天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

概率与统计第15讲

主讲：邱玉文　　　　内容：数学期望，方差，标准差等

本次内容概要

一、随机变量函数的数学期望（续）；

二、数学期望的性质；

三、方差和标准差；

四、方差的性质；

五、常用随机变量的期望和方差；

一、数学期望（均值）

一、数学期望的定义

1. 离散随机变量情形

$$E(X)=\sum_i x_i p(x_i)$$

2. 连续随机变量情形

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} kx^{\alpha}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，且 $E(X)=0.75$，则 $k=$ __________；$\alpha=$ _________.

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

例 4 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x/4, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$，求 $E(X)$.

【数学期望的例子】

例 4 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x/4, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$，求 $E(X)$.

解 随机变量 X 的分布密度为 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}1/4, & 0<x\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

故 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^4 x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{x^2}{8}\Big|_0^4=2.$

例 5 设随机变量 X 服从指数分布 $e(\lambda)$，求数学期望 $E(X)$.

解 由 §2.5 知，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

所以，按公式(3.3)得

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{\lambda}.$$

【数学期望不存在的例子】

设*X*服从柯西分布，密度函数是

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求数学期望$E(X)$.

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$

因为反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$不绝对收敛，所以$E(X)$不存在.

二、随机变量函数的数学期望

二、随机变量函数的数学期望

二、随机变量函数的数学期望

1. 离散随机变量情形

设离散随机变量X的概率函数为$p(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$, 则X的函数$Y = g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\sum_i g(x_i)p(x_i)$$

2. 连续随机变量情形

设连续随机变量X的密度函数为$f(x)$，则X的函数$Y = g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

例 9 随机变量 X 在 $[0,\pi]$ 上服从均匀分布，

求 E(X), $E(\sin X)$, $E(X^2)$ 及 $E[X-E(X)]^2$.

【随机变量函数的数学期望例子】

例 9 随机变量 X 在 $[0,\pi]$ 上服从均匀分布，

求 $E(X)$, $E(\sin X)$, $E(X^2)$ 及 $E[X-E(X)]^2$.

解 根据随机变量函数数学期望的计算公式，有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xf(x)dx=\int_0^{\pi}\sin\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{\pi} x^2\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$E[X-E(X)]^2=E\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^2=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi^2}{12}.$$

例 10 设随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

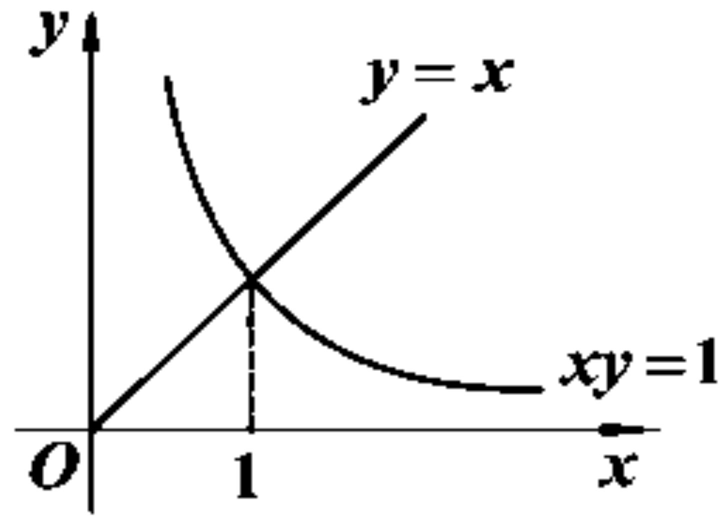
求数学期望 $E(Y), E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

随机变量函数的数学期望例子

例 10 设随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x,x>1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y),E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.



解 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dydx$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}\frac{3}{2x^3y}dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}[\ln y]\Big|_{1/x}^{x}dy=3\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}.$$

三、数学期望的性质

三、数学期望的性质

- 常数的期望为该常数：$E(c)=c$
- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- $E\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)$
- 若随机变量*X*与*Y*相互独立，且*E*(*X*)和*E*(*Y*)存在，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

四、方差和标准差

一、方差的定义

1. 定义

$$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

方差用来描述随机变量取值的波动（集中与分散）程度

2. 离散和连续情形

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E(X))^2p(x_i), & \text{离散情形}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)dx, & \text{连续情形}\end{cases}$$

3. 计算*D*(*X*)的简便公式

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

【例】 在M电子公司生产的简易二极管中，按质量等级可分为5级，其中1级最差，5级最好。现统计了今年1月份生产的二极管质量各等级所占比率，如下表所列。求平均质量等级和质量等级的方差

X	1	2	3	4	5
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

解：平均质量等级

$$E(X)=1\times0.1+2\times0.2+3\times0.3+4\times0.3+5\times0.1=3.1$$

质量等级的方差

$$D(X)=1\times0.1+4\times0.2+9\times0.3+16\times0.3+25\times0.1-3.1^2=1.29$$

【求方差的例子】

例 4 设 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$, $D(X)$.

