信号与系统

一、LTI系统的频域分析

课程目标

- 掌握LTI系统的傅里叶分析法，特别是输入为非周期性函数。（考点）
- 掌握系统特征函数H(jw)的求解。（考点）

一.概述

傅里叶分析是将任意信号分解为无穷多项不同频率的虚指数函数之和。

对周期信号： $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

对非周期信号： $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

其基本信号为 $e^{j\omega t}$

- 基本信号$e^{j\omega t}$作用于LTI系统的响应
- 一般信号$f(t)$作用于LTI系统的响应
- 频率响应$H(j\omega)$的求法

二、基本信号$e^{j\omega t}$作用于LTI系统的响应

设LTI系统的冲激响应为$h(t)$，当激励是角频率ω的基本信号$e^{j\omega t}$时，其响应

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega t}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\cdot e^{j\omega t}$$

而上式积分$\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$ 正好是$h(t)$的傅里叶变换，记为$H(j\omega)$，称为系统的频率响应函数。

$$y(t) = H(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

$H(j\omega)$反映了响应$y(t)$的幅度和相位随频率变化情况。

三、一般信号$f(t)$作用于LTI系统的响应

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

齐次性

$$\frac{1}{2\pi}F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi}F(j\omega)H(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

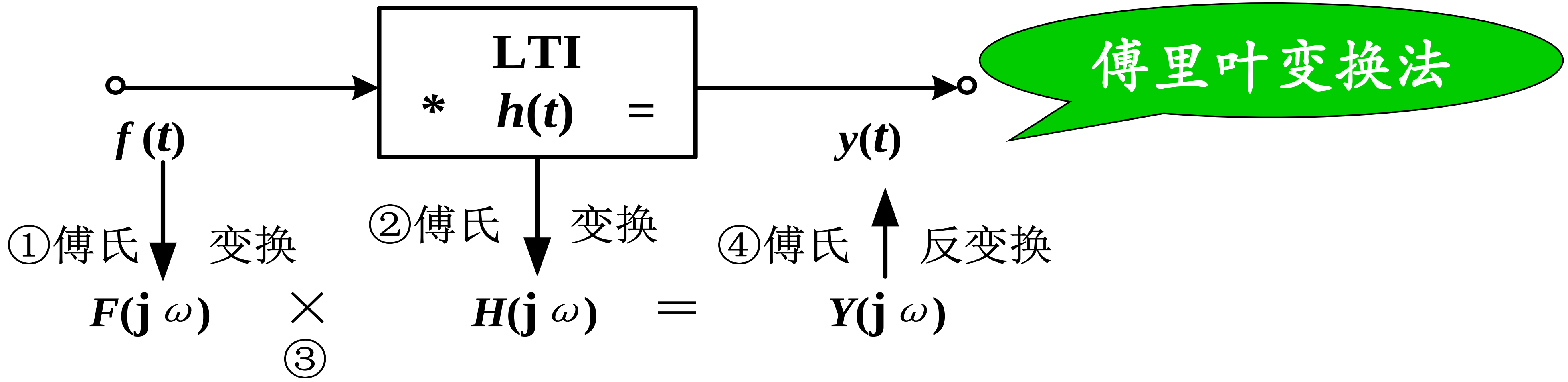
可加性

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$f(t) \longrightarrow y(t) = F^{-1}[F(j\omega)H(j\omega)]$$

$$\boxed{Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)}$$

频域分析法步骤：



频率响应$H(j\omega)$可定义为系统零状态响应的傅里叶变换$Y(j\omega)$与激励$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$之比，即

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \qquad H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}=\frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}e^{j[\varphi_y(\omega)-\varphi_f(\omega)]}$$

例

$|H(j\omega)|$称为**幅频特性（或幅频响应）**；$\theta(\omega)$称为**相频特性（或相频响应）**。$|H(j\omega)|$是ω的偶函数，$\theta(\omega)$是ω的奇函数。

对周期信号还可用傅里叶级数法

周期信号 $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}$

$$y(t)=h(t)*f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n[h(t)*\mathrm{e}^{jn\Omega t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nH(jn\Omega)\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

若 $f_T(t)=\dfrac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$ $\quad H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

则可推导出

$$y(t)=\frac{A_0}{2}H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,|H(jn\Omega)|\cos[n\Omega t+\varphi_n+\theta(n\Omega)]$$

例

三、频率响应$H(j\omega)$的求法

1. $H(j\omega) = F\,[h(t)]$

2. $H(j\omega) = Y(j\omega)/F(j\omega)$

（1）由微分方程求，对微分方程两边取傅里叶变换。

（2）由电路直接求出。

例

总结

本节课我们主要讨论了

（1）LTI系统的傅里叶分析法。

（2）系统特征函数H(jw)的定义、波形、意义及求解方法。

课后习题：4.5

预习

下节课我们将要讨论理想低通滤波器与无失真系统

（1）请思考，如何用H(jw)进行系统特征分析？