2013 西安电子科技大学

本资料适用专业科目代号：811/821/831/844

# 信号与系统习题册

（含答案）

好网考研
club.xdnice.com

策划 / 好网论坛考研版块
主编 / @西电点儿

最新西电考研资讯尽在 http://weibo.com/xduky
免费西电考研资料尽在 http://blog.sina.com.cn/xduky

# 内 容 简 介

该习题册是西电本科生的课后作业。原版为 32 页×3 本=96 页（分成三本的目的是交作业方便）、详解答案一本 44 页。本资料与原版保持高度一致，为节省打印费用，不留答题的空白区域，从而将 96 页压缩到了 30 页。这本习题册相对来说不是很重要，若复习时间不够，可以不做，要以辅导班笔记和真题为主。

可在打印之后将题目和答案分别装订成册，方便查看答案。

本资料已修正原纸质版的部分错误，详见本资料的更新日志，扫描本资料封面的二维码可查看。

本资料制作时间仓促，请大家批评指正，编者会根据大家的反馈更新版本。

# 目 录

# 第一章 信号与系统

## 1-1 波形绘制和冲激函数

一、画出下列各信号的波形[式中 $r(t)=t\varepsilon(t)$ 为斜升函数]

(1) $f_1(t)=\varepsilon(t)r(2-t)$　　(2) $f_2(t)=r(t)\varepsilon(2-t)$

(3) $f_3(k)=k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]$　　(4) $f_4(k)=2^k[\varepsilon(3-k)-\varepsilon(-k)]$

二、信号 $f(t)$ 的波形如图 1-1 所示，绘出下列函数的波形：(1) $f(2-0.5t)$　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(0.5t-1)]$

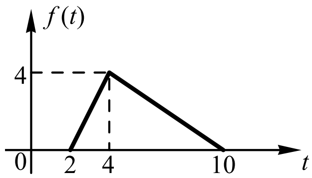



图 1-1

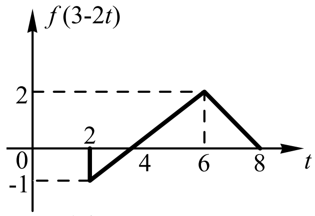



图 1-2

三、已知信号 $f(3-2t)$ 的波形如图 1-2 所示，试分别画出 $f(t)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 的波形。

四、填空题，计算下列各题：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin(\pi t)}{t}\delta(t)\mathrm{d}t=$________；　(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(2t^2+1)\delta(\dfrac{t}{2})\mathrm{d}t=$________；

(3) $\int_{0}^{t}\sin(t)\delta(t-5)\mathrm{d}t=$________；　(4) $\int_{-10}^{10}(2t^2+t-5)\delta'(t+\dfrac{1}{4})\mathrm{d}t=$________；

(5) $\int_{-2}^{2}(x-5)\delta(x-t)\mathrm{d}x=$_________。

## 1-2 连续系统方程与性质

一、如图 1-3 所示电路，写出以 $i_C(t)$ 为响应的微分方程。

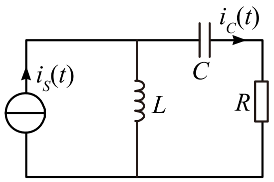



图 1-3

二、某 LTI 连续系统，其初始状态一定，已知当激励为 $f(t)$ 时，其全响应 $y_1(t)$=$6\mathrm{e}^{-2t}-5\mathrm{e}^{-3t}$，$t\geq 0$；当系统的初始状态不变，激励为 $3f(t)$ 时，其全响应 $y_2(t)$=$8\mathrm{e}^{-2t}-7\mathrm{e}^{-3t}$，$t\geq 0$；求激励为 $2f(t)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

三、试判别下列零状态响应系统是否为线性系统，是否为时不变系统，请在括号内填“是”或“否”。

(1) $y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t-t_0)$　　线性系统(　)，时不变系统(　)；

(2) $y(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$　　线性系统(　)，时不变系统(　)；

(3) $y(t)=|f(t)|$　　线性系统(　)，时不变系统(　)；

(4) $y(t)=f^2(t)\cos t$　　线性系统(　)，时不变系统(　)；

四、试判别下列零状态响应系统是否为线性系统，是否为时不变系统，请在括号内填“是”或“否”。

(1) $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2ty(t)=t^2 f(t)$　　线性系统(　　)，时不变系统(　　)；

(2) $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+10y(t)+3=2f(t)$　　线性系统(　　)，时不变系统(　　)；

(3) $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y^2(t)=f(t)$　　线性系统(　　)，时不变系统(　　)；

(4) $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+10y(t)=f(t+10)$　　线性系统(　　)，时不变系统(　　)；

五、试判别此零状态响应系统是否为时不变系统，并写出判断过程： $y(t)=f(-t)$

## 1–3 序列和差分方程

一、判定下列各序列是否是周期性的，如果是周期性的，试确定其周期。

(1) $f(k)=5\cos(\frac{3\pi}{7}k-\frac{\pi}{8})$　　(2) $f(k)=8\sin(\frac{1}{8}k-\pi)$

二、已知序列 $f(k)=\begin{cases}0, & k<-1\\ 2^{-k}+3k, & k\geq -1\end{cases}$，试分别写出下列各序列的表达式并绘出图形。

(1) $f(k-2)$　　(2) $f(-k-2)$

三、已知一离散系统的模拟框图如图 1-4 所示，试列出该系统的差分方程。

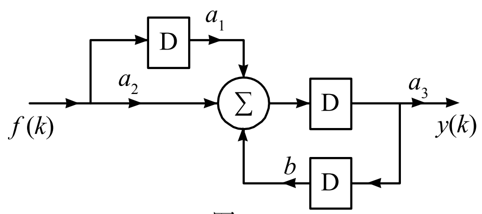



图 1-4

四、一个乒乓球从 $h(m)$ 高度自由落至地面，每次弹跳起来的最高值是前一次最高值的 2/3。若以 $y(k)$ 表示第 $k$ 次跳起的最高值，试列写描述此过程的差分方程。

# 第二章 连续系统的时域分析

## 2–1 微分方程的求解

一、填空题

1.已知描述系统的微分方程如下，求 $y(0_+)$， $y'(0_+)$。

(a) $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f''(t),\ y(0_-)=1, y'(0_-)=1,\ f(t)=\delta(t)$，则 $y(0_+)=$_____， $y'(0_+)=$_____；

(b) $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=f'(t),\ y(0_-)=1, y'(0_-)=2,\ f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，则 $y(0_+)=$_____，$y'(0_+)=$_____。

2.已知描述系统的微分方程和初始状态如下

(a) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t),\ y(0_-)=1,\ y'(0_-)=-1$，则 $y_{zi}(t)=$____________________；

(b) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t),\ y(0_-)=2,\ y'(0_-)=-2$，则 $y_{zi}(t)=$____________________；

(c) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t),\ y(0_-)=1,\ y'(0_-)=1$，则 $y_{zi}(t)=$____________________。

二、已知描述系统的微分方程，试求其零输入响应、零状态响应和完全响应

(a) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t),\ y(0_-)=y'(0_-)=1,\ f(t)=\varepsilon(t)$。

(b) $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)+3f(t),\ y(0_-)=1, y'(0_-)=2,\ f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$。

三、如图 2-1 所示电路，已知 $u_S(t)=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$ V，试列出 $i(t)$ 为输出的微分方程，并求其零状态响应。

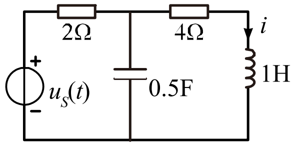



图 2-1

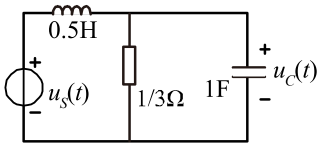



图 2-2

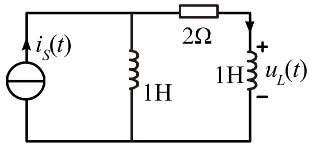



图 2-3

## 2–2 冲激响应和阶跃响应

一、填空题

1.已知描述系统的微分方程，计算各系统的冲激响应 $h(t)$。

(a) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+f(t),\ h(t)=$____________________；

(b) $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=f'(t),\ h(t)=$____________________。

2.已知描述系统的微分方程，计算各系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$。

(a) $y'(t)+2y(t)=f'(t)-f(t)$， $h(t)=$____________________， $g(t)=$____________________；

(b) $y'(t)+2y(t)=f''(t)$， $h(t)=$____________________， $g(t)=$____________________。

二、如图 2-2 所示电路，$u_S(t)$ 为输入，$u_C(t)$ 为输出，求其冲激响应和阶跃响应。

三、如图 2-3 所示电路，$i_S(t)$ 为输入，$u_L(t)$ 为输出，求其冲激响应和阶跃响应。

## 2-3 卷积积分(1)

一、填空题

1. $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t),\ f_2(t)=\varepsilon(t)$，则 $f_1(t)*f_2(t)=$________________；

2. $f_1(t)=f_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，则 $f_1(t)*f_2(t)=$________________；

3. $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t),\ f_2(t)=t\varepsilon(t)$，则 $f_1(t)*f_2(t)=$________________。

二、 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$ 如图 2-4 所示，试计算：

(*a*) $f_1(t)*f_2(t)$，并画出波形；　(*b*) $f_1(t)*f_3(t)$，并画出波形。

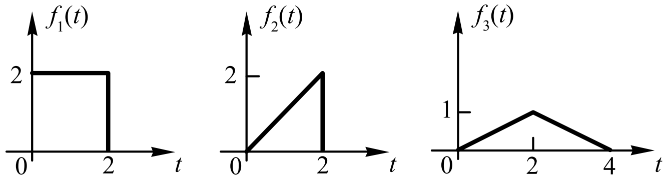



图 2-4

三、计算下列卷积：

(1) $f_1(t)$ 如图 2-5(*a*)所示，$f_2(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t-2)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$；

(2) $f_3(t)$ 如图 2-5(*b*)所示，$f_4(t)=\mathrm{e}^{-(t+1)}\varepsilon(t+1)$，求 $f_3(t)*f_4(t)$；

(3) $f_5(t)$ 如图 2-5(*c*)所示，$f_6(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，求 $f_5(t)*f_6(t)$。

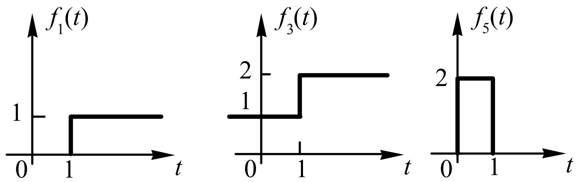
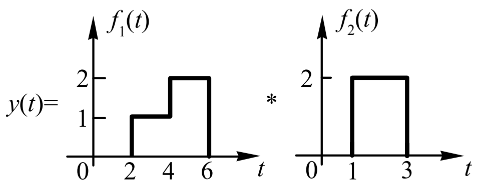


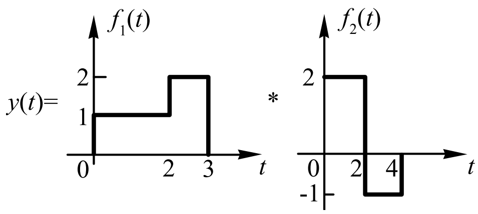

图 2-5 (a)　(b)　(c)

## 2-4 卷积积分(2)

一、填空题

1. 


，则 $y(6)=$__________；

2. 


，则 $y(3)=$__________；

3. $\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)*2=$__________；4. $\mathrm{e}^{3t}\varepsilon(t)*\delta'(t)=$__________；5. $\varepsilon(t+5)*\varepsilon(t-2)=$__________。

二、某 LTI 系统的冲激响应如图 2-6 所示，试求当输入分别为 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$ 时的零状态响应，并画出波形。

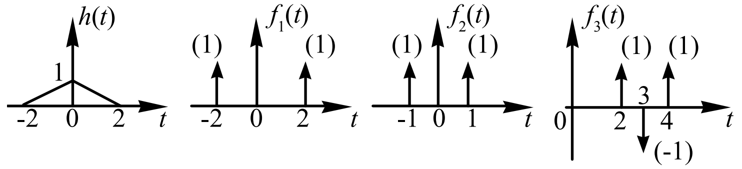



图 2-6

三、如图 2-7 所示系统，试求当输入 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，系统的零状态响应。

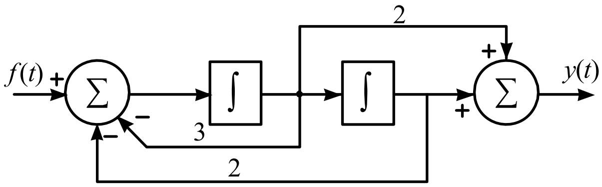



图 2-7

四、如图 2-8 所示复合系统是由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为：

$h_a(t)=\delta(t-1),\quad h_b(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$，求复合系统的冲激响应 $h(t)$。

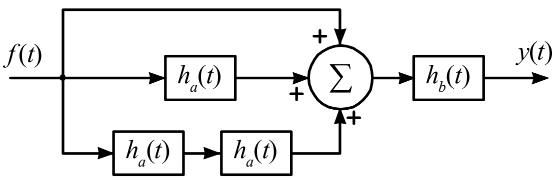



图 2-8

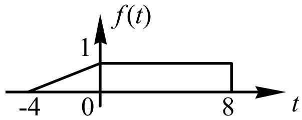



图 2-9

## 2–5 时域分析

一、已知信号 $f(t)$ 如图 2-9 所示。

1.试画出 $y(t)=f(2t+2)*\delta(t-3)$ 的波形；

2.若系统的冲激响应 $h(t)=f(t)$，试画出阶跃响应 $g(t)$ 的波形；

3.若系统的阶跃响应 $g(t)=f(t)$，试画出冲激响应 $h(t)$ 的波形；

4.若 $y(t)=f(t)*2[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)]$，试求 $y(0)$ 和 $y(2)$ 的值。

二、某 LTI 系统的初始状态一定，当输入 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，全响应 $y(t)=3\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，当输入 $f(t)=\delta(t)$ 时，全响应 $y(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，试求系统的冲激响应 $h(t)$。

三、已知系统方程为：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+3f(t)$，且已知 $y(0_+)=1$，$y'(0_+)=3$，$f(t)=\varepsilon(t)$，试求系统的零输入响应、零状态响应和完全响应。

四、已知某 LTI 系统的阶跃响应 $g(t)=\varepsilon(t-1)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，

求当输入 $f(t)=3\mathrm{e}^{2t}\,(-\infty<t<\infty)$ 时系统的零状态响应。

# 第三章 离散系统的时域分析

## 3-1 差分方程的求解、单位序列响应、卷积和

一、填空题

1.求下列齐次方程的解：

(a) $y(k)-2y(k-1)=0, y(0)=2$，则 $y(k)=$__________；

(b) $y(k)-7y(k-1)+16y(k-2)-12y(k-3)=0, y(0)=0, y(1)=-1, y(2)=-3$，则 $y(k)=$__________；

(c) $y(k)-\dfrac{1}{3}y(k-1)=0, y(-1)=-1$，则 $y(k)=$__________。

2.求下列差分方程所描述系统的零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$：

(a) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k), y(-1)=0, y(-2)=1$，则 $y_{\mathrm{zi}}(k)=$__________；

(b) $y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=f(k)-f(k-1), y(-1)=1, y(-2)=-3$，则 $y_{\mathrm{zi}}(k)=$__________。

3.求下列差分方程所描述系统的单位序列响应 $h(k)$：

(a) $y(k)+2y(k-1)=f(k-1)$，则 $h(k)=$__________；

(b) $y(k)+y(k-1)+\dfrac{1}{4}y(k-2)=f(k)$，则 $h(k)=$__________；

(c) $y(k)+4y(k-1)+3y(k-2)=3f(k-2)+f(k-1)$，则 $h(k)=$__________。

二、各序列 $f_i(k)$ 的图形如图 3-1 所示，求下列的卷积和：

(1) $f_1(k)*f_2(k)$ (2) $f_1(k)*f_3(k)$ (3) $f_2(k)*f_3(k)$ (4) $[f_2(k)-f_1(k)]*f_3(k)$

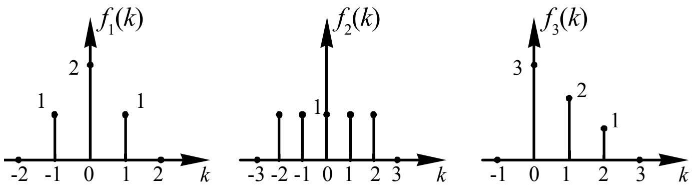



图 3-1

三、已知某 LTI 离散系统的阶跃响应 $g(k)=(\dfrac{1}{2})^k\varepsilon(k)$，求其单位序列响应。

## 3-2 离散系统时域分析

一、已知某 LTI 离散系统的输入 $f(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 4, & k=1,2\\ 0, & 其余\end{cases}$ 时，其零状态响应为 $y(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ 9, & k\geq 0\end{cases}$，

求系统的单位序列响应 $h(k)$ 。

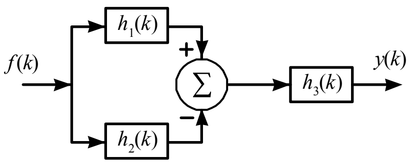



图 3-2

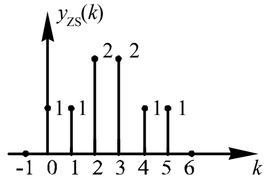



图 3-3

二、如图 3-2 所示的复合系统，已知 $h_1(k)=\varepsilon(k), h_2(k)=\varepsilon(k-4), h_3(k)=\delta(k-1)$，

试求：(1)复合系统的单位序列响应 $h(k)$；(2)当输入 $f(k)=\varepsilon(k)$ 时的零状态响应。

三、某 LTI 离散系统的输入 $f(k)=\delta(k)+\delta(k-2)$，测出该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$ 如图 3-3 所示，求系统的单位序列响应 $h(k)$ 。

四、已知某 LTI 离散系统，当输入 $f(k)=\delta(k-1)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(k)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k-1)$，

试求当输入为 $f(k)=2\delta(k)+\varepsilon(k)$ 时，系统的零状态响应。

## 3-3 综合

一、填空题

(1) 任一序列 $f(k)$ 与单位序列信号 $\delta(k)$ 的关系为__________；

(2) 单位阶跃序列与单位序列的关系为__________；

(3) 阶跃响应 $g(k)$ 与单位序列响应 $h(k)$ 的关系为__________；

(4) 已知 $f_1(k)=(\frac{1}{3})^k\varepsilon(k),\ f_2(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3),\ f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，则 $f(2)=$____，$f(4)=$____。

二、已知某 LTI 离散系统的方程为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=\varepsilon(k)$，且 $y(0)=0,\ y(1)=1$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$、零状态响应 $y_{zs}(k)$ 以及全响应 $y(k)$ 。

三、某 LTI 离散系统如图 3-4 所示，试求：

(1) 写出该系统的差分方程；

(2) 当 $f(k)=\delta(k)$ 时，全响应的初始条件 $y(0)=1,\ y(-1)=-1$ 时，求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$；

(3) 当 $f(k)=\delta(k)$ 时，求系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$

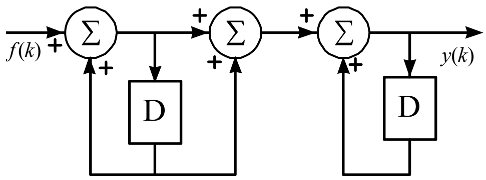



图 3-4

# 第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

## 4–1 傅里叶级数

一、前 4 个勒让德(Legendre)多项式为 $P_0(t)=1, P_1(t)=t, P_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}, P_3(t)=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t$，证明它们在区间(-1,1)内是正交函数集。

二、实周期信号 $f(t)$ 在区间 $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ 内的能量定义为 $E=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\mathrm{d}t$，如有和信号 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，

(1) 若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ 内相互正交，[例如 $f_1(t)=\cos(\omega t), f_2(t)=\sin(\omega t)$]，证明和信号 $f(t)$ 的总能量等于各信号能量之和；

(2) 若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 不是相互正交的[例如 $f_1(t)=\cos(\omega t), f_2(t)=\sin(\omega t+60°)$]，求和 $f(t)$ 的总能量。

三、利用奇偶性判断图 4-1 示各周期信号的傅里叶级数中所含的频率分量。

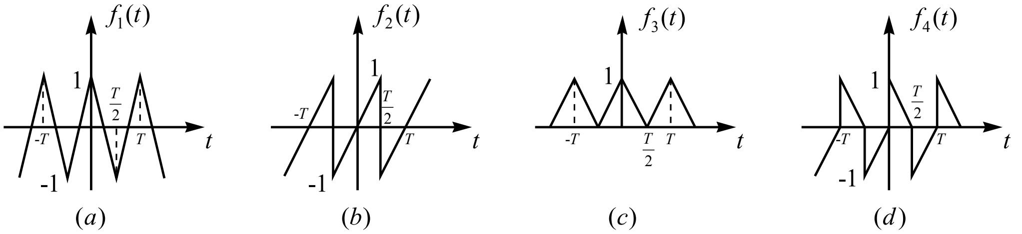



图 4–1

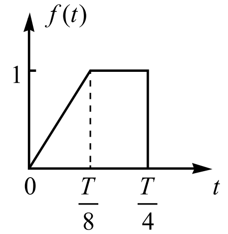



图 4–2

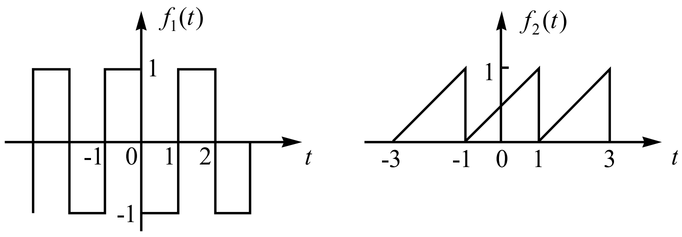



图 4–3

四、已知周期信号 $f(t)$ 在 $0\sim\frac{T}{4}$ 的波形如图 4-2 所示，试画出下列各情况下的 $-\frac{T}{2}\sim\frac{T}{2}$ $f(t)$ 的波形。

(1) $f(t)$ 为偶函数，且仅含偶次谐波。(2) $f(t)$ 为奇函数，且仅含偶次谐波。

(3) $f(t)$ 为奇函数，且仅含奇次谐波。(4) $f(t)$ 为偶函数，且仅含奇次谐波。

五、如图 4-3，下列周期信号的傅里叶级数的展开式中，$f_1(t)$ 含有______；$f_2(t)$ 含有______。

(A)直流 (B)各次谐波 (C)奇次谐波 (D)偶次谐波 (E)正弦波 (F)余弦波

## 4–2 周期信号的频谱、功率

一、某$1\Omega$ 电阻两端的电压$u(t)$ 如图 4-4 所示：

(1) 求$u(t)$ 的三角形式傅里叶级数；

(2) 利用(1)的结果和$u(\frac{1}{2})=1$，求下列无穷级数之和：$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

(3) 求$1\Omega$ 电阻上的平均功率和电压有效值；

(4) 利用(3)的结果求下列无穷级数之和：$S=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$

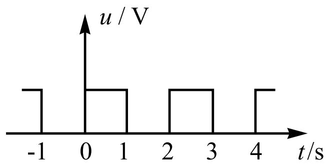



图 4–4

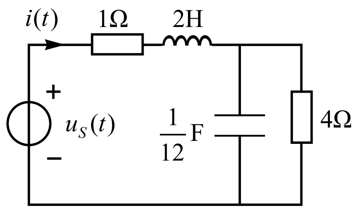



图 4–5

二、如图 4-5 所示电路，已知周期电源$u_S(t)=10+10\sqrt{2}\cos 3t$ V，

(1) 求电流$i(t)$ 及有效值$I$；(2) 求$u_S(t)$ 产生功率，电感的平均储能。

三、已知周期电压 $u_S(t)=2+3\sin(\frac{\pi}{6}t)-4\cos(\frac{\pi}{6}t)+2\cos(\frac{\pi}{3}t-60°)+\sin(\frac{2\pi}{3}t+45°)$ V

试分别画出其单边、双边的振幅与相位频谱。

四、已知某周期信号$f(t)$ 的振幅谱与相位谱如图 4-6 所示，则该周期信号的级数表达式为$f(t)$ =__________；$f(t)$ 的平均功率$P$ =__________；$f(t)$ 的周期$T$ =__________。

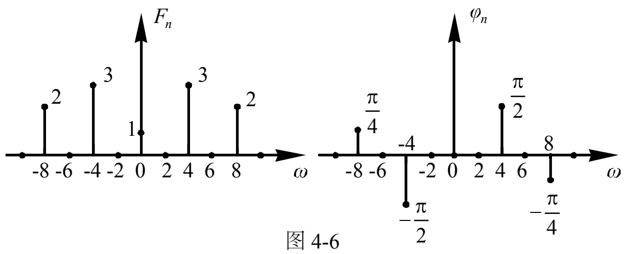



图 4-6

## 4–3 傅里叶变换定义

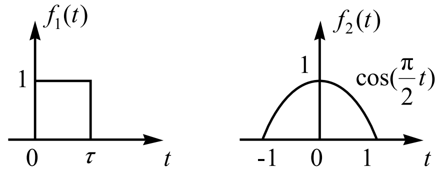



图 4–7

一、求图 4-7 所示各信号的傅里叶变换。

二、$f(t)$ 复函数，可表示为 $f(t)=f_{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)$，且 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\mathrm{j}\omega)$，式中 $f_{\mathrm{r}}(t)$、$f_{\mathrm{i}}(t)$ 均为实函数，证明：

(1) $\mathscr{F}[f^*(t)]=F^*(-\mathrm{j}\omega)$；

(2) $\mathscr{F}[f_{\mathrm{r}}(t)]=0.5[F(\mathrm{j}\omega)+F^*(-\mathrm{j}\omega)]$, $\mathscr{F}[f_{\mathrm{i}}(t)]=-\mathrm{j}0.5[F(\mathrm{j}\omega)-F^*(-\mathrm{j}\omega)]$。

三、设 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$，证明：

(1)当 $f(t)$ 为实函数时，$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t, X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$

(2)当 $f(t)$ 为实因果函数时，$R(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}R(y)\cos(yt)\cos(\omega t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$

四、若图 4-8 所示信号 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$，则

$\mathscr{F}[f_1(t)]=$__________；$\mathscr{F}[f_2(t)]=$__________；$\mathscr{F}[f_3(t)]=$__________；$\mathscr{F}[f_4(t)]=$__________。

