天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

概率与统计第9讲

主讲：邱玉文

内容：正态分布，随机变量函数的分布等

本次内容概要

Љ 正态分布的计算

Љ 随机变量的函数

Љ 离散随机变量函数的分布；

Љ 连续随机变量函数的分布；

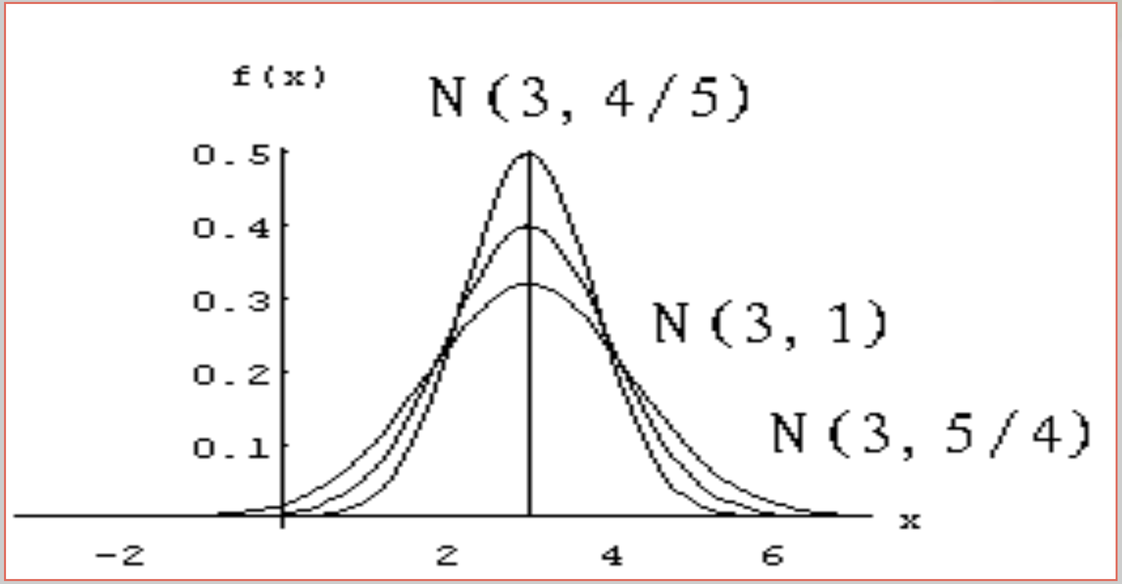
一、正态分布的计算（续）

二、正态分布的定义

定义 若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

其中 μ,σ 为常数，$\sigma>0$ 记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$



3. 正态分布的分布函数及其图像

- 分布函数表达式（不用记）

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\qquad -\infty<x<+\infty$$

正态分布不能通过求积分计算概率

$$P\left(a<X\le b\right)=\int_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

上面这个积分“积不出来”

想求这个概率，只能通过查表标准正态分布来计算；

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

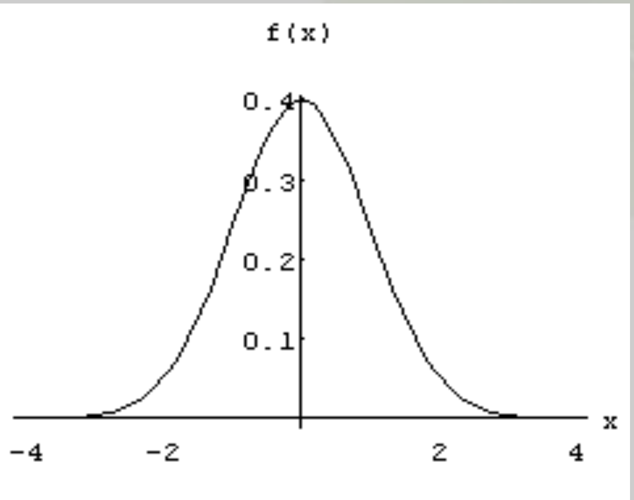
标准正态分布

$\mu=0$, $\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布，记作

$$X \sim N(0,1)$$

- 密度函数记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty$$



- 分布函数记为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad -\infty<x<+\infty$$

标准正态分布的密度函数和分布函数都是专用字母

标准正态分布求概率

- 标准正态分布的分布函数表达式

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\qquad -\infty<x<+\infty$$

标准正态分布也不能通过求积分计算概率

$$P\left(a<X\leq b\right)=\int_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

