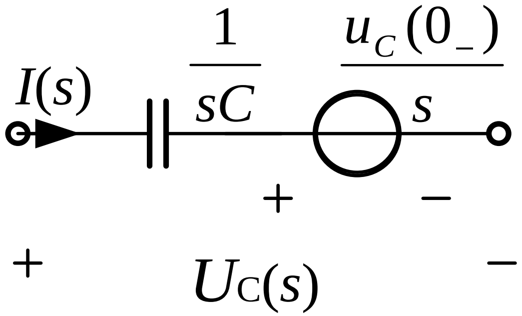
3、 电容元件的s域模型

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

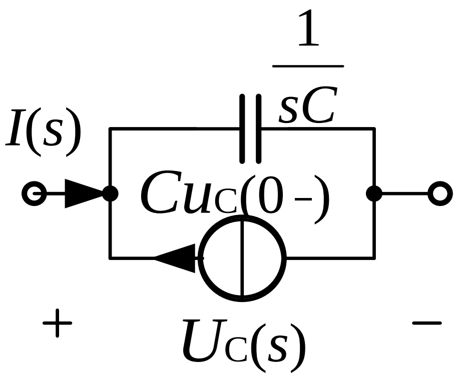


$$I(s)=sCU_C(s) - Cu_C(0\text{-})$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0\_)}{s}$$



或



电容元件的s域模型

4、KCL、KVL方程

$$\sum i(t)=0 \qquad \sum I(s)=0$$

$$\sum u(t)=0 \qquad \sum U(s)=0$$

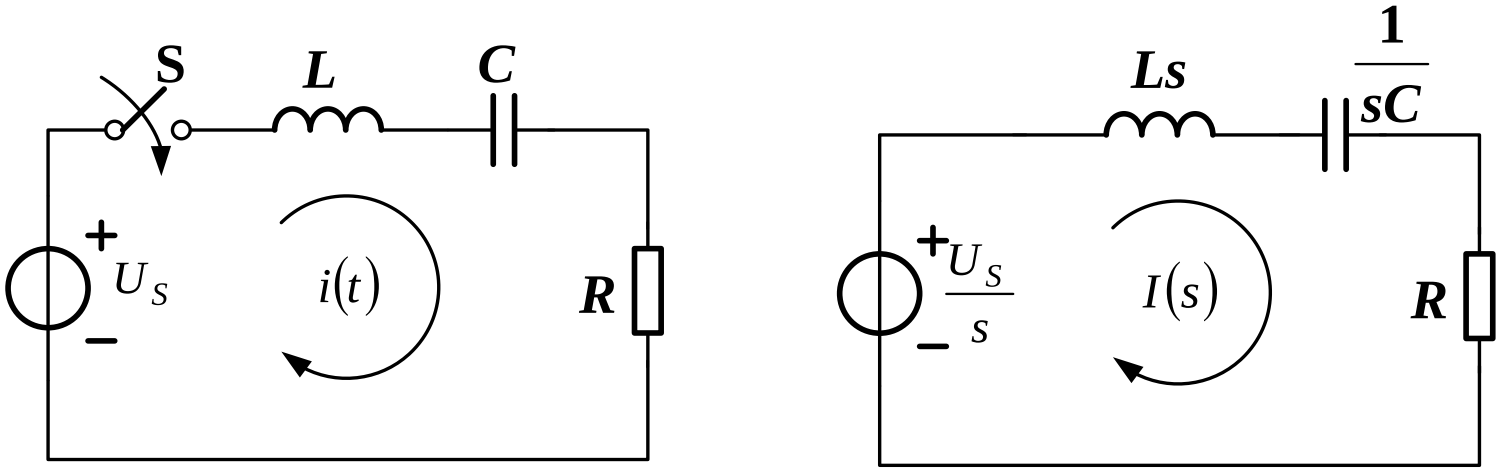
求响应的步骤

- 画0_-等效电路，求初始状态；
- 画s域等效模型；
- 列s域方程（代数方程）；
- 解s域方程，求出响应的拉氏变换$U(s)$或$I(s)$；
- 拉氏反变换求$u(t)$或$i(t)$。

例1

如图电路，初始状态为0，t=0时开关S闭合，求电流$i(t)$。

解：



(1) 初始状态为 0 $\Rightarrow i_L(0_-)=0\,\text{A}, u_C(0_-)=0\,\text{V}$

(2) $t>0$的s域等效模型

(3) 列方程 $LsI(s)+RI(s)+\dfrac{1}{Cs}I(s)=\dfrac{U_S}{s}$

总结

本节课我们主要讨论了

（1）拉普拉斯逆变换的求解方法。

（2）S域系统分析法。

（3）电路S域模型。

课后习题：5.4， 5.13，5.15，5.16

预习

下节课我们将要讨论S域的系统函数

（1）对比傅里叶分析法，思考S域下的系统函数与傅里叶变换下的系统频率响应有哪些相似点？哪些不同点？