概率与统计第4讲

主讲：邱玉文　　　内容：事件独立性，全概率公式等

第四讲内容大概：

一、古典概型和几何概型主要例题；

二、条件概率和概率乘法公式；

三、事件的相互独立

四、贝努里概型（独立重复试验）

一、古典概型和几何概型主要例题；

一、古典概型主要例题；

【例1】 一批产品共有N件，其中有M件不合格品。从中随机抽取n件，试求不同抽取方式下事件A_m=“取到m个不合格品”的概率。

- 不放回抽取：$P(A)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
- 有放回抽取：

$$P(A)=C_n^m\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

思考题:

1　掷骰子两次，点数之和等于4的概率为（　）

2　箱子里有7个白球，3个黑球，随机不放回抽取4次，恰好抽到3个白球的概率为（　）

3　箱子里有7个白球，3个黑球，随机有放回抽取3次，恰好抽到2个白球的概率为（　）

4　箱子里有7个白球，3个黑球，10个人每次一个依次不放回抽取，第6个人抽到黑球的概率为（　）

思考题：

1　掷骰子两次，点数之和等于4的概率为（ 1/12 ）

2　箱子里有7个白球，3个黑球，随机不放回抽取4次，恰好抽到3个白球的概率为（　1/2　）

3　箱子里有7个白球，3个黑球，随机有放回抽取3次，恰好抽到2个白球的概率为（　0.441　）

4　箱子里有7个白球，3个黑球，10个人每次一个依次不放回抽取，第6个人抽到黑球的概率为（　0.3 ）

思考题：

1　电话号码只考虑后三位，互不相同的概率是（　）

2　把3个乒乓球随机放到4个盒子里，每个盒子最多只有一个乒乓球的概率是（　）

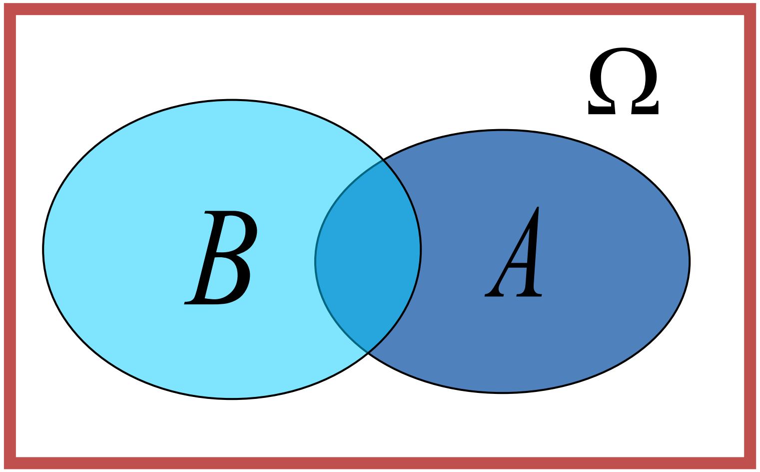
二、条件概率，概率乘法公式

定义

设A,B是试验E的两个事件，且P(B)>0,则称

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B已发生的条件下事件A发生的**条件概率**.



概率乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$
$$=P(B)P(A|B)$$

推广

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2))\cdots P(A_n|(A_1A_2\cdots A_{n-1}))$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

【例题】设在10个同一型号的元件中有7个一等品，从这些元件中不放回地连续取三次，每次取一个元件，求：

（1）三次都取得一等品的概率；

（2）三次中至少有一次取得一等品的概率.

【解答】 设 $A_i=\{$第i次取得一等品， $i=1,2,3\}$，则

（1） $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}$

（2） $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right)$

$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=1-\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}$$

【作业讲解】

设 [illegible] 求 [illegible].

