天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

概率与数理统计第20讲

主讲：邱玉文　　　　内容：统计学常用分布，统计量等

第20讲内容概要

一、常用的统计量

二、三大分布

三、四大定理

1. 若随机变量 X 的数学期望与方差都存在，在以下概率中，(　　　　)

肯定可以由切比雪夫不等式进行取值大小的估计.

① $P(1<X<3)$； ② $P(1<X-E(X)<2)$；

③ $P(-1<X<1)$； ④ $P(|X-E(X)|\geq 1)$.

2. 随机变量 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，用切比雪夫不等式估计

$P(|X-\lambda|\geq \frac{1}{\lambda})\leq$ (　　　)．

① λ； ② λ^2 ③ λ^3； ④ $\frac{1}{\lambda}$.

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

3. 已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，用切比雪夫不等式估计$P(\left|X-\frac{1}{\lambda}\right|\ge 1)\le$ (　　　) 。

① λ； ② $\frac{1}{\lambda^2}$ ③ λ^3； ④ $\frac{1}{\lambda}$。

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

一、数理统计基本概念

一、总体与样本

1. 个体与指标（变量）

【例】 某门课程结束后，记分册中的信息

姓 名	班级	分 数	等 级
赵**	****	91	2
钱**	****	84	4
孙**	****	98	1
李**	****	87	3

每一行对应一个个体，每一列对应一个指标（变量）

2. 总体

研究对象的全体称为总体（或母体），表现为数量指标，记为 X，可能是一元总体或多元总体。

3. 样本

从总体**X**中抽取的若干个体，记为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **n**称为样本容量。

思考：样本容量与统计结果的可靠性之间是否有一定的联系？

简单随机样本： 用简单随机抽样的方法得到的样本。

（1）**放回抽样：** 简单随机样本；

（2）**不放回抽样：** 通常不是简单随机样本；

但是当总体容量 N 很大时，样本容量 n 较小时（$\frac{n}{N} \le 10\%$），可近似看做放回抽样，从而近似看作简单随机抽样。

【样本具有二重性】

（1）由于样本是从总体中随机抽取的，抽取前无法预知其数值，因此，样本是随机变量，用大写字母 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 表示。

（2）样本在抽取以后经观测就有确定的观测值，因此样本又是一组数值，用小写字母 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 表示，$(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 的观测值。

4、样本$(X_1,X_2,\cdots X_n)$的联合分布函数：

设总体分布函数为$F(x)$，$(X_1,X_2,\cdots X_n)$为来自总体X的样本，$(X_1,X_2,\cdots X_n)$相互独立且与总体X服从同一分布，则样本联合分布为

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)$$

（1）总体X为离散型随机变量，概率函数为$p(x)$，

则样本联合概率函数为

$$p(x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

（2）总体X为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$，

则样本联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

若将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 看做是一个 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则

(1) 当总体 X 是离散随机变量，且有概率函数 $p(x)$ 时，样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$有联合概率函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i); \qquad (5.1)$$

(2) 当总体 X 是连续随机变量，且有概率密度 $f(x)$ 时，样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$有联合概率密度

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (5.2)$$

【例题】

例1 设总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率函数.

解 已知总体 $X\sim P(\lambda)$，则有概率函数

$$p(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},x=0,1,2,\cdots.$$

于是，按公式(5.1)得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},x_i=0,1,2,\cdots.$$

【练习题】

例 2 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度.

解 已知总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

于是，按公式(5.2)得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

二、样本函数与统计量

一、样本函数与统计量

设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 X 的一组样本，$(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 是观测值

1、样本函数：以样本为自变量的函数记 $g(X_1,X_2,\cdots X_n)$，函数值

$g(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 是 $g(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 的观测值.

2、统计量：若样本函数 $g(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 中不含任何未知量，则称这类样本函数为统计量.