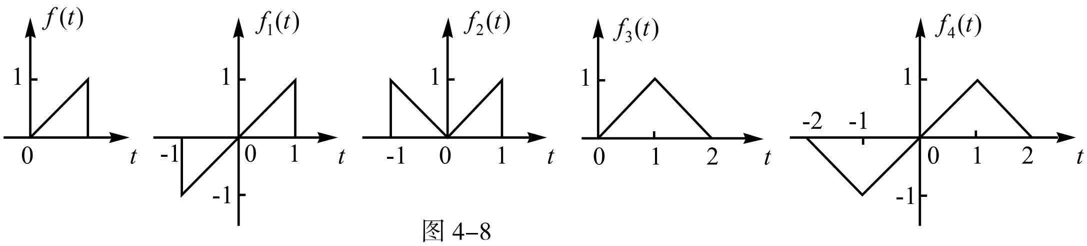



图 4–8

## 4–4 傅里叶变换性质

一、利用对称性求下列函数的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\dfrac{\sin[2\pi(t-2)]}{\pi(t-2)}$ (2) $f(t)=\dfrac{2}{1+t^2}$ (3) $f(t)=\left[\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right]^2$

二、求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\delta(t-2)$；(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-3(t-1)}\delta'(t-1)$；(3) $f(t)=\mathrm{sgn}(t^2-9)$；

(4) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t+1)$；(5) $f(t)=\varepsilon(0.5t-1)$。

三、求下列函数的傅里叶逆变换：

(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$ (2) $F(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$ (3) $F(\mathrm{j}\omega)=2\cos(3\omega)$

(4) $F(\mathrm{j}\omega)=[\varepsilon(\omega)-\varepsilon(\omega-2)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$ (5) $F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=0}^{2}\dfrac{2\sin\omega}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2n+1)\omega}$

四、设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)$，则下列各频谱函数之原函数分别为

(1) $F[\mathrm{j}(1-0.5\omega)]\leftrightarrow$__________；(2) $F[\mathrm{j}(\omega+1)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\leftrightarrow$__________；(3) $F(\mathrm{j}\omega)\cos\omega\leftrightarrow$__________。

## 4–5 傅里叶变换性质

一、填空

1.若已知 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则下列各函数的频谱函数分别为：

(1) $tf(2t)\leftrightarrow$ ________； (2) $(t-2)f(t)\leftrightarrow$ ________； (3) $t\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow$ ________；

(4) $f(1-t)\leftrightarrow$ ________； (5) $(1-t)f(1-t)\leftrightarrow$ ________； (6) $f(2t-5)\leftrightarrow$ ________；

(7) $\int_{-\infty}^{1-\frac{1}{2}t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow$ ________； (8) $\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}f(3-2t)\leftrightarrow$ ________； (9) $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}*\dfrac{1}{\pi t}\leftrightarrow$ ________。

2.如图 4-9 所示信号 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\mathrm{j}\omega)$，求下列各值[不必求出 $F(\mathrm{j}\omega)$]

(1) $F(0)=F(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=0}=$ ________； (2) $\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=$ ________；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=$ ________。

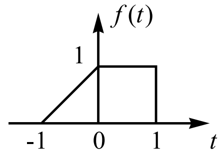



图 4–9

3.利用傅里叶变换特性，计算下列积分

(1) $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=$ ________； (2) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-4)}\mathrm{d}\omega=$ ________；

(3) $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=$ ________； (4) $\int_{0}^{\infty}\dfrac{\sin^3\omega}{\omega^3}\mathrm{d}\omega=$ ________。

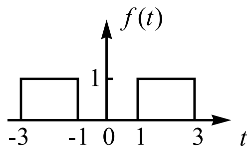



图 4–10

二、试用下列方法求图 4-10 所示信号 $f(t)$ 的频谱函数。

(1) 利用延时和线性性质（门函数的频谱可利用已知结果）；

(2) 利用时域积分定理；

(3) 将看作门函数 $g_2(t)$ 与冲激函数 $\delta(t+2)$、$\delta(t-2)$ 的卷积之和。

三、设因果信号 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$，证明：$R(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{X(y)}{\omega-y}\mathrm{d}y$； $X(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{R(y)}{\omega-y}\mathrm{d}y$

[上两式称为希尔伯特变换(Hilbert transforms)]。

## 4–6 周期信号傅里叶变换、频域分析

一、填空

一个周期为 $T$ 的周期信号 $f(t)$，已知其指数形式的傅里叶系数为 $F_n$，

则下列各周期信号的傅里叶系数分别为

(1) $f_1(t)=f(t-t_0)\leftrightarrow$ ________； (2) $f_2(t)=f(-t)\leftrightarrow$ ________；

(3) $f_3(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow$ ________； (4) $f_4(t)=f(at),a>0\leftrightarrow$ ________。

二、求图 4-11 所示周期信号的频谱函数。

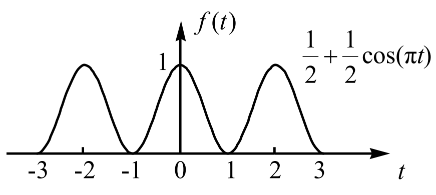



图 4–11

三、一个低通滤波器的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{|\omega|}{3}, & |\omega|<3\,\mathrm{rad/s}\\ 0, & |\omega|>3\,\mathrm{rad/s}\end{cases}$

若输入 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}3\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\Omega t-\frac{\pi}{2})}$，其中 $\Omega$ =1rad/s，求输出 $y(t)$ 。

四、如图 4-12($a$) 所示系统，已知带通滤波器的幅频响应如图 4-12($b$) 所示，其相频特性 $\varphi(\omega)=0$，

若输入为 $f(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}, s(t)=\cos(1000t)$，求输出信号 $y(t)$ 。

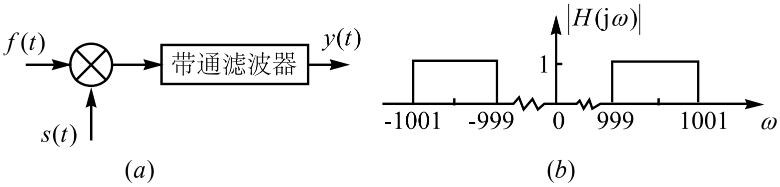



图 4–12

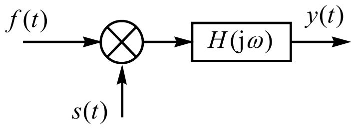



图 4–13

五、如图 4-13 所示系统，已知 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$ (其中 $\Omega$ =1rad/s)， $s(t)=\cos t$，频率响应

$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}\omega}, & |\omega|<1.5\,\mathrm{rad/s}\\ 0, & |\omega|>1.5\,\mathrm{rad/s}\end{cases}$，求系统的响应 $y(t)$ 。

## 4–7 取样定理

一、有限频带信号 $f(t)$ 的最高频率为 100Hz，若对下列信号进行时域取样，则其最小取样频率分别为

(1) $f(3t), f_{\mathrm{S}}=$__________； (2) $f^2(t), f_{\mathrm{S}}=$__________；

(3) $f(t)*f(2t), f_{\mathrm{S}}=$__________； (4) $f(t)+f^2(t), f_{\mathrm{S}}=$__________。

二、有限频带信号 $f(t)=5+2\cos(2\pi f_1 t)+\cos(4\pi f_1 t)$，

其中 $f_1$=1kHz，用 $f_{\mathrm{S}}$ =5kHz 的冲激函数序列 $\delta_{T_{\mathrm{S}}}(t)$ 进行取样。

(1) 画出 $f(t)$ 及取样信号 $f_{\mathrm{S}}(t)$ 在频率区间(-10kHz,10kHz)的频谱图；

(2) 若由 $f_{\mathrm{S}}(t)$ 恢复原信号，理想低通滤波器的截止频率 $f_{\mathrm{c}}$ 应如何选择？

三、有限频带信号 $f(t)=5+2\cos(2\pi f_1 t)+\cos(4\pi f_1 t)$，

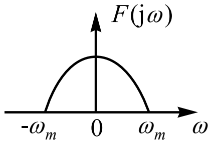
其中 $f_1$=1kHz，用 $f_{\mathrm{S}}$ =800Hz 的冲激函数序列 $\delta_{T_{\mathrm{S}}}(t)$ 进行取样。（请注意 $f_{\mathrm{S}}<f_1$）

(1) 画出 $f(t)$ 及取样信号 $f_{\mathrm{S}}(t)$ 在频率区间(-2kHz,2kHz)的频谱图；

(2) 若将取样信号 $f_{\mathrm{S}}(t)$ 输入到截止频率 $f_{\mathrm{c}}$ =500Hz,幅度为 $T_{\mathrm{S}}$ 的理想低通滤波器，其频率响应

$H(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}2\pi f)\begin{cases}T_{\mathrm{S}}, & |f|<500\,\mathrm{Hz}\\ 0, & |f|>500\,\mathrm{Hz}\end{cases}$，画出滤波器输出信号的频谱，并求出输出信号 $y(t)$ 。

四、可以产生单边带信号的系统框图如图 4-14(b)所示，已知信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 如图 4-14($a$)所示，$H(\mathrm{j}\omega)=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)$，且 $\omega_0 \gg \omega_\mathrm{m}$，试求输出信号 $y(t)$ 的频谱 $Y(\mathrm{j}\omega)$，并画出其频谱图。



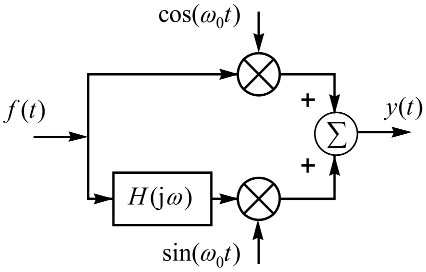




图 4–14

## 4–8 DTFT 和 DFT（本节考研不考）

一、求下列离散周期信号的傅里叶系数：

(1) $f(k)=\sin\left[\dfrac{(k-1)\pi}{6}\right]$　　(2) $f(k)=0.5^k,(0\le k\le 3)(N=4)$

二、求下列序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)。

(1) $f_1(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-6)$　　(2) $f_2(k)=k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]$　(3) $f_3(k)=0.5^k\varepsilon(k)$

(4) $f_4(k)=\begin{cases}a^k, & k\ge 0\\ a^{-k}, & k<0\end{cases},(0<a<1)$

三、用闭式写出下列有限长序列的 DFT。

(1) $f(k)=\delta(k)$　　(2) $f(k)=\delta(k-k_0),\ (0<k_0<N)$　　(3) $f(k)=1$

(4) $f(k)=a^kG_N(k)$　　(5) $f(k)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0 k}G_N(k)$

四、若有限长序列 $f(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 2, & k=1\\ -1, & k=2\\ 3, & k=3\end{cases}$，求 $f(k)$ 的 DFT，并由所得的结果验证 IDFT。

## 4–9 综合

一、有限长序列 $f(k)$ 如图 4-15 所示，画出下列序列 $f_1(k)$、 $f_2(k)$ 。

(1) $f_1(k)=f((k-2))_4 G_4(k)$ (2) $f_2(k)=f((-4))_4 G_4(k)$

二、已知 $F(n)=\begin{cases}\dfrac{N}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}, & n=m\\ \dfrac{N}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}, & n=N-m\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$，求 $f(k)=\mathrm{IDFT}[F(n)]$ 。

三、两有限长序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 如图 4-16 所示，试求 $f(k)=f_1(k)\circledast f_2(k)$ 。

四、有限长序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 如图 4-17 所示，试解答下列问题：

(1) 求 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的线卷积 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$；

(2) 求 $N=4$ 时的 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的圆卷积 $f(k)=f_1(k)\circledast f_2(k)$；

(3) 求 $N=5$ 时的 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的圆卷积。若要使 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的圆卷积与线卷积相同，求长度 $l$ 的最小值。

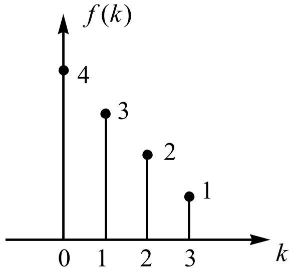



图 4–15

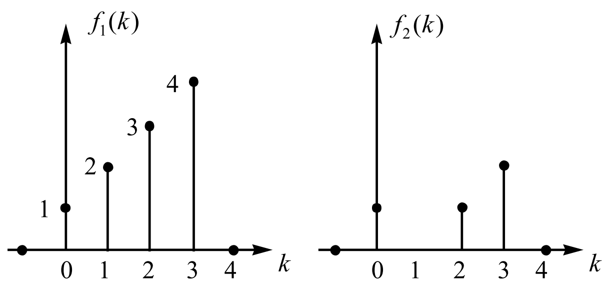



图 4–16

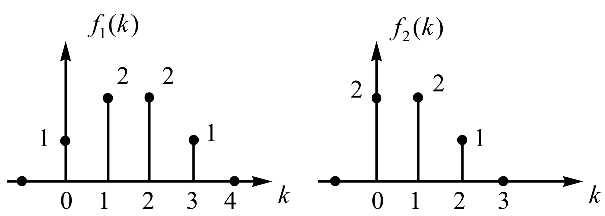



图 4–17

# 第五章 连续系统的 s 域分析

## 5–1 拉氏变换定义

一、填空题

1.信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 的拉氏变换及收敛域为__________；

2.信号 $f(t)=\mathrm{e}^{2t}\varepsilon(t)$ 的拉氏变换及收敛域为__________；

3.信号 $f(t)=t\mathrm{e}^{-2t}$ 的单边拉氏变换及收敛域为__________。

二、求图 5-1 各信号的拉氏变换。

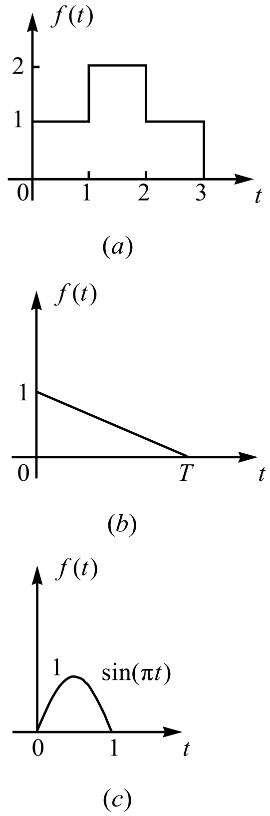



图 5–1

## 5–2 拉氏变换的性质

一、利用拉氏变换的性质，求下列函数的拉氏变换。

(1) $\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)$；　(2) $\sin(\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$；

(3) $\sin(\pi t)\varepsilon(t)-\sin[\pi(t-1)]\varepsilon(t-1)$；　(4) $\delta(4t-2)$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\sin(\pi t)\varepsilon(t)]$；　(6) $\dfrac{\mathrm{d}^2\sin(\pi t)}{\mathrm{d}t^2}\varepsilon(t)$；　(7) $t\mathrm{e}^{-(t-3)}\varepsilon(t-1)$

二、已知因果函数 $f(t)$ 的象函数 $F(s)=\dfrac{1}{s^2-s+1}$，求下列函数的象函数。

(1) $y_1(t)=\mathrm{e}^{-t}f(\dfrac{t}{2})$；　(2) $y_2(t)=tf(2t-1)$；

(3) $y_3(t)=\mathrm{e}^{-2t}f(3t)$；　(4) $y_4(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(0.5t-1)}{\mathrm{d}t}$

三、求图 5-2 在 $t$=0 时接入的有始周期信号的象函数。

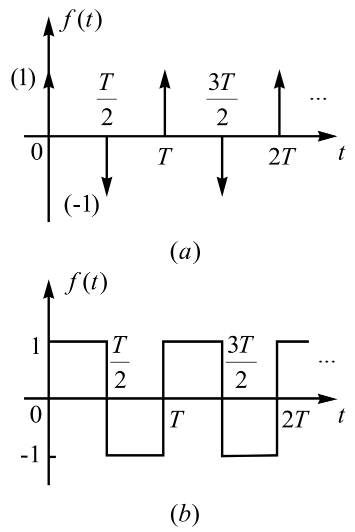



图 5–2

## 5–3 拉氏逆变换

一、求下列各象函数的拉氏逆变换。

(1) $\dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$；　(2) $\dfrac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$；　(3) $\dfrac{2s+4}{s(s^2+4)}$；

(4) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$；　(5) $\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$；　(6) $\dfrac{5}{s^3+s^2+4s+4}$

二、求下列象函数的拉氏逆变换，并粗略画出它们的波形图。

(1) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s+1}$；　(2) $(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s})^2$；　(3) $\dfrac{\mathrm{e}^{-2(s+3)}}{s+3}$；　(4) $\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}$

三、设 $F(s)=\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-s})}$，求原函数 $f(t)$，并粗略画出它的波形图。

四、已知因果信号 $f(t)$ 满足 $f(t)-\int_0^t\sin(t-\tau)\varepsilon(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\sin(t)\varepsilon(t)$，求该信号 $f(t)$。

## 5–4 s 域分析(1)

一、用拉氏变换求解微分方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f(t)$

在以下两种条件下的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

(1) 已知 $f(t)=\varepsilon(t)$， $y(0_-)=0$， $y'(0_-)=2$；(2) 已知 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$， $y(0_-)=0$， $y'(0_-)=1$。

二、描述某 LTI 系统的微分方程为 $y'(t)+2y(t)=f'(t)+f(t)$，求在下列激励下的零状态响应。

(1) $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$；(2) $f(t)=t\varepsilon(t)$。

三、已知某 LTI 系统的阶跃响应 $g(t)=(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$，欲使系统的零状态响应 $y_{zs}(t)=(1-e^{-2t}+te^{-2t})\varepsilon(t)$，

求系统的输入信号 $f(t)$。

四、写出图 5-3 各 $s$ 域框图所描述系统的系统函数 $H(s)$。

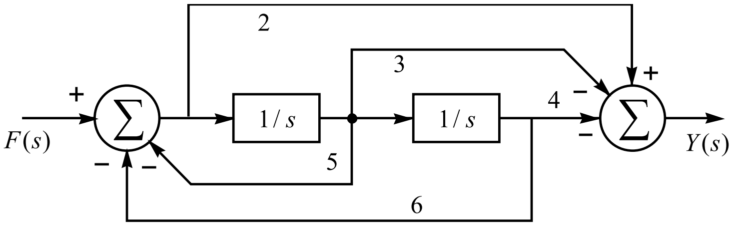


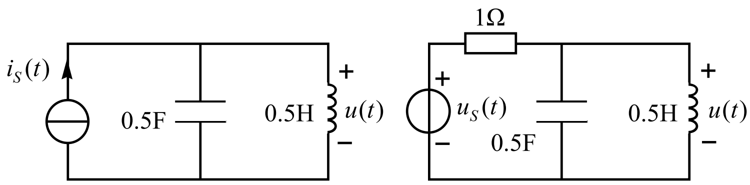

图 5–3

五、描述某因果系统输出 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的联立微分方程为 $\begin{cases} y_1'(t)+y_1(t)-2y_2(t)=4f(t) \\ y_2'(t)-y_1(t)+2y_2(t)=-f(t) \end{cases}$

已知 $y_1(0_-)=1$， $y_2(0_-)=2$， $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，求 $y_1(t)$ 的零输入响应 $y_{1zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{1zs}(t)$。

## 5–5 s 域分析(2)

一、如图 5-4 所示电路，其输入均为单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$，求电压 $u(t)$ 的零状态响应。




(a) (b)

图 5–4

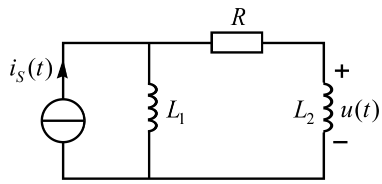



图 5–5

二、电路如图 5-5 所示，已知 $L_1 = 3\text{H}$， $L_2 = 6\text{H}$， $R = 9\Omega$，若以 $i_S(t)$ 为输入，以 $u(t)$ 为输出，求其冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$。

三、如图 5-6 所示的复合系统，由 4 个子系统连接组成，若各子系统的系统函数或冲激响应分别为：

$H_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$， $H_2(s) = \dfrac{1}{s+2}$， $h_3(t) = \varepsilon(t)$， $h_4(t) = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，求复合系统的冲激响应 $h(t)$。

四、某 LTI 系统在以下各种情况下其初始状态相同。已知，当激励 $f_1(t) = \delta(t)$ 时，

其全响应 $y_1(t) = \delta(t) + \mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$；当激励 $f_2(t) = \varepsilon(t)$ 时，其全响应 $y_2(t) = 3\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$。

(1) 如 $f_3(t) = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，求系统的全响应；(2) 如 $f_4(t) = t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$，求系统的全响应。

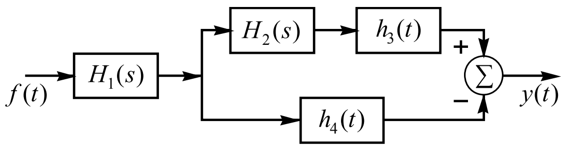
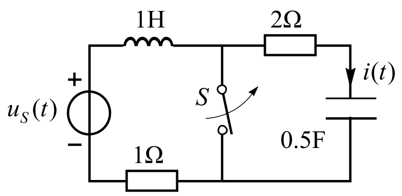



图 5–6



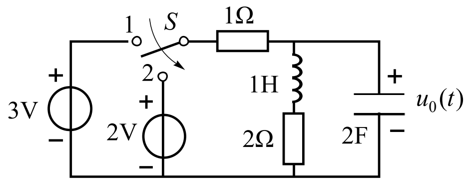




图 5–7 图 5–8

五、电路如图 5-7 所示，$u_S(t) = 1\text{V}$，原已稳定，$t = 0$ 时将开关 $S$ 打开，试求 $t \geq 0$ 时的 $i(t)$。

六、电路如图 5-8 所示，原已稳定，$t = 0$ 时将开关 $S$ 由 1 打到 2，试求 $t \geq 0$ 时的 $u_0(t)$。

七、根据以下函数 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$，求 $f(t)$ 的傅里叶变换。

(1) $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$；(2) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$

# 第六章 离散系统的 $z$ 域分析

## 6–1 $z$ 变换定义与性质

一、求下列序列的双边 $z$ 变换，并注明收敛域。

(1) $f(k)=\begin{cases}0.5^k, & k<0\\ 0, & k\ge 0\end{cases}$；(2) $f(k)=\begin{cases}2^k, & k<0\\ (\frac{1}{3})^k, & k\ge 0\end{cases}$；

(3) $f(k)=(\frac{1}{2})^{|k|}, k=0,\pm1,\ldots$；(4) $f(k)=\begin{cases}0, & k<-4\\ (\frac{1}{2})^k, & k\ge -4\end{cases}$

二、求下列序列的 $z$ 变换，并注明收敛域。

(1) $f(k)=(\frac{1}{3})^k\varepsilon(k)$；(2) $f(k)=[(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{3})^{-k}]\varepsilon(k)$；

(3) $f(k)=\cos(\frac{k\pi}{4})\varepsilon(k)$；(4) $f(k)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\delta(k-m)$

三、粗略画出下列因果序列的图形，并求出其 $z$ 变换。

(1) $f(k)=\begin{cases}0, & k\text{为奇数}\\ 1, & k\text{为偶数}\end{cases}$；(2) $f(k)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\ -1, & k=4,5,6,7\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$

四、已知 $a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-a},|z|>|a|$，$k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2},|z|>1$，利用 $z$ 变换的性质求下列序列的 $z$ 变换，并注明收敛域。

(1) $\frac{1}{2}[1+(-1)^k]\varepsilon(k)$；(2) $(-1)^k k\varepsilon(k)$；(3) $k(k-1)\varepsilon(k-1)$；(4) $(\frac{1}{2})^k\cos(\frac{k\pi}{2})\varepsilon(k)$

五、利用 $z$ 变换的性质求下列序列的 $z$ 变换。

(1) $k\sin(\frac{k\pi}{2})\varepsilon(k)$；(2) $\frac{a^k-b^k}{k}\varepsilon(k-1)$；(3) $\frac{a^k}{k+1}\varepsilon(k)$；(4) $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\varepsilon(k)$

## 6-2 逆 $z$ 变换

一、求下列象函数 $F(z)$ 的逆 $z$ 变换。

(1) $F(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}},|z|>0.5$；　(2) $F(z)=\dfrac{3z+1}{z+0.5},|z|>0.5$；　(3) $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2+z-2},|z|>2$

二、求下列象函数 $F(z)$ 的双边逆 $z$ 变换。

(1) $F(z)=\dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})},|z|<\dfrac{1}{3}$；(2) $F(z)=\dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})},|z|>\dfrac{1}{2}$；(3) $F(z)=\dfrac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{3})},\dfrac{1}{3}<|z|<\dfrac{1}{2}$

三、求下列象函数 $F(z)$ 的逆 $z$ 变换。

(1) $F(z)=\dfrac{1}{z^2+1},|z|>1$；　(2) $F(z)=\dfrac{z^2+z}{(z-1)(z^2-z+1)},|z|>1$；

(3) $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2+\sqrt{2}z+1},|z|>1$；　(4) $F(z)=\dfrac{z^2+az}{(z-a)^3},|z|>|a|$

四、利用卷积定理求下列序列 $f(k)$ 与 $h(k)$ 的卷积 $y(k)=f(k)*h(k)$ 。

(1) $f(k)=a^k\varepsilon(k)$， $h(k)=\varepsilon(k-1)$；(2) $f(k)=a^k\varepsilon(k)$， $h(k)=b^k\varepsilon(k)$

五、设因果序列 $f(k)$ [即 $f(k)=0$， $k<0$]，满足方程 $\sum_{i=0}^{k-1}f(i)=[k\varepsilon(k)]*[(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)]$，求序列 $f(k)$ 。

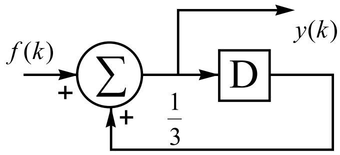



图 6–1

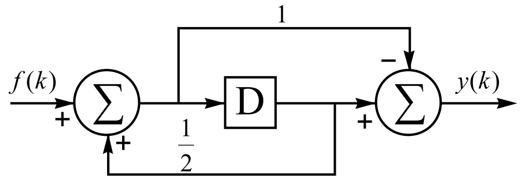
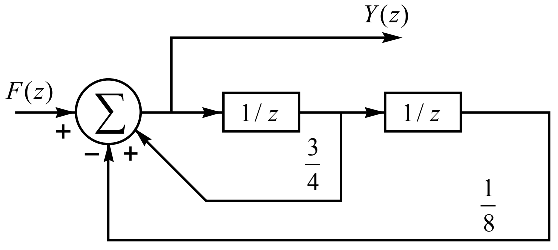
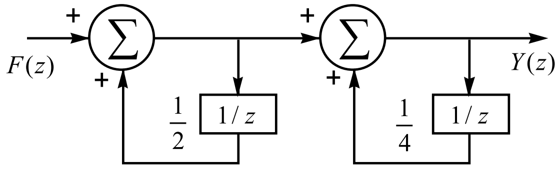