【解答】 因为 $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

所以 $0.6=\dfrac{0.5-P(AB)}{1-0.4}$； $P(AB)=0.14;$

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.5+(1-0.4)-(0.5-0.14)=0.74$$

$$P\left(A\,|\,A\cup\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\right)}{P\left(A\cup\overline{B}\right)}=\frac{25}{37}$$

【例题与练习】袋中装 10 个球，其中 3 个黑球、7 个白球，不放回随机取两次，求：

（1）两次取到的均为黑球的概率；

（2）两个球颜色不同的概率；

【解】 设 A_i 表示“第 i 次取到的是黑球” $(i=1,2)$, 则

（1） A_1A_2 表示事件“两次取到的均为黑球”.

由题设知 $P(A_1)=\dfrac{3}{10},\ P(A_2\mid A_1)=\dfrac{2}{9}$

根据乘法公式，有 $P\left(A_1A_2\right)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}.$

【作业讲解】 甲组有 5 名男生和 2 名女生，乙组有 4 名男生和 3 名女生.今从甲组随机抽一个同学编入乙组，然后再从乙组中随机抽一个同学编入甲组；求：

（1）甲组仍为 5 名男生 1 名女生的概率；

（2）甲组为 6 名男生 1 名女生的概率.

【类似问题】 第一个箱子有 7 个黄色乒乓球，3 个白色乒乓球；第二个箱子有 6 个黄色乒乓球和 4 个白色乒乓球；现在从第一个箱子中随机摸一个乒乓球放到第二个箱子中，再从第二个箱子中摸一个放到第二个箱子中；求第一个箱子中仍然是 7 个黄色乒乓球的概率。

【作业讲解】 甲组有 5 名男生和 2 名女生，乙组有 4 名男生和 3 名女生.今从甲组随机抽一个同学编入乙组，然后再从乙组中随机抽一个同学编入甲组；求：

（1）甲组仍为 5 名男生 2 名女生的概率；

（2）甲组为 6 名男生 1 名女生的概率.

【习题解答】

设 A={先由甲组抽取一男生}，B= {再由乙组抽取一男生}.

（1） $P(AB+\bar{A}\bar{B})=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{5}{7}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{33}{56}$

（2） $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{7}$

【练习题】第一个箱子有 7 个黄色乒乓球，3 个白色乒乓球；第二个箱子有 6 个黄色乒乓球和 4 个白色乒乓球；现在从第一个箱子中随机摸一个乒乓球放到第二个箱子中，再从第二个箱子中摸一个放到第二个箱子中；求第一个箱子中仍然是 7 个黄色乒乓球的概率。

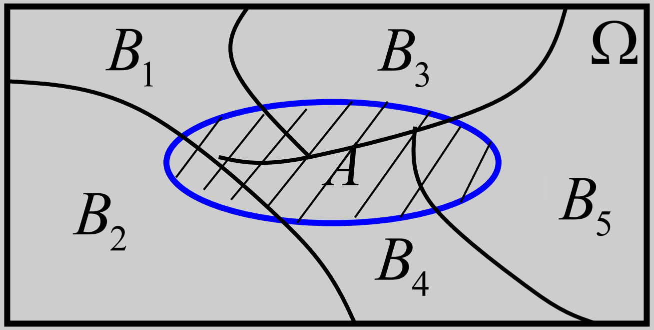
四、全概率公式

定理 2 设样本空间为Ω，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是n个互不相容事件，

且 $$\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega, \quad P(B_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则对于任意随机事件 A，有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$$



上述公式称为全概率公式。

【例题】甲箱中有3个白球，2个黑球，乙箱中有1个白球，3个黑球。现从甲箱中任取一球放入乙箱中，再从乙箱任意取出一球。问从乙箱中取出白球的概率是多少?