例：$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，μ，σ 是未知参数，X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 一组样本，下列哪个是统计量(　　)

(A) $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$　(B) $\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}$　(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$　(D) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

已知总体 X 服从正态分布，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma > 0$ 未知，则下面样本函数中，(　　) 是统计量；

（1）$\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2$ ；　　（2）$\frac{X_1+X_2}{2}$；

（3）$\frac{X_1-\mu}{\sigma}$ ；　　（4）$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2$；

【常见的统计量】

一、样本均值

1. 定义 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

2. 观测值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

☺ 一首打油诗：张村有个张千万，隔壁9个穷光蛋，平均起来算一算，人人都是张百万。

☺报纸上报道有个人在一条河中淹死了，这条河的平均深度仅10cm，你信吗？

二、样本方差

1. 定义 $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

2. 观测值 $$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

三、样本标准差

1. 定义 $$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

2. 观测值 $$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

四、样本 *k* 阶原点矩

1. 定义 $$V_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \, , k = 1, 2, \cdots$$

2. 观测值 $$v_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \, , k = 1, 2, \cdots$$

五、样本 *k* 阶中心矩

1. 定义 $$U_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k \, , k = 2, 3, \cdots$$

2. 观测值 $$u_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k \, , k = 2, 3, \cdots$$

三、数理统计常用的分布

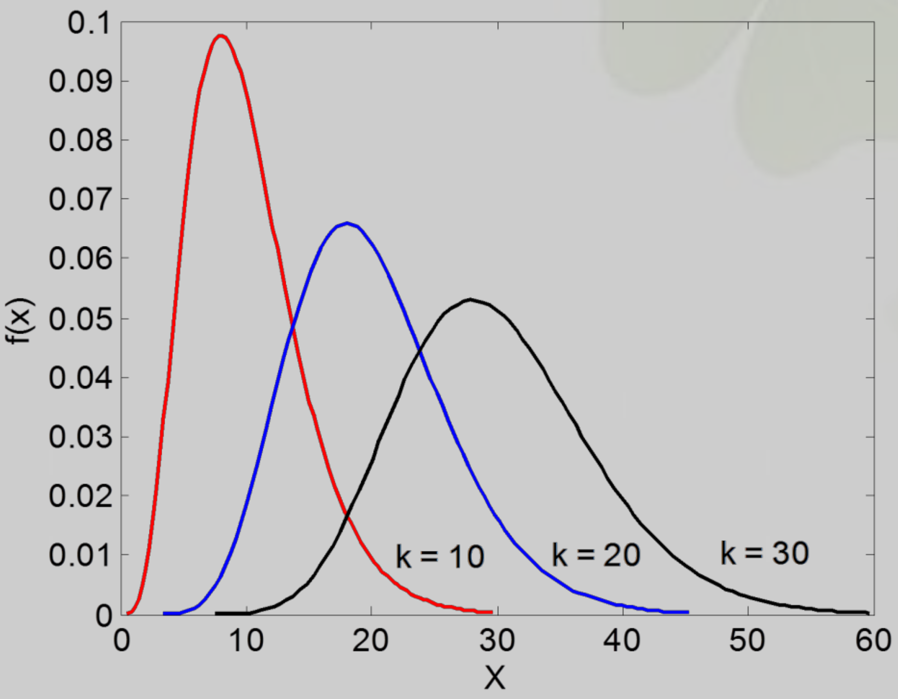
一、χ^2（卡方）分布

1. 定义

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k \overset{iid}{\sim} N(0,1)$，则称 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$ 的分布是**自由度**为 k 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(k)$。

