概率与统计第2讲

主讲：邱玉文

内容：古典概型与条件概率等

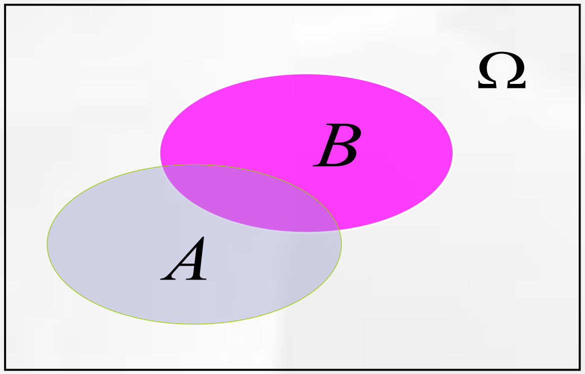
本次内容大概：

- Љ 上节结论和例题；
- Љ 古典概型要点；
- Љ 古典概型经典例题；
- Љ 条件概率引例和定义；
- Љ 概率乘法公式；

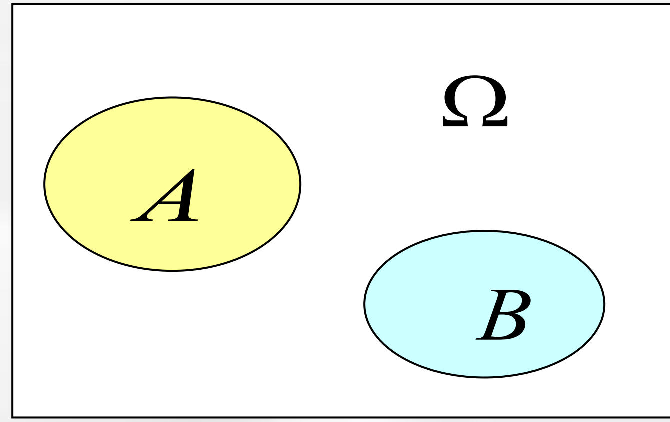
一、上节的主要结论和例题

一、事件运算主要结论；

（1）

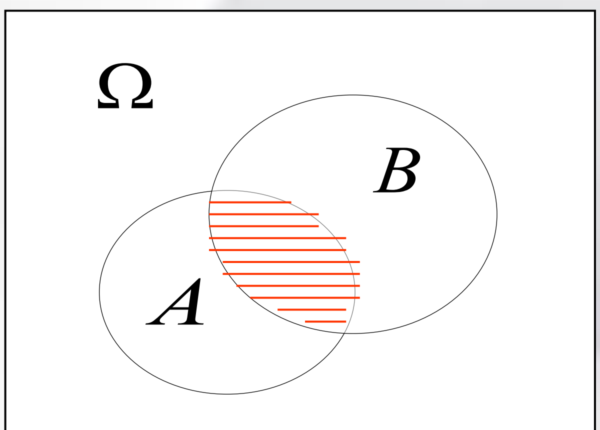


$A \cup B$



$A+B$

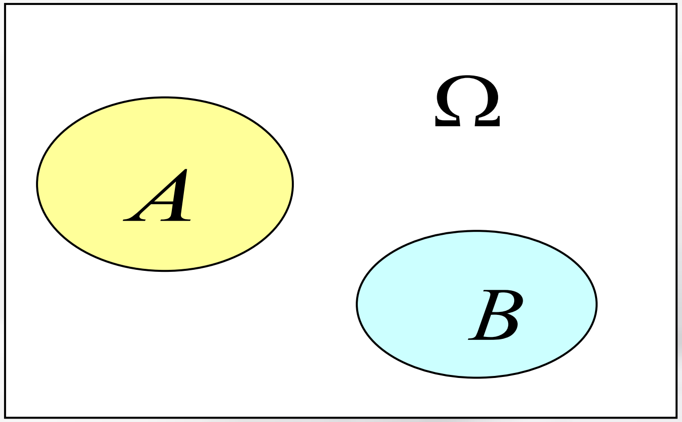
（2）



$AB = A \cap B$

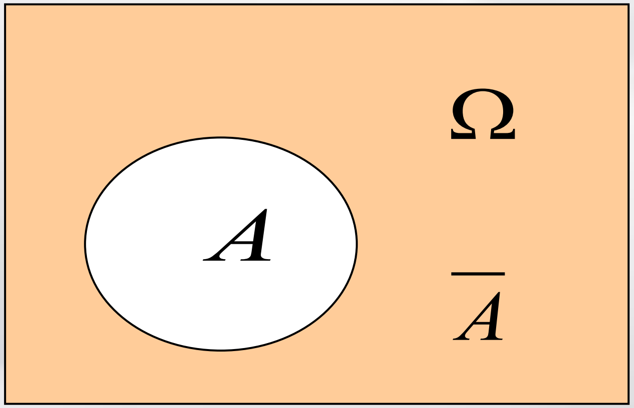
事件的乘积和交是一回事

（3 ） 互斥与互逆的区别：

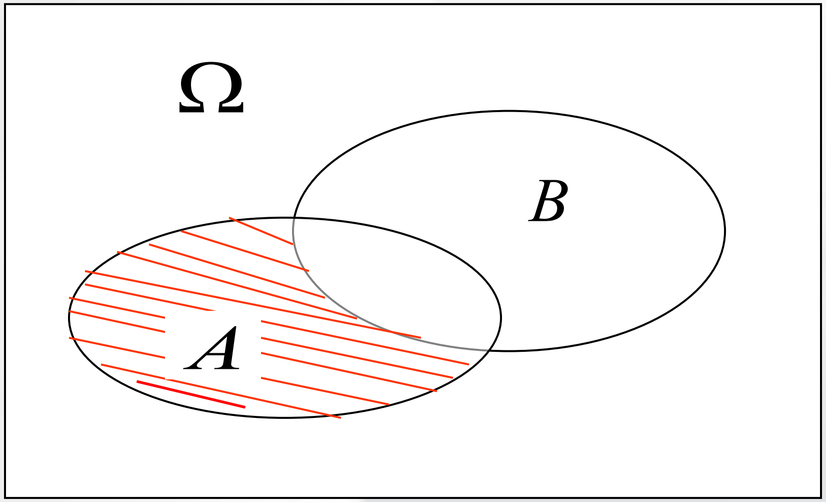


事件A与B互斥 ⟷ $AB=\Phi$

若$A\cup B=\Omega$, $A\cap B=\Phi$,则称事件A与事件B互为逆事件。又称事件A与B互为对立事件。



（4）差事件$A-B$发生 $\longleftrightarrow$ A发生且B不发生



$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}\,\overline{\mathrm{B}}$, $A-B=A-AB$ $AB+A\overline{B}=A$

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

事件的关系例题

