天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第21讲

5/25/2022 11:53:44 AM

内容：相似矩阵与矩阵的对角化等

第21讲：内容大概 Outline of lectures

1 特征值与特征向量；

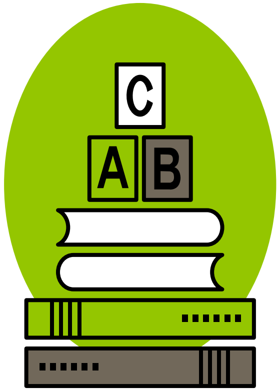
2 如何求特征值与特征向量；

3 特征值的性质；

4 相似矩阵；

5 矩阵的对角化；

6 实对称矩阵的对角化



一、特征值与特征向量定义

1. 特征值与特征向量的定义

定义： 设 A 是 n 阶矩阵，如果数λ和 n 维**非零向量** x 满足 $Ax=\lambda x$，那么这样的数 λ称为矩阵 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

例： $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\lambda=1$ 为 E的特征值，

任意非零向量 $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 为属于$\lambda=1$ 的特征向量.

2. 求特征值、特征向量方法

$\lambda x = Ax$ ⟺ 非零向量 x 满足 $(\lambda E - A)x = 0$

⟺ 齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 有非零解

⟺ 系数行列式 $|\lambda E - A| = 0$

特征方程

特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 特征方程 $|\lambda E - A| = 0$　　特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$

3. 求矩阵特征值和特征向量的一般步骤：

1. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 求出所有特征值 λ_i；

2. 对每个不同的特征值 λ_i 求齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的基础解系 $x_1, x_2, \ldots, x_t$.

属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$x = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_tx_t \quad (k_1, \ldots, k_t \text{不全为零})$$

【例题 1】求 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，特征值：$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$.

对于 $\lambda_1=-1$，方程 $(-E-A)X=0$ 的基础解系为 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，故矩阵 A 的属于特征值 -1 的全部特征向量为 $k_1p_1(k_1\neq 0)$；

对于 $\lambda_2=-2$，方程 $(-2E-A)X=0$ 的基础解系为 $p_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，故矩阵 A 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_2p_2(k_2\neq 0)$.

【例题 2】 求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$，特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解方程组 $(E-A)X=0$ 得：$p_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

故 A 的属于特征值 1 的特征向量为 $k_1p_1+k_2p_2$ (k_1,k_2 不全为零)；

对于 $\lambda_3=10$，解方程组 $(10E-A)X=0$ 得：$p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$，

故 A 的属于特征值 10 的全部特征向量为 $k_3p_3(k_3\neq 0)$.

【例题 2】 求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】：求三阶矩阵特征值的技巧；

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10)=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0\text{，}$$

特征值： $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$.

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解： $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$，

特征值： $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=2$，方程组 $(2E-A)X=0$ 的基础解系为 $p_1=(0,0,1)^T$，

故矩阵 A 的属于 2 的全部特征向量为 $k_1p_1(k_1\neq 0)$；

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，方程组 $(E-A)X=0$ 的基础解系为 $p_2=(1,2,-1)^T$，

故矩阵 A 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2p_2(k_2\neq 0)$.

三、特征值的性质

结 论：

①如果 λ 是矩阵 A 的单特征值，则 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系只有一个向量.

②如果 λ 是矩阵 A 的 k 重特征值，则 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系中最多有 k 个向量.

③ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 特征值为 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$

三、特征值、特征向量的性质

性质1： 矩阵A的任一特征向量所对应的特征值是唯一的。

性质2： 设x_1, x_2是A对应于特征值λ_0的两个特征向量，则非零线性组合$k_1x_1+k_2x_2$也是A对应于λ_0的特征向量。

矩阵	A	kA	A^m	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)$	$1/\lambda$	$\|A\|/\lambda$	λ
特征向量	x	x	x	x	x	x	

零化多项式： 使得$f(A)=0$的多项式$f(x)$.

（A的特征值λ必满足$f(\lambda)=0$）

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ 是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.（属于不同特征值的特征向量线性无关）

性质3

- n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr}(A)$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

迹： $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$（方阵 A 主对角线元素之和）

A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 均不为零

例 5 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$,试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4.