2. 密度函数

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



3. 卡方分布的可加性

设 $X \sim \chi^2(k_1)$，$Y \sim \chi^2(k_2)$，并且 X 与 Y 独立，则

$$X + Y \sim \chi^2(k_1 + k_2)$$

【例题】设总体 X 服从标准正态分布，$X_1, X_2, \cdots, X_7$ 是来自总体 X 的样本，则

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \sim \chi^2(3)$$

$$Z = X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 \sim \chi^2(4)$$

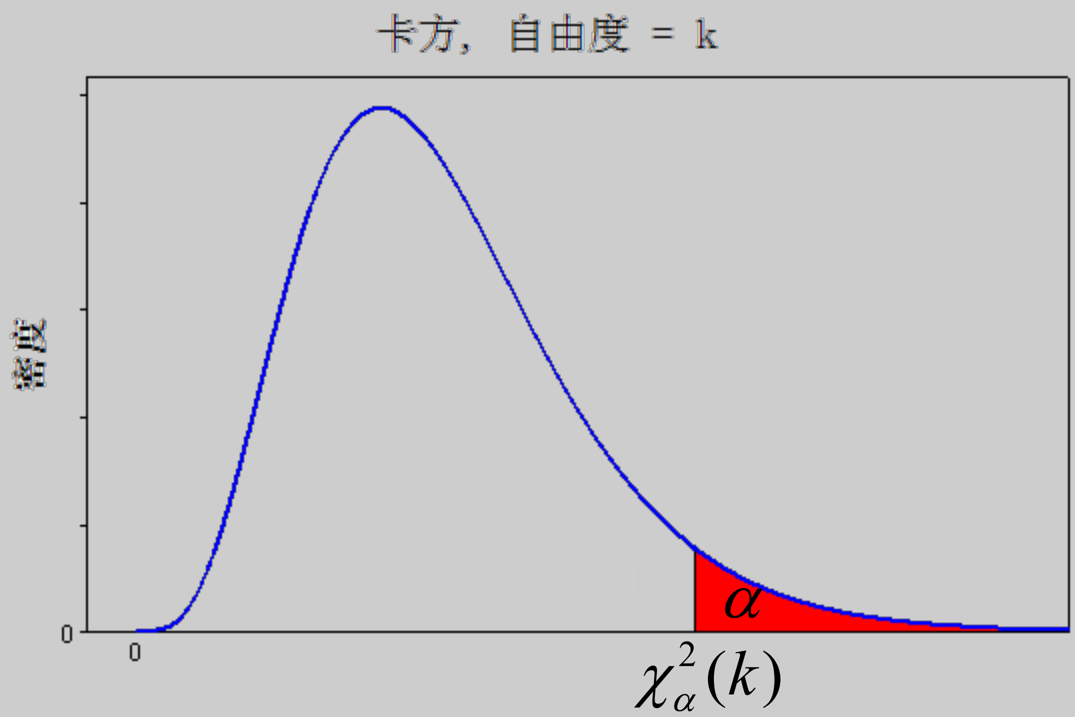
$$Y + Z \sim \chi^2(7)$$

4. 卡方分布的上侧分位数

设 $\chi^2 \sim \chi^2(k)$，对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，称满足条件

$$P\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(k)\} = \int_{\chi_\alpha^2(k)}^{+\infty} f_{\chi^2}(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的数 $\chi_\alpha^2(k)$ 为卡方分布的上侧α分位数。

