天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

概率与统计第3讲

主讲：邱玉文　　内容：古典概型与条件概率等

第三讲内容大概：

一、古典概型和几何概型复习；

二、条件概率的概念；

三、概率乘法公式

四、全概率公式和贝叶斯公式

一、古典概型和几何概型）

1 概率的古典定义与计算

随机试验只有有限个样本点，并且每个样本点出现的可能性都相等。其样本空间记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，对于任意事件 $A\subset\Omega$，有

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

其中m为A中包含的样本点数。

例 1　将一颗均匀的骰子连掷两次，求：

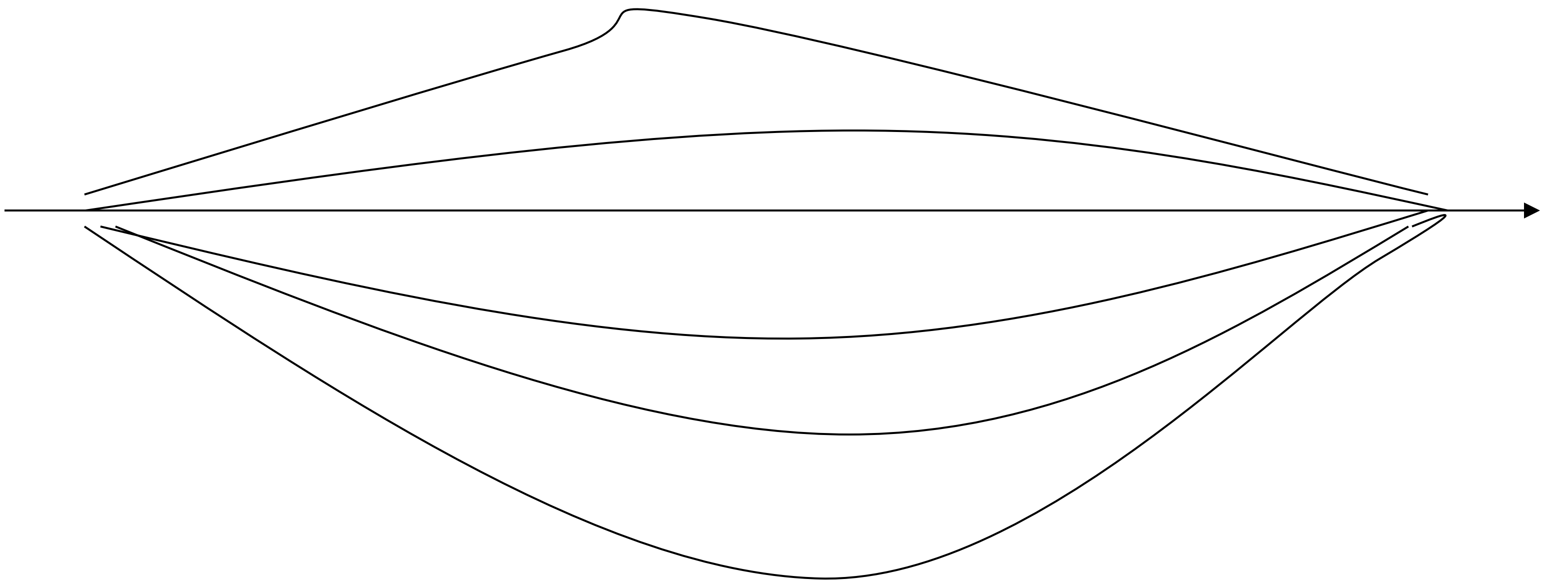
（1）两次出现的点数之和等于 7 的概率；

（2）两次出现的点数之和等于 8 的概率；

（3）至少出现一次6点的概率.