证 记 $\varphi(x)=x^2-5x+4$,则 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$$

即 $\varphi(x)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式.因此,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 必满足方程

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-4)(\lambda-1)=0$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4.

例 6 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,求 $|\boldsymbol{A}|$,并证明矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}$ 不可逆.

解 $|\boldsymbol{A}|=1\times2=2.$

由性质 4 知,$-1,0$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,从而 $|\boldsymbol{B}|=-1\times0=0$,故 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

四、相似矩阵的定义

一、相似矩阵

定义： 设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$P^{-1}AP = B$，则称矩阵 A 和 B 相似．记作 $A \sim B$．

称可逆矩阵 P 为相似变换矩阵.

性质： 若 $A \sim B$ $\Rightarrow$ $A^T \sim B^T$;

$\Rightarrow$ $A^{-1} \sim B^{-1}$（A可逆时）；

$\Rightarrow$ $f(A) \sim f(B)$;

$\Rightarrow$ $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$;
（有相同的特征多项式和特征值）

$\Rightarrow$ $|A| = |B|$, $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$;

例 10 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y.

解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 可知，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的迹、相同的行列式，即

$$\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}2+0+x=2+y+(-1)\\-2=|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=-2y\end{cases}$$

解得 $x=0,y=1$.

二、矩阵对角化

定义：若 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，称矩阵 A 可对角化.

思考：1）什么样的矩阵可以对角化?

2）若 n 阶矩阵 A 可以对角化，相似矩阵 P 如何求？对角矩阵 Λ 又如何求?

二、矩阵对角化

定义：若 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，称矩阵 A 可对角化.

① 对角矩阵Λ的主对角线上元素就是A的全部特征值.

② 当 $A\sim\Lambda$ 时，相似变换矩阵 P 的列向量就是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，排列顺序满足对应法则.

例1

$$A=\begin{pmatrix}5&0&4\\3&1&6\\0&2&3\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&3&\\&&7\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

不可对角化

二、矩阵对角化

定义： 若 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，称矩阵 A 可对角化.

定理： A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

推论：

1. n 阶方阵 A 有n 个互不相等的特征值 $\Longrightarrow$ A可对角化.

2. n 阶方阵 A可对角化

$\Longleftrightarrow$ A的每个r_i重特征值λ_i都有r_i个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_i E-A)=n-r_i$

例 12 判断矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 能否对角化，已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1$.

解 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，即重数 $r_i=2$，而

$$r(1\cdot \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2, \quad n-r_i=3-2=1$$

即

$$r(1\cdot \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq n-r_i$$

由推论知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似，即 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

例2 已知矩阵A的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1,$

讨论矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

能否相似于一个对角矩阵？为什么？

例3 设$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & x\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵$A$

可以对角化？并求A^{10}.

A 和 B 相似（$A \sim B$）： $P^{-1}AP = B$

A 和 B 相似，则有相同的特征多项式和特征值

判断可否对角化，并对角化的一般步骤：

1. 求特征值$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ；

（若$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互不相等，则A一定可对角化）

2. 求对应于λ_i的线性无关的特征向量；

（若A有n个线性无关的特征向量，则A可对角化）

3. 若A可对角化，$P=(P_1, P_2, \dots, P_n)$，则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

五、实对称矩阵的对角化（简介）

实对称矩阵：既是实矩阵又是对称矩阵（$A^T=A$）的方阵A

例：$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 特征值：-1,-1,8

特征向量：$p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

1. 实对称矩阵的特征值都是实数；

2. 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量一定正交；

3. n阶实对称矩阵A，λ是A的k重特征值，则方阵$r(\lambda E-A)=n-k$, 即λ恰有k个线性无关的特征向量；

结论：实对称矩阵一定可以对角化。

结论：实对称矩阵一定可以对角化。

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\quad Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}8&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}2/3&-1/\sqrt{5}&-4/3\sqrt{5}\\1/3&2/\sqrt{5}&-2/3\sqrt{5}\\2/3&0&5/3\sqrt{5}\end{pmatrix}\quad P^{T}AP=\begin{pmatrix}8&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

定理： 设A为阶实对称矩阵，则必存在正交矩阵P，使得 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$. Λ是对角矩阵，其主对角线上的元素是A的n个特征值.