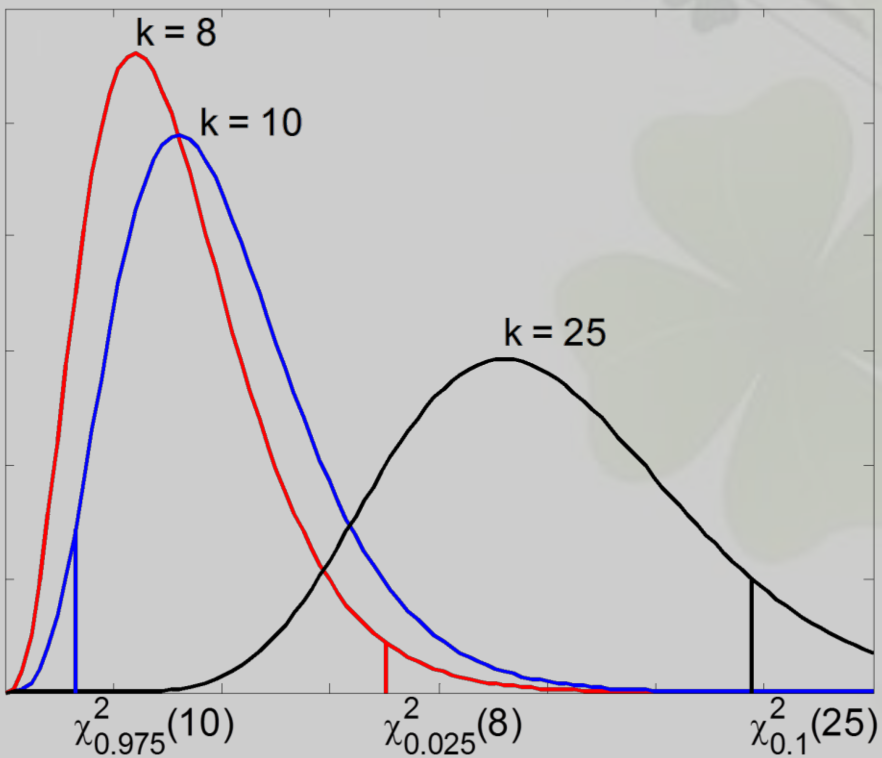


【例5.3-1】查表求以下分位数。

$$\chi^2_{0.025}(8) = 17.535$$

$$\chi^2_{0.975}(10) = 3.247$$

$$\chi^2_{0.1}(25) = 34.382$$



二、 t 分布（学生氏分布）

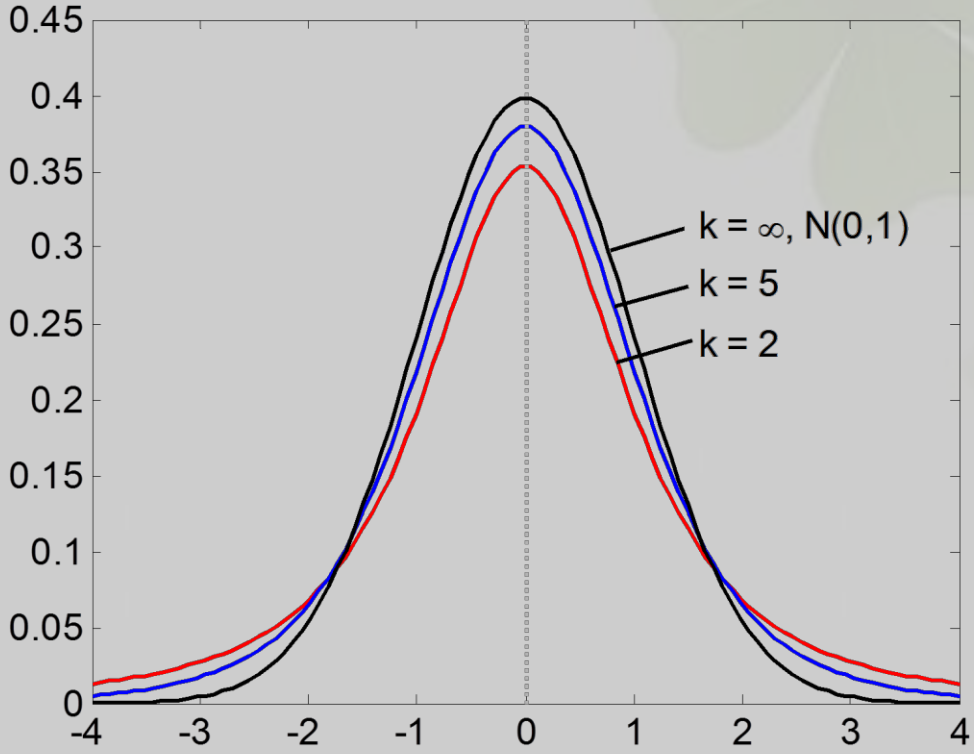
1. 定义

设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(k)$，且 X 与 Y独立，则称 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/k}}$ 的分布是自由度为 k 的 t 分布，记为 $t \sim t(k)$ 。