2. 复习：排列与组合的基本概念

加法公式：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。

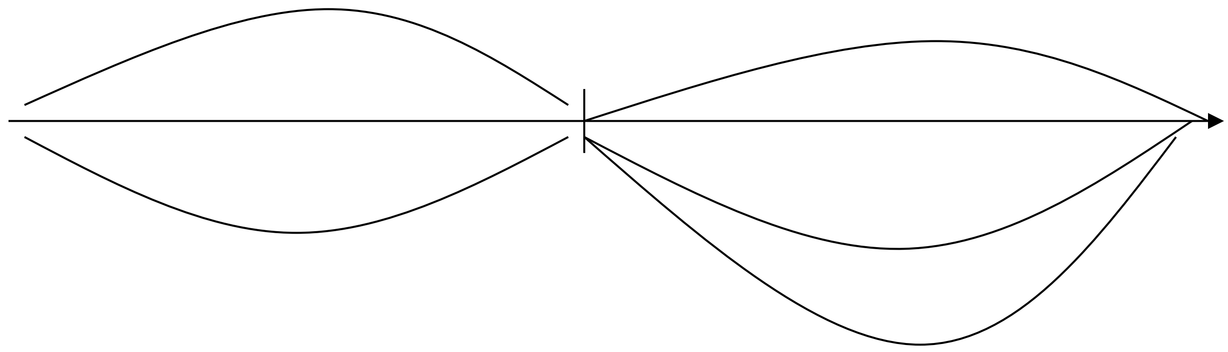


2. 排列与组合的基本概念

乘法公式：设完成一件事需分两步，

第一步有n_1种方法, 第二步有n_2种方法，

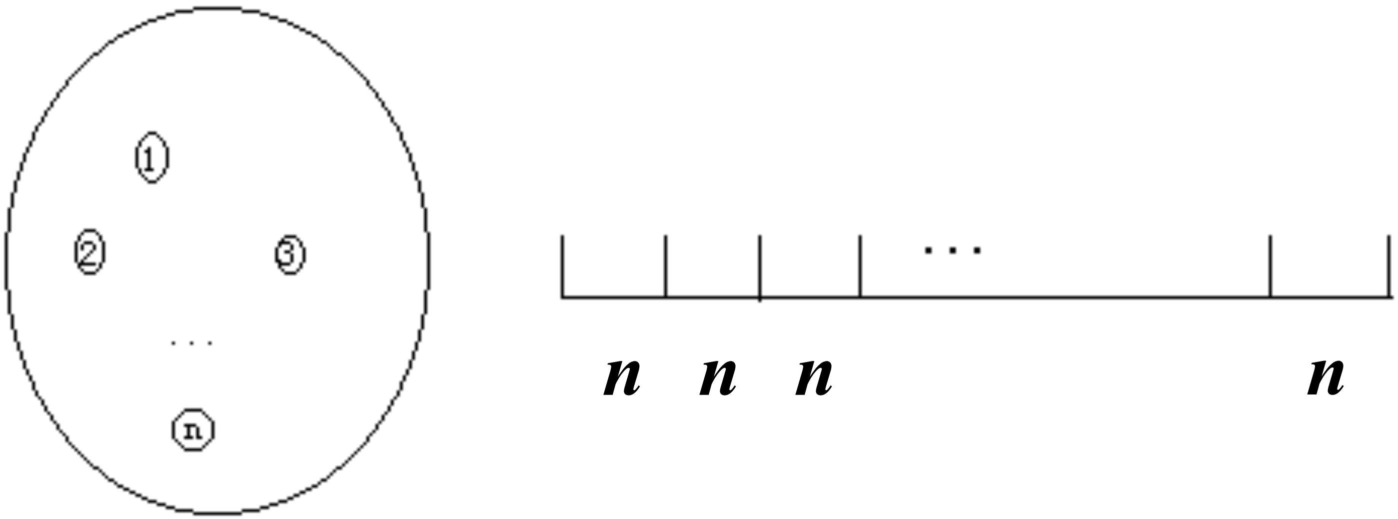
则完成这件事共有$n_1 n_2$种方法



举例

2. 排列与组合的基本概念

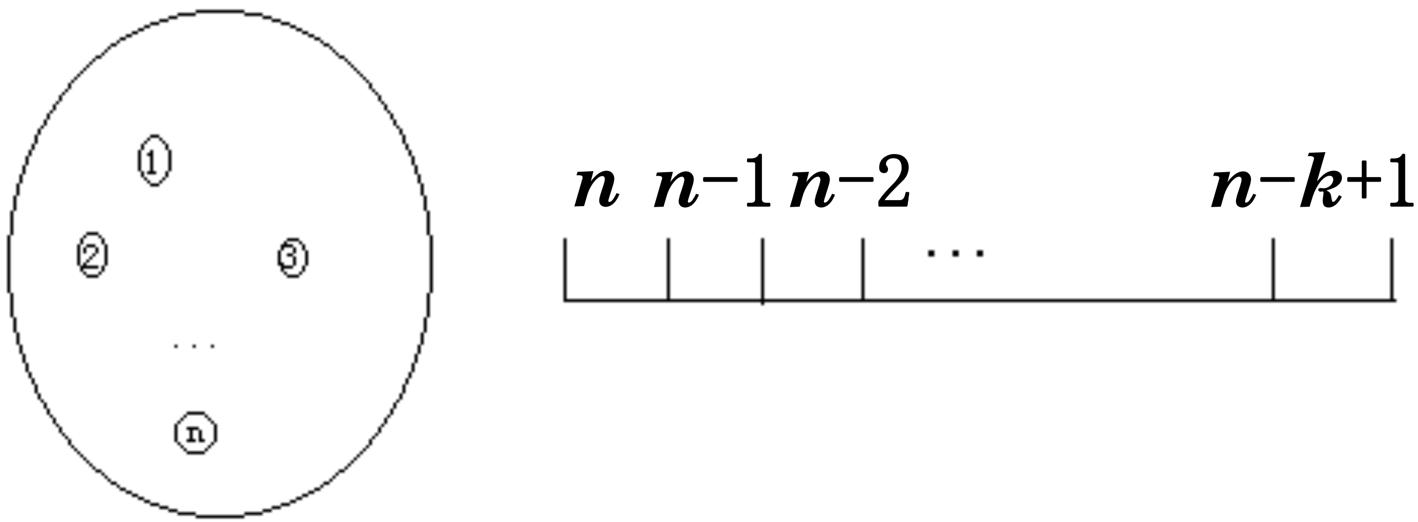
有放回抽取（重复抽样）：从含有n个元素的集合中随机抽取k次，每次取一个，记录其结果后**放回**，将记录结果**排成一列**，



共有n^k种排列方式.

2. 排列与组合的基本概念

不放回抽样(无重复抽取)：从含有*n*个元素的集合中随机抽取*k* 次，每次取一个，取后不放回，将所取元素排成一列，



共有$A_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)$种排列方式.

2. 复习：排列与组合的基本概念

组合：从含有n个元素的集合中随机抽取k个，共有

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

种取法.

正品率和次品率

例1：在100 件产品中，有 4 件次品和96件正品.

◆这批产品的次品率

$n = 100$ $m_A = 4$

$$P(A) = \frac{4}{100} = 0.04$$

◆任取3件，全是正品的概率

$n = C_{100}^3$ $m_B = C_{96}^3$

$$P(B) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}$$

