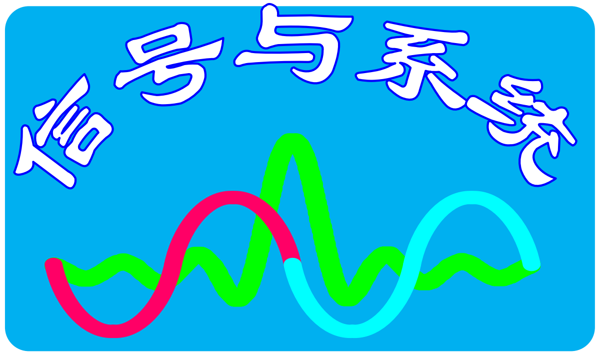

一、逆z变换

二、拉普拉斯变换与z变换关系

一、逆z变换

求逆z变换的常用方法有：幂级数展开法、部分分式展开法等。

一般而言，双边序列$f(k)$可分解为因果序列$f_1(k)$和反因果序列$f_2(k)$两部分，即

$$f(k) = f_2(k)+f_1(k) = f(k)\varepsilon(-k-1) + f(k)\,\varepsilon(k)$$

相应地，其z变换也分两部分

$$F(z) = F_2(z) + F_1(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

已知象函数$F(z)$及其收敛域不难由$F(z)$求得$F_1(z)$和$F_2(z)$，并分别求得它们所对应的原序列$f_1(k)$和$f_2(k)$，将两者相加得原序列$f(k)$。

1、幂级数展开法

$$F_1(z)= Z[f(k)\varepsilon(k)]= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad ,\ |z| > \alpha$$

$$F_2(z)=Z[f(k)\varepsilon(-k-1)]= \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k} \quad ,\ |z| < \beta$$

可见，因果序列和反因果序列的象函数分别是z^{-1}降幂级数和z的升幂级数。其系数就是相应的序列值。

例：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{z^2}{z^2-z-2}$

其收敛域如下，分别求其相对应的原序列$f(k)$。

（1） $|z| > 2$ (2) $|z|< 1$ (3) $1< |z| < 2$

解

（1） 由于$F(z)$的收敛域在半径为2的圆外，故$f(k)$为因果序列。用长除法将$F(z)$展开为z^{-1}的幂级数：

$$z^2/(z^2-z-2)=1+z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+\dots$$

$$f(k)=\{\underset{\uparrow k=0}{1},\ 1,\ 3,\ 5,\ \dots\}$$

（2） 由于$F(z)$的收敛域为$|z|<1$，故$f(k)$为反因果序列。用长除法将$F(z)$（按升幂排列）展开为z的幂级数：

$$z^2/(-2-z-z^2)=-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^5+\cdots \qquad f(k)=\left\{0,\frac{5}{16},-\frac{3}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\underset{\substack{\uparrow\\ k=-1}}{0}\right\}$$

(3) $F(z)$的收敛域为$1<|z|<2$，其原序列$f(k)$为双边序列。将$F(z)$展开为部分分式，有

$$F(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

第一项属于因果序列的项函数$F_1(z)$，第二项属于反因果序列的象函数$F_2(z)$，

$$F_1(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}\ ,\quad |z|>1 \qquad F_2(z)=\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}\ ,\quad |z|<2$$

即将它们分别展开为z^{-1}及z的幂级数，有

$$F_1(z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}-\frac{1}{3}z^{-3}+\cdots \qquad F_2(z)=\cdots+\frac{1}{12}z^{3}-\frac{1}{6}z^{2}-\frac{1}{3}z$$

$$f(k)=\{\cdots,-\frac{1}{12},-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\}$$

难以写成闭合形式。

2、部分分式展开（真分式）

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+.....+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+.....+a_1 z+a_0}$$

（1）F(z)均为单极点，且不为0

$\frac{F(z)}{z}$ 可展开为： $\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+....+\frac{K_n}{z-z_n}$ $\qquad F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$

根据给定的收敛域，将上式划分为$F_1(z)(|z|>\alpha)$和$F_2(z)(|z|<\beta)$两部分，根据已知的变换对求解，如

$\delta(k)\longleftrightarrow 1$ $\qquad a^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|$ $\qquad -a^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow\frac{z}{z-a},\ |z|<|a|$

例1：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$

其收敛域分别为：（1） $|z|>2$ (2) $|z|<1$ (3) $1<|z|<2$

解 部分分式展开为 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{z+1}+\dfrac{\frac{2}{3}}{z-2}$

$$F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1) 当 $|z|>2$，故$f(k)$为因果序列 $f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$

(2) 当 $|z|<1$，故$f(k)$为反因果序列

$$f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$$

(3) 当 $1<|z|<2$，

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

例2：已知象函数

$$F(z)=\frac{z(z^3-4z^2+\frac{9}{2}z+\frac{1}{z})}{(z-\frac{1}{2})(z-1)(z-2)(z-3)}$$,$1<|z|<2$

的逆z变换。

解

$$F(z)=\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

由收敛域可知，上式前两项的收敛域满足$|z|>1$，后两项满足$|z|<2$。

$$f(k)=-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)+2\varepsilon(k)+(2)^k\varepsilon(-k-1)-(3)^k\varepsilon(-k-1)$$

(2) F(z)有共轭单极点

如$z_{1,2}=c\pm jd=\alpha e^{\pm j\beta}$，则

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_1^*}{z-c+jd}$$

令$K_1=|K_1|e^{j\theta}$

$$F(z)=\frac{|K_1|e^{j\theta}z}{z-\alpha e^{j\beta}}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}z}{z-\alpha e^{-j\beta}}$$

若$|z|>\alpha$，$f(k)=2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(k)$

若$|z|<\alpha$，$f(k)=-2|K_1|\alpha^k\cos(\beta k+\theta)\varepsilon(-k-1)$

(3) F(z)有重极点

F(z)展开式中含 $\frac{z}{(z-a)^r}$ 项(r>1)，则逆变换为

若|z|>α ,对应原序列为 $\frac{k(k-1).....(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}\varepsilon(k)$

以|z|>α为例：

当r=2时， 为 $ka^{k-1}\varepsilon(k)$； 当r=3时， 为 $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)$

可这样推导记忆： $Z[a^k\varepsilon(k)]=\frac{z}{z-a}$

两边对a求导得 $Z[ka^{k-1}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^2}$

再对a求导得 $Z[k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{2z}{(z-a)^3}$ 故 $Z[0.5k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)]=\frac{z}{(z-a)^3}$

例：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$，$|z|>1$

的原函数。

解 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{K_{11}}{(z-1)^3}+\frac{K_{12}}{(z-1)^2}+\frac{K_{13}}{z-1}$$

$$K_{11}=(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=2 \qquad K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1}=3$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-1)^3\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1}=1$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$f(k)=[k(k-1)+3k+1]\varepsilon(k)$$