2. 密度函数

$$f_t(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

$$-\infty < x < +\infty$$



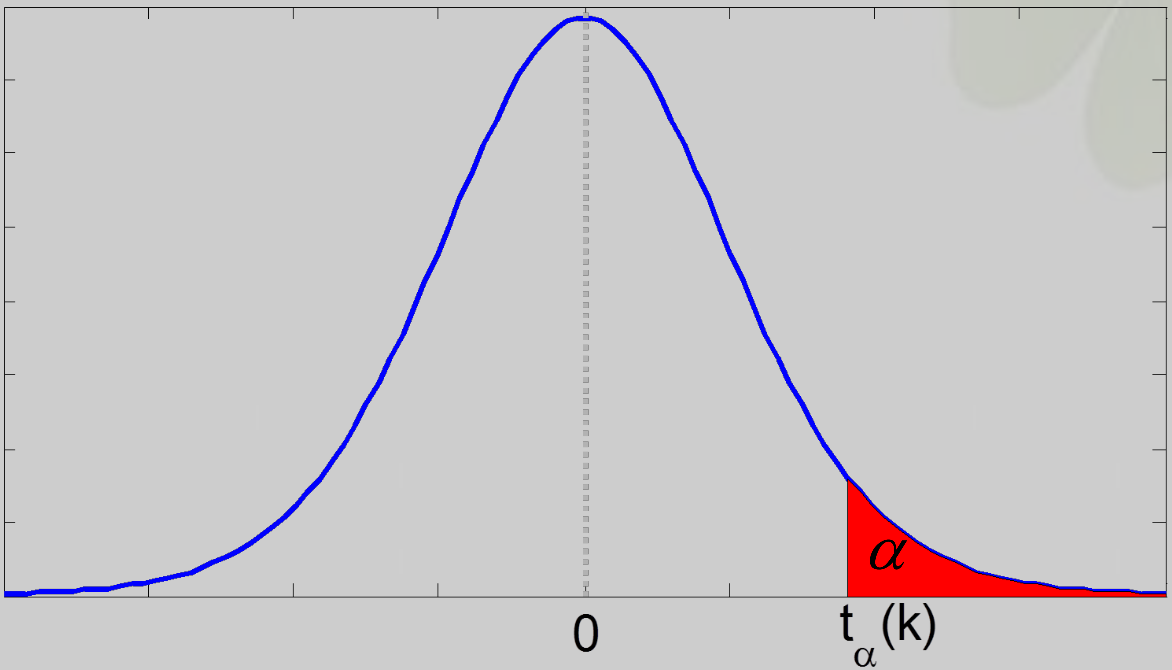
3. *t* 分布的上侧分位数

设 $t \sim t(k)$，对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，称满足条件

$$P\{t \geq t_{\alpha}(k)\} = \int_{t_{\alpha}(k)}^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的数 $t_{\alpha}(k)$ 为**t** 分布的上侧**α** 分位数。

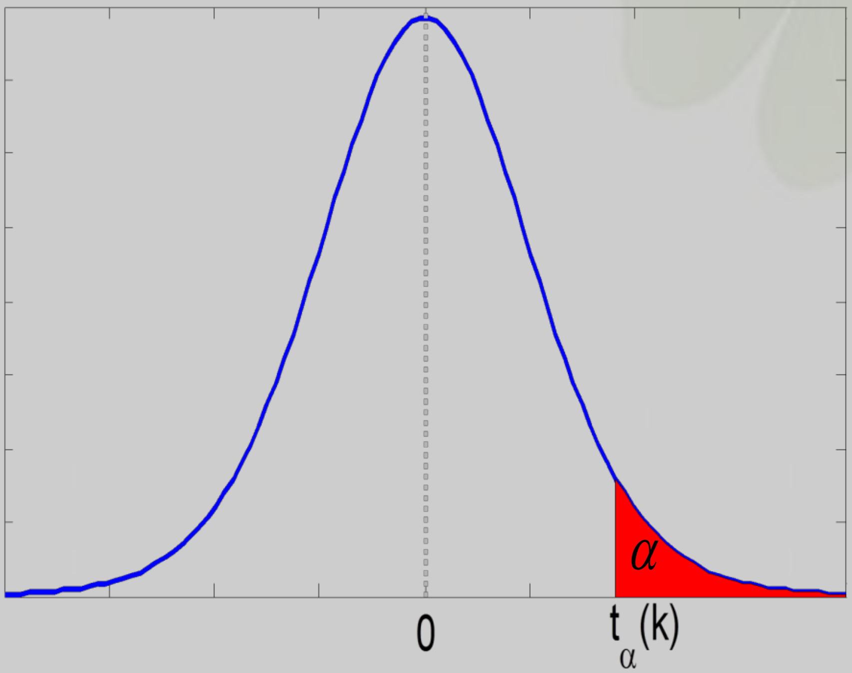
$$t_{1-\alpha}(k) = -t_{\alpha}(k)$$



【例】查表求以下分位数。

$$t_{0.05}(10) = 1.8125$$

$$t_{0.025}(15) = 2.1315$$



【例题】设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $N(0,16)$，且 $X_1,X_2,\cdots X_{16}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{16}$ 是来自 X 和 Y 的简单随机样本，求

$$Z=\frac{\sum_{k=1}^{16}X_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{16}{Y_k}^2}}$$