◆任取3件，刚好两件正品的概率

$n = C_{100}^3$ $m_C = C_{96}^2 C_4^1$

$$P(C) = \frac{C_{96}^2 C_4^1}{C_{100}^3}$$

【例】一批产品共有100件，其中有5件不合格品。从中随机抽取10件，试求不同抽取方式下事件A=“恰好取到2个不合格品”的概率。

- 不放回抽取：

$$P(A)=\frac{C_{95}^{8}C_{5}^{2}}{C_{100}^{10}}=\frac{C_{10}^{2}\times P_{95}^{8}\times P_{5}^{2}}{P_{100}^{10}}$$

- 有放回抽取：

$$P(A)=\frac{C_{10}^{2}\times 5^{2}\times 95^{8}}{100^{10}}=C_{10}^{2}\times 0.05^{2}\times 0.95^{8}$$

【例】一批产品共有N件，其中有M件不合格品。从中随机抽取n件，试求不同抽取方式下事件A_m=“取到m个不合格品”的概率。

- 不放回抽取：$P(A)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
- 有放回抽取：

$$P(A)=C_n^m\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

【例1.2-4】一批产品共有N件，其中有M件不合格品。从中随机抽取n件，试求不同抽取方式下事件A_m="取到m个不合格品"的概率。

- 不放回抽取：$P(A)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
- 有放回抽取：

$$P(A)=C_n^m\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

抽签是否公平?

