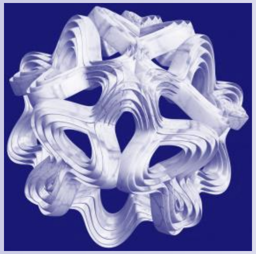
天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences



概率与统计第13讲

主讲：邱玉文　　　　内容：随机变量的数学期望，方差等

本次内容概要

一、数学期望；

二、随机变量函数的数学期望；

三、数学期望的性质；

四、方差和标准差；

五、方差的性质；

一、数学期望（均值）

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

【例】 设随机变量 $X\sim U(0,2)$，Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

且 X 与 Y 相互独立。

（1）求 X 与 Y 的联合密度函数；

（2）求概率 $P(X\le Y)$ 。

f

解：（1）X 的边缘密度为

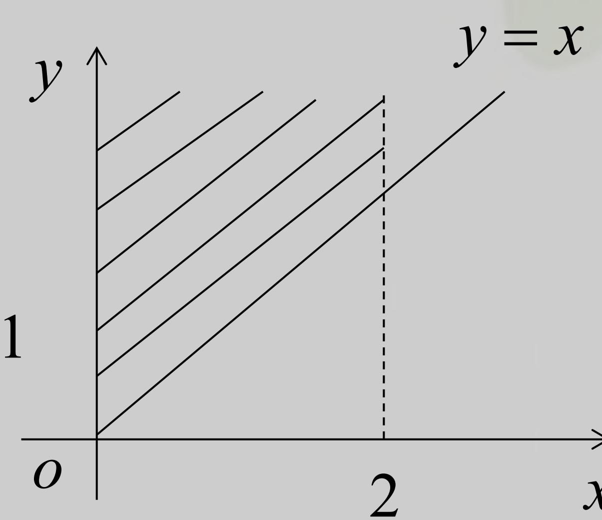
$$f_X(x)=\begin{cases}0.5, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由X与Y独立可知X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases}0.25e^{-0.5y}, & 0\le x\le 2, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）$P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^2\left(\int_x^{+\infty}0.25e^{-0.5y}dy\right)dx=1-e^{-1}\approx 0.6321$$



1. 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
$p(x_i)$	a^2	a	0.04

，则 $a=$（　）.

2. 若随机变量 X 的概率函数为

X	0	1	2	3	4
p	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

，则 $P(X<3)=$（　）.

3. 设每次试验成功的概率为 0.1，现进行 10 次这样的独立试验，记 X 为实验成功的次数，则随机变量 X 服从的分布为（　）.

4. 某电话站在一小时内接到的电话次数 X 服从泊松分布 $P(5)$，则一小时内至少接到两个电话的概率为（　）.

5. 若连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ Ax^2+B, & 0\le x<1 \\ 2, & x\ge 1 \end{cases}$，则（　）；

6. 随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，即概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0; \end{cases}$ 且 $P(X>1)=e^{-2}$，则 $P(X\le 2)=$（　）.

7. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ，$-\infty<x<+\infty$，则 $F(x)=$（ ）.

8. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\le x<0,\\ 0.8, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 X 为离散型随机变量，且概率函数为（ ）

9. 若二维随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.2
1	0.2	0.3	0

，

则$P(Y>X)=$（ ）.

10. 若二维随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	1	6
3	0.1	a
4	0.4	b

，且X与Y相互独立，则（ ）.

11. 随机变量$X\sim U(0,2),Y\sim e(1)$且相互独立，则$P(X<1,Y>1)=$（ ）.

12. 二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x,y<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

，则概率 $P(Y\le X)=$ （ ）.

13．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{A}{2}e^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则系数 $A=$ （ ）；

14. 二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6-x-y}{8}, & 0<x<2,\ 2<y<4;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则关于 X 的边缘概率密度为（ ）.

15.二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0
0	0.2	0.3
1	a	0.2

，则XY的分布是（　　）.

16. 若连续型随机变量X的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2 \\ 0, & 其它\end{cases}$，则随机变量$Y=2X+5$的概率密度函数函数为（　　）.

17. 若二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0
0	0.2	0.3
1	a	0.1

，则关于Y的边缘分布是（　　）.

18. 若二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6-x-y}{8}, & 0<x<2,\ 2<y<4;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则X与Y相互独立.

19. 若随机变量X的概率分布为

X	0	1	2	3	4
p	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

，则$Y=(X-2)^2$的概率分布是（　　）

20. 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0\ , & x<0.\end{cases}$又随机变量$Y=e^X$，则对任意的$y$有概率密度（　　）.

