天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第4讲

3/9/2022 8:04:40 PM

内容：行列式的展开定理与计算等

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

第四讲内容大概 Outline

1.上次内容回顾；

2. 行列式的展开定理；

3. 高阶行列式的计算；

4. 特殊行列式的结论；

5. 克莱姆法则简介；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

本节要求：记住6个性质和一个推论

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

2）互换行列式的两行（列），行列式变号.

3）D中某一行（列）的公因子可以提取出来

4）性质4及其推论：行列式中有两行（列）元对应相等(成比例，推论)时，该行列式等于零.

5）行列式具有分行（列）相加性。

6）行列式中有某一行（列）各元素乘以同一个数再加到另一行（列）对应元素上，行列式不变.

行列式的性质的推导或例举

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} a & x & m & 3 \\ b & y & n & 4 \\ c & z & p & 5 \\ d & u & q & 6 \end{vmatrix}$$

行列式D的第i行元素，变成新行列式的第j列，则新行列式即为D的转置行列式，简称转置，记为D^T； $D = D^T$

行列式的性质的推导或例举

2）互换行列式的两行（列），行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

换行了，别忘记写负号

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ m & p & n \end{vmatrix}$$

换列也得写负号

推论：行列式有两行（列）元素对应相等，则行列式的值为0.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=-D$$

$$\therefore \quad 2D=0 \Rightarrow D=0$$

行列式的性质的推导或例举

3）行列式中某一行（列）的公因子可以提取出来。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

行列式列里的公共倍数也能提取出来

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

设 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$， 那么 $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -2d & -2e & -2f \\ -2g & -2h & -2k \end{vmatrix} = ??$

答案：$-8D$

行列式的性质的推导或例举

推论：行列式中有两行（列）元素对应成比例时，该行列式等于零.

不必计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & -14 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

事实上，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & -14 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

行列式的性质的推导或例举

推论：行列式中有两行（列）元素对应成比例时，该行列式等于零.

不必计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} & 3a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

行列式的性质的推导或例举

5）行列式具有分行（列）相加性，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+(-2) & 2+4 & 3+5 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

6）行列式中有某一行（列）各元素乘以同一个数再加到另一行（列）对应元素上，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x-2a & y-2b & z-2c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

即：行列式中第一行各元素（a，b，c）分别乘以-2，对应加到第二行各元素上，行列式值不变.

行列式的性质的推导或例举

6）行列式中有某一行（列）各元素乘以同一个数再加到另一行（列）对应元素上，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x-2a & y-2b & z-2c \\ m & p & n \end{vmatrix}$$

运用性质5可以证明上面结论：.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x-2a & y-2b & z-2c \\ m & p & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

如何求解四阶数字行列式？（方法1）

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = ??$$

学完本节，能用性质把这个行列式化成三角形行列式，然后求出结果。

例题：求行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 7 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

解： $$D=\begin{vmatrix}8&7&-6&2\\1&-3&0&2\\-2&1&2&4\\6&2&-1&10\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\8&7&-6&2\\-2&1&2&4\\6&2&-1&10\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&31&-6&-14\\0&-5&2&8\\0&20&-1&-2\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&1&6&34\\0&-5&2&8\\0&0&7&30\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&1&6&34\\0&0&32&178\\0&0&7&30\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&1&6&34\\0&0&32&178\\0&0&0&30-178\times\dfrac{7}{32}\end{vmatrix}=-286$$

注：为了便于计算，引入记号

（1）r_i: 第i行，c_j: 第j 列.

（2）$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$互换 i 行（列）与 j 行（列）.

（3）$kr_i\,(kc_i)$: 用k乘以第 i 行（列）.

（4）$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 第 j 行（列）元素乘k再加到第 i 行（列）上去.

§ 0.1 作业释疑

1. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$ ______; $\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & 2a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$ ________.

2. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$，则 $\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix} =$ ________.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1+2+3 & 2+3+4 & 3+4+1 & 4+1+2 \end{vmatrix} =$ ________.