解　X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$，故所求方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{c+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

【求方差的例子】

例 5 设随机变量 X 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$, 求 $E(X),D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=-xe^{-x/\theta}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x/\theta}dx=\theta,$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=-x^2e^{-x/\theta}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x/\theta}dx=2\theta^2$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$.

即有 $E(X)=\theta,\ D(X)=\theta^2$.

五、方差的性质

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

3. 方差的性质

- 常数的方差为0，即 $D(c)=0$
- $D(aX+b)=a^2D(X)$
- 若随机变量*X*与*Y*相互独立，且方差都存在，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

$$D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

- 对任意随机变量*X*与*Y*，若它们的方差都存在，则

$$D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)\pm 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$$

其中cov(*X*,*Y*)称为*X*与*Y*的协方差

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big]$$

二、标准差的定义

方差的量纲是随机变量量纲的平方，这使得对方差的理解不够直观，为此引入标准差的概念，把它定义为方差的平方根，即

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

标准差在6西格玛管理中有非常重要的作用。

3、随机变量的标准化

1. 标准化变换公式

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

X^* 称为X的标准化随机变量。

2. 标准化随机变量的均值和方差

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$

正态分布的数学期望和方差

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

证法一

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx.$$

设$\frac{x-\mu}{\sigma}=t$，得

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-t^2/2}\,dt$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}\,dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2/2}\,dt.$$

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi},\ \int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2/2}\,dt=0,$$

所以得到

$$E(X)=\mu.$$

1、标准正态分布的数学期望

若$Y \sim N(0,1)$,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

2、一般正态分布的数学期望

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$E(X) = \sigma E(Y) + \mu = \mu.$$

1、标准正态分布方差

$Y \sim N(0,1), D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$，已知 $E(Y) = 0$，

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} d\,\frac{x^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot d\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$= 1.$$

所以 $D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1$。

2、一般正态分布方差

对于 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), D(X)=\sigma^2 D(Y)=\sigma^2$。

总结：正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的期望值是 μ，方差是 σ^2。

定理 1 表明： 正态随机变量的线性函数$Y=a+bX$ 仍然是正态随机变量.

推论： 设随机变量X 服从正态分布，则标准化的随机变量

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

在定理 1 中，设$a=-\frac{\mu}{\sigma}$， $b=\frac{1}{\sigma}$，即得结论.

2、正态分布的可加性

1. 两个正态分布情形

设随机变量 $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2),\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$，并且$X$与$Y$独立，则

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y,\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

2. 多个正态分布情形

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ，则

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i,\ \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为常数。

【例4.1-7】已知 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，并且X与Y独立，试确定$Z=X-2Y+7$的分布，求$E(Z), D(Z)$，写出Z的密度函数。

$$E(Z)=E(X)-2E(Y)+7=0$$

$$D(Z)=D(X)+4D(Y)=5$$

$$Z=X-2Y+7\sim N(0,5)$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{z^2}{10}},\quad z\in R$$

六、常用随机变量的期望和方差

常用分布的期望和方差

1、二项分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim B(n, p)$ ，其概率函数为

$$p(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

可求得X的期望和方差如下：

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p)$$

2、泊松分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim P(\lambda)$ ，其概率函数为

$$p(x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!},\quad x=0,1,\cdots$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X)=\lambda,\quad D(X)=\lambda$$

3、均匀分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim U(a,b)$ ，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

4、指数分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim e(\lambda)$，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^{2}}$$

5、正态分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

可求得**X**的期望和方差如下：

$$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2$$

6、常用分布的期望和方差

6、常用分布的期望和方差

分布名称及记号	概率函数或概率密度	数学期望	方差
"0—1"分布	$p(x)=p^x q^{1-x}, x=0,1.$ $(0<p<1, p+q=1)$	p	pq
二项分布 $B(n,p)$	$p(x)=C_n^x p^x q^{n-x}, x=0,1,\cdots,n.$ $(0<p<1, p+q=1)$	np	npq
超几何分布 $H(n,M,N)$	$p(x)=\dfrac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$, $x=0,1,\cdots,\min(n,M).$ $(0\leqslant n\leqslant N, 0\leqslant M\leqslant N)$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
泊松分布 $P(\lambda)$	$p(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x=0,1,2,\cdots.$ $(\lambda>0)$	λ	λ

6、常用分布的期望和方差（续）

泊松分布 $P(\lambda)$	$p(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x=0,1,2,\cdots.$ $(\lambda>0)$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$p(x)=pq^{x-1}, x=1,2,3,\cdots.$ $(0<p<1, p+q=1)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b.\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $e(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$ $-\infty<x<+\infty.$ $(\sigma>0)$	μ	σ^2