例 2：甲，乙，丙三人各射一次靶，记 $A=$ “甲中靶” $B=$ “乙中靶” $C=$ “丙中靶” 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1) “甲未中靶”： $\overline{A}$;

(2) “甲中靶而乙未中靶”： $A\overline{B}$;

(3) “三人中只有丙未中靶” $AB\overline{C}$;

(4) “三人中恰好有一人中靶”： $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

事件的关系例题

例 2：甲，乙，丙三人各射一次靶，记 A= “甲中靶”

B= “乙中靶” C= “丙中靶” 则可用上述三个事

件的运算来分别表示下列各事件：

(5) “三人中至少有一人中靶” $A\cup B\cup C$;

(6) “三人中至少有一人未中靶” $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$; 或 $\overline{ABC}$;

(7) “三人中恰有两人中靶” $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$;

(8) “三人中至少两人中靶” $AB\cup AC\cup BC$;

(9) “至多一人中靶” $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

事件运算与集合运算的对应

$A \subset B$	事件A包含于事件B	集合A是集合B的子集
$A = B$	事件A等于事件B	集合A与集合B相等
$A \cup B$	事件A与事件B的并	集合A与集合B的并集
$A \cap B$	事件A与事件B的交	集合A与集合B的交集
$AB = \varnothing$	事件A与B互不相容	集合A与B不相交
$\overline{A}$	事件A的对立事件	集合A的余集