例：10个学生，抽取10张外观相同的纸签，以抽签的方式分配3张音乐会入场券.求 A={第五个抽签的学生抽到入场券}的概率。

◆基本事件总数（分母）

$$n = P_{10}^{5}$$

◆分子上的基本事件数

$$m_A = P_3^1 \cdot P_9^4$$

第五个学生抽到入场券

前面4个学生抽取剩下9张

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{P_3^1 \cdot P_9^4}{P_{10}^5} = \frac{3}{10}$$

生日问题

例4： 某班有50个学生，求他们的生日各不相同的概率（设一年365天）

分析：此问题可以用投球入盒模型来模拟

50个学生 $\longrightarrow$ 50个小球

365天 $\longrightarrow$ 365个盒子

$$P(A) = \frac{C_{365}^{50} \cdot 50!}{365^{50}} \approx 0.03$$

2. 几何概型

随机试验有无限个样本点，并且每个样本点出现的可能性都相等。其样本空间记为 Ω ，对于任意事件 $A \subset \Omega$ ，有

$$P(A) = \frac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}}$$

这里的几何测度可以是长度、面积、体积等。

【例】 天上掉馅饼，拿盆去接，拿大盆还是小盆?

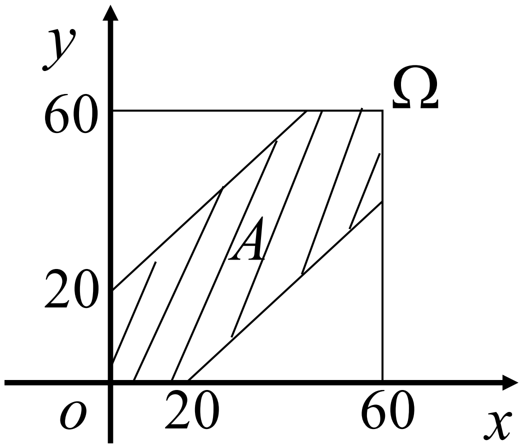
【例5】 人约黄昏后——一对情侣约定在晚上7时到8时之间在某处约会，并约定先到者等候另一人20分钟，过时即可离去，求两人约会成功的概率。

解：以x和y分别表示两人到达约会地点的时刻（以分为单位）令$A=$“两人约会成功”，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 60\}\qquad A=\{(x,y)\mid |x-y|\le 20\}$$

如图所示

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=0.5556$$



二、条件概率，概率乘法公式

§ 1.4 条件概率

条件概率$P(A|B)$：事件B已发生的前提下，事件A发生的概率，称为B条件下A的**条件概率**.

引例：某校共本科生12000人，某宿舍（306）共6人，该校云南籍同学240人，该宿舍（306）有云南籍同学2人。现在某人捡到了一张一卡通，

（1）这张卡是306宿舍某同学的概率是多少?

（2）这张卡是云南某同学的概率是多少?

（3）已知这张卡是云南某同学的卡，这张卡是306宿舍的概率是多少?　（条件概率）

（4）已知这张卡是306某宿舍丢的，这张卡是云南籍同学的概率是多少?　（条件概率）

实例6： 甲、乙两条生产线生产同一种元件，已知甲生产线生产8个元件，其中2个次品，乙生产线生产9个元件，其中1个次品. 现在从全部元件中任取一个元件，求：

（1）$P(A)$，其中A={这个元件是甲生产线的产品}，

（2）$P(B)$，其中B={这个元件是次品}，

（3）$P(AB)$；

（4）$P(A|B)$.

数据整理	$\overline{B}$正品	B 次品
A 甲车间生产	6	2
$\overline{A}$ 乙车间生产	8	1

（1）P(A)，A={元件是甲生产线的产品}，

（2）P(B)，B={这个元件是次品}，

（3）P(AB）；

（4）P($A|B$).