把实对称矩阵 A 对角化的步骤为:

1. 求出 A 的所有各不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，它们的重数依次为$k_1, k_2, \ldots, k_s$（$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$）.
2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求$(\lambda_i E - A)x = 0$的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量 $P_1, P_2, \ldots, P_{ki}$.
3. 把 $P_1, P_2, \ldots, P_{ki}$ 正交化、单位化，得到 k_i 个两两正交的单位特征向量$e_1, e_2, \ldots, e_{ki}$.
4. 令$P=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$，则$P$为正交阵，且有

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda .$$

Λ 中对角元的排列次序应于中列向量的排列次序相对应.

例1 实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

求正交矩阵P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例2 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^{50}$.

二. 选择题

1. 设 A 为 n 阶方阵，则（　　）.

(A) A 的全部特征向量构成向量空间；　(B) A 有 n 个线性无关的特征向量；

(C) A 的全部特征值的和为 $\mathrm{tr}(A)$；　(D) A 的全部特征值的积为 $\mathrm{tr}(A)$.

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&b&1\end{pmatrix}$ 的特征值可能是（　　）.

(A) 1，4，0；　(B) 1，3，0；　(C) 2，4，0；　(D) 2，4，-1.

3. 设A是n阶方阵，$\lambda=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2n}$是$A$的$n$个特征值，求行列式$|A^{-1}-3E|$的值.

二. 选择题

1. 与矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$不相似的矩阵是（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}3&5\\0&1\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

2. 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$为n阶方阵，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$的关系不正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；　(B) $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C}$；　(C) $|A|=|C|$；　(D) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

三. 证明题

1. 设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，如果矩阵$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$、$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$均不可逆，证明$\boldsymbol{A}$可以对角化.

二. 选择题

1. 设 A 为 n 阶实对称正交矩阵，且 1 为 A 的 2 重特征值，则与 A 相似的一个对角矩阵为（　　　）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$;

(D) 条件不足，不能确定上述矩阵是否与 A 相似.

二. 选择题

1. 设$\lambda=2$是非奇异矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于（　　）

(A) $\frac{4}{3}$;　　(B) $\frac{3}{4}$;　　(C) $\frac{1}{2}$;　　(D) $\frac{1}{4}$.

2. 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$(　　).

(A) 3;　　(B) 2;　　(C) 1;　　(D) 0.

六、练习题

三、解答题（共 4 题，每题 12 分，共 48 分. 需写明计算过程.）

1. 求非齐次线性方程组的通解
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4. \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

解：$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4} \\ x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4} \end{cases}$ x_3, x_4 为自由未知量

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 得基础解系为：

$\xi_1=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1,0\right)^T$, $\xi_2=\left(-\frac{3}{4},\frac{7}{4},0,1\right)$,

特解 $\eta^*=\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},0,0\right)$,

$\therefore$ 原方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta^*$

k_1, k_2 为任意常数。

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个极大线性无关组，并把其余列向量用极大无关组线性表示.

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∴列向量组的秩为3，

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大无关组，且

$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$

3. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解：先正交化：$\beta_1=\alpha_1$；

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

单位化得：$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，

$\gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，

注：β_2可按$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$往下计算

4. 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ (1) 求 A 的特征值及对应的特征向量； (2) 求可逆阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解：① $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$

得 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$ 为特征值；

当 $\lambda_1=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

故 A 的关于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $x=k_1\xi_1$，$k_1\neq 0$

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-A)x=0$ 得

$\xi_2=(0,1,1)^T$，$\xi_3=(1,0,0,1)^T$，故

特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$，k_2，k_3 不同时为 0

② 令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 P 可逆，且

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

设 $A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，且 B、C 都可逆，求 A^{-1}；

解：设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$，则 $AA^{-1}=E$，

即 $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} BR & BS \\ CP & CQ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$

$\therefore S=O$，$P=O$，$R=B^{-1}$，$Q=C^{-1}$，

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$