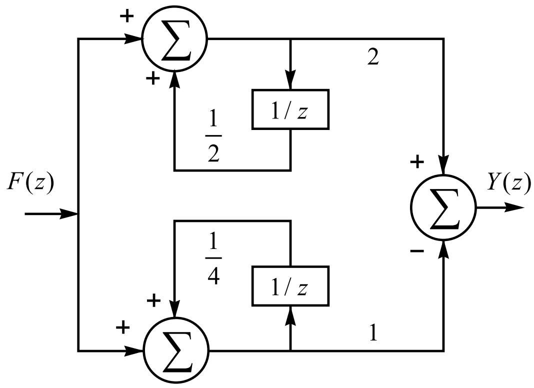

图 6–2




(a)




(b)




(c)

图 6–3

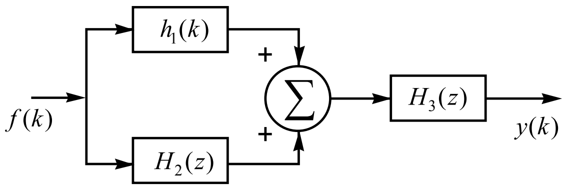
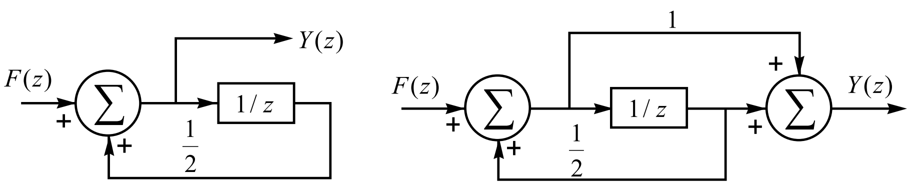



图 6–4




(a) (b)

图 6–5

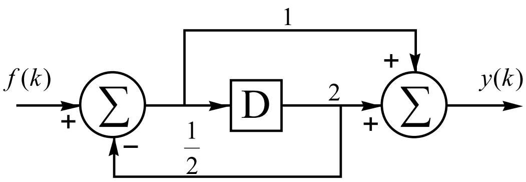



图 6–6

## 6-3 $z$ 域分析(1)

一、描述某 LTI 离散系统差分方程为 $y(k+2)-0.7y(k+1)+0.1y(k)=7f(k+1)-2f(k)$，已知

$f(k)=0.4^k\varepsilon(k)$，$y(-1)=-4$，$y(-2)=-38$，求该系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ 和零状态响应 $y_{zs}(k)$ 及全响应 $y(k)$。

二、LTI 离散系统框图如图 6-1 所示，求该系统的单位序列响应 $h(k)$ 和阶跃响应 $g(k)$。

三、LTI 离散系统框图如图 6-2 所示，求该系统在下列激励作用下的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

(1) $f(k)=\varepsilon(k)$；(2) $f(k)=k\varepsilon(k)$

四、LTI 离散系统框图如图 6-3 所示，

(1) 试证明图($a$)、($b$)、($c$)的系统满足相同的差分方程；

(2) 求该系统的单位序列响应 $h(k)$；

(3) 若 $f(k)=\varepsilon(k)$，求该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

五、已知某 LTI 离散系统的差分方程为 $y(k)-1.5y(k-1)-y(k-2)=f(k-1)$，

(1) 若该系统为因果系统，求该系统的单位序列响应；

(2) 若系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆，求系统的单位序列响应，并计算当输入为 $f(k)=(-0.5)^k\varepsilon(k)$ 时系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

## 6-4 $z$ 域分析(2)

一、当输入 $f(k)=\varepsilon(k)$ 时，某 LTI 离散系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$ 为 $y_{zs}(k)=2[1-(0.5)^k]\varepsilon(k)$，试计算当输入 $f(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$ 时系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

二、如图 6-4 所示的复合系统由 3 个子系统连接组成，若已知各子系统的单位序列响应或系统函数分别为：$h_1(k)=\varepsilon(k)$，$H_2(z)=\dfrac{z}{z+1}$，$H_3(z)=\dfrac{1}{z}$，试计算当输入为 $f(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-2)$ 时复合系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

三、求图 6-5 所示离散系统的频率响应，并粗略画出 $\theta=\omega T_s$ 在 $-\pi\sim\pi$ 区间的幅频和相频响应。

四、某 LTI 离散系统框图如图 6-6 所示，若输入为 $f(k)=5+5\cos(\dfrac{\pi}{2}k)+\cos(\pi k)$，求系统的稳态响应 $y_{ss}(k)$。

五、已知某 LTI 离散因果系统的差分方程为 $y(k)+0.2y(k-1)-0.24y(k-2)=f(k)+f(k-1)$，

(1) 求系统的系统函数 $H(z)$ 和单位序列响应 $h(k)$；

(2) 求出系统频率响应，并求当输入为 $f(k)=12\cos(\pi k)$ 时系统的稳态响应 $y_{ss}(k)$。

六、已知某 LTI 离散系统的差分方程为 $y(k)-1.5y(k-1)-y(k-2)=f(k-1)$，

(1) 若该系统为因果系统，求系统函数，标出收敛域并求单位序列响应；

(2) 若该系统为稳定系统，求系统函数，标出收敛域并求单位序列响应。

# 第七章 系统函数

## 7–1 系统函数零极点

一、填空题

1.描述系统的差分方程为

(a) $y(k)+y(k-1)-\dfrac{3}{4}y(k-2)=2f(k)-f(k-1)$，则 $H(z)=$________，零点为______，极点为______；

(b) $y(k)-\dfrac{1}{2}y(k-1)+\dfrac{1}{8}y(k-2)=\dfrac{1}{2}f(k)+f(k-1)$，则 $H(z)=$________，零点为______，极点为______。

2.(a) 某系统 $H(s)$ 的零极点分布如图 7-1 所示，且 $H(0)=1$，则 $H(s)=$__________；

(b) 某系统 $H(s)$ 的零点在：$0,-2\pm \mathrm{j}1$；极点在：$-3,-1\pm \mathrm{j}3$；且 $H(-2)=-1$，则 $H(s)=$__________；

(c) 某系统 $H(s)$ 的零点在：$2\pm \mathrm{j}1$；极点在：$-2\pm \mathrm{j}1$；且 $H(0)=2$，则 $H(s)=$__________。

3.下列因果系统的系统函数 $H(\bullet)$，为使系统稳定，确定 $k$ 应满足的条件：

(a) $H(s)=\dfrac{s}{s^2+(4-k)s+4}$，$k$ 为__________；

(b) $H(z)=\dfrac{z^2+3z+2}{2z^2-(k-1)z+1}$，$k$ 为__________；

(c) $H(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+0.5z+k+1}$，$k$ 为__________。

二、如图 7-2，某离散系统，已知系统函数的零点在 $-1$，2，极点在 $-0.8$，0.5，求系数 $a_0, a_1, b_1, b_2$。

三、二阶系统的系统函数 $H(s)$ 的零极点分布如图 7-3 所示，且已知 $H(\infty)=1$，

(1) 求出 $H(s)$ 的表达式；(2) 写出其幅频特性 $|H(\mathrm{j}\omega)|$；(3) 试粗略画出其幅频特性曲线。

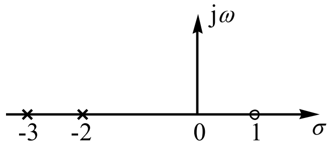


图 7–1

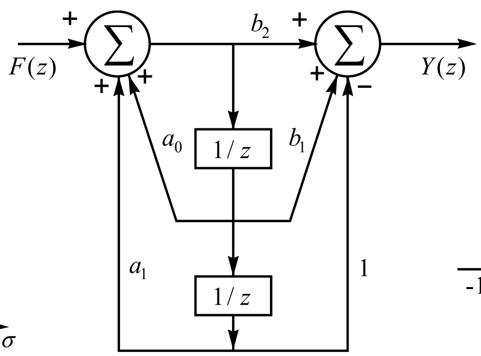


图 7–2

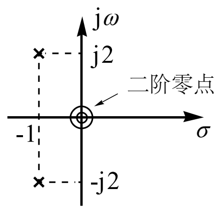


图 7–3

## 7–2 信号流图

一、填空

1.求信号流图 7-4 的增益 $G=\dfrac{Y}{F}$ 值。

(1) 信号流图($a$)的增益 $G=\dfrac{Y}{F}=$__________；

(2) 信号流图($b$)的增益 $G=\dfrac{Y}{F}=$__________。

2.求下列系统的系统函数。

(1) 系统流图($c$)的 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}=$__________；

(2) 系统流图($d$)的 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{F(z)}=$__________。

二、已知某 LTI 系统，系统函数 $H(s)$ 的零极点分布如图 7-5 所示，且 $H(0)=-1.2$，求：

(1) 系统函数 $H(s)$ 及冲激响应 $h(t)$；

(2) 写出输入与输出之间的微分方程；

(3) 求 $H(\mathrm{j}\omega)$ 以及激励为 $\cos(3t)\varepsilon(t)$ 时系统的稳态响应。

三、如图 7-6 所示离散 LTI 因果系统的信号流图，

(1) 求系统函数 $H(z)$；

(2) 写出输入、输出之间的差分方程；

(3) 判断该系统是否稳定。

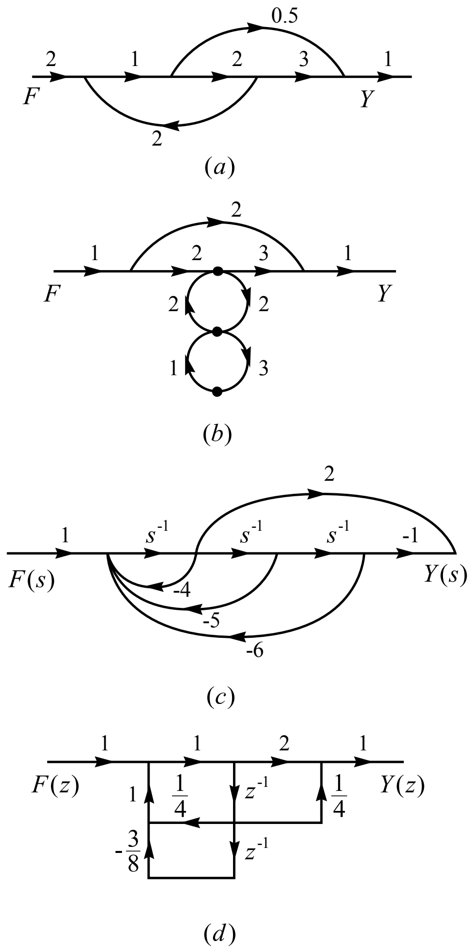



图 7–4

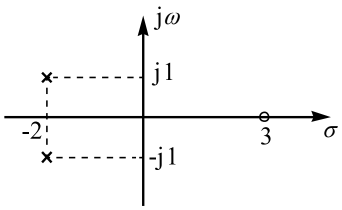



图 7–5

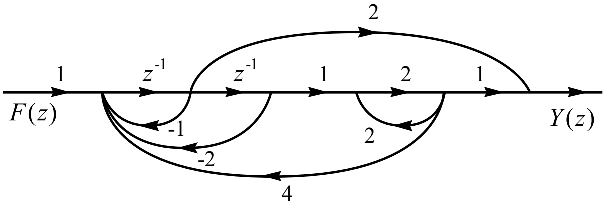



图 7–6

## 7–3 系统模拟

一、填空题

1.连续系统的系统函数如下，试用直接型模拟此系统，并画出方框图。

$(a)\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ $(b)\dfrac{s^2+4s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

2.离散系统的系统函数如下，试用直接型模拟此系统，并画出方框图。

$(a)\dfrac{z(z+2)}{(z-0.8)(z-0.6)(z-0.4)}$ $(b)\dfrac{z^3}{(z-0.5)(z^2-0.6z+0.25)}$

二、系统函数 $H(\bullet)$ 如下，试分别用级联形式和并联形式模拟，并画出方框图。

$(a)\dfrac{s^2+s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$ $(b)\dfrac{z^2}{(z+0.5)^2}$

三、如图 7-7 所示连续 LTI 因果系统的信号流图。

(1) 求系统函数 $H(s)$；(2) 写出输入与输出之间的微分方程；(3) 判断该系统是否稳定。

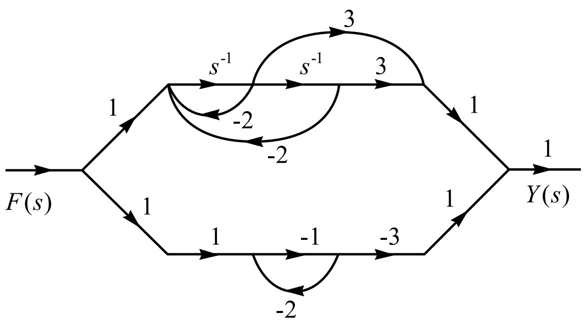



图 7–7

# 第八章 系统的状态变量分析

## 8-1 连续系统状态方程列写

一、如图 8-1 所示电路，列写出以 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 为状态变量 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ ，以 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 为输出的状态变量和输出方程（矩阵形式）。

二、描述某连续系统的微分方程为 $y'''(t)+5y''(t)+y'(t)+2y(t)=f'(t)+2f(t)$ ，
写出该系统的状态方程和输出方程（矩阵形式）。

三、如图 8-2 所示系统的信号流图，
写出以 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 为状态变量的状态方程和输出方程（矩阵形式）。

四、如图 8-3 所示连续因果系统，
(1) 写出 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 为状态变量的状态方程和输出方程（矩阵形式）；
(2) 为使该系统稳定，常数 $a$、$b$ 应满足什么条件？

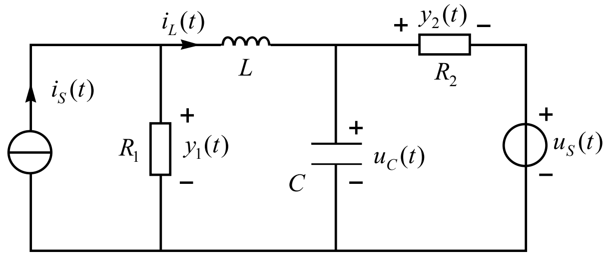



图 8–1

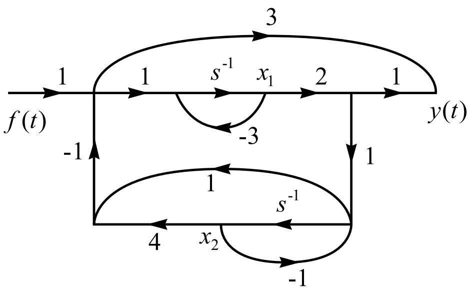



图 8–2

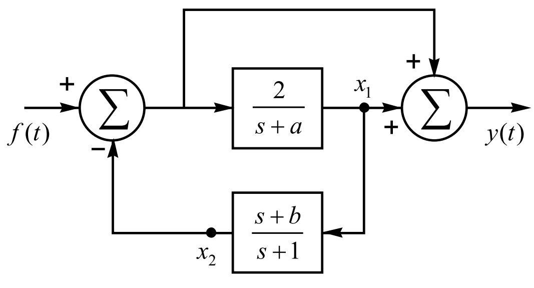



图 8–3

## 8-2 离散系统状态方程列写

一、某离散系统的信号流图如图 8-4 所示，

写出以 $x_1(k)$、$x_2(k)$ 为状态变量的状态方程和输出方程（矩阵形式）。

二、如图 8-5 所示离散系统，

写出以 $x_1(k)$、$x_2(k)$、$x_3(k)$ 为状态变量的状态方程和输出方程（矩阵形式）。

三、某二阶离散 LTI 系统的信号流图如图 8-6 所示，

(1) 写出以 $x_1(k)$、$x_2(k)$ 为状态变量的状态方程和输出方程（矩阵形式）；

(2) 求系统函数 $H(z)$；

(3) 写出描述系统的差分方程。

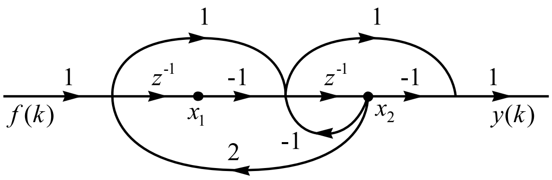



图 8–4

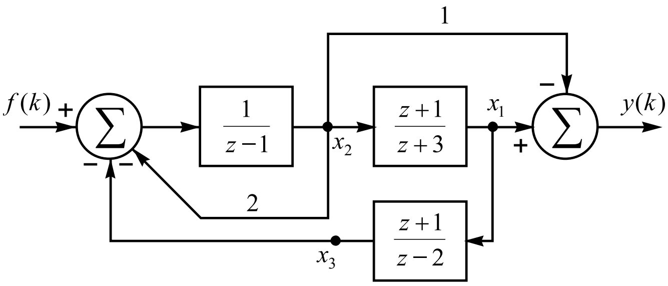



图 8–5

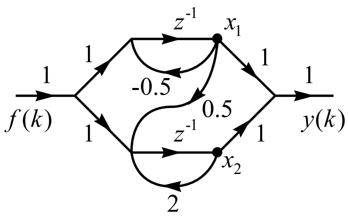
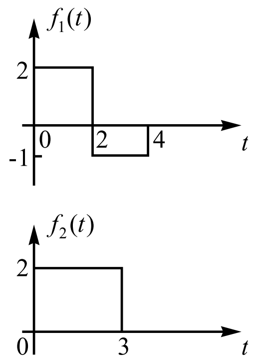



图 8–6

# 西安电子科技大学 2006 年期末试题（考试时间：120 分钟）

## 一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）




题 4 图

1. 积分 $\int_{-5}^{5}(t-3)\delta(4-2t)\,\mathrm{d}t$ 等于

(A) -1　(B) -0.5　(C) 0　(D) 0.5

2. 周期序列 $f(k)=2\cos(\frac{\pi}{4}k)+\sin(\frac{\pi}{8}k)$ 的周期为

(A) 2　(B) 4　(C) 8　(D) 16

3. 下列微分方程描述的系统为线性时变系统的是

(A) $y'(t)+2y(t)=f'(t)-2f(t)$　(B) $y'(t)+\sin t\; y(t)=f(t)$

(C) $y'(t)+y^2(t)=f(t)$　(D) $y'(t)y(t)=2f(t)$

4. 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形如题 4 图所示，设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $y(4)$ 等于

(A) 0　(B) 2　(C) 4　(D) 8

5. 信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-(2+\mathrm{j}5)t}\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$ 等于

(A) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega}}{\mathrm{j}\omega+2}$　(B) $\dfrac{1}{\mathrm{j}(\omega-5)-2}$　(C) $\dfrac{1}{\mathrm{j}(\omega+5)+2}$　(D) $\dfrac{1}{\mathrm{j}(\omega-2)+5}$

6. 连续信号 $f(t)$ 的最高角频率 $\omega_{\mathrm{m}}=10^4\pi\,\mathrm{rad/s}$，若对其取样，并从取样后的信号中恢复原信号 $f(t)$，则奈奎斯特间隔和所需理想低通滤波器的最小截止频率分别为

(A) $10^{-4}\,\mathrm{s}, 10^4\,\mathrm{Hz}$　(B) $10^{-4}\,\mathrm{s}, 5\times10^3\,\mathrm{Hz}$　(C) $2\times10^{-4}\,\mathrm{s}, 5\times10^3\,\mathrm{Hz}$　(D) $5\times10^{-3}\,\mathrm{s}, 10^4\,\mathrm{Hz}$

7. 已知因果函数 $f(t)$ 的象函数为 $F(s)$，则 $\mathrm{e}^{-3t}f(t-1)$ 的象函数为

(A) $\mathrm{e}^{-s}F(s+3)$　(B) $\mathrm{e}^{-(s+3)}F(s)$　(C) $\mathrm{e}^{-(s+3)}F(s+3)$　(D) $\mathrm{e}^{s-3}F(s-3)$

8. 已知一双边序列函数 $f(k)=\begin{cases}2^k, & k\ge 0\\ 3^k, & k<0\end{cases}$，其 z 变换 $F(z)$ 等于

(A) $\dfrac{-z}{(z-2)(z-3)}, 2<|z|<3$　(B) $\dfrac{z(2z-1)}{(z-2)(z-3)}, 2<|z|<3$

(C) $\dfrac{z}{(z-2)(z-3)}, 2<|z|<3$　(D) $\dfrac{-z}{(z-2)(z-3)}, |z|<2, |z|>3$

9.以下分别 是 4 个因果信号的拉普拉斯变换，其中不存在傅里叶变换的是

(A) $\dfrac{1}{s}$　(B) 1　(C) $\dfrac{1}{s+2}$　(D) $\dfrac{1}{s-2}$

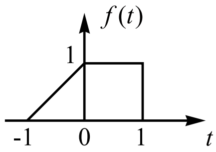
10. 象函数 $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ 的收敛域不可能是

(A) $|z|<1$　(B) $1<|z|<2$　(C) $|z|>3$　(D) $1<|z|<3$

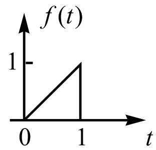
## 二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 已知 $f(t)$ 的波形如题 11 图所示，试画出 $f(1-2t)$ 的波形。

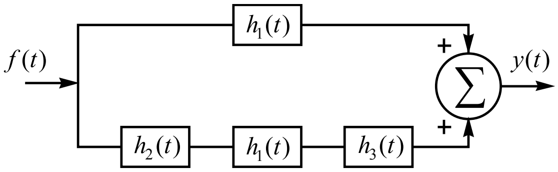
12. 信号 $f(t)$ 如题 12 图所示，其拉普拉斯变换 $F(s)=$__________。




题 11 图




题 12 图




题 14 图

13. 频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)=2\cos(\omega)$ 的原函数 $f(t)=$__________。

14. 如题 14 图所示的系统，它由几个子系统所组成，各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)=\varepsilon(t)$，$h_2(t)=\delta(t-1)$，$h_3(t)=-\delta(t)$，则复合系统的冲激响应 $h(t)=$__________。

15. 已知：$\underset{\uparrow k=0}{f_1(k)=\{\ldots,0,1,2,3,0,\ldots\}}$，$\underset{\uparrow k=0}{f_2(k)=\{\ldots,0,4,5,0,\ldots\}}$，则 $f_1(k)*f_2(k)=$__________。

## 三、计算题（共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分）

16. (1) 请分别写出连续信号傅里叶变换的定义式和逆变换定义式；

    (2) 请分别写出 DTFT 的定义式和双边 $z$ 变换的定义式；

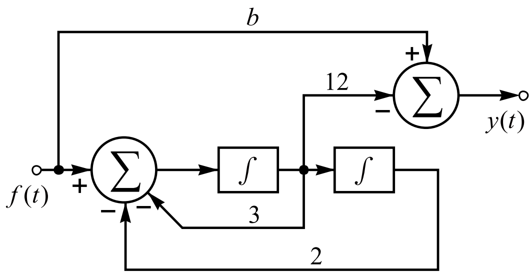
    (3) 写出傅里叶变换的时域卷积定理，并证明之。

17. 已知系统的模拟框图如题 17 图所示。

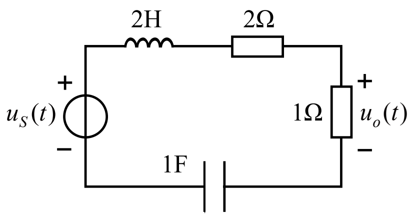
    (1) 求该系统的系统函数 $H(s)$；

    (2) 为使信号通过系统后不产生幅度失真，试确定常数 $b$ 的值；

    (3) 在系统不产生幅度失真的情况下，当输入周期信号 $f(t)=1-\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{\pi}{4}t-\dfrac{2\pi}{3})+\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})$ 时，求系统输出 $y(t)$ 的功率 $P$。




题 17 图




题 19 图

18. 描述某因果离散系统输出 $y(k)$ 与输入 $f(k)$ 的差分方程为 $y(k)-y(k-1)-y(k-2)=5f(k-1)$，

(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$；

(2) 画出 $H(z)$ 的零极点分布图，写出 $H(z)$ 的收敛域，并判断该系统是否稳定。

(3) 求系统的单位序列响应 $h(k)$；

(4) 画出该系统直接形式的信号流图。

19. 题 19 图所示电路，激励信号为 $u_S(t)$，输出为 $u_o(t)$。

(1) 求系统的系统函数 $H(s)$ 和冲激响应 $h(t)$；

(2) 当 $u_S(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，在 $t=0$ 和 $t=1$ 时测得系统的输出为 $u_o(0)=1$，$u_o(1)=2\mathrm{e}^{-1}$，求系统的零输入响应、零状态响应。

20.（编者注：原版习题册的此题没有图）题 20 图所示因果离散系统的模拟框图，状态变量 $x_1(k)$、$x_2(k)$ 如图所标。

(1) 试列出该系统的状态方程与输出方程；

(2) 试列出该系统的输出 $y(k)$ 与输入 $f(k)$ 之间的差分方程；

(3) 求该系统的频率响应；

(4) 当 $f(k)=2+8\cos(\pi k)$ 时，求系统的稳态响应 $y_s(k)$。

## 参考答案

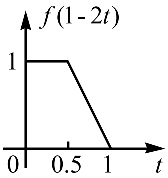
1-5 BDBAC　　6-10 BCADD　　11.见图　　12. $F(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}-s\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$　　13. $f(t)=\delta(t-1)+\delta(t+1)$

14. $h(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$　　15. $f_1(k)*f_2(k)=\{4,13,22,15\}$

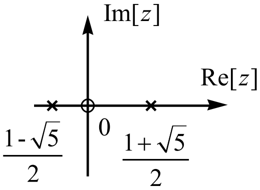
16.(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$，$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$

(2) $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}$，$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$　　(3) $f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$　　证明略。

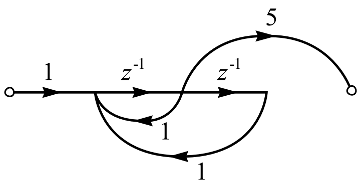
17.(1) $H(s)=\dfrac{bs^2+(3b-12)s+2b}{s^2+3s+2}$　　(2) $b=2$　　(3) $P=6.5$




题 11 解图




(a)




题 18 解图　　(b)

18.(1) $H(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{5z}{z^2-z-1}$

(2) $H(z)$ 的零点为：$\xi_1=0$，极点为：$p_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，零极点分布如图($a$)所示。

$H(z)$ 的收敛域为 $|z|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。对因果系统，因 $H(z)$ 有在单位圆外的极点，故系统不稳定。

(3) $H(z)=\dfrac{\sqrt{5}z}{z-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}-\dfrac{\sqrt{5}z}{z-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$，$h(k)=\sqrt{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k)$

(4) 系统直接形式的信号流图如图($b$)所示。

19.(1) $H(s)=\dfrac{0.5s}{s^2+1.5s+0.5}=\dfrac{-0.5}{s+0.5}+\dfrac{1}{s+1}$，$h(t)=(\mathrm{e}^{-t}-0.5\mathrm{e}^{-0.5t})\varepsilon(t)$