数据整理	$\bar{B}$正品	B 次品
A 甲车间生产	6	2
$\bar{A}$ 乙车间生产	8	1

（1）P(A)，A={元件是甲生产线的产品}， $P(A)=\frac{8}{17}$

（2）P(B)，B={这个元件是次品}， $P(B)=\frac{3}{17}$

（3）P(AB)；$P(AB)=\frac{2}{17}$

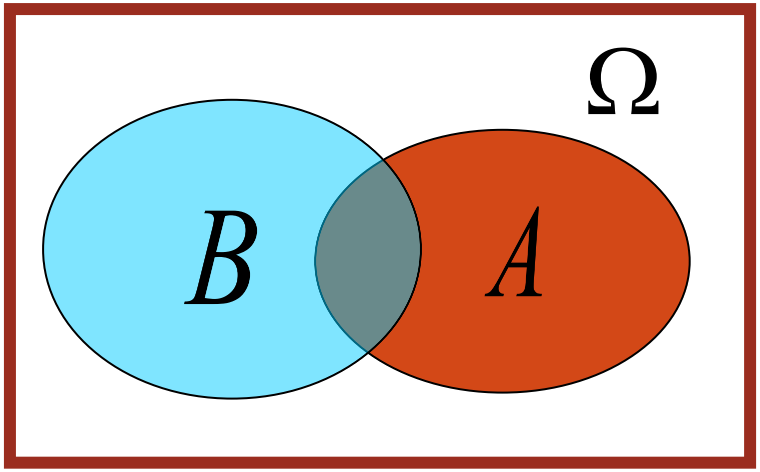
（4）P($A|B$). $P(A|B)=\frac{2}{3}$

定义

设A,B是试验E的两个事件，且P(B)>0,则称

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B已发生的条件下事件A发生的条件概率.



概率 P(*A*|*B*)与P(*AB*)的区别与联系

联系：事件*A*，*B*都发生了

区别：

（1）在P(*A*|*B*)中，事件*A*，*B*发生有时间上的差异，*B*先*A*后；在P（*AB*）中，事件*A*，*B*同时发生。

（2）样本空间不同，在P(*A*|*B*)中，事件*B*成为样本空间；在P(*AB*)中，样本空间仍为 Ω。

因而有 $P(A|B) \geq P(AB)$

实例6： 甲、乙两条生产线生产同一种元件，已知甲生产线生产8个元件，其中2个次品，乙生产线生产9个元件，其中1个次品. 现在从全部元件中任取一个元件，求：

（3）$P(AB)$；

$P(AB)$

（4）$P(A|B)$.