一、数学期望的定义

1. 离散随机变量情形

$$E(X)=\sum_i x_i p(x_i)$$

2. 连续随机变量情形

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

【数学期望的例子】

例 1 甲，乙两人进行打靶，所得分数分别记为X_1, X_2，它们的概率函数分别为

X_1	0	1	2
p_i	0	0.2	0.8

，

X_2	0	1	2
p_i	0.6	0.3	0.1

试评定他们的成绩的好坏.

解 $E(X_1)=0\times 0+1\times 0.2+2\times 0.8=1.8$(分).

$E(X_2)=0\times 0.6+1\times 0.3+2\times 0.1=0.5$(分).

很明显，乙的成绩远不如甲的成绩.

【例】 航班每次飞行坠机概率为十万分之一，每位乘客保费为20元，死亡赔付金额为40万。问保险公司从每位顾客手中平均获取多大利润

解：用X 表示保险公司从一位顾客手中获取的利润。则X 的分布列为

X	20	$20-400000$
p	0.99999	0.00001

从而可得 X 的期望为：

$$E(X)=20\times 0.99999+(20-400000)\times 0.00001=16$$

例 3 设随机变量 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，求数学期望 $E(X)$.

解 由 §2.3 知，X 的概率函数为

$$p_\lambda(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},m=0,1,2,\cdots.$$

所以，按公式(3.1)得

$$E(X)=\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\quad(k=m-1)$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

不建议看证明过程

数学期望的例子

【例】已知随机变量X的密度函数如下，求X的期望。

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解：
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

【例】已知连续随机变量X的概率密度

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{2r}{R^2}, & 0<r<R;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求数学期望$E(X)$.

解:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} rf(r)dr=\int_0^R r\frac{2r}{R^2}dr$$

$$=\frac{2}{R^2}\int_0^R r^2dr=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{R^3}{3}=\frac{2}{3}R.$$

【数学期望的例子】

例 4 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x/4, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$，求 $E(X)$.

$f(x)=F'(x)$

$Ax^3\cdot x$

解 随机变量 X 的分布密度为 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}1/4, & 0<x\le 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

$\int_0^4 \frac{1}{4}x\,dx$

故 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^4 x\cdot\frac{1}{4}dx=\left.\frac{x^2}{8}\right|_0^4=2.$

$\int_0^a Ax^4\,dx$

$\frac{A}{5}x^5\Big|_0^a=\frac{3}{5}$

例 5 设随机变量 X 服从指数分布 $e(\lambda)$，求数学期望 $E(X)$.

解 由 §2.5 知，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

所以，按公式(3.3)得

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}t e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}.$$

【数学期望不存在的例子】

设X服从柯西分布，密度函数是

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求数学期望$E(X)$.

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$

因为反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$不绝对收敛，所以$E(X)$不存在.

二、随机变量函数的数学期望

二、随机变量函数的数学期望

1. 离散随机变量情形

设离散随机变量X的概率函数为$p(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$， 则X的函数$Y = g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E\left(g(X)\right)=\sum_i g(x_i)p(x_i)$$

2. 连续随机变量情形

设连续随机变量X的密度函数为$f(x)$，则X的函数$Y = g(X)$的数学期望为

$$E(Y)=E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

【随机变量函数的数学期望例子】

例 9 随机变量 X 在 $[0,\pi]$ 上服从均匀分布，

求 $E(X)$, $E(\sin X)$, $E(X^2)$ 及 $E[X-E(X)]^2$.

解 根据随机变量函数数学期望的计算公式，有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xf(x)dx=\int_0^{\pi}\sin\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\pi}x^2\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$E[X-E(X)]^2=E\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^2=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{\pi^2}{12}.$$

随机变量函数的数学期望例子

例 10 设随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

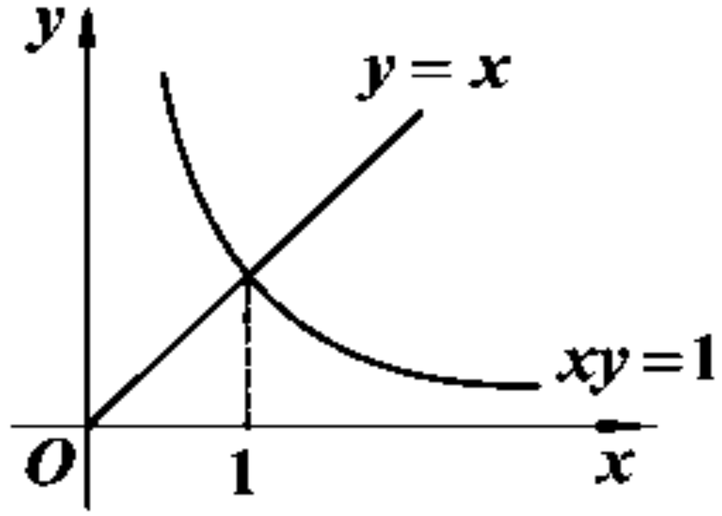
求数学期望 $E(Y), E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