(2) $U_{o\mathrm{zs}}(s)=H(s)U_S(s)=\dfrac{0.5s}{s^2+1.5s+0.5}\cdot\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{-1}{s+0.5}+\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{s+1}$，

$u_{o\mathrm{zs}}(t)=(-\mathrm{e}^{-0.5t}+t\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$，$u_{o\mathrm{zs}}(0)=0$，$u_{o\mathrm{zs}}(1)=(-\mathrm{e}^{-0.5}+2\mathrm{e}^{-1})$，

$u_{o\mathrm{zi}}(0)=u_o(0)-u_{o\mathrm{zs}}(0)=1$，$u_{o\mathrm{zi}}(1)=u_o(1)-u_{o\mathrm{zs}}(1)=\mathrm{e}^{-0.5}$，特征根为 $\lambda_1=-0.5$，$\lambda_2=-1$，

故 $u_{o\mathrm{zi}}(t)=C_1\mathrm{e}^{-0.5t}+C_2\mathrm{e}^{-t}, t\ge 0$，得 $C_1=1$，$C_2=0$，$u_{o\mathrm{zi}}(t)=\mathrm{e}^{-0.5t}, t\ge 0$。

20.(1) $\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\0.1 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}f(k)$，$y(k)=[1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$

(2) $y(k)-0.6y(k-1)=2f(k-1)$

(3) $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-0.6}$

(4) 在 $\theta=0,\pi$ 处的频率响应函数分别为：

$H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}}=\dfrac{2}{1-0.6}=5$，$H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}-0.6}=\dfrac{2}{-1-0.6}=\dfrac{5}{4}\angle 180^\circ$

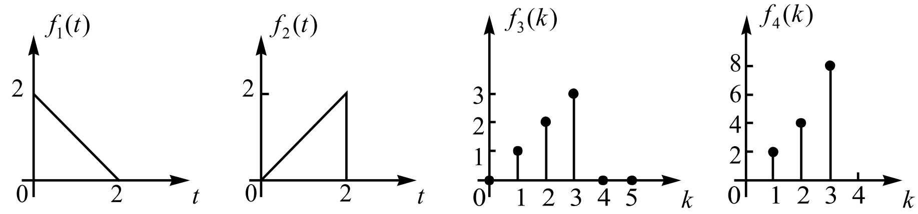
分别计算各频率分量，相加得到系统的稳态响应为：$y_{\mathrm{s}}(k)=10+10\cos(\pi k+180^\circ)$。

# 答 案 详 解

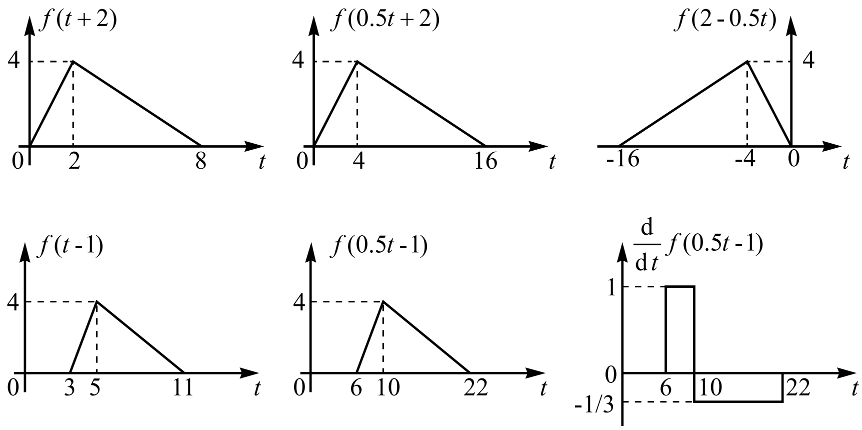
## 第一章 信号与系统

### 1–1 波形绘制和冲激函数

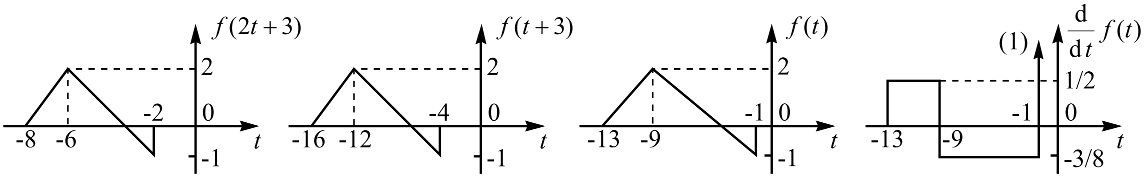
一、从左至右依次为(1)、(2)、(3)、(4)




二、上图为(1)，下图为(2)




三、




四、(1) $\pi$　(2) 2　(3) $\varepsilon(t-5)\sin 5$　(4) 0　(5) $(t-5)[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t-2)]$

## 1–2 连续系统方程与性质

一、解：由 KCL，得 $i_L = i_S - i_C$，即 $i''_L = i''_S - i''_C$

由 KVL，得 $u_C + i_C R = u_L$，即 $u'_C + i'_C R = u'_L$ ① 而 $u'_C = \frac{1}{C} i_C$ ② $u'_L = L i''_L = L(i''_S - i''_C)$ ③

②式与③式代入①式，整理得 $i''_C(t) + \frac{R}{L} i'_C(t) + \frac{1}{LC} i_C(t) = i''_S(t)$

二、解：设激励为 $f(t)$ 时，零输入响应 $y_x(t)$，零状态响应 $y_f(t)$，由 LTI 系统的齐次性得 $y_f(t) = T[f(t)]$，$2y_f(t) = T[2f(t)]$，$3y_f(t) = T[3f(t)]$，又由系统的可加性，得 $y_x(t) + y_f(t) = 6\mathrm{e}^{-2t} - 5\mathrm{e}^{-3t}, t \geq 0$，$y_x(t) + 3y_f(t) = 8\mathrm{e}^{-2t} - 7\mathrm{e}^{-3t}, t \geq 0$，解得 $y_f(t) = \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}, t \geq 0$

∴当激励为 $2f(t)$ 时，零状态响应为 $y_{zs}(t) = 2y_f(t) = 2(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}), t \geq 0$

三、(1)是，是 (2)是，是 (3)否，是 (4)否，否

四、(1)是，否 (2)否，是 (3)否，是 (4)是，是

五、解：$T[\{0\}, f(t)] = f(-t) = y(t)$， $T[\{0\}, f(t - t_d)] = f(-t - t_d) = y_1(t)$

而 $y(t - t_d) = f(-t + t_d)$，即 $y_1(t) \neq y(t - t_d)$，∴系统为时变系统。

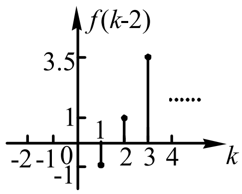
## 1–3 序列和差分方程

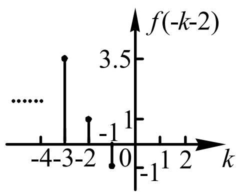
一、(1) $\frac{2\pi}{3\pi/7} = \frac{14}{3}$，∴ $f(k)$ 是周期信号，且其周期 $N$=14。

(2) $\frac{2\pi}{1/8} = 16\pi$，无理数，∴ $f(k)$ 为非周期信号。

二、(1) $f(k-2) = \begin{cases} 0, & k < 1 \\ 2^{-(k-2)} + 3(k-2), & k \geq 1 \end{cases}$

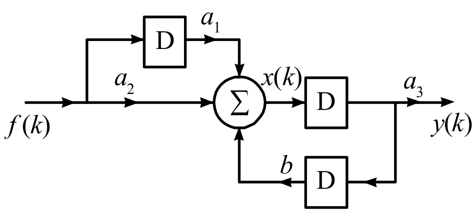
(2) $f(-k-2) = \begin{cases} 0, & k > -1 \\ 2^{k+2} - 3(k+2), & k \leq -1 \end{cases}$




三、解：如图，$\begin{cases} x(k) = a_1 f(k-1) + a_2 f(k) + bx(k-2) \\ y(k) = a_3 x(k-1) \end{cases}$

消去 $x(k)$，得： $y(k+1) - by(k-1) = a_1 a_3 f(k-1) + a_2 a_3 f(k)$




四、解：$\begin{cases} y(k) - \frac{2}{3} y(k-1) = 0, k \geq 1 \\ y(0) = h \end{cases}$

# 第二章 连续系统的时域分析

## 2-1 微分方程的求解

一、1.($a$) -5，29　　($b$) 1，3

2.($a$) $2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t},t\geq 0$　　($b$) $2\mathrm{e}^{-t}\cos(2t),t\geq 0$　　($c$) $(1+2t)\mathrm{e}^{-t},t\geq 0$

二、($a$) 解：零输入响应 $y_x(t)$ 满足的微分方程 $\begin{cases}y_x''+4y_x'+3y_x=0\\ y_x'(0_+)=y_x'(0_-)=y(0_-)=1\\ y_x(0_+)=y_x(0_-)=y(0_-)=1\end{cases}$

方程的解 $y_x(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t},t\geq 0$，代入初始条件，得 $\begin{cases}-C_1-3C_2=1\\ C_1+C_2=0\end{cases}$，解得 $C_1=2,C_2=-1$

$\therefore\ y_x(t)=2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t},t\geq 0$

零状态响应 $y_f(t)$ 满足的微分方程 $\begin{cases}y_f''+4y_f'+3y_f=\varepsilon(t)\\ y_f'(0_+)=y_f(0_+)=0\end{cases}$

方程的解 $y_f(t)=D_1\mathrm{e}^{-t}+D_2\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3},t\geq 0$，代入初始条件，

得 $\begin{cases}-D_1-3D_2=0\\ D_1+D_2+\frac{1}{3}=0\end{cases}$，解得 $D_1=-\frac{1}{2},D_2=\frac{1}{6}$　$\therefore\ y_f(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3},t\geq 0$

全响应 $y(t)=y_x(t)+y_f(t)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3},t\geq 0$

($b$) 解：由零输入响应的性质可知，零输入响应满足的微分方程为 $\begin{cases}y_x''+4y_x'+4y_x=0\\ y_x(0_+)=1,y_x'(0_+)=2\end{cases}$，

方程的解为 $y_x(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2t\mathrm{e}^{-2t},t\geq 0$，代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1=1\\ -2C_1+C_2=2\end{cases}$，即 $C_1=1,C_2=4$

$\therefore\ y_x(t)=\mathrm{e}^{-2t}+4t\mathrm{e}^{-2t},t\geq 0$

由零状态响应的性质可知，零状态响应满足的方程为 $\begin{cases}y_f''+4y_f'+4y_f=\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\\ y_f'(0_-)=y_f(0_-)=0\end{cases}$，

方程右端含有冲激项，两边从 $0_-$ 到 $0_+$ 积分：

$$\int_{0_-}^{0_+}y_f''\mathrm{d}t+4\int_{0_-}^{0_+}y_f'\mathrm{d}t+4\int_{0_-}^{0_+}y_f\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t+2\int_{0_-}^{0_+}\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t$$

考虑到 $y_f(t)$ 的连续性，得 $[y_f'(0_+)-y_f'(0_-)]+4[y_f(0_+)-y_f(0_-)]=1$

即 $y_f'(0_+)=y_f'(0_-)+1=1$，　$y_f(0_+)=y_f(0_-)=0$

当 $t>0$ 时，微分方程化为 $y_f''+4y_f'+4y_f=2\mathrm{e}^{-t}$，方程的解为 $y_f(t)=D_1\mathrm{e}^{-2t}+D_2t\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t},t\geq 0$，

代入初始条件，得$\begin{cases}D_1+2=0\\-2D_1+D_2-2=1\end{cases}$，即$D_1=-2,D_2=-1$，$\therefore$ $y_f(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t},t\ge 0$

全响应$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=(3t-1)\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t},t\ge 0$

三、由 KVL，$u_C=u_L+4i=i'+4i$，$i_C=\frac{1}{2}u_C'=\frac{1}{2}i''+2i'$，

又由 KVL，$u_S=u_C+2(i_C+i)=i'+4i+2(\frac{1}{2}i''+2i'+i)$，

$\therefore$ $i(t)$为输出的微分方程为$i''+5i'+6i=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

其零状态响应满足的微分方程为$\begin{cases}i_f''+5i_f'+6i_f=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\\i_f'(0_+)=i_f(0_+)=0\end{cases}$

方程的解为$i_f(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t},t\ge 0$，代入初始条件，得$\begin{cases}C_1+C_2+1=0\\-2C_1-3C_2-1=0\end{cases}$，

即$C_1=-2,C_2=1$　$\therefore$ $i_f(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-t},t\ge 0$

## 2-2 冲激响应和阶跃响应

一、1.(*a*)　$\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$　(*b*)　$(\cos t-\sin t)\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

　2.(*a*)　$\delta(t)-3\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t),(1.5\mathrm{e}^{-2t}-0.5)\varepsilon(t)$　(*b*) $\delta'(t)-2\delta(t)+4\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t),\ \delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$

二、解：由 KVL，$u_S=u_L+u_C$，由 KCL，$i_L=i_R+i_C$，又$u_L=\frac{1}{2}i_L'$，$i_C=u_C'$，$u_C=\frac{1}{3}i_R$

联立以上各式，得$u_C(t)$为输出的系统微分方程为$u_C''+3u_C'+2u_C=2u_S$

当$u_S(t)=\varepsilon(t)$时，阶跃响应为$g(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}+1,t\ge 0$，代入初始条件，得$\begin{cases}C_1+C_2+1=0\\-C_1-2C_2=0\end{cases}$，

即$C_1=-2,C_2=1$　$\therefore$ $g(t)=(-2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}+1)\varepsilon(t),t\ge 0$，冲激响应$h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)=2(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

三、解：由 KCL，$i_S=i_R+i_L$，由 KVL，$i_L'=u_L+2i_R$，又$u_L=i_R'$，

联立以上各式，得以$u_L(t)$为输出的系统微分方程$u_L'+u_L=\frac{1}{2}i_S''$，

选取新变量$u(t)$，使其满足$u'(t)+u(t)=f(t)$，则其冲激响应为$h_1(t)=C_1\mathrm{e}^{-t},t\ge 0$，

代入初始条件，得$C_1$=1，即$h_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t),t\ge 0$

$\therefore$系统的冲激响应为$h(t)=\frac{1}{2}h_1''(t)=\frac{1}{2}[\delta'(t)-\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]$，

阶跃响应为$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}[\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]$

## 2-3 卷积积分(1)

一、1. $0.5(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$　　2. $te^{-2t}\varepsilon(t)$　　3. $\frac{1}{4}(2t-1+e^{-2t})\varepsilon(t)$

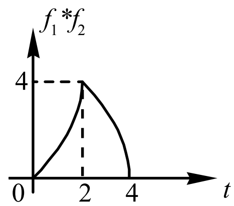
二、(a) $f_1(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$，$f_2(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$

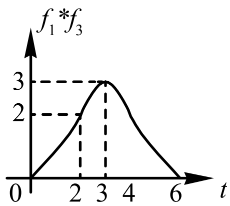
$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=t^2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]+(4t-t^2)[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)]$$

(b) $f_3(t)=\frac{1}{2}t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]+(2-\frac{1}{2}t)[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)]$

$$f_1(t)*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_3(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t^2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$$

$$+(6t-t^2-6)[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)]+(\frac{1}{2}t^2-6t+18)[\varepsilon(t-4)-\varepsilon(t-6)]$$




三、(1) $f_1(t)=\varepsilon(t-1)$，$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_1^{t-2}e^{t-\tau}\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(t-3)=(e^{t-1}-e^2)\varepsilon(t-3)$

(2) $f_3(t)=\varepsilon(t-1)+1$

$$f_3(t)*f_4(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_3(\tau)f_4(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{1+t}e^{-(t-\tau+1)}\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(-t)+[\int_{-\infty}^{1}e^{-(t-\tau+1)}\mathrm{d}\tau+2\int_1^{1+t}e^{-(t-\tau+1)}\mathrm{d}\tau]\varepsilon(t)$$

$$=\varepsilon(-t)+(2-e^{-t})\varepsilon(t)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)+1$$

(3) $f_5(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

$$f_5(t)*f_6(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_5(\tau)f_6(t-\tau)\mathrm{d}\tau=2\int_0^{t}e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+2\int_0^{1}e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot\varepsilon(t-1)$$

$$=2(1-e^{-t})[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+2(e^{1-t}-e^{-t})\varepsilon(t-1)$$

## 2-4 卷积积分(2)

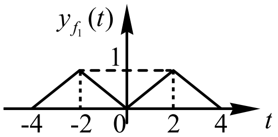
一、1．6　2．5　3．1　4．$\delta(t)+3\mathrm{e}^{3t}\varepsilon(t)$　5．$(t+3)\varepsilon(t+3)$

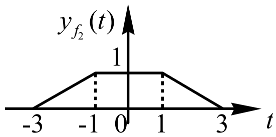
二、(1) $h(t)=\dfrac{1}{2}(t+2)[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t)]-\dfrac{1}{2}(t-2)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$

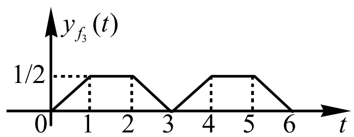
$f_1(t)=\delta(t+2)+\delta(t-2)$，$y_{f_1}(t)=f_1(t)*h(t)=h(t+2)+h(t-2)$

(2) $f_2(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$，$y_{f_2}(t)=f_2(t)*h(t)=h(t+1)+h(t-1)$

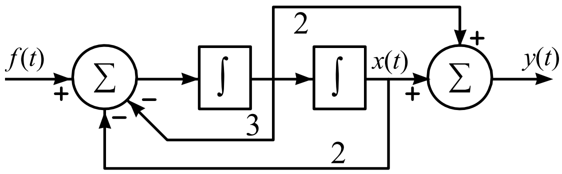
(3) $f_3(t)=\delta(t-2)-\delta(t-3)+\delta(t-4)$，$y_{f_3}(t)=f_3(t)*h(t)=h(t-2)-h(t-3)+h(t-4)$








三、如图。




$\begin{cases}2x'+x=y\\x''+3x'+2x=f\end{cases}$，消去 $x(t)$，得系统的微分方程 $y''+3y'+2y=2f'+f$

选取新变量 $y_1(t)$，使 $y_1''+3y_1'+2y_1=f$，则其冲激响应 $h_1(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

系统的冲激响应为 $h(t)=2h_1'(t)+h_1(t)=(3\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

∴系统的阶跃响应为 $g(t)=\varepsilon(t)*h(t)=\varepsilon(t)*(3\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\dfrac{1}{2})\varepsilon(t)$

四、解：$y(t)=[f(t)+h_a(t)+h_a(t)*h_a(t)]*h_b(t)$，系统的冲激响应为

$$h(t)=[\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-1)*\delta(t-1)]*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)]$$
$$=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)-\varepsilon(t-5)$$

## 2–5 时域分析

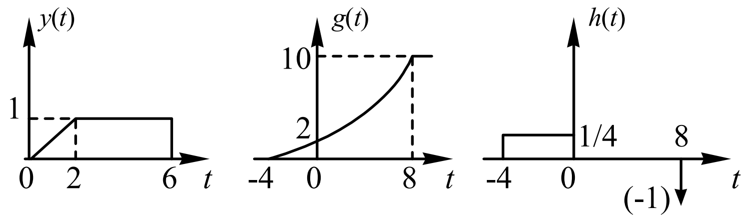
一、1. $f(t)=\frac{1}{4}(t+4)[\varepsilon(t+4)-\varepsilon(t)]+\varepsilon(t)-\varepsilon(t-8)$，$y(t)=f(2t+2)*\delta(t-3)=f[2(t-3)+2]=f(2t-4)$

2. $g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=(\frac{t^2}{8}+t+2)[\varepsilon(t+4)-\varepsilon(t)]+(2+t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-8)]+10\varepsilon(t-8)$

3. $h(t)=g'(t)=\frac{1}{4}[\varepsilon(t+4)-\varepsilon(t)]-\delta(t-8)$

4. $y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot 2[\varepsilon(-\tau-2)-\varepsilon(-\tau-4)]\mathrm{d}\tau=2\int_{-4}^{-2}\frac{1}{4}(\tau+4)\mathrm{d}\tau=1$

$y(2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot 2[\varepsilon(2-\tau-2)-\varepsilon(2-\tau-4)]\mathrm{d}\tau=2\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}(\tau+4)\mathrm{d}\tau=3$




二、解：当 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，$y(t)=y_x(t)+g(t)=3\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，当 $f(t)=\delta(t)$ 时，$y(t)=y_x(t)+h(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

两式相减，得 $g(t)-h(t)=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\delta(t)$，又 $h(t)=g'(t)$，

则 $g'(t)-g(t)=\delta(t)-2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，方程的通解为 $g(t)=(C\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

即 $g'(t)=(C+1)\delta(t)+(C\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$，由方程可知，$g'(t)$ 只含一个 $\delta(t)$，则上式 $C=0$，

$\therefore g(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，冲激响应 $h(t)=g'(t)=\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

三、解：选取 $g_1(t)$，使 $g_1''+3g_1'+2g_1=\varepsilon(t)$，则 $g_1(t)=(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2})\varepsilon(t)$

$\therefore$ 零状态响应 $g(t)=g_1'(t)+3g_1(t)=(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2})\varepsilon(t)$

$y_x(0_+)=y(0_+)-g(0_+)=1-0=1$，$y_x'(0_+)=y'(0_+)-g'(0_+)=3-1=2$

$y_x(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t},t\geq 0$，代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1+C_2=1\\-C_1-2C_2=2\end{cases}$

即 $C_1=4,C_2=-3$ $\therefore y_x(t)=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，全响应 $y(t)=y_x(t)+g(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{2})\varepsilon(t)$

四、解：$h(t)=g'(t)=\delta(t-1)+\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，系统的零状态响应为

$y_f(t)=f(t)*h(t)=f(t-1)+f(t)-f(t)*[\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]=3\mathrm{e}^{2(t-1)}+3\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{2t}=3\mathrm{e}^{2(t-1)}+2\mathrm{e}^{2t}$

# 第三章 离散系统的时域分析

## 3-1 差分方程的求解、单位序列响应、卷积和

一、1.$(a)$ $2^{k+1}, k \geq 0$ $(b)$ $3^k - 2^k - k \cdot 2^k, k \geq 0$ $(c)$ $-3^{-(k+1)}, k \geq 0$

2.$(a)$ $(-1)^k(2-2^{k+2}), k \geq 0$ $(b)$ $(-1)^k(2k+1), k \geq 0$

3.$(a)$ $(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$ $(b)$ $(1+k)(-2)^{-k}\varepsilon(k)$

$(c)$ $[-\frac{3}{2}(-1)^{k-2}+\frac{9}{2}(-3)^{k-2}]\varepsilon(k-2)+[-\frac{1}{2}(-1)^{k-1}+\frac{3}{2}(-3)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$

【化简上式，或用 $z$ 变换可得答案 $(-1)^{k-1}\varepsilon(k-1)$ 】

二、(1) $f_1(k)=\delta(k+1)+2\delta(k)+\delta(k-1)$， $f_2(k)=\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)$

$$f_1 * f_2 = [\delta(k+1)+2\delta(k)+\delta(k-1)]*[\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)]$$
$$=\varepsilon(k+3)+2\varepsilon(k+2)+\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-2)-2\varepsilon(k-3)-\varepsilon(k-4)$$

(2) $f_3(k)=3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)$

$$f_1 * f_3 = [\delta(k+1)+2\delta(k)+\delta(k-1)]*[3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)]$$
$$=3\delta(k+1)+8\delta(k)+8\delta(k-1)+4\delta(k-2)+\delta(k-3)$$

(3) $f_2 * f_3 = [\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)]*[3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)]$

$$=3\varepsilon(k+2)+2\varepsilon(k+1)+\varepsilon(k)-3\varepsilon(k-3)-2\varepsilon(k-4)-\varepsilon(k-5)$$

(4) $(f_2-f_1)*f_3=[\delta(k+2)-\delta(k)+\delta(k-2)]*[3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)]$

$$=3\delta(k-2)+2\delta(k+1)-2\delta(k)-2\delta(k-1)+2\delta(k-2)+2\delta(k-3)+\delta(k-4)$$

三、 $h(k)=\nabla g(k)=g(k)-g(k-1)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)-(\frac{1}{2})^{k-1}\varepsilon(k-1)$

$$=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)-(\frac{1}{2})^{k-1}[\varepsilon(k)-\delta(k)]=2\delta(k)-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$$

## 3-2 离散系统时域分析

一、 $f(k)=\delta(k)+4\delta(k-1)+4\delta(k-2)$， $y(k)=9\varepsilon(k)$， $\therefore y(k)=f(k)*h(k)$，

即 $[\delta(k)+4\delta(k-1)+4\delta(k-2)]*h(k)=9\varepsilon(k)$， $\therefore h(k)+4h(k-1)+4h(k-2)=9\varepsilon(k)$

差分方程的解为 $h(k)=[C_1(-2)^k+C_2k(-2)^k+1]\varepsilon(k)$，又 $h(0)=9\varepsilon(0)-4h(-1)-4h(-2)=9$，

$h(1)=9\varepsilon(1)-4h(0)-4h(-1)=-27$，代入初始条件得 $\begin{cases}C_1+1=9\\-2C_1-2C_2+1=-27\end{cases}$，即 $\begin{cases}C_1=8\\C_2=6\end{cases}$，

$\therefore h(k)=[(8+6k)(-2)^k+1]\varepsilon(k)$

二、(1) $h(k)=\delta(k)*[h_1(k)-h_2(k)]*h_3(k)=[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]*\delta(k-1)=\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-5)$

(2) $g(k)=f(k)*h(k)=\varepsilon(k)*[\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-5)]$

$=\varepsilon(k)*[\delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)+\delta(k-4)]=\varepsilon(k-1)+\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k-3)+\varepsilon(k-4)$

三、 $y_{zs}(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-6)+\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)$，又 $f(k)*h(k)=y_{zs}(k)$ 且 $f(k)=\delta(k)+\delta(k-2)$

$\therefore h(k)+h(k-2)=y_{zs}(k)$，选取 $h_1(k)$，使 $h_1(k)+h_1(k-2)=\varepsilon(k)$，方程的解为：

$h_1(k)=(C_1\cos\frac{k\pi}{2}+C_2\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2})\varepsilon(k)$ 而 $h_1(0)=\varepsilon(0)-h_1(-2)=1$， $h_1(1)=\varepsilon(1)-h_1(-1)=1$

代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1+1/2=1\\C_2+1/2=1\end{cases}$，即 $C_1=1/2,\ C_2=1/2$， $\therefore h_1(k)=\frac{1}{2}(\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}+1)\varepsilon(k)$

