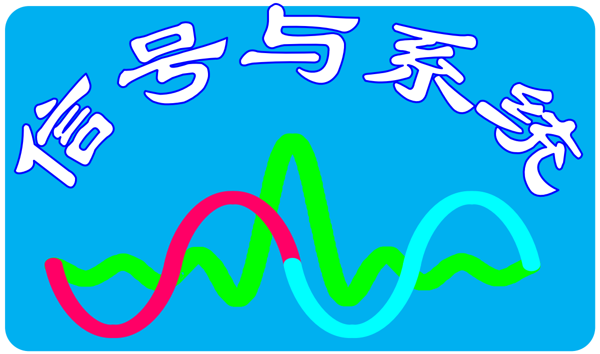


一、周期信号的傅里叶变换

二、傅里叶变换的性质

课程目标

- 理解一般周期函数的傅里叶变换的形式
- 掌握特殊函数的傅里叶变换
- 掌握傅里叶变换的性质。（考点）

一、周期信号傅里叶变换

周期信号：$f(t)$⟷傅里叶级数F_n　离散谱

非周期信号：$f(t)$⟷傅里叶变换$F(j\omega)$　连续谱

周期信号的傅里叶变换如何求？与傅里叶级数的关系？

$$f(t)\begin{cases}\text{周期}\\ \text{非周期}\end{cases}\text{统一的分析方法：傅里叶变换}$$

- 正、余弦的傅里叶变换
- 一般周期信号的傅里叶变换
- 傅里叶系数与傅里叶变换

1．正、余弦的傅里叶变换

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

已知 $$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

由频移特性得

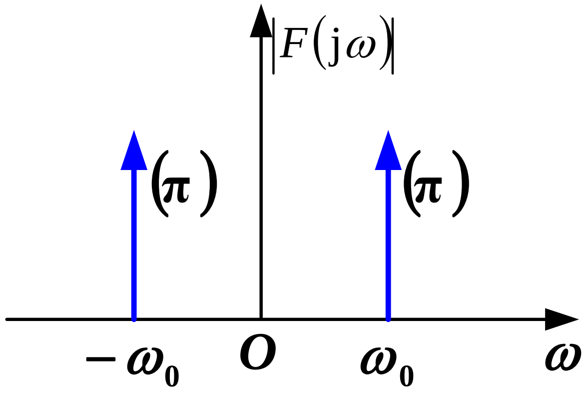
$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$
$$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\therefore \cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right] = \pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

同理 $$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

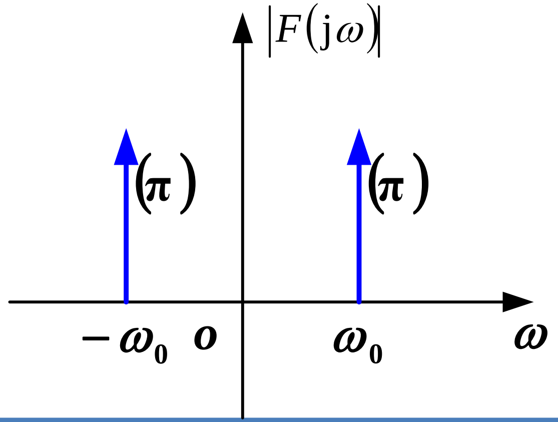
频谱图： $\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$

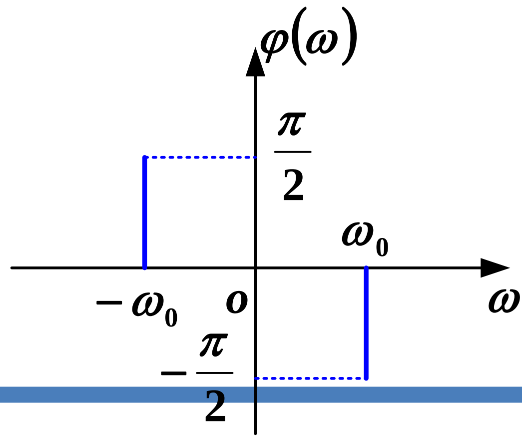
$\cos\omega_0 t$ 频谱图：



$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -\mathrm{j}\pi\delta(\omega-\omega_0)+\mathrm{j}\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$\sin\omega_0 t$ 频谱图：





2.一般周期信号的傅里叶变换

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\qquad\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