所服从的分布及其自由度。

【例题】设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$, X_1,X_2,X_3,X_4 是来自 X 的简单随机样本，记

$$V=\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}$$

求 V 服从的分布及其自由度。

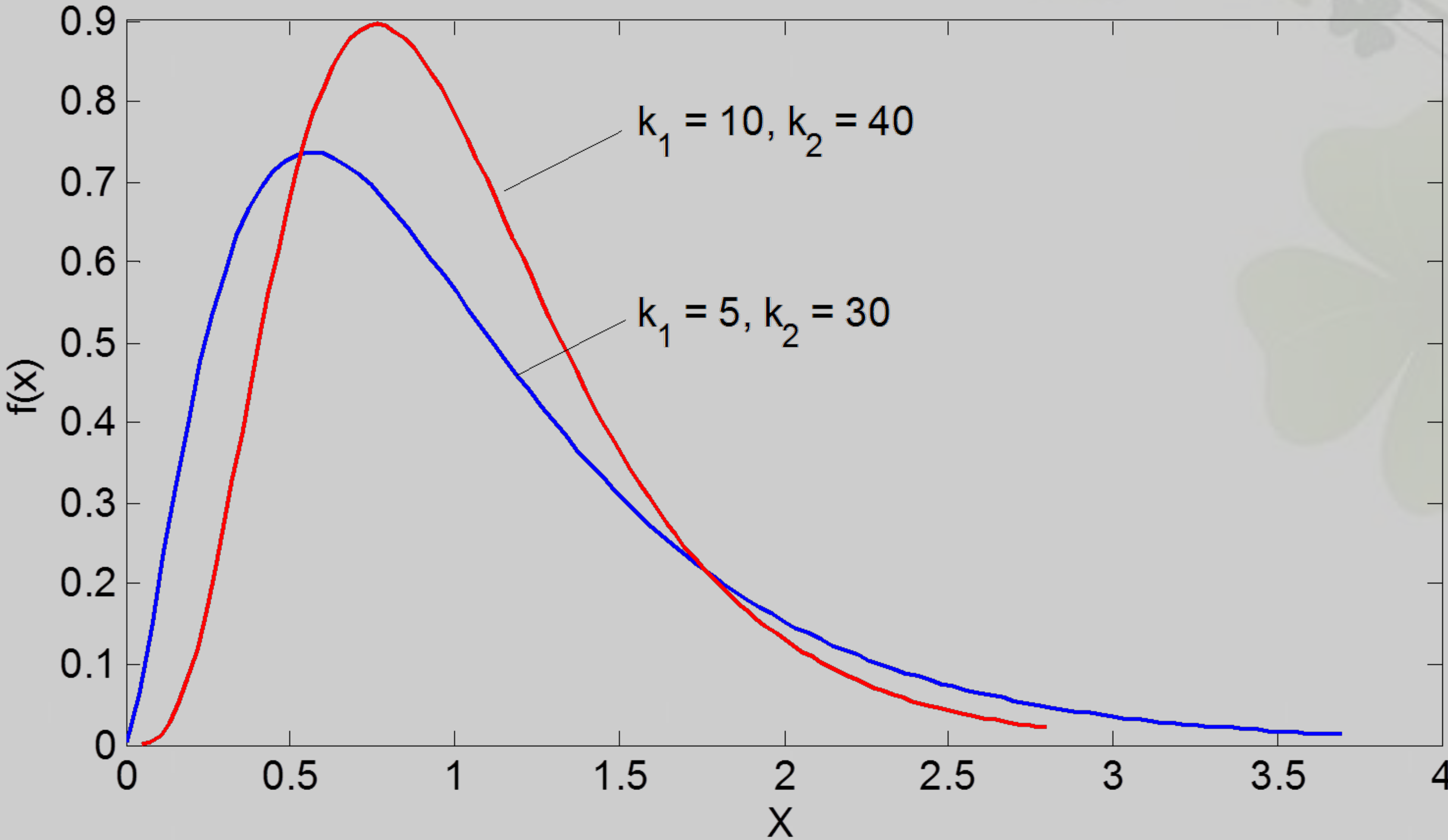
三、F分布

1. 定义

设 $X \sim \chi^2(k_1)$, $Y \sim \chi^2(k_2)$，且 X 与 Y独立，则称 $F = \dfrac{X/k_1}{Y/k_2}$ 的分布是自由度为 k_1, k_2 的 F 分布，记为 $F \sim F(k_1, k_2)$ 。

2. 密度函数

$$f_F(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)\left[1+\left(\dfrac{k_1 x}{k_2}\right)\right]^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
f(x)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
X
$k_1 = 10, k_2 = 40$
$k_1 = 5, k_2 = 30$