数据整理	$\bar{B}$正品	B 次品
A 甲车间生产	6	2
$\bar{A}$ 乙车间生产	8	1

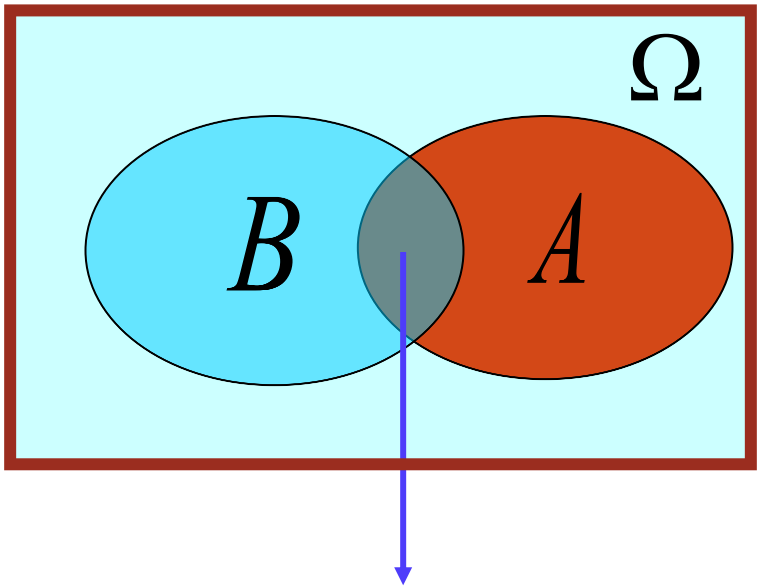
（1）P(A)，A={元件是甲生产线的产品}， $\frac{8}{17}$

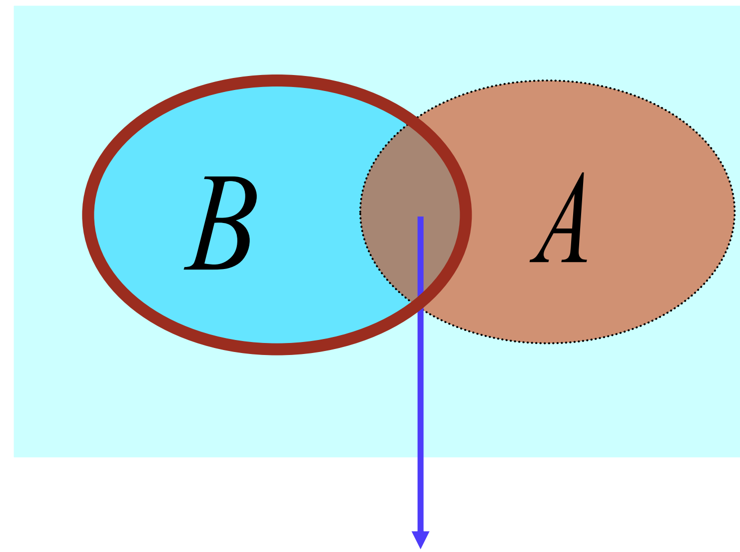
（2）P(B)，B={这个元件是次品}， $\frac{3}{17}$

（3）P(AB）；

（4）P($A|B$).

条件概率 P(A|B)的样本空间





$$P(AB)$$

$$P(A\mid B)$$

AB在**Ω**中的份额；

AB在***B***中的份额；

例7 一盒中混有100只新、旧乒乓球，各有红、白两色，分类如下表。从盒中随机取出一球，若取得的是红球，试求该红球是新球的概率。

设A=“从盒中取到一只红球”.

B=“从盒中取到一只新球”

	红	白
新	40	30
旧	20	10

$$n_A = 60 \qquad n_{AB} = 40$$

$$P(B|A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{2}{3}$$

概率乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$
$$= P(B)P(A|B)$$

$P(AB) = P(A)\cdot P(B|A)$

$P($

推广

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2)) \cdots P(A_n|(A_1A_2\cdots A_{n-1}))$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0)$$

【例题】 设在 10 个同一型号的元件中有 7 个一等品，从这些元件中不放回地连续取两次，每次取一个元件，求在第一次取得一等品的条件下，第二次也取得一等品的概率.

【解答】 设 $A_i=\{第i次取得一等品，\ i=1,2\}$，则

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{7\times 6}{10\times 9}\Big/\frac{7}{10}=\frac{6}{9}$$

【解答2】 事实上，本题无需计算，答案很明显；

【例题】设在10个同一型号的元件中有7个一等品，从这些元件中不放回地连续取三次，每次取一个元件，求：

（1）三次都取得一等品的概率；

（2）三次中至少有一次取得一等品的概率.

【解答】设 $A_i=\{第i次取得一等品，\ i=1,2,3\}$，则

（1）$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}$

（2）$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right)$

$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$
$$=1-\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}$$

【作业讲解】

设 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.4,\ P(A\mid\overline{B})=0.6$，求 $P(AB),\ P(A\mid A\cup\overline{B})$.

【解答】 因为 $P\left(A\mid\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

所以 $0.6=\dfrac{0.5-P(AB)}{1-0.4}$； $P(AB)=0.14;$

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.5+(1-0.4)-(0.5-0.14)=0.74$$

$$P\left(A\mid A\cup\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\right)}{P\left(A\cup\overline{B}\right)}=\frac{25}{37}$$

【例题与练习】袋中装 10 个球，其中 3 个黑球、7 个白球，不放回随机取两次，求：

（1）两次取到的均为黑球的概率；

（2）两个球颜色不同的概率；

【解】 设 A_i 表示“第 i 次取到的是黑球” $(i=1,2)$，则

（1） A_1A_2 表示事件“两次取到的均为黑球”.

