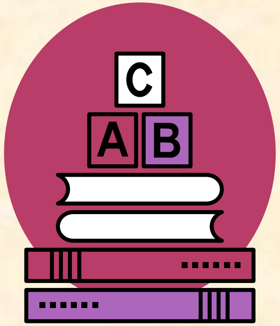
天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数A第17讲

§3.5~6：向量空间，线性方程组解的结构等

主讲教师： 邱玉文



第17讲：内容大概 Outline of lectures

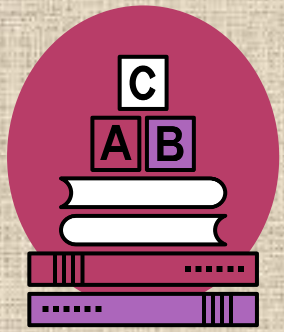
1 作业释疑与§3.4复习；

2 齐次线性方程组解的性质；

3 齐次线性方程组的解空间；

4 非齐次线性方程组解的结构；

5 非齐次线性方程组解的例题。



一、§3.1 已经学过的结论

学过1： n元线性方程组$Ax=b$

(1) 无解的充分必要条件是 $r(A)<r(A|b)$;

(2) 有唯一解的充要条件是 $r(A)=r(A|b)=n$;

(3) 有无穷解的充要条件是 $r(A)=r(A|b)<n$.

学过2：齐次线性方程组$Ax=0$解的情况：

$Ax=0$ 有非零解的充要条件 $\Leftrightarrow r(A)=r<n;$

（自由未知量个数为$n-r$个）

齐次线性方程组 $Ax=0$只有零解的充要条件 $\Leftrightarrow r(A)=n.$

（n为未知数的个数）

学过的方法3：求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $r(A) = 2 < n = 4$ 齐次方程组有非零解

可得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = \qquad\quad x_4 \end{cases}$$

所以原方程组的解是

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k_1, k_2 \in R$$

最后一步是第六节的要求，当时这么写，不知道为什么这么写

二、非齐次线性方程组的解的结构

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以写成

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

称 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 所对应的齐次线性方程组（或称为导出组）.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解有如下性质：

第一部分：齐次线性方程组解的结构

Section Four： The Structure of Solutions to Homogeneous Linear Equations

1. 齐次方程组的矩阵方程形式$Ax=0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

可写成矩阵方程方程形式 $Ax = 0.$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. 齐次方程组$Ax=0$解的性质

（1）若α，β是$Ax=0$的解，则$\alpha+\beta$也是$Ax=0$的解；

（2）若α为$Ax=0$的解，则$k\alpha$也是$Ax=0$的解（k是任意常数）；

（3）综合(1)和(2)，若α，β是$Ax=0$的解，则$k\alpha+m\beta$也是$Ax=0$的解；

3. 齐次方程组$Ax=0$的基础解系

齐次方程组$Ax=0$有若干个解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 满足：

（1） $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关；

（2）齐次方程组$Ax=0$的任意一个解，都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示；

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次方程组$Ax=0$的一个基础解系

4. 齐次方程组$Ax=0$的全部解

如果齐次方程组 $Ax=0$有一个基础解系$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$;

则齐次线性方程组$Ax=0$的全部解是 $\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

如果齐次方程组 $Ax=0$只有零解，则 $Ax=0$没有基础解系；

5. 齐次方程组Ax=0的解空间

易见齐次方程组Ax=0的全部解，是R^n的一个子空间；

称为Ax=0的解空间；

易见齐次方程组Ax=0的解空间的一个基即为Ax=0的一个基础解系；

5. 齐次方程组*Ax*=0的解空间例子

以三元齐次线性方程组*Ax*=0为例，它的解

（1）只有零解，解空间即为零空间；

（2）解空间为一维子空间，几何意义为过原点的一条直线；

（3）解空间为二维子空间，几何意义为过原点的一个平面；

$\xi=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\xi=k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad k\in R$	$\xi=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in R$

6. 齐次方程组$Ax=0$的解的结构

对于齐次方程组 $Ax=0$，设$r(A)=r$，则基础解系一定存在，且每个基础解系含向量个数为$n-r$个；其中n为方程组未知数个数，也是系数矩阵的列数。

推论　设 A 是$m\times n$矩阵，若$r(A)=r<n$，则 $Ax=0$ 的任意$n-r$个线性无关的解向量都是 $Ax=0$ 的一个基础解系。

情形1：

若Ax=0解空间的基础解系是 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

则方程组的全部解是 $x=k\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},k\in R$

Ax=0的解空间是R^3的1维子空间，是过坐标原点的一条直线。

情形2

若Ax=0解空间的基础解系是 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

则方程组的全部解是 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

$k_1,k_1\in R$

Ax=0的解空间是R^3的2维子空间，是过坐标原点的一个平面。

情形3：

1）若$Ax=0$只有零解，则没有基础解系.