$\therefore h(k)=h_1(k)-h_1(k-6)+h_1(k-2)-h_1(k-4)$

$=\frac{1}{2}(\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2})[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)+\varepsilon(k-6)]+\frac{1}{2}[\varepsilon(k)+\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)-\varepsilon(k-6)]$

$=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)$

四、 $\delta(k-1)*h(k)=h(k-1)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k-1)$， $\therefore h(k)=(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)$，当 $f(k)=2\delta(k)+\varepsilon(k)$ 时，零状态响应

$$y_f(k)=f(k)*h(k)=2(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)+\varepsilon(k)*(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)=2(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)+[1-(\frac{1}{2})^{k+1}]\varepsilon(k)=[1+(\frac{1}{2})^{k+1}]\varepsilon(k)$$

## 3-3 综合

一、(1) $f(k)*\delta(k)=f(k)$　　(2) $\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$ 或 $\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$

(3) $g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)$ 或 $h(k)=g(k)-g(k-1)$　　(4) 13/9，13/81

二、零状态响应 $y_{zs}(k)[C_1\cdot 2^k+C_2\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$，又 $y_{zs}(0)=\varepsilon(0)+y_{zs}(-1)+2y_{zs}(-2)=1$，

$y_{zs}(1)=\varepsilon(1)+y_{zs}(0)+2y_{zs}(-1)=2$，代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1+C_2-1/2=1\\2C_1-C_2-1/2=2\end{cases}$，即 $C_1=\frac{4}{3},\ C_2=\frac{1}{6}$

$\therefore y_{zs}(k)[\frac{4}{3}\cdot 2^k+\frac{1}{6}\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

零输入响应 $y_{zi}(k)=[D_1\cdot 2^k+D_2\cdot(-1)^k]\varepsilon(k)$，又 $y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=0-1=-1$，

$y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)=1-2=-1$，代入初始条件，得 $\begin{cases}D_1+D_2=-1\\2D_1-D_2=-1\end{cases}$，即 $D_1=-\frac{2}{3},\ D_2=-\frac{1}{3}$

$\therefore y_{zi}(k)=[-\frac{2}{3}\cdot 2^k-\frac{1}{3}\cdot(-1)^k]\varepsilon(k)$，全响应 $y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=[\frac{2}{3}\cdot 2^k-\frac{1}{6}\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

三、(1) 设第一个加法器的输出为 $x(k)$，则 $\begin{cases}x(k)=f(k)+x(k-1)\\y(k)=x(k)+x(k-1)+y(k-1)\end{cases}$，

消去 $x(k)$，得系统的差分方程为 $y(k)-2y(k-1)+y(k-2)=f(k)+f(k-1)$

(2) 零输入响应 $y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)\varepsilon(k)$，又 $y_{zs}(0)=\delta(0)+\delta(-1)+2y_{zs}(-1)-y_{zs}(-2)=1$，

$\therefore y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=1-1=0$， $y_{zi}(-1)=y(-1)=-1$，代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1=0\\C_1-C_2=-1\end{cases}$

即 $C_1=0,\ C_2=1$，$\therefore y_{zi}(k)=k\varepsilon(k)$

(3) 选取 $h_1(k)$，使 $h_1(k)-2h_1(k-1)+h_1(k-2)=\delta(k)$，则 $h_1(k)=(D_1+D_2k)\varepsilon(k)$，

又 $h_1(0)=\delta(0)+2h_1(-1)-h_1(-2)=1$， $h_1(1)=\delta(1)+2h_1(0)-h_1(-1)=2$，

代入初始条件，得 $\begin{cases}D_1=1\\D_1+D_2=2\end{cases}$，即 $D_1=1,\ D_2=1$，$\therefore h_1(k)=(1+k)\varepsilon(k)$

$\therefore y_{zs}(k)=h_1(k)+h_1(k-1)=(1+k)\varepsilon(k)+k\varepsilon(k-1)$

# 第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

## 4-1 傅里叶级数(1)

一、证明：$\int_{-1}^{1} p_0(t)p_1(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t=0$，　$\int_{-1}^{1} p_0(t)p_2(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2})\mathrm{d}t=0$，

$\int_{-1}^{1} p_0(t)p_3(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t)\mathrm{d}t=0$，$\int_{-1}^{1} p_1(t)p_2(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1} t(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t)\mathrm{d}t=0$，

$\int_{-1}^{1} p_1(t)p_3(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1} t(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t)\mathrm{d}t=0$，$\int_{-1}^{1} p_2(t)p_3(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2})(\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t)\mathrm{d}t=0$，

$\int_{-1}^{1} p_0^2(t)\mathrm{d}t=2$，$\int_{-1}^{1} p_1^2(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$，$\int_{-1}^{1} p_2^2(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{5}$，$\int_{-1}^{1} p_3^2(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{7}$。

即当$m\neq n$时，$\int_{-1}^{1} p_m(t)p_n(t)\mathrm{d}t=0$；当$m=n$时，$\int_{-1}^{1} p_m(t)p_n(t)\mathrm{d}t=K_m$。

∴前 4 个勒让德多项式在(-1,1)内是正交函数集。

二、(1) 证明：设$2\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t$，$E_2=\int_{-T/2}^{T/2} f_2^2(t)\mathrm{d}t$，

$$E=\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-T/2}^{T/2}[f_1(t)+f_2(t)]^2\mathrm{d}t=\int_{-T/2}^{T/2} f_1^2(t)\mathrm{d}t+\int_{-T/2}^{T/2} f_2^2(t)\mathrm{d}t+2\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t,$$

∵ $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-T/2,T/2)$ 内正交，∴ $2\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=0$，即 $E=E_1+E_2$。

(2) 若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在 $(-T/2,T/2)$ 不正交，则 $E=E_1+E_2+2\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t$

三、(*a*) $f_1(t)=f_1(-t)=-f_1(t\pm\frac{T}{2})$，$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_1(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t,\ n=1,3,5...$，

$a_n=0,\ n=0,2,4...$，$b_n=0,\ n=1,2,3...$，即 $f_1(t)$ 的傅里叶级数中仅含有奇次余弦波。

(*b*) $f_2(t)=-f_2(-t)$，$a_n=0,\ n=0,1,2...$，$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_2(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t,\ n=1,2,3...$，

即 $f_2(t)$ 的傅里叶级数中含有各次正弦波。

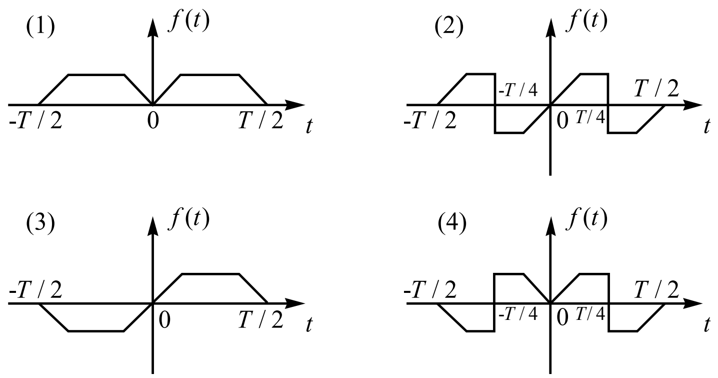
(*c*) $f_3(t)=f_3(-t)$，$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f_1(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t,\ n=0,1,3,5...$，

$a_n=0,\ n=2,4,6...$，$b_n=0,\ n=1,2,3...$，即 $f_3(t)$ 的傅里叶级数中含有直流量和奇次余弦波。

(*d*) $f_4(t)=-f_4(t\pm\frac{T}{2})$，$a_n=0,\ n=0,2,4...$，$b_n=0,\ n=2,4,6...$，

即 $f_4(t)$ 的傅里叶级数中仅含有奇次正、余弦波。

四、




五、CE，ABE

## 4-2 周期信号的频谱、功率

一、(1) $T=2$，$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$，$a_0=\dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}u(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\mathrm{d}t=1$，

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t=0,\ \ n=1,2\ldots，$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},\ \ n=1,2\ldots，$$

$$\therefore u(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t)\ (\mathrm{V})$$

(2) $u(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore 2[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots]=\dfrac{\pi}{2}$，即 $S=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots=\dfrac{\pi}{4}$

(3) 平均功率为 $P=\dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{W}$，电压有效值为 $U_{有效}=\sqrt{P}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V}$。

(4) $\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t=1$，将 $u(t)$ 的傅里叶级数代入，得 $\int_0^1[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi t)]\,\mathrm{d}t=1$，

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}[\int_0^1\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t]=\dfrac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\dfrac{\pi^2}{2}$，$\therefore S=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{8}$

二、(1) 设 $U_{S1}=10\mathrm{V}$，$U_{S2}=10\sqrt{2}\cos 3t\ \mathrm{V}$，当只有 $U_{S1}$ 激励时，$i_1=\dfrac{10\mathrm{V}}{(1+4)\Omega}=2\mathrm{A}$，

当只有 $U_{S2}$ 激励时，$\dot{U}_{S2}=10\angle 0^\circ(\mathrm{V})$。$Z=1+\mathrm{j}6+4//(-\mathrm{j}4)=5\angle 53.1^\circ(\mathrm{A})$，

$\therefore \dot{I}_2=\dfrac{\dot{U}_{S2}}{Z}=\dfrac{10\angle 0^\circ}{5\angle 53.1^\circ}=2\angle-53.1^\circ(\mathrm{A})$，即 $i_2=2\sqrt{2}\cos(3t-53.1^\circ)(\mathrm{A})$，

$\therefore i(t)=i_1+i_2=2+2\sqrt{2}\cos(3t-53.1^\circ)(\mathrm{A})$，有效值 $I=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}i^2(t)\,\mathrm{d}t}=2\sqrt{2}\ \ \mathrm{A}$。

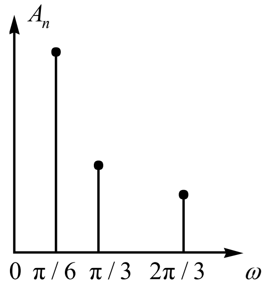
(2) $P=\dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u_S(t)i(t)\,\mathrm{d}t$

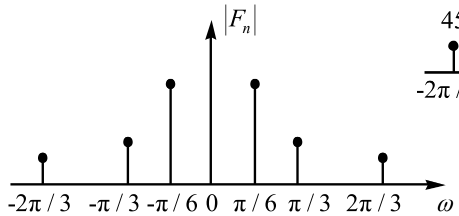
$$=\frac{3}{2\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}[20+20\sqrt{2}\cos(3t-53.1^\circ)+20\sqrt{2}\cos 3t+40\cos 3t\cos(3t-53.1^\circ)]\,\mathrm{d}t=32\mathrm{W}$$

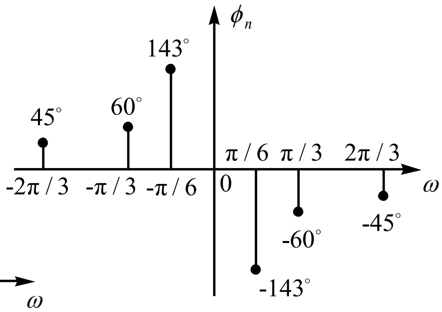
 

电感平均储能为$W=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\dfrac{1}{2}Li^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}LI^2=\dfrac{1}{2}\times 2\times 8=8\ \mathrm{J}$

三、$u(t)=2+5\cos(\dfrac{\pi}{6}t-143^\circ)+2\cos(\dfrac{\pi}{3}t-60^\circ)+\cos(\dfrac{2\pi}{3}t-45^\circ)\ \mathrm{V}$




四、$1+6\cos(4t+\dfrac{\pi}{2})+4\cos(8t-\dfrac{\pi}{4})$， 27W, π s

## 4–3 傅里叶变换定义

一、$F_1(\mathrm{j}\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})$

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\cos(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{4\pi\cos\omega}{\pi^2-4\omega^2}$$

二、(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)][\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)]\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)\cos(\omega t)+f_{\mathrm{i}}(t)\sin(\omega t)]\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)\sin(\omega t)-f_{\mathrm{i}}(t)\cos(\omega t)]\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f^*(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)-\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)][\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)\cos(\omega t)-f_{\mathrm{i}}(t)\sin(\omega t)]\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)\sin(\omega t)+f_{\mathrm{i}}(t)\cos(\omega t)]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)\cos(\omega t)+f_{\mathrm{i}}(t)\sin(-\omega t)]\mathrm{d}t+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}[f_{\mathrm{r}}(t)\sin(-\omega t)-f_{\mathrm{i}}(t)\cos(\omega t)]\mathrm{d}t=F^*(-\mathrm{j}\omega)\end{aligned}$$

(2) $f_{\mathrm{r}}(t)=\dfrac{1}{2}[f(t)+f^*(t)]$， $f_{\mathrm{i}}(t)=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}[f(t)-f^*(t)]$，又$\mathscr{F}[f(t)]=F(\mathrm{j}\omega)$， $\mathscr{F}[f^*(t)]=F^*(-\mathrm{j}\omega)$，

由傅里叶变换的线性性质可得：$\mathscr{F}[f_{\mathrm{r}}(t)]=\dfrac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega)+F^*(-\mathrm{j}\omega)]$，$\mathscr{F}[f_{\mathrm{i}}(t)]=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}\omega)-F^*(-\mathrm{j}\omega)]$。

三、(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)]\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$，

又 $f(t)$ 为实函数，则 $R(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$， $X(\omega)=-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$ 。

(2) $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)\cos(\omega t)-X(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega$，易知 $R(\omega)$ 为偶函数，

$X(\omega)$ 为奇函数，则 $R(\omega)\cos(\omega t)$ 为偶函数， $X(\omega)\sin(\omega t)$ 为偶函数。

$\therefore f(t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}[R(\omega)\cos(\omega t)-X(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega$ (*)，又 $f(t)$ 为实因果函数，即当 $t<0$ 时，

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[R(\omega)\cos(\omega t)-X(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[R(\omega)\cos(\omega|t|)+X(\omega)\sin(\omega|t|)]\mathrm{d}\omega=0,$$

$\therefore \int_0^\infty[R(\omega)\cos(\omega t)+X(\omega)\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega=0$，即 $\int_0^\infty R(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega=-\int_0^\infty X(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega$，

代入(*)式中，得 $t>0$ 时，$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(y)\cos(yt)\mathrm{d}y$，

$$\therefore R(\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(y)\cos(yt)\mathrm{d}y]\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty R(y)\cos(yt)\cos(\omega t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

四、$\mathrm{j}2X(\omega)$，$2R(\omega)$，$F(\mathrm{j}\omega)+F(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}$，　$F(\mathrm{j}\omega)+F(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}-F(-\mathrm{j}\omega)-F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}$

## 4-4 傅里叶变换性质

一、(1) $f(t)=2\mathrm{Sa}[2\pi(t-2)]$，$g_{4\pi}(t)\leftrightarrow 4\pi\mathrm{Sa}(2\pi\omega)$，$g_{4\pi}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}\leftrightarrow 4\pi\mathrm{Sa}[2\pi(\omega-2)]$，

$$\frac{1}{2\pi}g_{4\pi}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}[2\pi(\omega-2)]，\therefore F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}g_{4\pi}(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}=g_{4\pi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

(2) $\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$，$\mathrm{e}^{-|t|}\leftrightarrow\frac{2}{1+\omega^2}$，$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\mathrm{e}^{-|-\omega|}=2\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$

(3) $f(t)=\mathrm{Sa}^2(2\pi t)$，三角脉冲 $f_\Delta(t)\leftrightarrow\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$，取 $\tau=8\pi$，则 $f_\Delta(t)\leftrightarrow 4\pi\mathrm{Sa}^2(2\pi\omega)$，

$$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=2\pi\cdot\frac{1}{4\pi}f_\Delta(-\omega)=\frac{1}{2}(1-\frac{2|-\omega|}{8\pi})g_{8\pi}(-\omega)=\frac{1}{2}(1-\frac{|\omega|}{4\pi})g_{8\pi}(\omega)$$

二、(1) $\delta(t)\leftrightarrow 1$，$\delta(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\delta(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(\omega+1)}$

(2) $\delta'(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega$，$\mathrm{e}^{-3t}\delta'(t)\leftrightarrow 3+\mathrm{j}\omega$，$\mathrm{e}^{-3(t-1)}\delta'(t-1)\leftrightarrow(3+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$

(3) $f(t)=\mathrm{sgn}(t^2-9)=1-2g_6(t)$，$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$，$g_6(t)\leftrightarrow 6\mathrm{Sa}(3\omega)$，$1-2g_6(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)-12\mathrm{Sa}(3\omega)$

(4) $\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$，$\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}$，$\mathrm{e}^{-2(t+1)}\varepsilon(t+1)\leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{2+\mathrm{j}\omega}$，$\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t+1)\leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{2+\mathrm{j}\omega}}{2+\mathrm{j}\omega}$

(5) $\varepsilon(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$，$\varepsilon(t-1)\leftrightarrow[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$，

$$\varepsilon(0.5t-1)\leftrightarrow 2[\pi\delta(2\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}2\omega}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

三、(1) $F(\mathrm{j}\omega)=g_{2\omega_0}(\omega)$，$g_{2\omega_0}(t)\leftrightarrow 2\omega_0\mathrm{Sa}(\omega_0\omega)$，$2\omega_0\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow 2\pi g_{2\omega_0}(-\omega)=2\pi g_{2\omega_0}(\omega)$，

$$\therefore f(t)=\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t)=\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$$

(2) $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$，$\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{m\mathrm{j}\omega_0 t}\leftrightarrow\delta(\omega\pm\omega_0)$，$\therefore f(t)=\frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t})=\frac{\sin(\omega_0 t)}{\mathrm{j}\pi}$

(3) $\cos(3t)\leftrightarrow\pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)]$，$\pi[\delta(t+3)+\delta(t-3)]\leftrightarrow 2\pi\cos3(-\omega)=2\pi\cos(3\omega)$，

$\therefore f(t)=\delta(t+3)+\delta(t-3)$

(4) $F(\mathrm{j}\omega)=g_2(\omega-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$，$g_2(t)\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$，$g_2(t-1)\leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}(\omega)$，

$2e^{-jt}\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow 2\pi g_2(-\omega-1)$，$2e^{jt}\mathrm{Sa}(-t)=2e^{jt}\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow 2\pi g_2(\omega-1)$，

$2e^{j(t-1)}\mathrm{Sa}(t-1)\leftrightarrow 2\pi g_2(\omega-1)e^{-j\omega}$，$\therefore f(t)=\dfrac{1}{\pi}e^{j(t-1)}\mathrm{Sa}(t-1)$

(5) $F(j\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}[e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}+e^{-j5\omega}]$，$g_2(t)\leftrightarrow\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$，$g_2(t-1)\leftrightarrow\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j\omega}$，

$g_2(t-3)\leftrightarrow\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j3\omega}$，$g_2(t-5)\leftrightarrow\dfrac{2\sin\omega}{\omega}e^{-j5\omega}$，$\therefore f(t)=g_2(t-1)+g_2(t-3)+g_2(t-5)$

四、(1) $2f(-2t)e^{j2t}$　(2) $f(t+1)e^{-j(t+1)}$　(3) $\dfrac{1}{2}[f(t+1)+f(t-1)]$

## 4–5 傅里叶变换性质

一、1. (1) $\dfrac{j}{2}\dfrac{dF(j\omega/2)}{d\omega}$　(2) $j\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}-2F(j\omega)$　(3) $-F(j\omega)-\omega\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$

(4) $F(-j\omega)e^{-j\omega}$　(5) $-je^{-j\omega}\dfrac{dF(-j\omega)}{d\omega}$　(6) $\dfrac{1}{2}F(j\dfrac{\omega}{2})e^{-j\frac{5}{2}\omega}$

(7) $\pi F(0)\delta(\omega)-\dfrac{1}{j\omega}e^{-j2\omega}F(-j2\omega)$　(8) $\dfrac{1}{2}F(j\dfrac{1-\omega}{2})e^{-j\frac{3}{2}(\omega-1)}$　(9) $|\omega|F(j\omega)$

2. (1) $3/2$　(2) $2\pi$　(3) $8\pi/3$

3. (1) 1　(2) $2\pi\delta(t-4)$　(3) $\mathrm{sgn}(t)$　(4) $\pi/2$

二、(1) $f(t)=g_2(t+2)+g_2(t-2)$，$g_2(t)\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$，$g_2(t\pm 2)\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)e^{\pm j2\omega}$，

$\therefore F(j\omega)=2\mathrm{Sa}(\omega)(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})=\dfrac{4\sin\omega\cos(2\omega)}{\omega}$

(2) $f(t)=\varepsilon(t+3)-\varepsilon(t+1)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)$，$f'(t)=\delta(t+3)-\delta(t+1)+\delta(t-1)-\delta(t-3)$

$f'(t)\leftrightarrow e^{j3\omega}-e^{j\omega}+e^{-j\omega}-e^{-j3\omega}=j2[\sin(3\omega)-\sin\omega]=j4\sin\omega\cos(2\omega)$，

$\therefore F(j\omega)=j4\pi\sin 0\cos 0+\dfrac{1}{j\omega}4\sin\omega\cos(2\omega)=\dfrac{4\sin\omega\cos(2\omega)}{\omega}$

(3) $f(t)=g_2(t)*[\delta(t+2)+\delta(t-2)]$，$\therefore F(j\omega)=2\mathrm{Sa}(\omega)(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})=\dfrac{4\sin\omega\cos(2\omega)}{\omega}$

三、证明：$\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow\dfrac{2}{j\omega}$，$\mathrm{sgn}(t)f(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{2}{j\omega}*F(j\omega)=\dfrac{1}{j\pi\omega}*F(j\omega)$，由傅里叶变换定义，得

$\dfrac{1}{j\pi\omega}*F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(t)f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{0}-f(t)e^{-j\omega t}\,dt$，而 $f(t)$ 为因果函数，即

$\int_{-\infty}^{0}-f(t)e^{-j\omega t}\,dt=0$，$\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=0$，又

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$\therefore\dfrac{1}{j\pi\omega}*F(j\omega)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt=F(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$ (*)　由卷积积分定义，得

$$\frac{1}{j\pi\omega}*F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{j\pi(\omega-y)}F(jy)\,dy=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(y)+jX(y)}{\omega-y}\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(y)}{\omega-y}\,dy-j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(y)}{\omega-y}\,dy\quad(**)$$

比较(*)(**)两式可得： $R(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{X(y)}{\omega-y}\mathrm{d}\,y$， $X(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{R(y)}{\omega-y}\mathrm{d}\,y$

## 4-6 周期信号傅里叶变换频域分析

一、(1) $F_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t_0}$　　(2) $F_{-n}$　　(3) $\mathrm{j}n\Omega F_n$　　(4) $F_n$(信号周期为$\dfrac{T}{a}$)

二、$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$， $\cos\pi t\leftrightarrow\pi[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]$， $\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\pi\delta(\omega)+\dfrac{\pi}{2}\delta(\omega+\pi)+\dfrac{\pi}{2}\delta(\omega-\pi)$

三、$\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-n\Omega)$，则 $F(\mathrm{j}\omega)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi\delta(\omega-n\Omega)$，

$$\therefore Y(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-2}^{2}3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi\delta(\omega-n\Omega)(1-\frac{|n\Omega|}{3})=\sum_{n=-2}^{2}3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi\delta(\omega-n)(1-\frac{|n|}{3})$$

$$=6\pi\delta(\omega)+\mathrm{j}4\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]-2\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]，\ \therefore y(t)=3+4\sin t-2\cos(2t)$$

四、$f(t)=\mathrm{Sa}(2\pi t)$，则 $F(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{2}g_{4\pi}(\omega)$， $S(\mathrm{j}\omega)=\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$，

设 $x(t)=f(t)\cdot\delta(t)$，则 $X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*S(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{4}[g_{4\pi}(\omega+1000)+g_{4\pi}(\omega-1000)]$，

$$\therefore Y(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{4}[g_2(\omega+1000)+g_2(\omega-1000)]=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}g_2(\omega)*\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$$

而 $\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2}g_2(\omega)$， $\cos(1000t)\leftrightarrow\pi[\delta(\omega+1000)+\delta(\omega-1000)]$， $\therefore y(t)=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{Sa}(t)\cos(1000t)$

五、$f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$，即 $F_n=1$， $\therefore Y_n=H(\mathrm{j}n\Omega)F_n=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}n}, & |n|<1.5\\ 0, & |n|>1.5\end{cases}$，

$$\therefore y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Y_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}+1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=1+2\cos(t-\frac{\pi}{3})$$

## 4-7 取样定理

一、(1) 600Hz　　(2) 400Hz　　(3)200Hz　　(4)400Hz

二、(1) $F(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[5+2\cos(\omega_1 t)+\cos(2\omega_1 t)]$

$$=10\pi\delta(\omega)+2\pi[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]+\pi[\delta(\omega+2\omega_1)+\delta(\omega-2\omega_1)]，$$

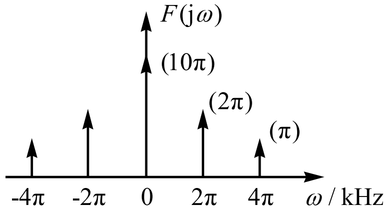
其中 $\omega=2\pi f$， $\omega_1=2\pi f_1=2\pi\,\mathrm{kHz}$ 及以下 $\omega_s=2\pi f_s=10\pi\,\mathrm{kHz}$。

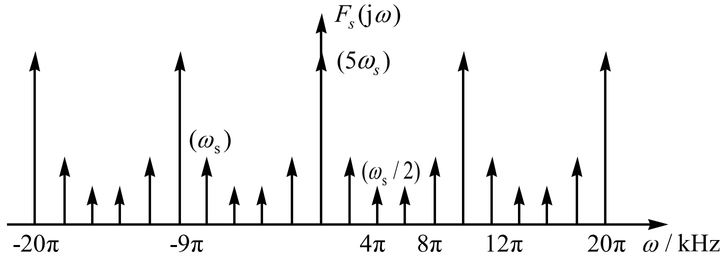
$$\delta(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}[\delta_{T_s}(t)]=\mathscr{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)]=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$\therefore F_s(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\delta(\mathrm{j}\omega)=\frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[10\pi\delta(\omega-n\omega_s)]+2\pi\delta(\omega+\omega_1-n\omega_s)$$

$$+2\pi\delta(\omega-\omega_1-n\omega_s)+\pi\delta(\omega+2\omega_1-n\omega_s)+\pi\delta(\omega-2\omega_1-n\omega_s)$$

频率 $f$ 区间 $(-10\,\mathrm{kHz},10\,\mathrm{kHz})$，对应的角频率 $\omega$ 区间为 $(-20\pi\mathrm{kHz},\ 20\pi\mathrm{kHz})$，频谱图如下：