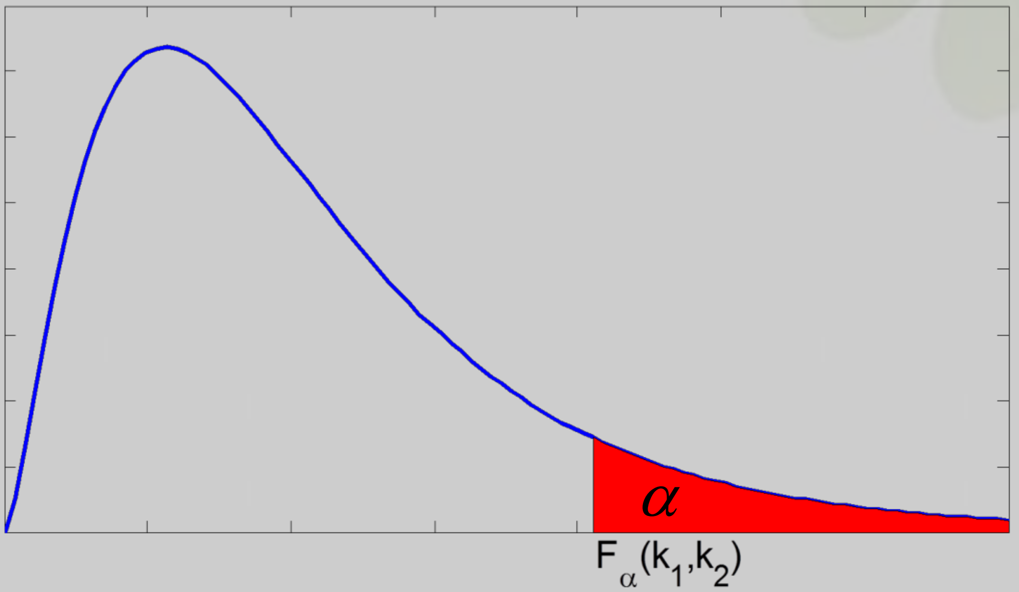
3. F 分布的上侧分位数

设 $F \sim F(k_1,k_2)$，对于给定的 $\alpha \in (0,1)$，称满足条件

$$P\{F \geq F_\alpha(k_1,k_2)\} = \int_{F_\alpha(k_1,k_2)}^{+\infty} f_F(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的数 $F_\alpha(k_1,k_2)$为F 分布的上侧α 分位数。

$$F_\alpha(k_1,k_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(k_2,k_1)}$$



天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

【例5.3-3】查表求以下分位数。

$$F_{0.025}(8,7) = 4.90$$

查附表3-1

$$F_{0.05}(30,14) = 2.31$$

查附表3-2

$$F_{0.975}(7,8) = \frac{1}{4.90} = 0.2041$$

1. 设X_1,X_2,X_3,X_4相互独立且服从相同分布$\chi^2(6)$,则$\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3X_4}\sim$__________ .

2. 设总体$X\sim N(0,1)$，随机抽取样本$X_1,X_2,\cdots,X_5$，且$\dfrac{c\left(X_1+X_2\right)}{\left(X_3^2+X_4^2+X_5^2\right)^{1/2}}\sim t\left(3\right)$，则

$c=$_______.

3. 设随机变量$X\sim t(n)$，则$Y=X^2\sim$________.

三、 正态总体下统计量的分布

一、单个正态总体情形

定理 1 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则样本均值 $\overline{X}$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，即

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{5.34}$$

证 因为随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并且与总体 X 服从相同的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，所以由§4.3 定理 3 可知，它们的线性组合

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i$$

服从正态分布 $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

回顾. 正态分布的可加性

1. 两个正态分布情形

设随机变量 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2),\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$，并且$X$与$Y$独立，则

$$X+Y \sim N(\mu_x+\mu_y,\ \sigma_x^2+\sigma_y^2)$$

2. 多个正态分布情形

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

则

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为常数。

一、单个正态总体情形

定理 1 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则样本均值 $\overline{X}$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{5.34}$$

证 因为随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并且与总体 X 服从相同的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，所以由 §4.3 定理 3 可知，它们的线性组合

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$$

服从正态分布 $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

定理 2 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则统计量 $u=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，即

$$u=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1). \tag{5.35}$$

证 由定理 1 知，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$. 所以，将 $\overline{X}$ 标准化，按(4.12)即得(5.35).