事件的运算性质

- 交换律： $A\cup B=B\cup A,\qquad AB=BA$
- 结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\qquad (AB)C=A(BC)$
- 分配律： $A(B\cup C)=AB\cup AC,\quad A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$
- 德摩根律：

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\qquad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C},\qquad \overline{A\cap B\cap C}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$$

第二节、概率的统计定义

2.1. 频率

设随机事件A 在n次试验中发生了n_A次，则比值$\frac{n_A}{n}$称为随机事件A的频率，记作 $f_n(A)=n_A/n$

【例1.2-1】 下表给出一些统计学家抛硬币试验的结果。

试验者	抛硬币次数	正面朝上次数	正面朝上频率
Buffon	4040	2048	0.5069
Fisher	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

二、概率的公理化定义及性质

2.2 概率的定义

设随机试验的样本空间为 Ω，对于任一事件 $A\subset\Omega$，都有确定的实值函数 $P(A)$，满足：

- 非负性：$P(A)\geq 0$;
- 规范性：$P(\Omega)=1$;
- 可列可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$$

则称**$P(A)$**为事件A的概率。

概率的性质

- $P(\varnothing)=0;$
- $P(\bar{A})=1-P(A);$
- 若 $A\subset B$，则 $0\le P(A)\le P(B)\le 1$
- $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$
- 概率加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

1.不可能事件的概率等于零，即 $P(\Phi)=0$

证　因为 $\Omega=\Omega+\Phi$，由概率的有限可加性得

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\Phi) \text{ 故 } P(\Phi)=0$$

2.对两个事件 A 与 B，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

证：因为 $A=A\Omega=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}$

所以 $P(A)=P\left(AB+A\overline{B}\right)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right)$

即 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

例 1：已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(A\cup B)=0.9$。

求：（1）$P(A\overline{B})$；（2）$P(\overline{A}\,\overline{B})$。

解 （1）由概率加法公式得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.6-0.9=0.2$$

$A=AB+A\overline{B}$

因为 $A=AB+A\overline{B}$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$。

$P(A-B)$

由此得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$

$-P(A)-$

（2）因为 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，所以 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1$$

已知 $P(A)=0.5,\ P(B)=0.6,\ P(A\cup B)=0.9$。

求：（1）$P(A\overline{B})$；（2）$P(\overline{A}\,\overline{B})$。

解　（1）由概率加法公式得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.6-0.9=0.2$$

因为 $A=AB+A\overline{B}$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$。

由此得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$

（2）因为 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1$$

例 3：设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$, $P(AB)=P(AC)=0$,

$P(BC)=\frac{1}{4}$, 求 A,B,C 中至少有一事件发生的概率。

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

解： $P(AB)=P(AC)=0$, 所以 $P(ABC)\le P(AB)=0$,

$-P(AB)-P(BC)-P(AC)$
$+P(ABC)$

再由概率的非负性，有 $P(ABC)=0$,

$\therefore P(A\cup B\cup C)=$

$P(ABC)=0$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。

§1.3. 古典概型

§1.3 概率的古典定义与计算

1. 古典概型

随机试验只有有限个样本点，并且每个样本点出现的可能性相等。其样本空间记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，对于任意事件 $A\subset\Omega$ ，有

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

其中m为A中包含的样本点数。

古典概型的计算

◆ 确定试验的基本事件总数n

设试验结果共有n个基本事件ω_1，ω_2，…，ω_n，而且这些事件的发生具有相同的可能性

◆ 确定事件A包含的基本事件数m

事件A由其中的m个基本事件组成

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

例 1　将一颗均匀的骰子连掷两次，求：

（1）两次出现的点数之和等于 7 的概率；

（2）两次出现的点数之和等于 8 的概率；

（3）至少出现一次6点的概率.