上面这个积分也“积不出来”

想求这个概率，可以通过查表标准正态分布来得到；

标准正态分布求概率

- 标准正态分布的分布函数表达式

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(a)=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

查表可以得到上面数值 $\Phi(a)$

2. 标准正态分布的分布函数值表

见课本附表。我们一起学查表。 注：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

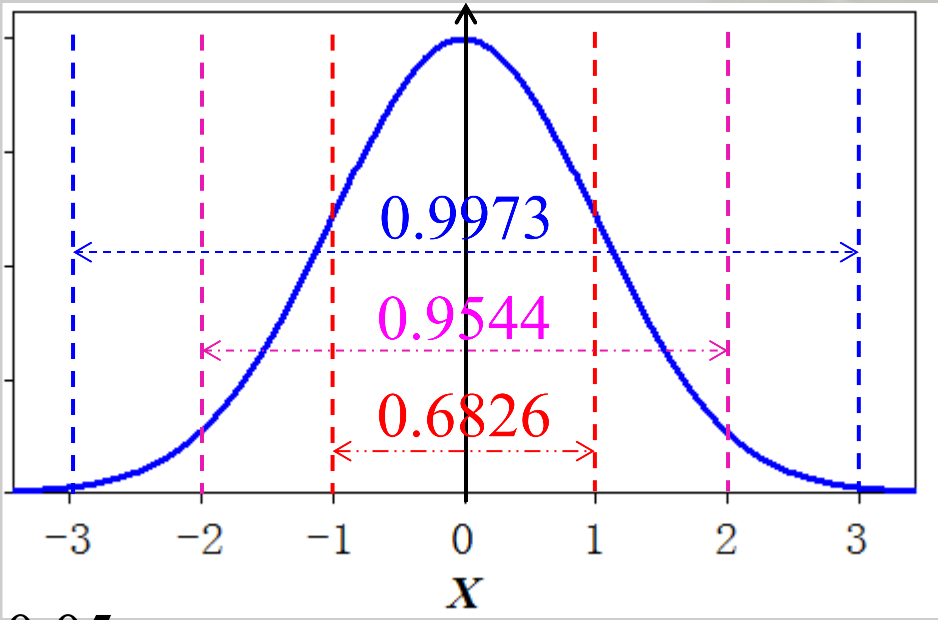
【例】已知 $X \sim N(0, 1)$，查表解决以下问题。

- 求概率 $P(-1 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P(-2 < X < 2) = 0.9544$$