解　设B="从乙箱中取出白球"，

A="从甲箱中取出白球"，

$$P(A)=\frac{3}{5} \qquad P(\overline{A})=\frac{2}{5} \qquad P(B\mid\overline{A})=\frac{1}{5} \qquad P(B\mid A)=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{25}$$

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

【例题】甲、乙、丙三个厂家生产同一种产品，其市场份额分别为20%，50%和30%，由长期经验知，三家的正品率分别为0.85，0.94和0.9，现从市场买一件这样的产品，求买到正品的概率。

解：记 A 为“买到正品”

用 B_1, B_2, B_3 分别表示买到甲厂、乙厂和丙厂产品，则

- $P(B_1) = 0.2, \quad P(A \mid B_1) = 0.85 \qquad P(B_2) = 0.5, \quad P(A \mid B_2) = 0.94$

  $P(B_3) = 0.3, \quad P(A \mid B_3) = 0.9$

- 从而 $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) P(A \mid B_i) = 0.91$

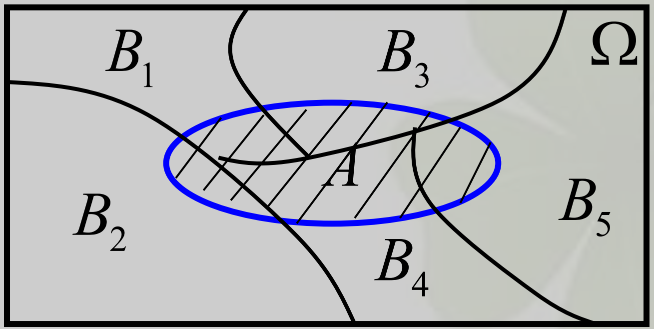
【练习题】某品牌产品有(1)、(2)、(3)三条生产线生产同一种产品，已知(1)、(2)、(3)各条生产线的产量分别占该厂总产量的30%，35%，35%；各条生产线产品的次品率分别是6%，5%，4%；将该厂所有产品混合投放市场，某消费者购买该厂的一件产品，求这件产品是次品的概率.

五、贝叶斯公式

已知 A 事件发生条件下，推断 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 发生的概率

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$



天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

【练习】甲、乙、丙三个厂家生产同一种产品，其市场份额分别为20%，50%和30%，由长期经验知，三家的正品率分别为0.85，0.94和0.9，现从市场买一件这样的产品，如果买到了正品，求该正品来自于甲车间的概率。

解：记 A 为“买到正品”

用 B_1,B_2,B_3 分别表示买到甲厂、乙厂和丙厂产品，则

- $P(B_1)=0.2,\quad P(A|B_1)=0.85 \qquad P(B_2)=0.5,\quad P(A|B_2)=0.94$

$P(B_3)=0.3,\quad P(A|B_3)=0.9$

- 从而 $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\dfrac{0.2\times 0.85}{0.91}=0.1868$

【例题】 设某批产品中，甲，乙，丙三厂生产的产品分别占 45%, 35%, 20%，各厂产品的次品率分别为 4%, 2%, 5%，现从中任取一件，

(1) 求取到的是次品的概率；

(2) 假如取到的产品为次品，求该产品是甲厂生产的概率.

【例题】 设某批产品中，甲，乙，丙三厂生产的产品分别占 45%, 35%, 20%，各厂产品的次品率分别为 4%, 2%, 5%，现从中任取一件，

(1) 求取到的是次品的概率；

(2) 假如取到的产品为次品，求该产品是甲厂生产的概率.

【解】记 A_1, A_2, A_3 分别表示“该产品为甲、乙和丙厂生产的”；

B 表示 “该产品是次品”. 由题设知 $P(A_1)=45\%,$

$P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=20\%,\ P(B\mid A_1)=4\%,\ P(B\mid A_2)=2\%,\ P(B\mid A_3)=5\%,$

(1) 由全概率公式得 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=3.5\%.$

(2) 由贝叶斯公式(或条件概率定义)，得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=51.4\%.$$