$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2. 复习：排列与组合的基本概念

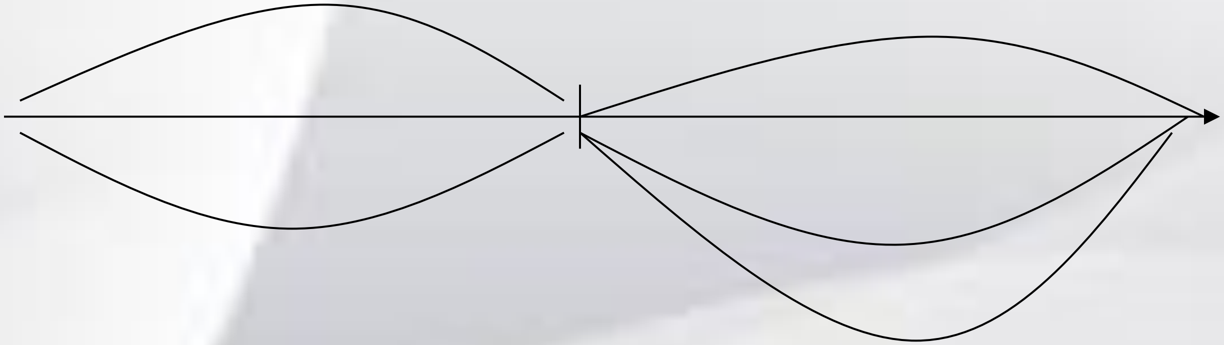
加法公式：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。

2. 排列与组合的基本概念

乘法公式：设完成一件事需分两步，

第一步有n_1种方法, 第二步有n_2种方法，

则完成这件事共有n_1n_2种方法



举例

【例】一批产品共有100件，其中有5件不合格品。从中随机抽取10件，试求不同抽取方式下事件A=“恰好取到2个不合格品”的概率。

- 不放回抽取：

$$P(A)=\frac{C_{95}^{8}C_{5}^{2}}{C_{100}^{10}}=\frac{C_{10}^{2}\times P_{95}^{8}\times P_{5}^{2}}{P_{100}^{10}}$$

- 有放回抽取：

$$P(A)=\frac{C_{10}^{2}\times 5^{2}\times 95^{8}}{100^{10}}=C_{10}^{2}\times 0.05^{2}\times 0.95^{8}$$

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

【例】一批产品共有N件，其中有M件不合格品。从中随机抽取n件，试求不同抽取方式下事件A_m="取到m个不合格品"的概率。

$P(A)= \quad C_m$

- 不放回抽取：$P(A)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$
- 有放回抽取：

$$P(A)=C_n^m\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

抽签是否公平？

例：10个学生，抽取10张外观相同的纸签，以抽签的方式分配3张音乐会入场券.求 A={第五个抽签的学生抽到入场券}的概率。

$p=\frac{C_3^1 \cdot C_9^4}{C_{10}^5}$

◆基本事件总数（分母）

$$n = P_{10}^5$$

◆分子上的基本事件数

$$m_A = P_3^1 \cdot P_9^4$$

第五个学生抽到入场券

前面4个学生抽取剩下9张

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{P_3^1 \cdot P_9^4}{P_{10}^5} = \frac{3}{10}$$

生日问题

$$\frac{C_{365}^{50}\cdot 50!}{365^{50}} \approx 0.03$$

例4： 某班有50个学生，求他们的生日各不相同的概率（设一年365天）

分析：此问题可以用投球入盒模型来模拟

50个学生 → 50个小球

365天 → 365个盒子

$$P(A)=\frac{C_{365}^{50}\cdot 50!}{365^{50}} \approx 0.03$$

§1.4. 条件概率，概率乘法公式

条件概率定义

条件概率$P(A|B)$：事件B已发生的前提下，事件A发生的概率，称为B条件下A的**条件概率**.