$$P(-3 < X < 3) = 0.9973$$



- 求 x，使得 $P(X \geq x) = 0.05$

四、正态分布的期望和方差

【定理】正态分布的标准化：已知 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则有

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

【定理】已知 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则有

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

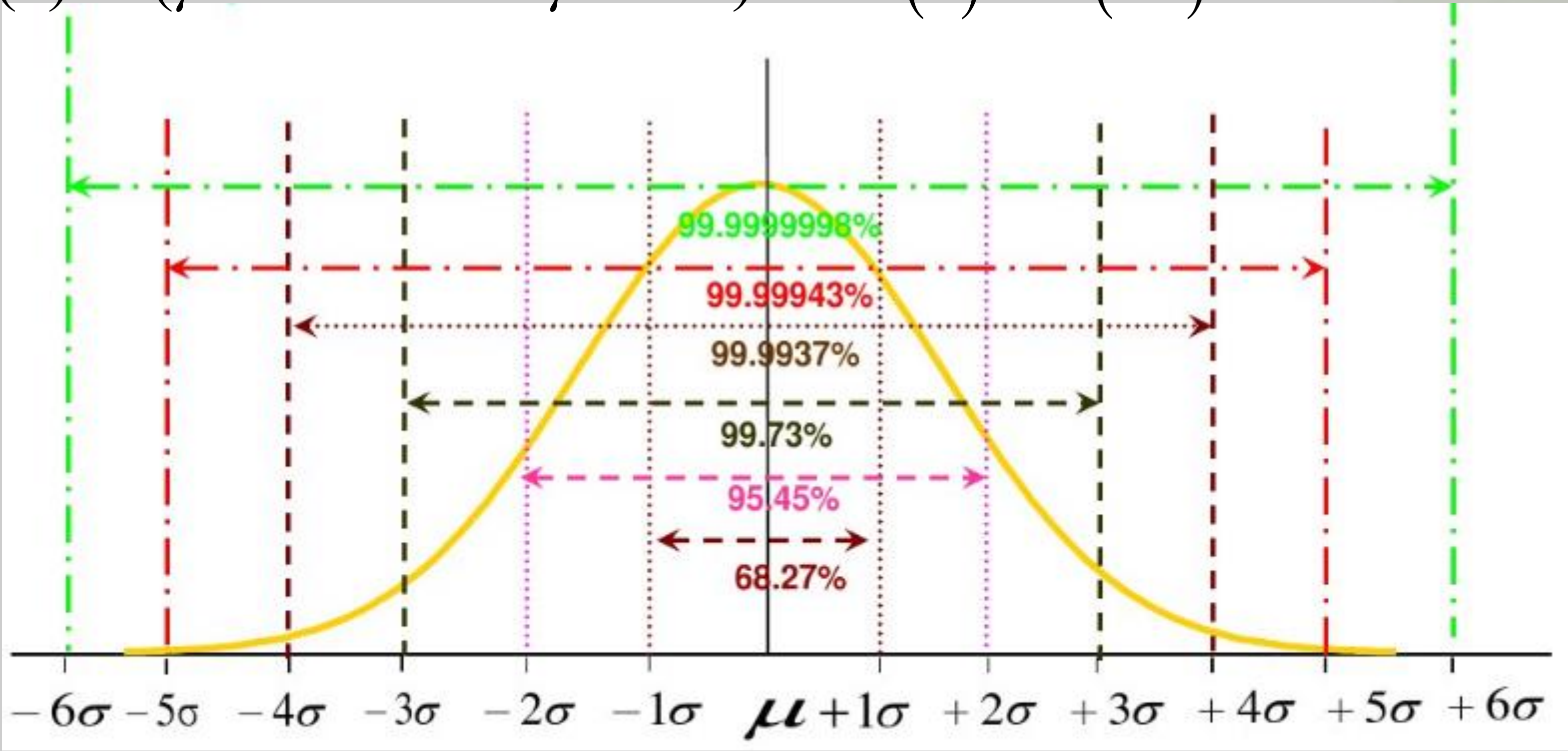
$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

【例4.1-3】已知 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，计算

(1) $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = \Phi(1)-\Phi(-1) = 0.6826$

(2) $P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = \Phi(2)-\Phi(-2) = 0.9544$

(3) $P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = \Phi(3)-\Phi(-3) = 0.9973$



例2 已知 $X\sim N(1.5,4)$,求 $P(X<-4)$和 $P(|X|>2)$.

解: X 服从参数 $\mu=1.5,\sigma=2$ 的正态分布,故有

$$P(X<-4)=\Phi\left(\frac{-4-1.5}{2}\right)=\Phi(-2.75)=1-\Phi(2.75)=1-0.9970=0.0030$$

$$P(|X|>2)=P(X<-2)+P(X>2)=P(X<-2)+1-P(X<2)$$

$$=\Phi\left(\frac{-2-1.5}{2}\right)+1-\Phi\left(\frac{2-1.5}{2}\right)=\Phi(-1.75)+1-\Phi(0.25)$$

$$=2-\Phi(1.75)-\Phi(0.25)=2-0.9599-0.5981=0.4414$$

正态分布求概率的重要结论

1. 若 $X \sim N(0,1)$, 则查表可得 $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

注：$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

注意 $P(-1 < X < 2) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1$

$$P(-a < X < a) = 2\Phi(a) - 1$$

2. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则查表可得

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

二、随机变量函数的分布

本节内容是做什么的？

$f(x)$

已知随机变量X的分布，即已知X的概率函数（概率密度）；$Y=g(X)$是X的函数；本节内容研究Y的概率函数（概率密度）。

$Y=g(x)$

比如：X是球状产品的直径，Y是产品的质量；本节研究，在直径分布已知的情况下，如何求质量的分布。

一、 随机变量的函数

定义 如果存在一个函数 $g(X)$，使得随机变量 X,Y 满足:

$$Y=g(X),$$

则称随机变量 Y 是随机变量 X 的函数.