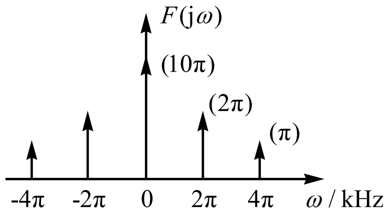



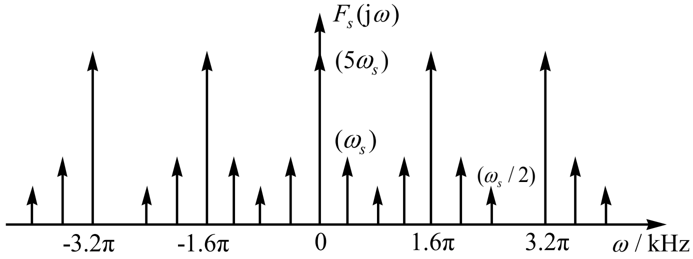

(2) 若由 $f_s(t)$ 恢复原信号，理想低通滤波器的截止频率 $f_c$ 应满足 $f_m < f_c < f_s - f_m$，

即 $2f_1 < f_c < f_s - 2f_1$，∴ $2\,\text{kHz} < f_c < 3\,\text{kHz}$

三、(1)与二(1)题相同，只是此时 $\omega_s = 2\pi f_s = 1.6\pi\,\text{kHz}$，频率 $f$ 区间 $(-2\,\text{kHz}, 2\,\text{kHz})$，

对应的角频率 $\omega$ 区间为 $(-4\pi\,\text{kHz}, 4\pi\,\text{kHz})$，频谱图如下：

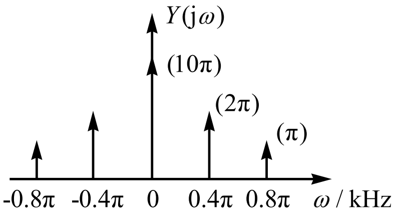


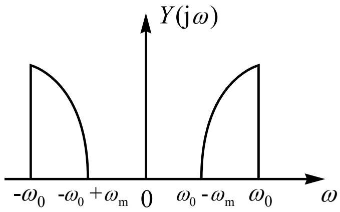




(2) $H(\mathrm{j}\omega) = T_s g_{\omega_1}(\omega)$，

$$Y(\mathrm{j}\omega) = F_s(\mathrm{j}\omega)\cdot H(\mathrm{j}\omega) = 10\pi\delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_1}{5}) + \delta(\omega-\frac{\omega_1}{5})] + \pi[\delta(\omega+\frac{2\omega_1}{5}) + \delta(\omega-\frac{2\omega_1}{5})]$$

其中 $\frac{\omega_1}{5} = 0.4\pi\,\text{kHz}$，$\frac{2\omega_1}{5} = 0.8\,\text{kHz}$，频谱图为下左图：




$$y(t) = 5 + 2\cos(\frac{1}{5}\omega_1 t) + \cos(\frac{2}{5}\omega_1 t) = 5 + 2\cos(2\pi\frac{f_1}{5}t) + \cos(4\pi\frac{f_1}{5}t)$$

四、设 $y_1(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$，$f_1(t) = f(t)*h(t)$，$y_2(t) = f_1(t)\sin(\omega_0 t)$，

则 $Y_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2}\{F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)] + F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\}$

$F_1(\mathrm{j}\omega) = F(\mathrm{j}\omega)\cdot H(\mathrm{j}\omega) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)F(\mathrm{j}\omega)$，

$$Y_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)\cdot F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)] - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)\cdot F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]，$$

$$\therefore Y(\mathrm{j}\omega) = Y_1(\mathrm{j}\omega) + Y_2(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}[1+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)]F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)] + \frac{1}{2}[1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)]F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]$$

$= F[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]\varepsilon(\omega+\omega_0) + F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]\varepsilon(-\omega+\omega_0)$ （见上右图）

## 4-8 DTFT 和 DFT

一、(1) $f(k)=\sin[\frac{(k-1)\pi}{6}]$，周期 $N=12$， $f(k)=\frac{1}{\mathrm{j}2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k-1}{6}\pi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k-1}{6}\pi}]$， $F_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}f_N(k)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}k}$

对应 $f(k)$ 表达式，有 $F_N(1)=12\cdot(-\frac{\mathrm{j}}{2})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}=6\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2}{3}\pi}$， $F_N(-1)=6\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2}{3}\pi}$， $F_N(11)=6\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$，

$F_N(n)=0, n\in 0,\ldots,N-1,\ n\neq\pm1,11$

(2) $F_N(n)=\sum_{k=0}^{3}(\frac{1}{2})^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}nk}=\frac{15}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}n}}$，计算得 $F_N(0)=\frac{15}{8}$，

$$F_N(1)=1+\frac{1}{2}(-\mathrm{j})+\frac{1}{4}(-1)+\frac{1}{8}(\mathrm{j})=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\mathrm{j}$$

$$F_N(2)=1+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi})+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi})+\frac{1}{8}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi})=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

$$F_N(3)=1+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi})+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\pi})+\frac{1}{8}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{9}{2}\pi})=1-\frac{1}{2}(\mathrm{j})+\frac{1}{4}(-1)-\frac{1}{8}(-\mathrm{j})=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\mathrm{j}$$

二、(1) $f_1(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-6)$， $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\sum_{k=0}^{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{6}{2}\theta}\sin(\frac{6}{2}\theta)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\theta}\sin(\frac{\theta}{2})}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\theta}\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

(2) $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\sum_{k=0}^{3}k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\theta}=6\cos(\frac{\theta}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\theta}+\mathrm{j}2\sin(\frac{\theta}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{2}\theta}$

(3)此题与课本例 4.10-2 第(2)小题一致，只是 $a=\frac{1}{2}$，所以 $F_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}$

(4) $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}a^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k}+\sum_{k=1}^{\infty}a^k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta k}$

$$=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}+\frac{a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}=\frac{1-a^2}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})(1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

三、(1) $F(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(k)W^{kn}=1$　　(2) $F(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(k-k_0)W^{kn}=W^{k_0n}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{n}k_0n}$

(3) $F(n)=\sum_{k=0}^{N-1}W^{kn}=\begin{cases}N, & n=0\\ 0, & 0<n\le N-1\end{cases}=N\delta(n)$

(4) $F(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a^kW^{kn}=\frac{1-a^NW^{Nn}}{1-aW^n}=\frac{1-a^N}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}}$，若 $a=1$，则 $F(n)$ 同(3)。

(5) $F(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0k}W^{kn}=\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_0-\frac{2\pi}{N})k}=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\theta_0}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_0-\frac{2\pi}{N})}}$，存在一种特殊情况，

在 $\theta_0=\frac{2\pi i}{N}+2\pi j$ 的情况下 $j\in N$， $i\in 0,\ldots,N-1$，则 $F(n)=\begin{cases}N, & N=8\\ 0, & 其他\end{cases}$

四、$F(n)=\sum_{k=0}^{N-1}f(k)W^{kn}=1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{n}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{N}n}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{6\pi}{N}n}$，$f(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(n)W^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}$，

由于性质$\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}=\begin{cases}N,\ k=0\\0,\quad k\neq 0\end{cases}$，∴可以得到

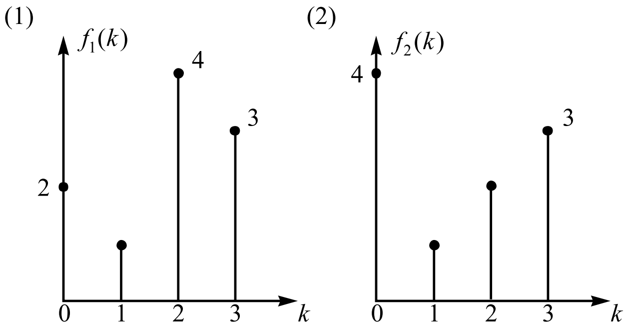
$$f(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}+\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(k-1)n}{N}}-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(k-2)n}{N}}+\frac{3}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(k-3)n}{N}}$$

∴ $f(0)=1$， $f(1)=2$， $f(2)=-1$， $f(3)=3$。进一步展开$F(n)$各项，有

∴ $F(0)=5$， $F(1)=2+\mathrm{j}$， $F(2)=-5$， $F(3)=2-\mathrm{j}$。

## 4–9

一、




二、$f(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}F(n)W^{-kn}=\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{N}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}+\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{N}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k(N-m)}=\cos(\frac{2\pi}{N}km+\varphi),0\le k\le N-1$

三、$f_1(k)$与$f_2(k)$的长度均为 4，∴循环卷积长度为 4。$f(0)=\sum_{m=0}^{3}f_1(m)f_2((-m))_4G_4(0)=8$，

$f(1)=\sum_{m=0}^{3}f_1(m)f_2((1-m))_4G_4(1)=12$， $f(2)=\sum_{m=0}^{3}f_1(m)f_2((2-m))_4G_4(2)=12$

$f(3)=\sum_{m=0}^{3}f_1(m)f_2((3-m))_4G_4(3)=8$， ∴ $f(k)=\{8,12,12,8\}$

四、(1) $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(k-m)$，

$f(0)=2,\ f(1)=6,\ f(2)=9,\ f(3)=8,\ f(4)=4,\ f(5)=1,\ f(k)=0$

(2) $N=4$时， $f_1(k)\circledast f_2(k)=\sum_{m=0}^{3}f_1(m)f_2((k-m))_4$， $f(0)=6$， $f(1)=2+4+1=7$，

$f(2)=1+4+4=9$， $f(3)=2+4+2=8$， ∴ $f(k)=\{6,7,9,8\},\ k=0,1,2,3$

(3) $N=5$时， $f_1(k)\circledast f_2(k)=f(k)=\sum_{m=0}^{4}f_1(m)f_2((k-m))_5$， $f(0)=2+1=3$， $f(1)=2+4=6$，

$f(2)=1+4+4=9$， $f(3)=2+4+2=8$， $f(4)=2+2=4$，

∴ $f(k)=\{3,6,9,8,4\},\ k=0,1,2,3,4$， $f_1(k)$长度为 4， $f_2(k)$长度为 3，

∴线卷积长度为$4+3-1=6$，若要圆卷积与线卷积相同，则$L$最小值为$L_{\min}=6$。

# 第五章 连续系统的 $s$ 域分析

## 5–1 拉氏变换定义

一、1. $\frac{1}{s+2}$, $\mathrm{Re}[s]>-2$； 2. $\frac{1}{s-2}$, $\mathrm{Re}[s]>2$； 3. $\frac{1}{(s+2)^2}$, $\mathrm{Re}[s]>-2$

二、(a) $f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)$，

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}[\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}(1+\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-3s})=\frac{1}{s}(1+\mathrm{e}^{-s})(1-\mathrm{e}^{-2s}),\ \mathrm{Re}[s]>-\infty$$

(b) $f(t)=-\frac{1}{T}(t-T)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}-\frac{1}{T}(t-T)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s^2T}(\mathrm{e}^{-sT}-1+sT),\ \mathrm{Re}[s]>-\infty$$

(c) $f(t)=\sin(\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2},\ \mathrm{Re}[s]>-\infty$$

## 5–2 拉氏变换的性质

一、(1) $\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}$， $\mathrm{e}^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}$， $\therefore f(t)\leftrightarrow\frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}$, $\mathrm{Re}[s]>-1$

(2) $\sin(\pi t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$， $\sin\pi(t-1)\varepsilon(t-1)\leftrightarrow\frac{\pi\mathrm{e}^{-s}}{s^2+\pi^2}$，

$$f(t)=\sin(\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]=\sin(\pi t)\varepsilon(t)+\sin[\pi(t-1)]\varepsilon(t-1)，\ \therefore f(t)\leftrightarrow\frac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2},\ \mathrm{Re}[s]>-\infty$$

(3)由(2)知 $f(t)\leftrightarrow\frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}$, $\mathrm{Re}[s]>0$

(4) $\delta(t)\leftrightarrow 1$， $\delta(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-2s}$， $\delta(4t-2)\leftrightarrow\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-s/2}$, $\mathrm{Re}[s]>-\infty$

(5) $\sin(\pi t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$, $\mathrm{Re}[s]>0$， $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\sin(\pi t)\varepsilon(t)]\frac{\pi s^2}{s^2+\pi^2}$, $\mathrm{Re}[s]>0$

(6) $\frac{\mathrm{d}^2\sin(\pi t)}{\mathrm{d}t^2}=-\pi^2\sin\pi t$， $\therefore\frac{\mathrm{d}^2\sin(\pi t)}{\mathrm{d}t^2}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{-\pi^3}{s^2+\pi^2}$, $\mathrm{Re}[s]>0$

(7) $\mathrm{e}^{-(t-3)}\varepsilon(t-1)=\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)\leftrightarrow\mathrm{e}^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1}=\frac{\mathrm{e}^{2-s}}{s+1}$, $\mathrm{Re}[s]>-1$

$$t\mathrm{e}^{-(t-3)}\varepsilon(t-1)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{e}^{2-s}}{s+1}\right)=\frac{(s+2)\mathrm{e}^{2-s}}{(s+1)^2},\ \mathrm{Re}[s]>-1$$

二、(1) $f(\frac{t}{2})\leftrightarrow 2F(2s)$， $\mathrm{e}^{-t}f(\frac{t}{2})\leftrightarrow 2F[2(s+1)]$， $\therefore Y_1(s)=2F[2(s+1)]=\frac{2}{4s^2+6s+3}$

(2) $f(t-1)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-s}F(s)$， $f(2t-1)\leftrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s/2}F(\frac{s}{2})$， $-tf(2t-1)\leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\mathrm{e}^{-s/2}F(\frac{s}{2})]$

$\therefore Y_2(s) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\mathrm{e}^{-s/2}F(\frac{s}{2})] = \frac{s(s+2)\mathrm{e}^{-s/2}}{(s^2-2s+4)^2}$

(3) $f(3t) \leftrightarrow \frac{1}{3}F(\frac{s}{3})$， $\mathrm{e}^{-2t}f(3t) \leftrightarrow \frac{1}{3}F(\frac{s+2}{3})$， $\therefore Y_3(s) = \frac{1}{3}F(\frac{s+2}{3}) = \frac{3}{s^2+s+7}$

(4) $f(0.5t-1) \leftrightarrow 2F(2s)\mathrm{e}^{-2s}$， $\frac{\mathrm{d}f(0.5t-1)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow 2F(2s)\mathrm{e}^{-2s}$， $\therefore Y_4(s) = 2sF(2s)\mathrm{e}^{-2s} = \frac{2s\mathrm{e}^{-2s}}{4s^2-2s+1}$

三、(a) $f(t) = \delta(t) - \delta(t-\frac{T}{2}) + \delta(t-T) - \delta(t-\frac{3}{2}T) + \ldots$

$= \sum_{n=0}^{\infty}[\delta(t-nT) - \delta(t-\frac{nT}{2})] = [\delta(t) - \delta(t-\frac{T}{2})] * \sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$

令 $f_0(t) = \delta(t) - \delta(t-\frac{T}{2})$，则 $F_0(s) = 1-\mathrm{e}^{-sT/2}$，由时域卷积定理，得

$F(s) = F_0(s)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}} = (1-\mathrm{e}^{-sT/2})\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-sT/2}}$

(b) $f(t) = f_1(t) * \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nT)$，其中 $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\frac{T}{2})$， $f_0(t) = \delta(t) - \delta(t-\frac{T}{2})$，

则 $F_1(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-sT/2}}{s}$， $F_0(s) = 1-\mathrm{e}^{-sT/2}$， $\therefore F(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-sT/2}}{s}\cdot(1-\mathrm{e}^{-sT/2}) = \frac{1-\mathrm{e}^{-sT/2}}{s(1+\mathrm{e}^{-sT/2})}$

## 5-3 拉氏逆变换

一、(1) $F_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1/2}{s+2} - \frac{1/2}{s+4}$， $\therefore f_1(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$

(2) $F_2(s) = \frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2} = 1 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$， $\therefore f_2(t) = \delta(t) + (2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

(3) $F_3(s) = \frac{2s+4}{s(s^2+4)} = \frac{2s+4}{s(s+\mathrm{j}2)(s-\mathrm{j}2)} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}{s+\mathrm{j}2} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}{s-\mathrm{j}2}$

$\therefore f_3(t) = \varepsilon(t) + 2\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^0\cos(-2t+\frac{\pi}{2})\varepsilon(t) = [1+\sin(2t)]\varepsilon(t)$

(4) $F_4(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$， $\therefore f_4(t) = (t-1+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

(5) $F_5(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s+\mathrm{j}2)^2(s-\mathrm{j}2)^2} = \frac{1/2}{(s+\mathrm{j}2)^2} + \frac{1/2}{(s-\mathrm{j}2)^2}$，

$\therefore f_5(t) = \frac{1}{2}\times2\times t\times\mathrm{e}^0\cos(2t)\varepsilon(t) = t\cos(2t)\varepsilon(t)$

(6) $F_6(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}153^\circ}}{s+\mathrm{j}2} + \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}153^\circ}}{s-\mathrm{j}2}$

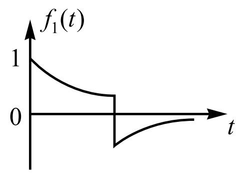
$\therefore f_6(t) = \mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t) + 2\times\frac{\sqrt{5}}{4}\mathrm{e}^0\cos(-2t+153^\circ)\varepsilon(t) = [\mathrm{e}^{-t} - \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(2t+27^\circ)]\varepsilon(t)$

二、(1) $F_1(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s+1}=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{\mathrm{e}^{-sT}}{s+1}$，$\therefore\ f_1(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-(t-T)}\varepsilon(t-T)$

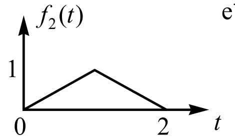
(2) $F_2(s)=(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s})^2=\dfrac{1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$，$\therefore\ f_2(t)=t\varepsilon(t)-2(t-1)\varepsilon(t-1)+(t-2)\varepsilon(t-2)$

(3) $\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}$，$\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{-2(s+3)}}{s+3}$，$\therefore\ f_3(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t-2)$

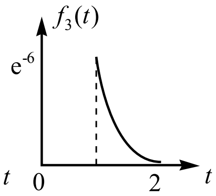
(4) $F_4(s)=\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}=\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}+\dfrac{\pi\mathrm{e}^{-s}}{s^2+\pi^2}$，$\therefore\ f_4(t)=\sin(\pi t)\varepsilon(t)+\sin[\pi(t-1)]\varepsilon(t-1)$



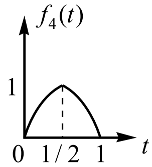

二(1)



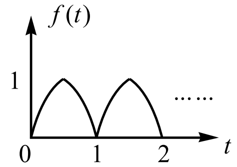

二(2)




二(3)




二(4)




三

三、$F(s)=\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-s})}=\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}\cdot\dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-s})}$，

$\sin(\pi t)\varepsilon(t)+\sin[\pi(t-1)]\varepsilon(t-1)\leftrightarrow\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{s^2+\pi^2}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta(t-n)\leftrightarrow\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}$，

$\therefore\ f(t)=\{\sin(\pi t)\varepsilon(t)+\sin[\pi(t-1)]\varepsilon(t-1)\}*\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta(t-n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin[\pi(t-n)][\varepsilon(t-n)-\varepsilon(t-1-n)]$

四、$\sin t\varepsilon(t)*f(t)=\int_0^t\sin(t-\tau)\varepsilon(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$，则原方程变为 $f(t)-[\sin t\varepsilon(t)*f(t)]=\sin t\varepsilon(t)$，

两边作拉氏变换，得 $F(s)-\dfrac{1}{s^2+1}F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$，$\therefore\ F(s)=\dfrac{1}{s^2}$，$\therefore\ f(t)=t\varepsilon(t)$

## 5-4　*s* 域分析(1)

一、方程两边作拉氏变换，得 $s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+5sY(s)-5y(0_-)+6Y(s)=3F(s)$，

$\therefore\ Y(s)=Y_{\mathrm{zi}}(s)+Y_{\mathrm{zs}}(s)=\dfrac{(s+5)y(0_-)+y'(0_-)}{s^2+5s+6}+\dfrac{3}{s^2+5s+6}F(s)$

(1) 当 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，$F(s)=\dfrac{1}{s}$，$Y_{\mathrm{zi}}(s)=\dfrac{(s+5)y(0_-)+y'(0_-)}{s^2+5s+6}=\dfrac{2}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{2}{s+3}$，

$\therefore\ y_{\mathrm{zi}}(t)=2(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$。$Y_{\mathrm{zs}}(s)=\dfrac{3}{s(s+2)(s+3)}=\dfrac{1/2}{s}+\dfrac{-3/2}{s+2}+\dfrac{1}{s+3}$，$\therefore\ y_{\mathrm{zs}}(t)=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

(2) 当 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$ 时，$F(s)=\dfrac{1}{s+1}$，$Y_{\mathrm{zi}}(s)=\dfrac{1}{s^2+5s+6}=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}$，$\therefore\ y_{\mathrm{zi}}(t)=(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$。

$Y_{\mathrm{zs}}(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\dfrac{3/2}{s+1}-\dfrac{3}{s+2}+\dfrac{3/2}{s+3}$，$\therefore\ y_{\mathrm{zs}}(t)=\dfrac{3}{2}(\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

二、零状态响应 $y_f(t)$，则 $y_f(0_-)=0$，

方程两边作拉氏变换，得 $sY_f(s)+2Y_f(s)=sF(s)+F(s)$，$\therefore\ Y_f(s)=\dfrac{s+1}{s+2}F(s)$

(1) 若 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，则 $F(s)=\dfrac{1}{s+1}$，$\therefore Y_f(s)=\dfrac{s+1}{s+2}\cdot\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{1}{s+2}$，$\therefore y_f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$

(2) 若 $f(t)=t\varepsilon(t)$，则 $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$，$\therefore Y_f(s)=\dfrac{s+1}{s+2}\cdot\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{1/4}{s}+\dfrac{1/2}{s^2}-\dfrac{1/4}{s+2}$，$\therefore y_f(t)=\dfrac{1}{4}(1+2t-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

三、$G(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}$，$\therefore H(s)=sG(s)=\dfrac{2}{s+2}$，又 $Y_{zs}(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{(s+2)^2}=\dfrac{3s+4}{s(s+2)^2}$，

$\therefore F(s)=\dfrac{Y_{zs}(s)}{H(s)}=\dfrac{3s+4}{2(s+2)}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1/2}{s+2}$，$\therefore f(t)=(1+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

四、设右端积分器的输出为 $X(s)$，则 $\begin{cases}s^2X(s)=F(s)-5sX(s)-6X(s)\\Y(s)=2s^2X(s)-3sX(s)-4X(s)\end{cases}$，消去 $X(s)$，得

$Y(s)=(2s^2-3s-4)\cdot\dfrac{F(s)}{s^2+5s+6}$，$\therefore H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}=\dfrac{2s^2-3s-4}{s^2+5s+6}$

五、对方程组作拉氏变换，得 $\begin{cases}sY_1(s)-y_1(0_-)+Y_1(s)-2Y_2(s)=4F(s)\\sY_2(s)-y_2(0_-)-Y_1(s)+2Y_2(s)=-F(s)\end{cases}$，解得

$Y_1(s)=Y_{1zi}(s)+Y_{1zs}(s)=[\dfrac{(s+2)y_1(0_-)}{s(s+3)}+\dfrac{2y_2(0_-)}{s(s+3)}]+\dfrac{4s+6}{s(s+3)}F(s)$，

将 $y_1(0_-)=1$，$y_2(0_-)=2$ 代入 $Y_1(s)$ 得 $Y_{1zi}(s)=\dfrac{s+6}{s(s+3)}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s+3}$，$\therefore y_{1zi}(t)=(2-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

将 $F(s)=\dfrac{1}{s+1}$ 代入 $Y_1(s)$ 得 $Y_{1zs}(s)=\dfrac{4s+6}{s(s+1)(s+3)}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+3}$，$\therefore y_{1zs}(t)=(2-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

## 5–5 *s* 域分析(2)

一、(*a*) 所求为零状态响应，故电路的 *s* 域模型与时域模型形式相同：$U(s)=\dfrac{sL\cdot\dfrac{1}{sC}}{sL+\dfrac{1}{sC}}\cdot I(s)$

将 $I(s)=\dfrac{1}{s}$ 和各元件数值代入上式，得 $U(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$，取拉氏逆变换，$\therefore u(t)=\sin(2t)\varepsilon(t)$

(*b*) $U(s)=\dfrac{\dfrac{1}{sC}/\!/sL}{R+\dfrac{1}{sC}/\!/sL}\cdot U_S(s)=\dfrac{\dfrac{1}{RC}s}{s^2+\dfrac{s}{RC}+\dfrac{1}{LC}}\cdot U_S(s)$，将 $U_S(s)=\dfrac{1}{s}$ 和各元件数值代入上式，得

$U(s)=\dfrac{2}{s^2+2s+4}=\dfrac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\therefore u(t)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$

二、求零状态响应，电路的 *s* 域模型与时域模型相同，$I_S(s)=[\dfrac{sL_1\cdot(R+sL_2)}{sL_1+R+sL_2}]^{-1}\cdot\dfrac{R+sL_2}{sL_2}\cdot U(s)$，

从而解得系统函数 $H(s)=\dfrac{U(s)}{I_S(s)}=\dfrac{s^2L_1L_2}{R+sL_1+sL_2}$，将各元件数值代入，得

$H(s)=\dfrac{2s^2}{s+1}=2s-2+\dfrac{2}{s+1}$， $G(s)=\dfrac{1}{s}H(s)=\dfrac{2s}{s+1}=2-\dfrac{2}{s+1}$

$\therefore h(t)=2\delta'(t)-2\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$， $g(t)=2\delta(t)-2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

三、 $H_3(s)=\dfrac{1}{s}$， $H_4(s)=\dfrac{1}{s+2}$，由系统级联和并联的性质可知，复合系统的系统函数为

$$H(s)=H_1(s)\cdot[H_2(s)\cdot H_3(s)-H_4(s)]=\frac{1}{s+1}\cdot(\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2})=\frac{1/2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{3/2}{s+2},$$

取拉氏变换，得 $h(t)=(\dfrac{1}{2}-2\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

四、设系统函数为 $H(s)$，零输入响应为 $Y_x(s)$，

若 $f_1(t)=\delta(t)$，则 $F_1(s)=1$，全响应 $Y_1(s)=H(s)F_1(s)+Y_x(s)=1+\dfrac{1}{s+1}$ (*)

若 $f_2(t)=\varepsilon(t)$，则 $F_2(s)=\dfrac{1}{s}$，全响应 $Y_2(s)=H(s)\cdot\dfrac{1}{s}+Y_x(s)=\dfrac{3}{s+1}$ (**)

联立(*),(**)两式，解得 $H(s)=\dfrac{s}{s+1}$， $Y_x(s)=\dfrac{2}{s+1}$

(1) 若 $f_3(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，则 $F_3(s)=\dfrac{1}{s+2}$，