2）解空间的维数：也就是基础解系所含向量个数.也是自由未知量个数，等于$n\text{-}r(A)$

7. 求齐次方程组$Ax=0$的基础解系

例1 求齐次线性方程组的基础解系与通解

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

解：用行换把系数矩阵A化成行最简矩阵，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$ 令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

即得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

练习： 求线性方程组的基础解系和通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

答案：基础解系： $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数 .

二、非齐次线性方程组的解的结构

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以写成

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

称 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 所对应的齐次线性方程组（或称为导出组）.

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解有如下性质：

第二部分：非齐次线性方程组解的结构

Section Four： The Structure of Solutions to Non-homogeneous Linear Equations

8 非齐次线性方程组$Ax=b$解的结构

性质1 设 η_1,η_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

证 设 η_1,η_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $A\eta_1=b, A\eta_2=b$，于是

$$A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$$

所以 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

类似地，可以证明：

性质2 设 η 是 $Ax=b$ 的解，ξ 是 $Ax=0$ 的解，则 $\eta+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

齐次方程组：$Ax=0$；非齐次方程组 $Ax=b$

1. 若 α 是 $Ax=0$ 的解；β 是 $Ax=b$ 的解，则 $\alpha+\beta$ 是 $Ax=b$ 的解.

因为：$A\alpha=0$，$A\beta=b \Rightarrow A(\alpha+\beta)=b$

$\therefore$ $\alpha+\beta$ 是 $Ax=b$ 的解

2. α 和 β 都是 $Ax=b$ 的解；则 $\alpha+\beta$ 是 $Ax=2b$ 的解

因为：$A\alpha=b$，$A\beta=b \Rightarrow A(\alpha+\beta)=2b$

$\therefore$ $\alpha+\beta$ 是 $Ax=2b$ 的解；

4. 若 α,β 都是 $Ax=b$ 的解，

① $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 也是 $Ax=b$ 的解；

② $3\alpha-2\beta$ 也是 $Ax=b$ 的解

③ k 是任意实数， $k(\alpha-\beta)+\beta$ 也是 $Ax=b$ 的解

$A\alpha=b, A\beta=b \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)=b$；

$A(3\alpha-2\beta)=b$； $A\left(k(\alpha-\beta)+\beta\right)=b$

非齐次线性方程组Ax=b的通解

当r(A)=r(A|b)<n时，非齐次线性方程组Ax=b有无穷多解；

"Ax=b的通解"="Ax=0的通解"+"Ax=b的特解"

Ax=b的通解是 $x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*; \quad k_i \in R$

定理 16 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，如果 η^* 是方程组 $Ax=b$ 的一个特解，ξ 是导出组 $Ax=0$ 的通解，则 $\eta^*+\xi$ 是 $Ax=b$ 的通解．也就是说，如果 $Ax=0$ 的基础解系是 ξ_1，ξ_2，$\cdots\xi_{n-r}$，则 $Ax=b$ 的通解可以表示为

$$\eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

9 如何求非齐次线性方程组Ax=b的通解

1 对增广矩阵(A|b)进行行换，化成行最简形；

2 根据行最简形得到同解方程组；确定自由未知量；

3 确定齐次方程组Ax=0的一个基础解系$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$;；

4 写出非齐次方程组Ax=b的一个特解，比如让自由未知量都等于0

5 Ax=b的通解是 $x=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*;\quad k_i\in R$

例 19　求线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$$

解　$(\mathbf{A}\mid\mathbf{b})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

可得

$$\begin{cases} x_1= \frac{5}{4}+\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ x_2=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4 \\ x_3= x_3 \\ x_4= x_4 \end{cases}$$

从而对应齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{7}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

令 $x_3=x_4=0$，得方程组的一个特解为

$$\eta^*=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

于是所求原方程组的通解为

$$\eta=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2\quad (k_1,k_2\in R).$$

例 20 设η_1, η_2是 3 元线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的两个不同的解向量，且$r(A)=2$，求方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的通解。

解 由于$r(A)=2$，$n=3$，所以 $\mathbf{Ax}=0$的基础解系只有一个向量。由于η_1, η_2是方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解，且$\eta_1 \neq \eta_2$，所以 $\eta_1-\eta_2$是$\mathbf{Ax}=0$的非零解，也是$\mathbf{Ax}=0$的基础解系。

所以，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的通解是 $x=\eta_1+k_1(\eta_1-\eta_2) \quad (k_1,k_2 \in R)$

10. 与方程组Ax=b有解等价的命题

$\Leftrightarrow$ 线性方程组Ax=b有解

$\Leftrightarrow$ 向量b能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

$\Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价;

$\Leftrightarrow$ 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$的秩相等.

例：设 A 为4行5列矩阵，$r(A)=3$，非齐次线性方程组有解 η_1, η_2, η_3，则 $Ax=b$ 的通解为

$$x = k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_1-\eta_3)+\eta_1$$

其中 $k_1, k_2 \in R$

这里：$\eta_1-\eta_2$ 与 $\eta_1-\eta_3$ 线性无关。