引例： 某校共本科生12000人，某宿舍（306）共6人，该校云南籍同学240人，该宿舍（306）有云南籍同学2人。现在某人捡到了一张一卡通，

（1）这张卡是306宿舍某同学的概率是多少? $\frac{1}{6}$

（2）这张卡是云南某同学的概率是多少? $\frac{240}{12000}$

（3）已知这张卡是云南某同学的卡，这张卡是306宿舍的概率是多少? **（条件概率）**

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{240}{12000}}$

（4）已知这张卡是306某宿舍丢的，这张卡是云南籍同学的概率是多少? **（条件概率）**

$P(|$ $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}$

引例： 甲、乙两条生产线生产同一种元件，已知甲生产线生产8个元件，其中2个次品，乙生产线生产9个元件，其中1个次品. 现在从全部元件中任取一个元件，求:

（1）$P(A)$，其中A={这个元件是甲生产线的产品}，

（2）$P(B)$，其中B={这个元件是次品}，

（3）$P(AB)$ ；

（4）$P(A|B)$.

数据	$\overline{B}$正品	B 次品
A 甲车间生产	6	2
$\overline{A}$ 乙车间生产	8	1

$\frac{8}{17}$

（1）P(*A*)，*A*={元件是甲生产线的产品}，

$$P(A)=\frac{8}{17}$$

（2）P(*B*)，*B*={这个元件是次品}，

$$P(B)=\frac{3}{17}$$

（3）P(*AB*)； P(AB)

$$P(AB)=\frac{2}{17}$$

（4）P(*A*|*B*). $\frac{P(AB)}{P(B)}=$

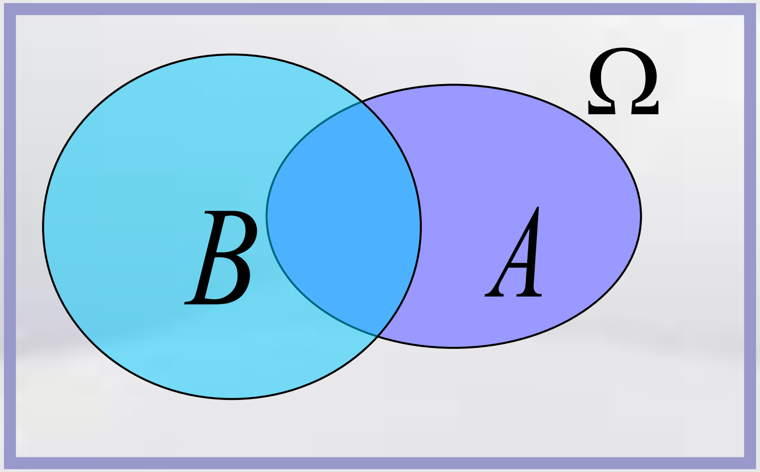
$$P(A\mid B)=\frac{2}{3}$$

条件概率的定义与几何意义

设A,B是试验E的两个事件，且P(B)>0,则称

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B已发生的条件下事件A发生的**条件概率.**



$P(A|B)$ 是AB在B中的份额；

数据整理	$\bar{B}$正品	B 次品
A 甲车间生产	6	2
$\bar{A}$ 乙车间生产	8	1

（1）P(*A*)，*A*={元件是甲生产线的产品}， $P(A)=\frac{8}{17}$

（2）P(*B*)，*B*={这个元件是次品}， $P(B)=\frac{3}{17}$

（3）P(*AB*）； $P(AB)=\frac{2}{17}$

（4）P(*A*|*B*). $P(A\mid B)=\frac{2}{3}$

概率乘法公式

$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$
$$=P(B)P(A|B)$$

推广

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P\left(A_3|(A_1A_2)\right)$$

$P(A)P(B|A)\cdot P(C|AB)$

例：箱子里4个红球，6个白球，不放回摸三次，求：

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ $\frac{4}{9}$

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$

（1）第一次摸到红球，第二次摸到白球的概率；

$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}$

（2）前两次恰好摸到一个红球的概率；

（3）前三次都摸到红球的概率；

（4）前两次摸到白球，第三次摸到红球的概率.

例：有两个箱子：第一个箱子里2个红球，3个白球；第一个箱子里3个红球，5个白球；现在从第一个箱子摸一个球，放到第二个箱子里，再从第二个箱子里摸一个球，放到第一个箱子里；求：

（1）两次摸球后，第一个箱子里仍然是2个红球的概率；

（2）两次摸球后，第一个箱子里变成3个红球的概率；

End of This Lecture

Thank You for Your Participation.