$\therefore Y_3(s)=Y_x(s)+H(s)F_3(s)=\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{s}{s+1}\cdot\dfrac{1}{s+2}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}$

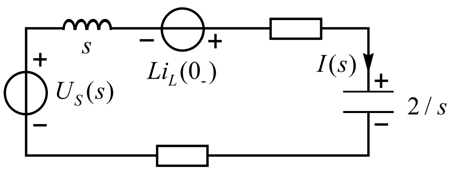
即全响应 $y_3(t)=(\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

(2) 若 $f_4(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$，则 $F_4(s)=\dfrac{1-(s+1)\mathrm{e}^{-s}}{s^2}$，

$\therefore Y_4(s)=Y_x(s)+H(s)F_4(s)=\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{s}{s+1}\cdot\dfrac{1-(s+1)\mathrm{e}^{-s}}{s^2}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$，

即全响应 $y_4(t)=(1+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$

五、开关 S 未打开时，由时域模型分析，得 $i_L(0_-)=1\mathrm{A}$， $u_C(0_-)=0$。开关打开后，电路的 $s$ 域模型如图，则 $I(s)=\dfrac{U_S(s)-i_L(0_-)L}{s+3+\dfrac{2}{s}}=\dfrac{\dfrac{1}{s}-1}{s+3+\dfrac{2}{s}}=\dfrac{-3}{s+2}+\dfrac{2}{s+1}$，作拉氏逆变换，得 $i(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$




六、易知 $i_L(0_-)=1\mathrm{A}$， $u_C(0_-)=2\mathrm{V}$，当 $t\geq 0$ 时， $u_S(t)=2\varepsilon(t)\mathrm{V}$，即 $U_S(s)=\dfrac{2}{s}$，

设 $1\Omega$ 电阻的电流为 $i_R(t)$，电感电流为 $i_L(t)$，端电压为 $u_L(t)$，电容电流为 $i_C(t)$，端电压为 $u_C(t)$，各量的象函数分别为 $I_R(s)$， $I_L(s)$， $U_L(s)$， $I_C(s)$， $U_C(s)$，由 KCL， $I_R(s)=I_L(s)+I_C(s)$，由 KVL， $U_S(s)-I_R(s)-U_L(s)-2I_L(s)=0$， $2I_L(s)+U_L(s)-U_C(s)=0$，

又 $U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)=sI_L(s)-1$， $U_C(s)=\dfrac{1}{sC}I_C(s)+\dfrac{u_C(0_-)}{s}=\dfrac{1}{2s}I_C(s)+\dfrac{2}{s}$，

联立以上五式，解得$U_C(s)=\dfrac{4s^2+9s+4}{s(s+1)(2s+3)}=\dfrac{4/3}{s}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-2/3}{2s+3}$，作拉氏逆变换，得

$$u_0(t)=u_C(t)=(\frac{4}{3}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t})\varepsilon(t)$$

七、(1) $F(s)=\dfrac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s}),\ \mathrm{Re}[s]>-\infty$，$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=F(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{\mathrm{j}\omega}$

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s})$，$F(s)$有一双重极点$s=0$，则$F(\mathrm{j}\omega)=F(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)=\pi\delta(\omega)-\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\omega^2}$

# 第六章 离散系统的 z 域分析

## 6–1 z 变换定义与性质

一、(1) $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2})^k z^{-k}\overset{m=-k}{=\!=\!=}\sum_{m=1}^{\infty}(2z)^m=\dfrac{-2z}{2z-1},|z|<\dfrac{1}{2}$

(2) $2^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\dfrac{-z}{z-2},|z|<2$，$(\dfrac{1}{3})^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}},|z|>\dfrac{1}{3}$，

$$\therefore F(z)=\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}=\frac{-5z}{(z-2)(3z-1)},\frac{1}{3}<|z|<2$$

(3) $(\dfrac{1}{2})^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z\leftrightarrow\frac{1}{2}},|z|>\dfrac{1}{2}$，$(\dfrac{1}{2})^{-k}\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\dfrac{-z}{z-2},|z|<2$，

$$\therefore F(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-z}{z-2}=\frac{-3z}{(z-2)(2z-1)},\frac{1}{2}<|z|<2$$

(4) 令$f_1(k)=(\dfrac{1}{2})^k\varepsilon(k)$，则$F_1(z)=\dfrac{2z}{2z-1},|z|>\dfrac{1}{2}$，由线性性质，得

$$F(z)=F_1(z)+\sum_{k=-1}^{-4}f(k)z^{-k}=\frac{2z}{2z-1}+\frac{2z-32z^5}{1-2z}=\frac{32z^5}{2z-1},|z|>\frac{1}{2}$$

二、(1) $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k z^{-k}=\dfrac{3z}{3z-1},|z|>\dfrac{1}{3}$

(2) $(\dfrac{1}{2})^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{2z}{2z-1},|z|<\dfrac{1}{2}$，$(\dfrac{1}{3})^{-k}\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-3},|z|>3$，

$$\therefore F(z)=\frac{2z}{2z-1}+\frac{z}{z-3}=\frac{4z^2-7z}{(2z-1)(z-3)},|z|>3$$

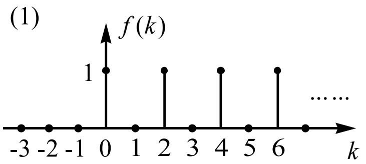
(3) $f(k)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{4}}}{2}\varepsilon(k)$，$\therefore F(z)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{z^2-\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2-\sqrt{2}z+1},|z|>1$

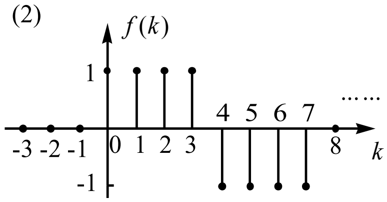
(4) $f(k)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\delta(k-m)=(-1)^k\varepsilon(k)$，$\therefore F(z)=\dfrac{z}{z+1},|z|>1$

三、(1) $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}\overset{k=2m}{=\!=\!=\!=}\sum_{m=0}^{\infty}f(2m)z^{-2m}=\sum_{m=0}^{\infty}z^{-2m}=\dfrac{z^2}{z^2-1}$

(2) $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{3}z^{-k}+\sum_{k=4}^{7}(-z^{-k})=\dfrac{z}{z-1}(\dfrac{z^4-1}{z^4})^2$

图象见下页。




四、(1) $\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-1},|z|>1$，$(-1)^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z+1},|z|>1$，$\therefore F(z)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{z+1})=\dfrac{z^2}{z^2-1},|z|>1$

(2)令 $f_1(k)=k\varepsilon(k)$，则 $F_1(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2},|z|>1$，$\therefore F(z)=F_1(-z)=\dfrac{-z}{(-z-1)^2}=\dfrac{-z}{(z+1)^2},|z|>1$

(3)令 $f_1(k)=(k-1)\varepsilon(k-1)$，则 $F_1(z)=z^{-1}\cdot\dfrac{z}{(z-1)^2}=\dfrac{1}{(z-1)^2},|z|>1$，$\therefore F(z)=-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_1(z)=\dfrac{2z}{(z-1)^3},|z|>1$

(4) $f(k)=(\dfrac{1}{2})^k\cos(\dfrac{k\pi}{2})\varepsilon(k)=(\dfrac{1}{2})^k\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}}}{2}\varepsilon(k)=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})^k+(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})^k]\varepsilon(k)=\dfrac{1}{2}[(\mathrm{j}\dfrac{1}{2})^k+(-\mathrm{j}\dfrac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$

$\therefore F(z)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{z}{z-\mathrm{j}\frac{1}{2}}+\dfrac{z}{z+\mathrm{j}\frac{1}{2}})=\dfrac{4z^2}{4z^2+1},|z|>\dfrac{1}{2}$

五、(1) $\sin(\dfrac{k\pi}{2})\varepsilon(k)=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}})\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}-\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}})=\dfrac{z}{z^2+1}$，

$\therefore F(z)=-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\dfrac{z}{z^2+1})=\dfrac{z(z^2-1)}{(z^2+1)^2}$

(2) $a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$，$a^k\varepsilon(k-1)\leftrightarrow a\cdot z^{-1}\cdot\dfrac{z}{z-a}=\dfrac{a}{z-a}$，$b^k\varepsilon(k-1)\leftrightarrow\dfrac{b}{z-b}$，

$\therefore F(z)=\int_z^{\infty}(\dfrac{a}{\eta-a}-\dfrac{b}{\eta-b})\dfrac{1}{\eta}\mathrm{d}\eta=\ln\dfrac{z-b}{z-a}$

(3) $a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$，$\therefore F(z)=z\int_z^{\infty}\dfrac{\eta}{\eta-a}\cdot\dfrac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta=\dfrac{z}{a}\ln\dfrac{z}{z-a}$

(4) $f(k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\varepsilon(k)=\begin{cases}0,\ k\text{为奇数}\\1,\ k\text{为偶数}\end{cases}$，且 $f(k)$ 为因果序列，则解法同三(1)题。

## 6–2 逆 $z$ 变换

一、(1)由 $|z|>\frac{1}{2}$ 知 $f(k)$ 为因果序列，则 $f(k)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$

(2)由 $|z|>\frac{1}{2}$ 知 $f(k)$ 为因果序列，而 $F(z)=\dfrac{3z+1}{z+\frac{1}{2}}=2+\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}}$，∴ $f(k)=2\delta(k)+(-\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$

(3)由 $|z|>2$ 知 $f(k)$ 为因果序列，而 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z^2+z+1}{z(z-1)(z+2)}=\dfrac{-1/2}{z}+\dfrac{1/2}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$，

即 $F(z)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z}{z+2}+\dfrac{z}{z-1}$，∴ $f(k)=-\dfrac{1}{2}\delta(k)+[\dfrac{1}{2}(-2)^k+1]\varepsilon(k)$

二、(1)由 $|z|<\frac{1}{3}$ 知 $f(k)$ 为反因果序列，$\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}=\dfrac{3}{z-\frac{1}{2}}-\dfrac{2}{z-\frac{1}{3}}$，即 $F(z)=\dfrac{3z}{z-\frac{1}{2}}-\dfrac{2z}{z-\frac{1}{3}}$，

∴ $f(k)=[-3(\frac{1}{2})^k+2(\frac{1}{3})^k]\varepsilon(-k-1)$

(2)由 $|z|>\frac{1}{2}$ 知 $f(k)$ 为因果序列，∴ $f(k)=[3(\frac{1}{2})^k-2(\frac{1}{3})^k]\varepsilon(k)$

(3) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{3})}=\dfrac{3/2}{(z-\frac{1}{2})^2}-\dfrac{3}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{4}{z-\frac{1}{3}}$，即 $F(z)=\dfrac{3z/2}{(z-\frac{1}{2})^2}-\dfrac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{4z}{z-\frac{1}{3}}$，

由收敛域 $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$ 知上式中前两项逆 $z$ 变换后为反因果序列，后一项逆 $z$ 变换后为因果序列。

∴ $f(k)=[-\frac{3}{2}k(\frac{1}{2})^k+3(\frac{1}{2})^k]\varepsilon(-k-1)+4(\frac{1}{3})^k\varepsilon(k)$

三、(1) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{1}{z(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{-1/2}{z+\mathrm{j}}+\dfrac{-1/2}{z-\mathrm{j}}$，即 $F(z)=1-\dfrac{z/2}{z+\mathrm{j}}-\dfrac{z/2}{z-\mathrm{j}}$，∴ $f(k)=\delta(k)-\cos(\dfrac{k\pi}{2})\varepsilon(k)$

(2) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z+1}{(z-1)(z^2-z+1)}=\dfrac{2}{z-1}+\dfrac{-1}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}+\dfrac{-1}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}$，即 $F(z)=\dfrac{2}{z-1}-\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}-\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}$

∴ $f(k)=2[1-\cos(\dfrac{k\pi}{3})]\varepsilon(k)$

(3) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z}{(z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}})}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}}$，即 $F(z)=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}}$，

∴ $f(k)=\sqrt{2}\cos(\dfrac{3}{4}k\pi+\dfrac{\pi}{4})\varepsilon(k)$

(4) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z+a}{(z-a)^3}=\dfrac{2a}{(z-a)^3}+\dfrac{1}{(z-a)^2}$，即 $F(z)=\dfrac{2az}{(z-a)^3}+\dfrac{z}{(z-a)^2}$，

∴ $f(k)=[2a\cdot\dfrac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}+ka^{k-1}]\varepsilon(k)=k^2a^{k-1}\varepsilon(k)$

四、(1) $F(z)=\dfrac{z}{z-a}$， $H(z)=\dfrac{1}{z-1}$， $Y(z)=F(z)\cdot H(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-a)}=\dfrac{1}{1-a}\cdot\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{1}{a-1}\cdot\dfrac{z}{z-a}$，

$\therefore\ y(k)=\dfrac{1}{1-a}\varepsilon(k)+\dfrac{1}{a-1}a^k\varepsilon(k)=\dfrac{1-a^k}{1-a}\varepsilon(k)$

(2) $F(z)=\dfrac{z}{z-a}$， $H(z)=\dfrac{z}{z-b}$， $Y(z)=F(z)\cdot H(z)=\dfrac{z^2}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{a}{a-b}\cdot\dfrac{z}{z-a}+\dfrac{b}{b-a}\cdot\dfrac{z}{z-b}$

$\therefore\ y(k)=\dfrac{a}{a-b}\cdot a^k\varepsilon(k)+\dfrac{b}{b-a}\cdot b^k\varepsilon(k)=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\varepsilon(k)$

五、设 $f_1(k)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}f(i)=\sum\limits_{i=0}^{k}f(i)-f(k)=\sum\limits_{i=-\infty}^{k}f(i)-f(k)$，则 $F_1(z)=\dfrac{z}{z-1}F(z)-F(z)=\dfrac{F(z)}{z-1}$，

原方程作 $z$ 变换，得 $F_1(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}\cdot\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$， 即 $\dfrac{F(z)}{z-1}=\dfrac{z^2}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})}$，

$\therefore\ F(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}=\dfrac{2z}{z-1}+\dfrac{-z}{z-\frac{1}{2}}$， $\therefore\ f(k)=[2-(\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$

## 6-3 $z$ 域分析(1)

一、原方程变形为 $y(k)=0.7y(k-1)+0.1y(k-2)=7f(k-1)-2f(k-2)$，作 $z$ 变换，得

$$Y(z)-0.7[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+0.1[z^{-2}Y(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=7z^{-1}F(z)-2z^{-2}F(z)$$

$\therefore\ Y(z)=Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)=\dfrac{0.7y(-1)-0.1y(-2)-0.1z^{-1}y(-1)}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}+\dfrac{7z^{-1}-2z^{-2}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}F(z)$

将 $y(-1)=-4$， $y(-2)=-38$ 代入，得 $Y_{zi}(z)=\dfrac{1+0.4z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}=\dfrac{3z}{z-0.5}+\dfrac{-2z}{z-0.2}$

$\therefore\ y_{zi}(k)=[3(0.5)^k-2(0.2)^k]\varepsilon(k)$。 $f(k)=(0.4)^k\varepsilon(k)$，则 $F(z)=\dfrac{z}{z-0.4}$，代入 $Y(z)$ 表达式，可得

$Y_{zs}(z)=\dfrac{7z^{-1}-2z^{-2}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}\cdot\dfrac{z}{z-0.4}=\dfrac{-10z}{z-0.2}+\dfrac{-40z}{z-0.4}+\dfrac{50z}{z-0.5}$，

$\therefore\ y_{zs}(k)=10[5(0.5)^k-4(0.4)^k-(0.2)^k]\varepsilon(k)$，

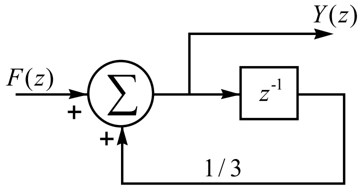
全响应 $y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=[53(0.5)^k-40(0.4)^k-12(0.2)^k]\varepsilon(k)$

二、系统在零状态下的 $z$ 域框图如左下图。

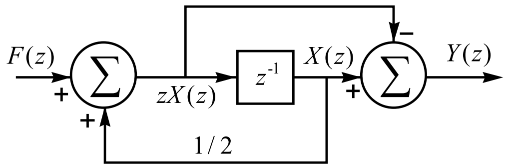
由图可列出方程 $Y_{zs}(z)=F(z)+\dfrac{1}{3}z^{-1}Y_{zs}(z)$，即 $Y_{zs}(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}F(z)=H(z)F(z)$，

$\therefore$系统函数 $H(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}$， $\therefore\ h(k)=(\frac{1}{3})^k\varepsilon(k)$，若 $f(k)=\varepsilon(k)$，则 $F(z)=\dfrac{z}{z-1}$，

阶跃响应的象函数 $G(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{\frac{3}{2}z}{z-1}-\dfrac{\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{3}}$， $\therefore\ g(k)=[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k]\varepsilon(k)$




题二图




题三图

三、系统在零状态下的$z$域框图如右上图。

由图可列出方程组$\begin{cases} zX(z)=F(z)+\frac{1}{2}X(z) \\ Y_{zs}(z)=X(z)-zX(z) \end{cases}$，消去$X(z)$，整理，得$Y_{zs}(z)=\dfrac{1-z}{z-\frac{1}{2}}F(z)$

(1)若$f(k)=\varepsilon(k)$，则$F(z)=\dfrac{z}{z-1}$，即$Y_{zs}(z)=\dfrac{1-z}{z-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{-z}{z-\frac{1}{2}}$，$\therefore\ y_{zs}(k)=-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$

(2)若$f(k)=k\varepsilon(k)$，则$F(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$，即$Y_{zs}(z)=\dfrac{1-z}{z-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{z}{(z-1)^2}=\dfrac{2z}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{-2z}{z-1}$，$\therefore\ y_{zs}(k)=2[(\frac{1}{2})^k-1]\varepsilon(k)$

四、(1) ($a$) 由框图可列出方程$Y(z)=F(z)+\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)$，

整理方程可得($a$)图的系统函数$H_a(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$

($b$) 设左端延迟器的输入为$X(z)$，由框图可列出方程组$\begin{cases} X(z)=F(z)+\frac{1}{2}z^{-1}X(z) \\ Y(z)=X(z)+\frac{1}{4}z^{-1}Y(z) \end{cases}$，

消去$X(z)$，整理，得$Y(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}F(z)$，$\therefore\ H_b(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$

($c$) 设上下两延迟器的输入分别为$X_1(z)$，$X_2(z)$，由框图可列出方程组

$\begin{cases} X_1(z)=F(z)+(1/2)z^{-1}X_1(z) \\ X_2(z)=F(z)+(1/4)z^{-1}X_2(z) \\ Y(z)=2X_1(z)-X_2(z) \end{cases}$，消去$X_1(z)$，$X_2(z)$，整理，得$Y(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}F(z)$，

$\therefore\ H_c(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$，综上可知三个系统的系统函数相等，即三个系统满足相同的差分方程。

(2) $H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\dfrac{2z}{z-\frac{1}{2}}-\dfrac{z}{z-\frac{1}{4}}$，$\therefore\ h(k)=[2(\frac{1}{2})^k-(\frac{1}{4})^k]\varepsilon(k)$

(3) 若 $f(k)=\varepsilon(k)$，则 $F(z)=\dfrac{z}{z-1}$，∴ $Y_{zs}(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}\cdot\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{\frac{8}{3}z}{z-1}-\dfrac{2z}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$

即 $y_{zs}(k)=[\frac{8}{3}-2(\frac{1}{2})^k+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^k]\varepsilon(k)$

五、(1)原方程作 $z$ 变换，得 $Y(z)-1.5z^{-1}Y(z)-z^{-2}Y(z)=z^{-1}F(z)$，

∴ $H(z)=\dfrac{Y(z)}{F(z)}=\dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{\frac{2}{5}z}{z-2}-\dfrac{\frac{2}{5}z}{z+\frac{1}{2}}$，即 $h(k)=\frac{2}{5}[2^k-(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)$

(2) 依题，知 $H(z)$ 的收敛域为 $\frac{1}{2}<|z|<2$，∴ $h(k)=-\frac{2}{5}\cdot 2^k\varepsilon(-k-1)-\frac{2}{5}\cdot(-\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$，

若 $f(k)=(-0.5)^k\varepsilon(k)$，则 $F(z)=\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}}$，

∴ $Y_{zs}(z)=H(z)F(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}-z^{-2}}\cdot\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{5}z}{(z+\frac{1}{2})^2}+\dfrac{-\frac{8}{25}z}{z+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{8}{25}z}{z-2}$，

即 $y_{zs}(k)=[\frac{1}{5}k(-\frac{1}{2})^k-\frac{8}{25}(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k)-\frac{8}{25}\cdot 2^k\varepsilon(-k-1)$

## 6-4　$z$ 域分析(2)

一、当 $f(k)=\varepsilon(k)$ 时，$F(z)=\dfrac{z}{z-1}$，$Y_{zs}(z)=2(\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5})=\dfrac{z}{(z-1)(z-0.5)}$，

则可得系统函数 $H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\dfrac{1}{z-0.5}$；当 $f(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$ 时，$F(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$，

∴ $Y_{zs}(z)=\dfrac{1}{z-0.5}\cdot\dfrac{z}{z-0.5}=\dfrac{z}{(z-0.5)^2}$，∴ $y_{zs}(k)=k(0.5)^k\varepsilon(k)$

二、$h_1(k)=\varepsilon(k)$，则 $H_1(z)=\dfrac{z}{z-1}$，由框图可得该复合系统的系统函数

$H(z)=[H_1(z)+H_2(z)]\cdot H_3(z)=\dfrac{2z}{(z-1)(z+1)}$，若 $f(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-2)$，

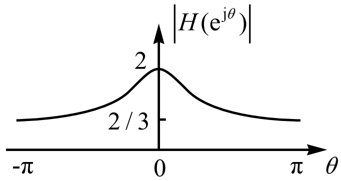
则 $F(z)=\dfrac{z}{z-1}-z^{-2}\cdot\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{z+1}{z}$，∴ $Y_{zs}(z)=H(z)F(z)=\dfrac{2z}{(z-1)(z+1)}\cdot\dfrac{z+1}{z}=\dfrac{2}{z-1}$，

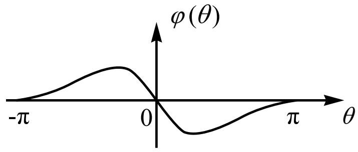
∴ $y_{zs}(k)=2\varepsilon(k-1)$

三、($a$) 由框图可列出方程 $Y(z)=F(z)+\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$，即 $Y(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}F(z)=H(z)F(z)$

$\therefore$系统函数 $H(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}},|z|>\dfrac{1}{2}$，系统的频率响应 $H(e^{j\theta})=H(z)|_{z=e^{j\theta}}=\dfrac{e^{j\theta}}{e^{j\theta}-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}\cos\theta)+j\frac{1}{2}\sin\theta}$，

幅频响应 $\left|H(e^{j\theta})\right|=\left|\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}\cos\theta)+j\frac{1}{2}\sin\theta}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}}$，相频响应 $\varphi(\theta)=-\arctan(\dfrac{\frac{1}{2}\sin\theta}{1-\frac{1}{2}\cos\theta})$



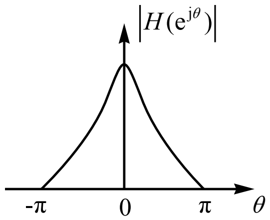



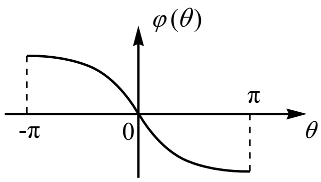

$(b)$ 设延迟器的输入为 $X(z)$，则由框图可列出方程组

$$\begin{cases}X(z)=F(z)+\frac{1}{2}z^{-1}X(z)\\Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)\end{cases}$$，消去 $X(z)$，得 $Y(z)=\dfrac{z+1}{z-\frac{1}{2}}F(z)=H(z)F(z)$，

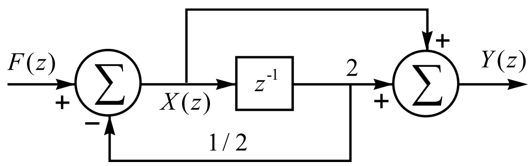
$\therefore$系统函数 $H(z)=\dfrac{z+1}{z-\frac{1}{2}},|z|>\dfrac{1}{2}$，系统的频率响应 $H(e^{j\theta})=\dfrac{e^{j\theta}+1}{e^{j\theta}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\cos\theta+1+j\sin\theta}{\cos\theta-\frac{1}{2}+j\sin\theta}$，

幅频响应 $\left|H(e^{j\theta})\right|=\left|\dfrac{\cos\theta+1+j\sin\theta}{\cos\theta-\frac{1}{2}+j\sin\theta}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{1+9\tan^2(\frac{\theta}{2})}}$，相频响应 $\varphi(\theta)=-\arctan[3\tan(\dfrac{\theta}{2})]$。




四、零状态下系统的 $z$ 域框图如图，由框图可列出方程组




$$\begin{cases}X(z)=F(z)-\frac{1}{2}z^{-1}X(z)\\Y(z)=X(z)+2z^{-1}X(z)\end{cases}$$，消去 $X(z)$，整理，得 $Y(z)=\dfrac{z+2}{z+\frac{1}{2}}F(z)=H(z)F(z)$，

$\therefore$系统函数 $H(z)=\dfrac{z+2}{z+\frac{1}{2}}$，系统的频率响应 $H(e^{j\theta})=H(z)|_{z=e^{j\theta}}=\dfrac{e^{j\theta}+2}{e^{j\theta}+\frac{1}{2}}$，

则系统的稳态响应 $y_{ss}(k)=\mathrm{Re}[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\cdot\dot{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta}]$，

若 $f(k)=5$，即 $\theta=0$， $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})=2$，$\therefore\ y_{ss1}(k)=2\times5=10$

若 $f(k)=5\cos(\dfrac{k\pi}{2})=\mathrm{Re}[5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}}]$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$， $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.64}$，

$\therefore\ y_{ss2}(k)=\mathrm{Re}[2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.64}\times5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{2}}]=10\cos(\dfrac{k\pi}{2}-0.64)$

若 $f(k)=\cos(k\pi)=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi}]$，即 $\theta=\pi$， $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})=-2$，$\therefore\ y_{ss3}(k)=\mathrm{Re}[-2\times\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi}]=-2\cos(k\pi)$

综上，系统的稳态响应 $y_{ss}(k)=y_{ss1}(k)+y_{ss2}(k)+y_{ss3}(k)=2[5+5\cos(\dfrac{k\pi}{2}-0.64)-\cos(k\pi)]$