解 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dydx$

$$=\int_1^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}\frac{3}{2x^3y}dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}[\ln y]\Big|_{1/x}^{x}dy=3\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}.$$



三、数学期望的性质

三、数学期望的性质

- 常数的期望为该常数：$E(c)=c$
- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
- $E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$
- 若随机变量***X***与***Y***相互独立，且***E*(*X*)**和***E*(*Y*)**存在，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

四、方差和标准差

一、方差的定义

1. 定义

$$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

方差用来描述随机变量取值的波动（集中与分散）程度

2. 离散和连续情形

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i-E(X))^2p(x_i), & \text{离散情形}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)dx, & \text{连续情形}\end{cases}$$

3. 计算*D*(*X*)的简便公式

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

【例】 在M电子公司生产的简易二极管中，按质量等级可分为5级，其中1级最差，5级最好。现统计了今年1月份生产的二极管质量各等级所占比率，如下表所列。求平均质量等级和质量等级的方差

X	1	2	3	4	5
P	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

解：平均质量等级

$$E(X)=1\times0.1+2\times0.2+3\times0.3+4\times0.3+5\times0.1=3.1$$

质量等级的方差

$E(X^2)$

$$D(X)=1\times0.1+4\times0.2+9\times0.3+16\times0.3+25\times0.1-3.1^2=1.29$$

【求方差的例子】

例 4 设 $X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$, $D(X)$.

解 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \dfrac{x}{b-a}dx=\dfrac{a+b}{2}$，故所求方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{c+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

【求方差的例子】

例 5 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，求 $E(X),D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=-xe^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-x/\theta}dx=\theta,$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=-x^2e^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}2xe^{-x/\theta}dx=2\theta^2$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2.$

即有 $E(X)=\theta,\ D(X)=\theta^2.$

五、方差的性质

3. 方差的性质

- 常数的方差为0，即 $D(c)=0$
- $D(aX+b)=a^2D(X)$
- 若随机变量*X*与*Y*相互独立，且方差都存在，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

$$D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

- 对任意随机变量*X*与*Y*，若它们的方差都存在，则

$$D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)\pm 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

其中cov(*X*,*Y*)称为*X*与*Y*的协方差

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]$$

二、标准差的定义

方差的量纲是随机变量量纲的平方，这使得对方差的理解不够直观，为此引入标准差的概念，把它定义为方差的平方根，即

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

标准差在6西格玛管理中有非常重要的作用。

3、随机变量的标准化

1. 标准化变换公式

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

X^* 称为X的标准化随机变量。

2. 标准化随机变量的均值和方差

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

六、常用随机变量的期望和方差

常用分布的期望和方差

1、二项分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim B(n, p)$ ，其概率函数为

$$p(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

可求得X的期望和方差如下：

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p)$$

2、泊松分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim P(\lambda)$ ，其概率函数为

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \cdots$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda$$

3、均匀分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim U(a,b)$ ，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X)=\frac{a+b}{2}, \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

4、指数分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim e(\lambda)$，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^{2}}$$

5、正态分布的期望和方差

设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

可求得*X*的期望和方差如下：

$$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2$$

6、常用分布的期望和方差

6、常用分布的期望和方差

分布名称及记号	概率函数或概率密度	数学期望	方差
“0—1”分布	$p(x)=p^x q^{1-x}, x=0,1.$ $(0<p<1, p+q=1)$	p	pq
二项分布 $B(n,p)$ $E(x)=np$ $D(x)=npq$	$p(x)=C_n^x p^x q^{n-x}, x=0,1,\cdots,n.$ $(0<p<1, p+q=1)$	np	npq
超几何分布 $H(n,M,N)$	$p(x)=\dfrac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$, $x=0,1,\cdots,\min(n,M).$ $(0\leqslant n\leqslant N, 0\leqslant M\leqslant N)$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
泊松分布 $P(\lambda)$	$\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $p(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x=0,1,2,\cdots.$ $(\lambda>0)$	λ	λ

6、常用分布的期望和方差（续）

泊松分布 $P(\lambda)$	$p(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},x=0,1,2,\cdots.$ $(\lambda>0)$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$p(x)=pq^{x-1},x=1,2,3,\cdots.$ $(0<p<1,p+q=1)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b.\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $e(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $-\infty<x<+\infty.$ $(\sigma>0)$	μ	σ^2