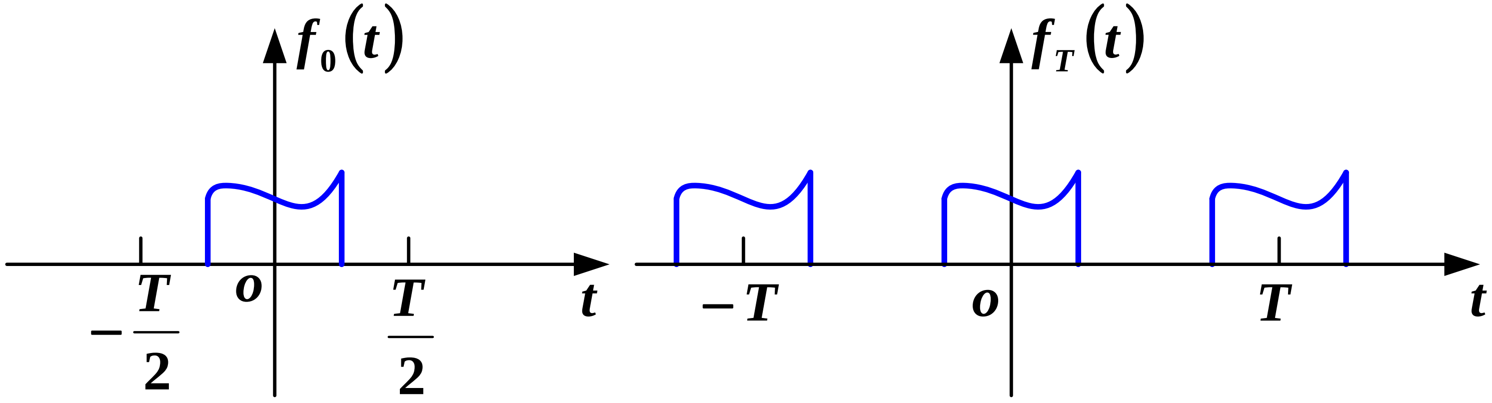
$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\longleftrightarrow F_T(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)\qquad(1)$$

说明：(1)周期信号$f_T(t)$的傅氏变换由冲激序列组成，冲激函数仅存在于谐波频率处；

(2)谱线的幅度不是有限值，因为$F(j\omega)$代表频谱密度。

3.傅里叶系数与傅里叶变换关系

推导：第一个周期单脉冲$f_0(t)$的傅氏变换$F_0(j\omega)$与周期信号$f_T(t)$的傅氏系数F_n的关系：



设 $f_0(t) \leftrightarrow F_0(j\omega)$

$$F_0(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t)^{-j\omega t}\,dt \qquad (1)$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)^{-jn\Omega t}\,dt \qquad (2)$$

比较(1)(2) $\quad \omega \leftrightarrow n\Omega$

$$f_0(t) \leftrightarrow f_T(t)$$

$$F_n = \frac{1}{T} F_0(j\omega)\Big|_{\omega = n\Omega}$$

二、傅里叶变换性质

- 线性
- 奇偶性
- 对称性
- 尺度变换
- 时移特性
- 频移特性
- 卷积定理
- 时域微分和积分
- 频域微分和积分
- 帕塞瓦尔关系

1.线性性质(Linear Property)

如果 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$

那么

$$\boxed{[\mathrm{a}\, f_1(t) + \mathrm{b}\, f_2(t)\,] \longleftrightarrow [\mathrm{a}\, F_1(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{b}\, F_2(\mathrm{j}\omega)\,]}$$

证明: $\mathscr{F}[\mathrm{a}\, f_1(t) + \mathrm{b}\, f_2(t)] \;= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{a}\; f_1(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{b}\; f_1(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= [\mathrm{a}\, F_1(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{b}\, F_2(\mathrm{j}\omega)\,]$$

傅里叶计算是一种线性运算，它包含两种意义:

1. 齐次性：时域信号数乘 a，频谱函数也数乘a。

2. 可加性：几个信号之和的频谱函数 = 各信号频谱函数之和。

2.奇偶虚实性

如 果 $f(t)$ 为实函数，且

$$f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} = R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$$

$$|F(j\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)} \qquad \varphi(\omega)=\arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

那么：

- $R(\omega)=R(-\omega)$， $X(\omega)=-X(-\omega)$， $|F(\mathrm{j}\omega)|=|F(-\mathrm{j}\omega)|$， $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$，
- $f(-t) \longleftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega) = F^*(\mathrm{j}\omega)$
- 如果 $f(t)=f(-t)$ 则 $X(\omega)=0$， $F(\mathrm{j}\omega) = R(\omega)$

  如果 $f(t)=-f(-t)$ 则 $R(\omega)=0$， $F(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}X(\omega)$

3.对称性

如果 $f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$ 那么 $\boxed{F(\mathrm{j}t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$

证明： $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (1)$$

令 (1) $t\rightarrow\omega$，$\omega\rightarrow t$ 则有

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad (2)$$

令 (2) $\omega\rightarrow -\omega$ 那么

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$\therefore\ F(\mathrm{j}t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

举例

练习

$$f_1(t)=\frac{\sin t}{t}\leftrightarrow ?$$

$$f_2(t)=t+\frac{1}{t}\leftrightarrow ?$$

总结

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

本节课我们主要讨论了

（1）周期函数的傅里叶变换的一般形式；

（2）常见周期函数的傅里叶变换；

（3）傅里叶变换的性质。

课后习题：3.14

预习

下节课我们将要讨论傅里叶变换的性质

（1）请思考，对于一个信号，它在时域的平移和其频谱的平移如何对应？