五、(1) 原方程作 $z$ 变换，得 $Y_{zs}(z)+0.2z^{-1}Y_{zs}(z)-0.24z^{-2}Y_{zs}(z)=F(z)+z^{-1}F(z)$，整理，得

$$Y_{zs}(z)=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}F(z)\text{，}\ \therefore\text{系统函数 } H(z)=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}=\frac{1.4z}{z-0.4}-\frac{0.4z}{z+0.6}$$

$\therefore\ h(k)=[1.4(0.4)^k-0.4(-0.6)^k]\varepsilon(k)$

(2) $H(z)$ 收敛域 $|z|>0.6$ 包含单位圆，则系统的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta}+0.2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-0.24}$，

若 $f(k)=12\cos(k\pi)=\mathrm{Re}[12\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi}]$，即 $\theta=\pi$， $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})=0$，$\therefore\ y_{ss}(k)=\mathrm{Re}[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\cdot\dot{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta}]=0$

六、原方程作 $z$ 变换，得 $Y_{zs}(z)-1.5z^{-1}Y_{zs}(z)-z^{-2}Y_{zs}(z)=z^{-1}F(z)$，整理，得

$$Y_{zs}(z)=\frac{z}{z^2-1.5z-1}F(z)=H(z)F(z)\text{，}\ \therefore\text{系统函数 } H(z)=\frac{z}{z^2-1.5z-1}=\frac{0.4z}{z-2}-\frac{0.4z}{z+0.5}$$

(1) 若该系统为因果系统，则其收敛域为 $|z|>2$，

即 $H(z)=\dfrac{z}{z^2-1.5z-1},\ |z|>2$， $h(k)=0.4[2^k-(-0.5)^k]\varepsilon(k)$

(2) 若该系统为稳定系统，则其收敛域为 $0.5<|z|<2$，

即 $H(z)=\dfrac{z}{z^2-1.5z-1},0.5<|z|<2$， $h(k)=-0.4[2^k\varepsilon(-k-1)+(-0.5)^k\varepsilon(k)]$

# 第七章 系统函数

## 7-1 系统函数零极点

一、1.(a) $\dfrac{z(2z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{3}{2})}$，0，1/2；1/2，-3/2 (b) $\dfrac{z(\frac{1}{2}z+1)}{(z-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{16}}$，0，-2；$\frac{1}{4}\pm \mathrm{j}\frac{1}{4}$

2.(a) $\dfrac{-6(s-1)}{(s+2)(s+3)}$ (b) $\dfrac{5s[(s+2)^2+1]}{(s+3)[(s+1)^2+9]}$ (c) $\dfrac{2[(s-2)^2+1]}{(s+2)^2+1}$

3.(a) $k<4$ (b) $-2<k<4$ (c) $-1.5<k<0$

二、设上端延迟器的输入为 $X(z)$，则由框图可列出方程组 $\begin{cases} X(z)=F(z)+a_0z^{-1}X(z)+a_1z^{-2}X(z) \\ Y(z)=b_2X(z)+b_1z^{-1}X(z)-z^{-2}X(z) \end{cases}$，

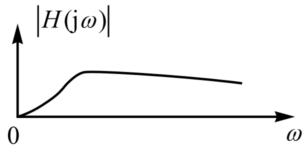
消去 $X(z)$，整理，得 $Y(z)=\dfrac{b_2z^2+b_1z-1}{z^2-a_0z-a_1}F(z)=H(z)F(z)$，则系统函数 $H(z)=\dfrac{b_2z^2+b_1z-1}{z^2-a_0z-a_1}$，

由二次方程根与系数的关系，得 $\begin{cases} -\dfrac{b_1}{b_2}=-1+2 \\ -\dfrac{1}{b_2}=-2 \end{cases}$，$\begin{cases} a_0=-0.8+0.5 \\ -a_1=-0.8\times 0.5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b_1=-0.5 \\ b_2=0.5 \end{cases}$，$\begin{cases} a_0=-0.3 \\ a_1=0.4 \end{cases}$

三、(1) 由零极点分布图，设 $H(s)=\dfrac{Ks^2}{(s+1)^2+4}$，$\because H(\infty)=1$，$\therefore K=1$，即 $H(s)=\dfrac{s^2}{(s+1)^2+4}$

(2) $|H(\mathrm{j}\omega)|=\left|\dfrac{(\mathrm{j}\omega)^2}{(\mathrm{j}\omega+1)^2+4}\right|=\dfrac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4-6\omega^2+25}}$

(3) 见右图。



## 7-2 信号流图

一、1.(1) -13/3 (2) 4 2.(1) $\dfrac{2s^2-1}{s^3+4s^2+5s+6}$ (2) $\dfrac{2z^2+\frac{1}{4}z}{z^2-\frac{1}{4}z+\frac{3}{8}}$

二、(1) 由零极点分布图，设 $H(s)=\dfrac{K(s-3)}{(s+2)^2+1}$，$\because H(0)=\dfrac{-3K}{4+1}=-1.2$，$\therefore K=2$，

即 $H(s)=\dfrac{2s-6}{(s+2)^2+1}=\dfrac{1+\mathrm{j}5}{s+2-\mathrm{j}}+\dfrac{1-\mathrm{j}5}{s+2+\mathrm{j}}$，作拉氏逆变换，得 $h(t)=2\sqrt{26}\mathrm{e}^{-2t}\cos(t+78.7^\circ)\varepsilon(t)$

(2) $Y(s)=H(s)F(s)=\dfrac{2s-6}{(s+2)^2+1}F(s)=\dfrac{2s-6}{s^2+4s+5}F(s)$，即 $s^2Y(s)+4sY(s)+5Y(s)=2sF(s)-6F(s)$

作拉氏逆变换，得 $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=2f'(t)-6f(t)$

(3) $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2(\mathrm{j}\omega)-6}{(\mathrm{j}\omega+2)^2+1}=\dfrac{-6+\mathrm{j}2\omega}{5-\omega^2+\mathrm{j}4\omega}$，当 $t\geq 0$ 时，$f(t)=\cos(3t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3t}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$

取 $\Omega=3$，则当 $n=-1$ 时，$F_{-1}=\dfrac{1}{2}$，$H(-\mathrm{j}3)=\dfrac{-6-\mathrm{j}6}{5-9-\mathrm{j}12}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}27^\circ}$，$Y_{-1}=H(-\mathrm{j}3)F_{-1}=\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}27^\circ}$，

当 $n=1$ 时，$F_1=\dfrac{1}{2}$，$H(\mathrm{j}3)=\dfrac{-6+\mathrm{j}6}{5-9-\mathrm{j}12}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\mathrm{e}^{\mathrm{j}27^\circ}$，$Y_1=H(\mathrm{j}3)F_1=\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\mathrm{e}^{\mathrm{j}27^\circ}$，

当 $n=\pm1$ 时，$F_n=0$，$Y_n=0$，$\therefore y(t)=\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}27^\circ}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3t}+\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\mathrm{e}^{\mathrm{j}27^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3t}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\cos(3t+27^\circ)$

三、(1) 回路增益 $L_1=-z^{-1}$，$L_2=-2z^{-2}$，$L_3=8z^{-2}$，$L_4=4$，互不接触回路增益乘积 $L_1L_4=-4z^{-1}$，

$L_2L_4=-8z^{-2}$，$\Delta=1-(-z^{-1}-2z^{-2}+8z^{-2}+4)+(-4z^{-1}-8z^{-2})=-3-3z^{-1}-14z^{-2}$，前向通路增益

$P_1=2z^{-2}$，$\Delta_1=1$，$P_2=2z^{-1}$，$\Delta_2=1-4=-3$，$\therefore H(z)=\dfrac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{2z^{-2}-6z^{-1}}{-3-3z^{-1}-14z^{-2}}$

(2) $Y(z)=H(z)F(z)=\dfrac{2z^{-2}-6z^{-1}}{-3-3z^{-1}-14z^{-2}}F(z)$，

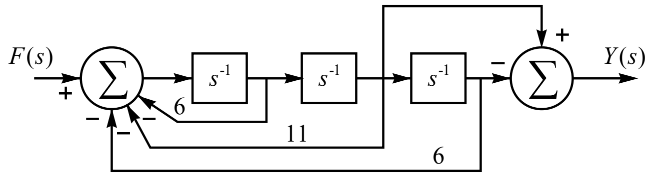
变形，得 $-3Y(z)-3z^{-1}Y(z)-14z^{-2}Y(z)=2z^{-2}F(z)-6z^{-1}F(z)$，

作逆 $z$ 变换，并整理，得 $y(k)+y(k-1)+\dfrac{14}{3}y(k-2)=2f(k-1)-\dfrac{2}{3}f(k-2)$

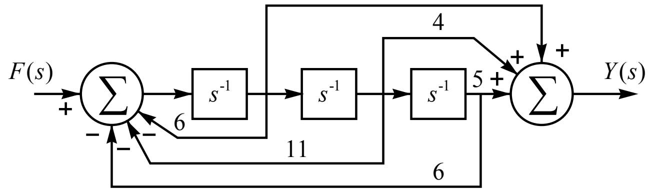
(3) 求 $H(z)$ 的极点，令 $-3-3z^{-1}-14z^{-2}=0$，得 $z_{1,2}=-0.5\pm\mathrm{j}2.1$，$\because |z_{1,2}|>1$，$\therefore$该系统不稳定。

## 7–3 系统模拟

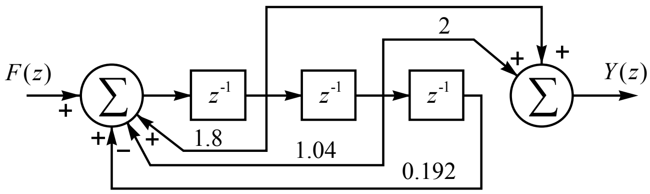
一、1.(a)



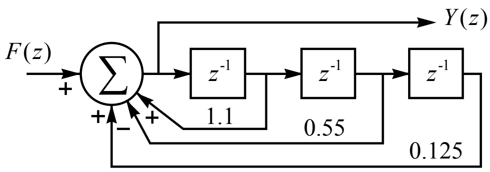

(b)




2.(a)




(b)




二、(a) 级联实现：$H(s)=\dfrac{s^2+s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\dfrac{1}{s+2}\cdot\dfrac{s^2+s+2}{s^2+2s+2}$，

令 $H_1(s)=\dfrac{s^2+s+2}{s^2+2s+2}=\dfrac{1+s^{-1}+2s^{-2}}{1+2s^{-1}+2s^{-2}}$， $H_2(s)=\dfrac{1}{s+2}=\dfrac{s^{-1}}{1+2s^{-1}}$，

上述一阶节与二阶节信号流图如图 1、图 2 所示，级联后可得 $H(s)$ 的信号流图如图 3 所示。

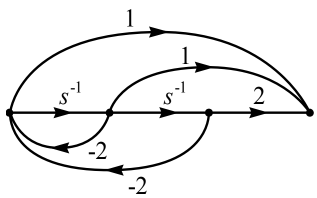



图 1

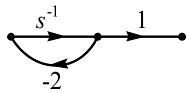



图 2

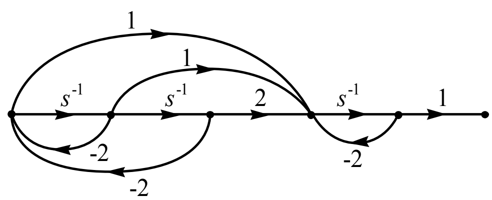
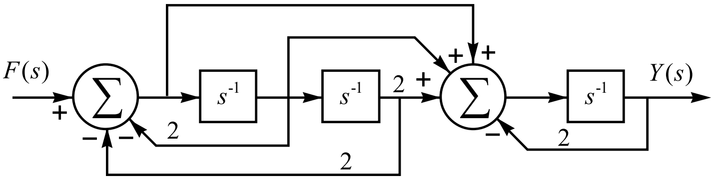



图 3

则相应的框图为




并联实现：$H(s)\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{-s-1}{s^2+2s+2}$，令 $H_1(s)=\dfrac{2}{s+2}=\dfrac{2s^{-1}}{1+2s^{-1}}$，$H_2(s)=\dfrac{-s-1}{s^2+2s+2}=\dfrac{-s^{-1}-s^{-2}}{1+2s^{-1}+2s^{-2}}$，

则 $H_1(s)$ 与 $H_2(s)$ 的信号流图分别如图 1、图 2 所示，并联后可得 $H(s)$ 的信号流图如图 3 所示。

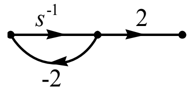



图 1

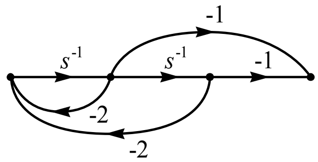



图 2

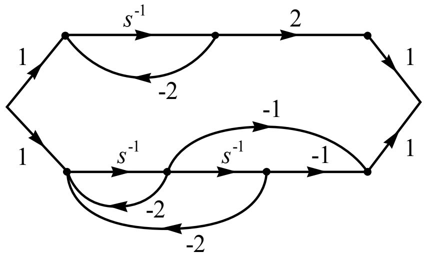
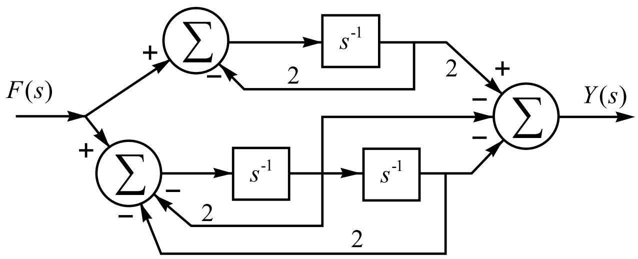



图 3

相应的框图为




$(b)$ 级联实现：$H(z)=\dfrac{z^2}{(z+0.5)^2}=\dfrac{z}{z+0.5}\cdot\dfrac{z}{z+0.5}$，

令 $H_1(z)=\dfrac{z}{z+0.5}=\dfrac{1}{1+0.5z^{-1}}$，$H_2(z)=\dfrac{z}{z+0.5}=\dfrac{1}{1+0.5z^{-1}}$，

$H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的信号流图分别如图 1、图 2 所示，级联后可得 $H(z)$ 的信号流图如图 3 所示。

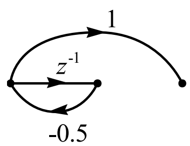



图 1

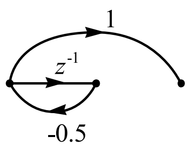



图 2

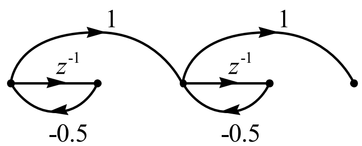
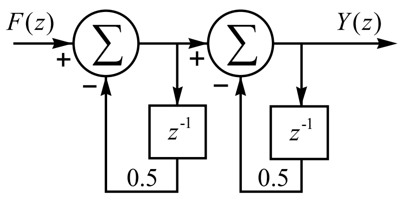



图 3

相应的框图为



并联实现： $H(z)=\dfrac{-0.5z}{(z+0.5)^2}+\dfrac{z}{z+0.5}$ ，令 $H_1(z)=\dfrac{-0.5z}{(z+0.5)^2}=\dfrac{-0.5z^{-1}}{1+z^{-1}+0.25z^{-2}}$ ，

$$H_2(z)=\frac{z}{z+0.5}=\frac{1}{1+0.5z^{-1}} ,$$

$H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的信号流图分别如图 1、图 2 所示，并联后得 $H(z)$ 的信号流图如图 3 所示。

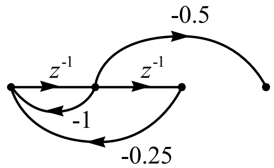



图 1

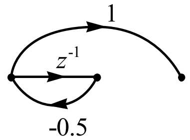



图 2

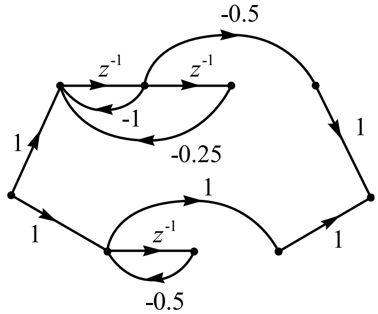
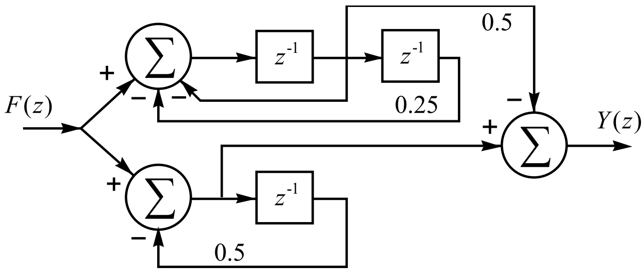



图 3

相应的框图为




三、(1) 将系统看成由上下两个子系统 $H_1(s)$ ， $H_2(s)$ 并联而成，

则 $H_1(s)=\dfrac{3s^{-2}+3s^{-1}}{1-(-2s^{-1}-2s^{-2})}=\dfrac{3s+3}{s^2+2s+2}$ ， $H_2(s)=\dfrac{3}{1-2}=-3$ ，

$$\therefore H(s)=H_1(s)+H_2(s)=\frac{3s+3}{s^2+2s+2}-3=\frac{-3s^2-3s-3}{s^2+2s+2}$$

(2) $Y(s)=H(s)F(s)=\dfrac{-3s^2-3s-3}{s^2+2s+2}F(s)$ ，

变形，得 $s^2Y(s)=2sY(s)+2Y(s)=-3s^2F(s)-3sF(s)-3F(s)$

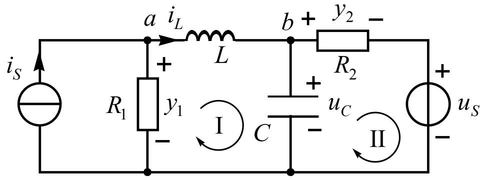
作拉氏逆变换，并整理，得 $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=-3f''(t)-3f'(t)-3f(t)$

(3) 求 $H(s)$ 的极点，令 $s^2+2s+2=0$ ，得 $s_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}$ ， $\because \mathrm{Re}[s_{1,2}]=-1<0$ ， $\therefore$ 该系统是稳定的。

# 第八章 系统的状态变量分析

## 8-1 连续系统状态方程列写

一、如图，由 KVL，可列出回路方程：$-y_1 + Li_L' + u_C = 0$ ①，$-u_C + y_2 + u_S = 0$ ②。




由 KCL，可列出节点 $a,b$ 方程：$i_S = i_L + \dfrac{y_1}{R_1}$ ③ $i_L = Cu_C' + \dfrac{y_2}{R_2}$ ④

联立以上四式，消去 $y_1, y_2$，得电路的状态方程

$u_C' = -\dfrac{1}{R_2C}u_C + \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{R_2C}u_S$，$i_L' = -\dfrac{1}{L}u_C - \dfrac{R_1}{L}i_L + \dfrac{R_1}{L}i_S$

矩阵形式 $\begin{bmatrix} u_C' \\ i_L' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_2C} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_2C} \\ \dfrac{R_1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ u_S \end{bmatrix}$

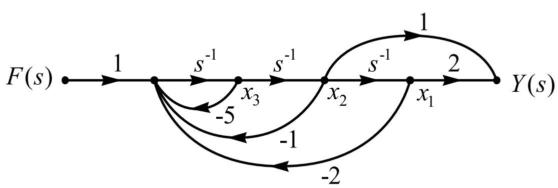
由②与③式，得 $y_1 = -R_1 i_L + R_1 i_S$，$y_2 = u_C - u_S$

矩阵形式 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \\ u_S \end{bmatrix}$

二、原方程作拉氏变换，得 $s^3Y(s) + 5s^2Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = sF(s) + 2F(s)$

整理，得系统函数 $H(s) = \dfrac{s+2}{s^3 + 5s^2 + s + 2} = \dfrac{s^{-2} + 2s^{-3}}{1 - (-5s^{-1} - s^{-2} - 2s^{-3})}$

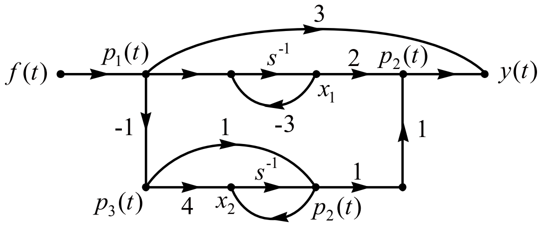
$H(s)$ 的信号流图为：




状态变量选取如上图，则 $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -2x_1 - x_2 - 5x_3 + f \end{cases}$，输出方程 $y = 2x_1 + x_2$，

矩阵形式 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} [f]$，$[y] = [2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

三、如图，引入中间变量 $p_1(t)$， $p_2(t)$， $p_3(t)$，由图可列出




$p_1 = f - p_3$ ①， $p_2 = 2x_1$ ②， $x_1' = p_1 - 3x_1$ ③， $p_3 = p_2 + 4x_2$ ④， $X_2(s) = (s^{-1} - 1)P_2(s)$ ⑤

将⑤式变形，并作拉氏逆变换，得 $x_2' = p_2 - p_2'$ ⑥，联立①②③④⑥式，消去 $p_1(t)$，$p_2(t)$，$p_3(t)$，

得状态方程 $x_1' = -5x_1 - 4x_2 + f$， $x_2' = 12x_1 + 8x_2 - 2f$，

输出方程 $y = 3p_1 + p_2 = 3(f - 2x_1 - 4x_2) + 2x_1 = -4x_1 - 12x_2 + 3f$

矩阵形式 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} [f]$，$[y] = [-4 \quad -12] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [3][f]$

四、(1) 设左端加法器的输出为 $p(t)$，由图可列出 $p = f - x_2$ ①， $X_1(s) = \dfrac{2}{s+a} P(s)$ ②，

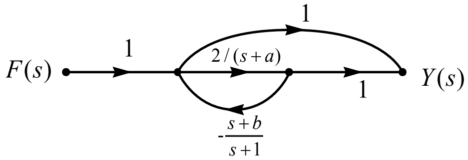
$X_2(s) = \dfrac{s+b}{s+1} X_1(s)$ ③，②与③式变形，并作拉氏逆变换，得 $x_1' = 2p - ax_1$ ④，

$x_2' = x_1' + bx_1 - x_2$ ⑤，联立①④⑤，消去 $p(t)$，得状态方程 $x_1' = -ax_1 - 2x_2 + 2f$，

$x_2' = (b-a)x_1 - 3x_2 + 2f$，输出方程 $y = p + x_1 = x_1 - x_2 + f$

矩阵形式 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -2 \\ b-a & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} [f]$，$[y] = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1][f]$

(2) 与系统框图相应的信号流图为




则系统函数为 $H(s) = \dfrac{1 + \dfrac{2}{s+a}}{1 + \dfrac{2}{s+a} \cdot \dfrac{s+b}{s+1}} = \dfrac{s^2 + (a+3)s + a + 2}{s^2 + (a+3)s + a + 2b}$，

将 $H(s)$ 的特征多项式系数排成罗斯阵列：

$$\begin{array}{ll} 1 & a+2b \\ a+3 & \\ a+2b & \end{array}$$

由罗斯准则，$a+3>0$，$a+2b>0$，即欲使系统稳定，$a,b$ 应满足 $a>-3$，$b>-a/2$。

## 8-2 离散系统状态方程列写

一、由信号流图可列出：$x_1(k+1)=f(k)+2x_2(k)$，$x_2(k+1)=-x_1(k)+x_1(k+1)-x_2(k)$，

整理，得状态方程：$x_1(k+1)=2x_2(k)+f(k)$，$x_2(k+1)=-x_1(k)+x_2(k)+f(k)$

输出方程：$y(k)=x_2(k+1)-x_2(k)=-x_1(k)+f(k)$

矩阵形式：$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[f(k)]$，$[y(k)]=[-1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+[1][f(k)]$

二、设 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 作 $z$ 变换后结果为 $X_1(z)$、$X_2(z)$、$X_3(z)$，$f(k)$、$y(k)$ 作 $z$ 变换后为 $F(z)$、$Y(z)$。

由信号流图，$\begin{cases}X_1(z)=X_2(z)\cdot\dfrac{z+1}{z+3}\\X_3(z)=X_1(z)\cdot\dfrac{z+1}{z-2}\\X_2(z)=[F(z)-2X_2(z)-X_3(z)]\cdot\dfrac{1}{z-1}\\Y(z)=X_1(z)-X_2(z)\end{cases}$，整理得 $\begin{cases}zX_1(z)+3X_1(z)=zX_2(z)+X_2(z)\\zX_3(z)-2X_3(z)=zX_1(z)+X_1(z)\\zX_2(z)-X_2(z)=F(z)-2X_2(z)-X_3(z)\\Y(z)=X_1(z)-X_2(z)\end{cases}$

作逆变换后得 $\begin{cases}x_1(k+1)+3x_1(k)=x_2(k+1)+x_2(k)\\x_3(k+1)-2x_3(k)=x_1(k+1)+x_1(k)\\x_2(k+1)-x_2(k)=f(k)-2x_2(k)-x_3(k)\end{cases}$，整理后得矩阵形式的状态方程和输出方程：

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&0&-1\\0&-1&-1\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}f(k)，\quad y(k)=x_1(k)-x_2(k)=\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}$$

三、(1) 由信号流图可列出状态方程 $x_1(k+1)=-0.5x_1(k)+f(k)$，$x_2(k+1)=0.5x_1(k)+2x_2(k)+f(k)$

输出方程 $y(k)=x_1(k)+x_2(k)$

矩阵形式 $\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5&0\\0.5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[f(k)]$，$[y(k)]=[1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$

(2) 各回路增益 $L_1=-0.5z^{-1}$，$L_2=2z^{-1}$，互不接触回路增益乘积为 $L_1L_2=-z^{-2}$

$\Delta=1-(-0.5z^{-1}+2z^{-1})-z^{-2}=1-1.5z^{-1}-z^{-2}$

各前向通路增益为 $P_1=z^{-1}$，$\Delta_1=1-2z^{-1}$；$P_2=z^{-1}$，$\Delta_2=1+0.5z^{-1}$；$P_3=0.5z^{-2}$，$\Delta_3=1$

由梅森公式，得 $H(z)=\dfrac{z^{-1}(1-2z^{-1})+z^{-1}(1+0.5z^{-1})+0.5z^{-2}}{1-1.5z^{-1}-z^{-2}}=\dfrac{2z^{-1}-z^{-2}}{1-1.5z^{-1}-z^{-2}}$

(3) $Y(z)=H(z)F(z)=\dfrac{2z^{-1}-z^{-2}}{1-1.5z^{-1}-z^{-2}}F(z)$，变形，得 $Y(z)-1.5z^{-1}Y(z)-z^{-2}Y(z)=2z^{-1}F(z)-z^{-2}F(z)$

作逆 $z$ 变换，得 $y(k)-1.5y(k-1)-y(k-2)=2f(k-1)-f(k-2)$