由题设知 $P(A_1)=\dfrac{3}{10},\ P(A_2\mid A_1)=\dfrac{2}{9}$

根据乘法公式，有 $P\left(A_1A_2\right)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}.$

【作业讲解】 甲组有 5 名男生和 2 名女生，乙组有 4 名男生和 3 名女生.今从甲组随机抽一个同学编入乙组，然后再从乙组中随机抽一个同学编入甲组；求：

（1）甲组仍为 5 名男生 1 名女生的概率；

（2）甲组为 6 名男生 1 名女生的概率.

【类似问题】第一个箱子有 7 个黄色乒乓球，3 个白色乒乓球；第二个箱子有 6 个黄色乒乓球和 4 个白色乒乓球；现在从第一个箱子中随机摸一个乒乓球放到第二个箱子中，再从第二个箱子中摸一个放到第二个箱子中；求第一个箱子中仍然是 7 个黄色乒乓球的概率。

【作业讲解】 甲组有 5 名男生和 2 名女生，乙组有 4 名男生和 3 名女生.今从甲组随机抽一个同学编入乙组，然后再从乙组中随机抽一个同学编入甲组；求：

（1）甲组仍为 5 名男生 2 名女生的概率；

（2）甲组为 6 名男生 1 名女生的概率.

【习题解答】

设 A={先由甲组抽取一男生}，B= {再由乙组抽取一男生}.

（1） $P(AB+\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{5}{7}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{33}{56}$

（2） $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{7}$

【练习题】第一个箱子有 7 个黄色乒乓球，3 个白色乒乓球；第二个箱子有 6 个黄色乒乓球和 4 个白色乒乓球；现在从第一个箱子中随机摸一个乒乓球放到第二个箱子中，再从第二个箱子中摸一个放到第二个箱子中；求第一个箱子中仍然是 7 个黄色乒乓球的概率。

四、全概率公式

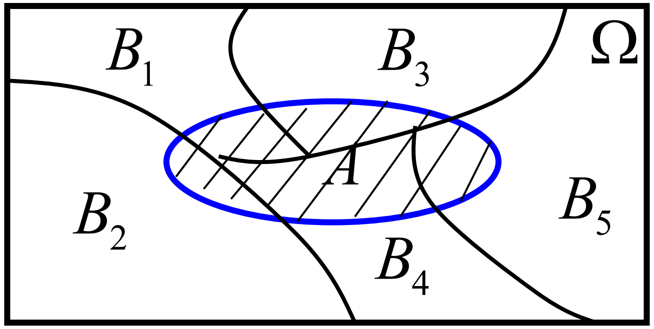
定理 2 设样本空间为Ω，$B_1, B_2, \cdots, B_n$是n个互不相容事件，

且

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega, \quad P(B_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则对于任意随机事件 A，有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A | B_i)$$



上述公式称为全概率公式。

【例题】甲箱中有3个白球，2个黑球，乙箱中有1个白球，3个黑球。现从甲箱中任取一球放入乙箱中，再从乙箱任意取出一球。问从乙箱中取出白球的概率是多少?

解　设B=“从乙箱中取出白球”，

A=“从甲箱中取出白球”，

$$P(A)=\frac{3}{5}\qquad P(\overline{A})=\frac{2}{5}\qquad P(B\mid\overline{A})=\frac{1}{5}\qquad P(B\mid A)=\frac{2}{5}$$

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{25}$$

【例题】甲、乙、丙三个厂家生产同一种产品，其市场份额分别为20%，50%和30%，由长期经验知，三家的正品率分别为0.85，0.94和0.9，现从市场买一件这样的产品，求买到正品的概率。

解：记 A 为“买到正品”