定理 3 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则统计量 $\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，即

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n). \qquad (5.36)$$

定理 4 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) 样本均值 $\overline{X}$ 与样本方差 S^2 相互独立；

(2) 统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布，即

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

定理 4 可以写成：

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$$

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

定理 5 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布，即

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1). \tag{5.38}$$

主要结论对比，总结

总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，样本均值记为 $\bar{X}$，样本方差记为 S^2

- 标准正态分布：$u=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- t分布：$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

- 卡方分布：$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 \sim \chi^2(n)$

- 卡方分布：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$

2. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为总体$N(1,2^2)$的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，则下列结论中正确的是________.

① $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$； ② $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim F(n,1)$；

③ $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$； ④ $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim \chi^2(n)$.

【例5.4-1】设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值，S^2为样本方差。

（1）求$P\left\{(\bar{X}-\mu)^2\le\dfrac{\sigma^2}{n}\right\}$；

（2）若$n=6$，求$P\left\{(\bar{X}-\mu)^2\le\dfrac{2S^2}{3}\right\}$.

解:（1）因为$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以

$$P\left\{(\bar{X}-\mu)^2\le\frac{\sigma^2}{n}\right\}=P\left\{-1\le\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le 1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=0.6826$$

（2）由于$n=6$，$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\sim t(5)$，

$$P\left\{(\bar{X}-\mu)^2\le\frac{2S^2}{3}\right\}=P\left\{-2\le\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\le 2\right\}$$

$$=P(t>-2)-P(t>2)$$

由于$t_{0.05}(5)\approx 2$，所以

$$P\left\{(\bar{X}-\mu)^2\le\frac{2S^2}{3}\right\}=P(t>-2)-P(t>2)$$

$$\approx 1-0.05-0.05=0.9$$

【例5.4-2】设总体 $X\sim N(0,1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是简单随机样本,试问下列统计量服从什么分布?

(1) $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$; (2) $\dfrac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}}$; (3) $\left(\dfrac{n}{3}-1\right)\sum_{i=1}^{3}X_i^2\Big/\sum_{i=4}^{n}X_i^2$.

解:(1)因为$X_1,X_2,\cdots,X_n\overset{iid}{\sim}N(0,1)$,所以

$$X_1-X_2\sim N(0,2),\ \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\ X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$$

从而 $$\frac{(X_1-X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2)/2}}\sim t(2)$$

（2）因为$X_1 \sim N(0,1)$，$\chi^2 = \sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$，并且$X_1$与$\chi^2$独立，

所以 $$\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} X_i^2}} = \frac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \Big/ (n-1)}} \sim t(n-1)$$

（3）因为$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{3} X_i^2 \sim \chi^2(3)$，$\chi_2^2 = \sum_{i=4}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-3)$，并且$\chi_1^2$与$\chi_2^2$独立，所以

$$\left(\frac{n}{3}-1\right)\sum_{i=1}^{3} X_i^2 \Big/ \sum_{i=4}^{n} X_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i^2 \Big/ 3}{\sum_{i=4}^{n} X_i^2 \Big/ (n-3)} \sim F(3, n-3)$$

设总体 $X \sim N(\mu, 16), X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自总体的样本，已知

$P(S^2 > a) = 0.1$，求常数 a

解：因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$n = 10, \sigma = 4$，所以

$$P(S^2 > a) = P\left(\frac{9}{16}S^2 > \frac{9}{16}a\right) = 0.1$$

查自由度为 9 的 χ^2 分布表得，$\chi^2_{0.1}(9) = 14.684$，

所以 $\dfrac{9}{16}a = 14.684$，$a \approx 26.105$

2. 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中取得 16 个样本$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$，已知$\sigma = 2$，求：

（1）$P\left(-\frac{1}{2} < \bar{X} - \mu < \frac{3}{4}\right)$；（2）$P\left(S^2 < 6.6656\right)$.

3. 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是取自总体$X$的样本，试求下列概率：

（1）$P\left(0.256\sigma^2 \le \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 \le 2.321\sigma^2\right)$；（2）$P\left(0.27\sigma^2 \le \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2 \le 2.36\sigma^2\right)$