练一练

已知在所有男子中有5%，在所有女子中有0.25%患有色盲症。随机抽一人发现患色盲症，问其为男子的概率是多少？（设男子和女子的人数相等）。

解：设A=“男子”，B =“女子” C=“这人有色盲”

$$P(C\mid A)=0.05 \qquad P(C\mid B)=0.0025$$

$$P(A)=0.5 \qquad P(B)=0.5$$

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}$$

$$=\frac{0.05\cdot 0.5}{0.5\cdot 0.05+0.5\cdot 0.0025}=\frac{5}{5+0.25}=\frac{20}{21}$$

§ 1.5 事件的独立性

事件A与B互不影响，无视对方

一、两事件独立的定义

【引例】 学校学生会共收到问卷200张，其中本科生80张，研究生共120张，本科生男生参加问卷60张，女生问卷20张；研究生的男生问卷90张，女生问卷30张，则：

- 在所有问卷中随机抽取一张，记A1表示抽到男生；记A2为抽到本科生学生问卷；
- 则事件A1与A2相互独立；

$$P(A_1 \mid A_2)=\frac{3}{4},\ P(A_1 \mid \overline{A_2})=\frac{3}{4};P(A_1)=\frac{3}{4};$$

$$P(A_2 \mid A_1)=P(A_2 \mid \overline{A_1})=P(A_2)=\frac{2}{5}$$

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

一、两事件独立的定义

【引例】 学校学生会共收到问卷200张，其中本科生80张，研究生共120张，本科生男生参加问卷60张，女生问卷20张；研究生的男生问卷90张，女生问卷30张，则：

	男生问卷A1	女生问卷 $\overline{A_1}$
本科生A2	60	20
研究生 $\overline{A_2}$	90	30

一、两事件独立的定义

定义1 若两事件 A, B 中任一事件的发生不影响另一事件的概率，即

$$P(A|B)=P(A) \text{ 或 } P(B|A)=P(B)$$

则称**事件 A 与 B 是相互独立的**，否则，称为是不独立的。

【**例1.4-1**】 袋中有5个白球和3个黑球，从中陆续取2球，记 A 为“第二次取出白球”，B为“第一次取出白球”，

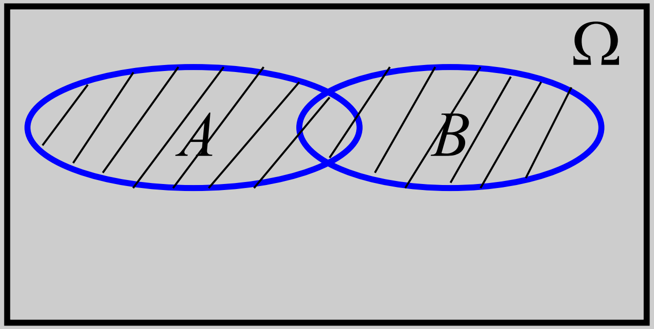
- 有放回抽取：$P(A|B)=P(A|\overline{B})=P(A)=5/8$
- 不放回抽取：$P(A|B)=4/7,\ P(A)=5/8$

定义2 对任意两随机事件***A*** 与***B***，若

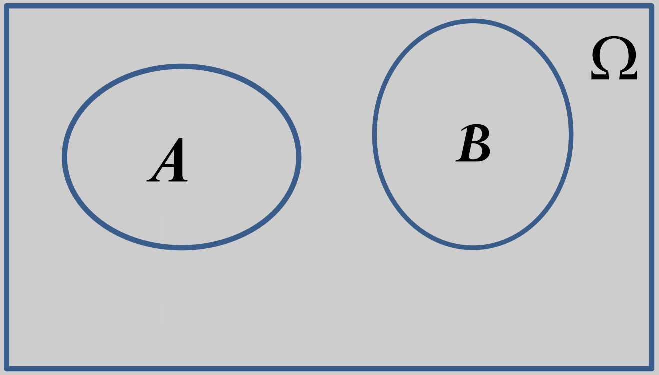
$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件***A*** 与***B*** 是相互独立的（简称为独立的）

A和B独立应该是什么样子?



这个样子?



还是这个样子?