用 B_1, B_2, B_3 分别表示买到甲厂、乙厂和丙厂产品，则

- $P(B_1)=0.2,\quad P(A|B_1)=0.85 \qquad P(B_2)=0.5,\quad P(A|B_2)=0.94$

  $P(B_3)=0.3,\quad P(A|B_3)=0.9$

- 从而 $P(A)=\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)=0.91$

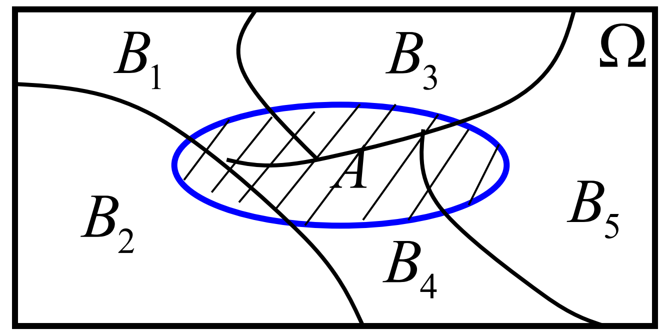
【练习题】某品牌产品有(1)、(2)、(3)三条生产线生产同一种产品，已知(1)、(2)、(3)各条生产线的产量分别占该厂总产量的30%，35%，35%；各条生产线产品的次品率分别是6%，5%，4%；将该厂所有产品混合投放市场，某消费者购买该厂的一件产品，求这件产品是次品的概率.

五、贝叶斯公式

已知 A 事件发生条件下，推断 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 发生的概率

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$



$$P(B_i \mid A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

【练习】甲、乙、丙三个厂家生产同一种产品，其市场份额分别为20%，50%和30%，由长期经验知，三家的正品率分别为0.85，0.94和0.9，现从市场买一件这样的产品，如果买到了正品，求该正品来自于甲车间的概率。

解：记 A 为“买到正品”

用 B_1, B_2, B_3 分别表示买到甲厂、乙厂和丙厂产品，则

➢ $P(B_1)=0.2,\quad P(A|B_1)=0.85 \qquad P(B_2)=0.5,\quad P(A|B_2)=0.94$

$P(B_3)=0.3,\quad P(A|B_3)=0.9$ 故 $P(B_i|A)=\dfrac{}{P(A)}$

➢ 从而 $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\dfrac{0.2\times0.85}{0.91}=0.1868$

$P(B_i)\cdot P(A|B_i)$

【例题】 设某批产品中，甲，乙，丙三厂生产的产品分别占 45%，35%，20%，各厂产品的次品率分别为 4%，2%，5%，现从中任取一件，

(1) 求取到的是次品的概率；

(2) 假如取到的产品为次品，求该产品是甲厂生产的概率.

$P(B_1|A) = \dfrac{B_1 \cdot (A|B_1)}{B_1 \cdot (A|B_1) + B_2 \cdot (A|B_2) + B_3 (A|B_3)}$

【例题】 设某批产品中，甲，乙，丙三厂生产的产品分别占 45%, 35%, 20%，各厂产品的次品率分别为 4%, 2%, 5%，现从中任取一件，

(1) 求取到的是次品的概率；

(2) 假如取到的产品为次品，求该产品是甲厂生产的概率.

【解】记 A_1, A_2, A_3 分别表示"该产品为甲、乙和丙厂生产的"；

B 表示 "该产品是次品"．由题设知 $P(A_1)=45\%,$

$P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=20\%,\ P(B\mid A_1)=4\%,\ P(B\mid A_2)=2\%,\ P(B\mid A_3)=5\%,$

(1) 由全概率公式得 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=3.5\%.$

(2) 由贝叶斯公式(或条件概率定义)，得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=51.4\%.$$

练一练

已知在所有男子中有**5%**，在所有女子中有**0.25%**患有色盲症。随机抽一人发现患色盲症，问其为男子的概率是多少？（设男子和女子的人数相等）。

解：设A=“男子”，B =“女子” C=“这人有色盲”

$$P(C\mid A)=0.05 \qquad P(C\mid B)=0.0025$$

$$P(A)=0.5 \qquad P(B)=0.5$$

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}$$

$$=\frac{0.05\cdot 0.5}{0.5\cdot 0.05+0.5\cdot 0.0025}=\frac{5}{5+0.25}=\frac{20}{21}$$