§0.1 作业释疑

4. 行列式$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} =$ ________

主要结论以及例题回顾

$$(6)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 5 & 10 & 22 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 5 & 10 & 22 & -10 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 5 & 10 & 22 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$$(8)\quad \begin{vmatrix} 5 & 11 & 22 & -10 \\ 2 & -5 & -10 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \\ 5 & 10 & 20 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

§0.1 作业释疑

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

二、行列式的代数余子式

行列式的代数余子式

一、代数余子式

在n阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第i行和第j列划去，留下的n-1阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

在四阶行列式D中

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & -3 & 7 \\ 8 & 4 & -2 & -9 \end{vmatrix}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix} \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

元素a_{ij}的余子式及其代数余子式与元素a_{ij}本身及其所在行、列元素无关.

练习：在四阶行列式D中

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

试写出 $M_{12} = \underline{\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}}$　　$A_{32} = \underline{(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}$

三阶行列式展开式用代数余子式描述

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}\times A_{11}+a_{12}\times A_{12}+a_{13}A_{13}$$

行列式按行（列）展开定理

定理： n 阶行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

行列式按行（列）展开的意义

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -4 & 7 & -8 & -5\\ 2 & -4 & 7 & 7\end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -4 & 7 & 8 & -5\\ 2 & -4 & 7 & 7\end{vmatrix}=A_{11}-3A_{12}+4A_{13}+2A_{14}$$

4阶行列式的计算转化成为3阶行列式的计算

行列式按行（列）展开的意义

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}=A_{21}+0A_{22}-2A_{23}-A_{24}$$

意义：计算时选择按第二行展开，比按第一行展开，计算量就相对小一些。

例题：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

例题：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

解：$$D \xlongequal[c_1+c_4]{2c_1+c_3} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -12 & -9 \\ 2 & -4 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 7 & -12 & -9 \\ -4 & 11 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_1+c_3]{2c_1+c_2} -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 48$$

例 11 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 9 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

开

解：

$$D_4 \xlongequal{c_4+2c_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 19 \\ -2 & 6 & 1 & -4 \\ 6 & 10 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 19 \\ 6 & 1 & -4 \\ 10 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_2} 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 19 \\ 6 & 1 & -4 \\ 22 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\times1\times\begin{vmatrix} -1 & 19 \\ 22 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(1-19\times22)$$

$$=-834$$

注：按第三列展开也是不错选择

例 12 计算行列式

代数余子式重要性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

具体的例子（重要）：

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

1) $D=8A_{11}+9A_{12}+7A_{13}+(-4)A_{14}$

2) $D=2A_{22}+4A_{24}$

3) $D=9A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+3A_{42}$

4) $9A_{14}+2A_{24}+2A_{34}+3A_{44}=0$

5) $8A_{31}+9A_{32}+7A_{33}+(-4)A_{34}=0$

再来理解结论：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

2022年3月9日8时4分

【填空练习】

已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ x & -2 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式，则：

（1） $3A_{11}+5A_{13}+9A_{14}=$ ____________

（2） $7A_{23}+5A_{33}=$ ____________

（3） $7A_{21}+5A_{31}=$ ____________

（4） $4A_{41}+A_{42}+2A_{44}=$ ____________

三、高阶行列式的计算

【利用展开定理和性质计算】

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

【利用展开定理和性质计算】

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

【利用展开定理和性质计算】

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix}$

【利用展开定理和性质计算】

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 10 & 18 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

【利用展开定理和性质计算】

5. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

四、特殊行列式的计算

具体的例子:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 21$$

特色例题：Special example

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = ??$$

$$= axnv - bymu$$ X

四阶行列式不能用对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} = (av - ub)(xn - my)$$

推导过程在下页

按第一行展开可得结果，记结论

后加的关于结论的推导：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & v \end{vmatrix} + b(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & m & n \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= av\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} - bu\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} = (av - bu)(xn - my)$$

$$= avxn - avmy - buxn + bumy$$