定义 对任意两随机事件A与B，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与B是相互独立的（简称为独立的）

二、两事件独立的性质

- **结论1：** 如果两事件A与B独立，则下列各对事件

$$A与\overline{B},\ \overline{A}与B,\ \overline{A}与\overline{B}$$

都是独立的。

■ **定理** 下列四组事件，有相同的独立性：

（1）A与B；（2）A与$\overline{B}$；

（3）$\overline{A}$与B；（4）$\overline{A}$与$\overline{B}$

证明 若A、B独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

$$) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

所以，$\overline{A}$与$\overline{B}$独立。

多个事件的独立性

定义 设 A,B,C 为三个事件，若满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

2. 若随机事件 A，B，C 相互独立，则下列事件对中（　　）可能不相互独立.

① A 与 BC；　　② A 与 $B\cup C$；

③ A 与 $B-C$；　　④ AB 与 AC.

【作业题讲解】若随机事件 A，B，C 相互独立，则下列事件对中（　　　）可能不相互独立．答案选 D

A　A 与 BC；　　B　A 与 $B\cup C$；

C　A 与 $B-C$；　　D　AB 与 AC．

线索:1.　事件 A,B 相互独立　当且仅当　$P(AB)=P(A)P(B)$；

2.　事件 A，B 相互独立　当且仅当 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$　也相互独立;

3.　$P(AB)P(AC)\neq P(ABAC)$ 可能成立，所以 AB 与 AC 不独立;

4.　A，B，C 相互独立，则 A 与 BC 相互独立；A 与 $B\bar{C}$ 相互独立，A 与 $\bar{B}\bar{C}$ 也相互独立；类推;

5.　$B\cup C=\overline{\overline{B\cup C}}=\overline{\bar{B}\bar{C}}$；

【例题】 **设事件** A**、** B **相互独立，** $P(A)=0.4, P(B)=0.3$**，求** $P(A\cup\overline{B})$**.**

解 $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

$=P(A)+P(\overline{B})-P(A)P(\overline{B})=P(A)+(1-P(B))(1-P(A))$

$=0.4+0.7\times0.6=0.82$

【例】加工某一零件需经三道工序。设第一、二、三道工序的次品率分别是2%、3%、5%，假设各道工序是互不影响的，问加工出来的零件的次品率是多少？

解：令 A_i 为“第 i 道工序出现次品”，A 为“加工出来的零件是次品”，则 A_1, A_2, A_3 相互独立，并且

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

于是 $$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3)$$

$$= 1 - (1 - 0.02)(1 - 0.03)(1 - 0.05) = 0.09693$$

【练习题】 已知 $P(A)=0.5$，$P(\overline{A}\cup B)=0.7$，且 A 与 B 相互独立，则 $P(B)=$__________

【练习题】张、王、李三人独立地向同一目标射击一次，他们各自击中目标的概率分别为 0.9、0.8 和 0.7，则目标被击中的概率为 $p=$______

【模型描述】若在n重独立试验中，每次试验的结果只有两个： A与$\overline{A}$，且$P(A)=p, P(\overline{A})=q \quad (0<p<1, p+q=1)$，则这样的试验称为或伯努利概型.

【定理 3】 在伯努利概型中，设事件A在各次试验中发生的概率$P(A)=p(0<p<1)$，则在n次独立试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

其中$p+q=1, k=0,1,2,\cdots,n$.

例：甲乙二人向同一目标射击，甲击中目标的概率为0.6，乙击中目标的概率为0.5；试计算：

1）两人都击中目标的概率；

2）恰有一人击中目标的概率；

3）目标被击中的概率。

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

今天学习的重点内容：

① 概率乘法公式. $P(AB)=P(A)P(B|A)$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

② 全概率公式.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

③ A,B独立，$P(AB)=P(A)P(B)$

④ 射击20次，恰好命中5次的概率

$$C_{20}^{5}p^{5}(1-p)^{15}$$