一、离散随机变量的情况

假设X是一维离散型随机变量，Y=g(X)，则 Y也是一个离散型随机变量。如果已知X的分布列为：

X	x_1	x_2	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$

则 Y=g(X) 的分布列容易得到：

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$

应当注意的是有些$g(x_i)$可能会相等，要在分布列中将其对应的概率相加合并成一项。

例1 设X的分布列为：

$g(x)$

X	-2	$-1/2$	0	2	4
P_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求下列各函数的分布列：

(1) $X+2$; (2) $-X+1$; (3) X^2.

解 将 X的分布列中两行对调可以算的下表：

P_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
X	-2	$-1/2$	0	2	4
$X+2$	0	$3/2$	2	4	6
$-X+1$	3	$3/2$	1	-1	-3
X^2	4	$1/4$	0	4	16

(1) $X+2$ 的分布列：

$X+2$	0	$3/2$	2	4	6
P_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

离散型随机变量函数的分布

例 **1**（讲义例 **1**）设随机变量 X 具有以下的分布律，试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律.

X	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.3	0.1	0.4

解　Y 所有可能的 取值 0,1,4,由

$$P\{Y=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=0.1,$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.7,$$

$$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2,$$

既得 Y 的分布律为

Y	0	1	4
P_i	0.1	0.7	0.2

天津中德应用技术大学 Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

二、连续随机变量函数的分布

1. $Y=g(X)$ 的分布（只要求单调函数）

已知连续随机变量X 的分布（密度函数），求X 的函数$Y=g(X)$ 的分布（密度函数）。

思路：根据X 的分布先求随机变量Y 的分布函数，然后通过求导得到$Y=g(X)$的密度函数。

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\begin{cases}P(X\le g^{-1}(y)), & g(x)\text{单调增}\\ P(X\ge g^{-1}(y)), & g(x)\text{单调减}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}F_X(g^{-1}(y)), & g(x)\text{单调增}\\ 1-F_X(g^{-1}(y)), & g(x)\text{单调减}\end{cases} \qquad \Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)$$

【例2.9-3】 设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $Y=2X+8$ 的密度函数。

$f_Y(y)=$

解：设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)=P(X\le\frac{y-8}{2})=\boxed{F_X(\frac{y-8}{2})}$$

$\frac{1}{2}F_X'$

于是Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}$$

注意到 $0<x<4$ 时，$f_X(x)\neq 0$，即 $8<y<16$ 时，$f_Y(y)\neq 0$

所以 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 4 设 $X \sim N(0,1)$，求 $Y = X^2$ 的密度函数.

解 记 Y 的分布函数为 $F_Y(x)$，则 $F_Y(x) = P\{Y \le x\} = P\{X^2 \le x\}$.

显然，当 $x<0$ 时，$F_Y(x) = P\{X^2 \le x\} = 0$;

当 $x \ge 0$ 时，$F_Y(x) = P\{X^2 \le x\} = P\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\} = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$.

从而 $Y = X^2$ 的分布函数为 $F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

于是其密度函数为 $f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x}), & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

$x^2 - x \le$

$F_Y(x) = P(Y \le x)$
$= P(x^2 \le x)$

$x^{-\frac{1}{2}}$

$\sqrt{x} - 1$

$-\sqrt{x} \le x \le \sqrt{x}$

$2\Phi(\sqrt{x})$

$\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x})$

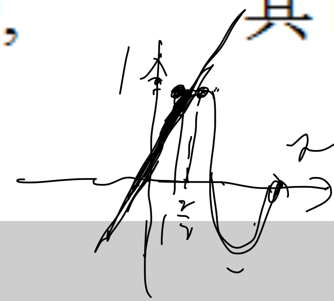
2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x/\pi^2, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

$\frac{1}{3.14}$

3.14



$X \in [0, \pi]$

$\sin x \in [0, 1]$

① 分布

设 $F_Y(x)$ 为 Y 分布函数　　则 $F_Y(x) = P\{Y \le x\} = P\{\sin X \le x\}$　　$P = \int_0^{\arcsin x} f(x)\,dx$

① $x \le 0$ 时，$F_Y(x) = P\{\sin X \le x\} = 0$

② $1 > x > 0$ 时　$F_Y(x) = P\{0 \le X \le \arcsin x\} \cup P\{\pi - \arcsin x \le X \le \pi\}$

$$= \int_0^{\arcsin x} \frac{2x}{\pi^2}\,dx + \int_{\pi - \arcsin x}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2}\,dx$$