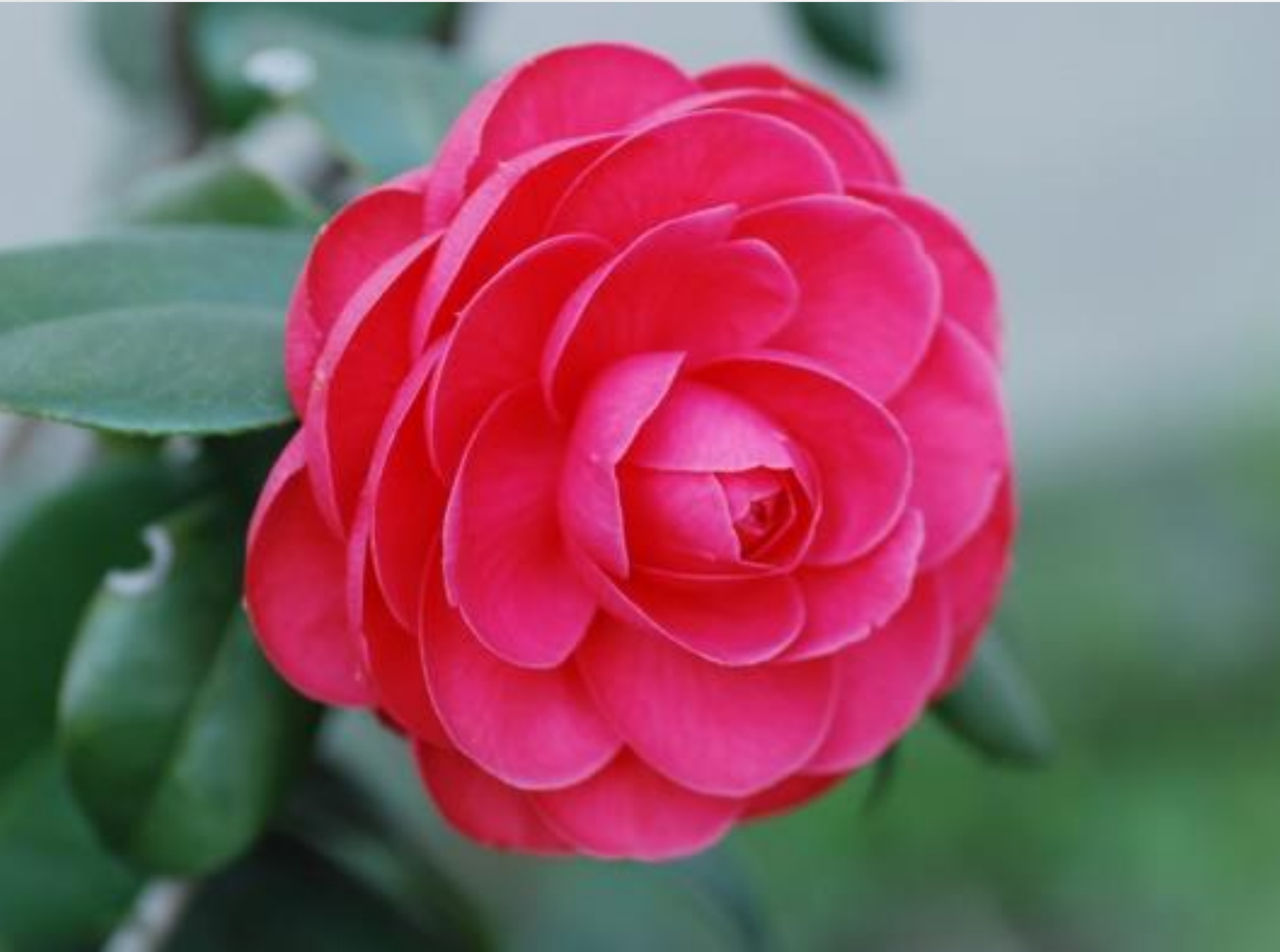
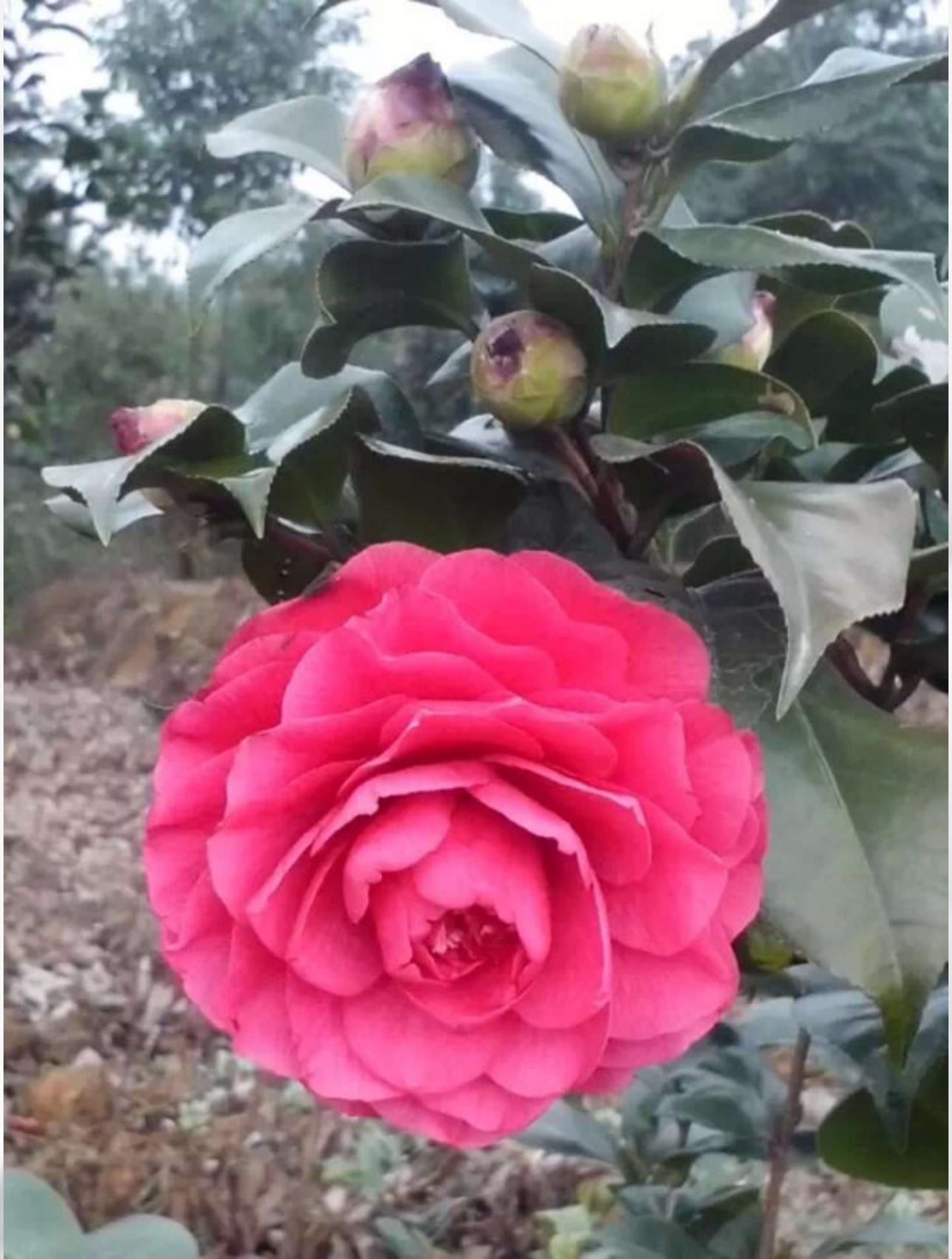
天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

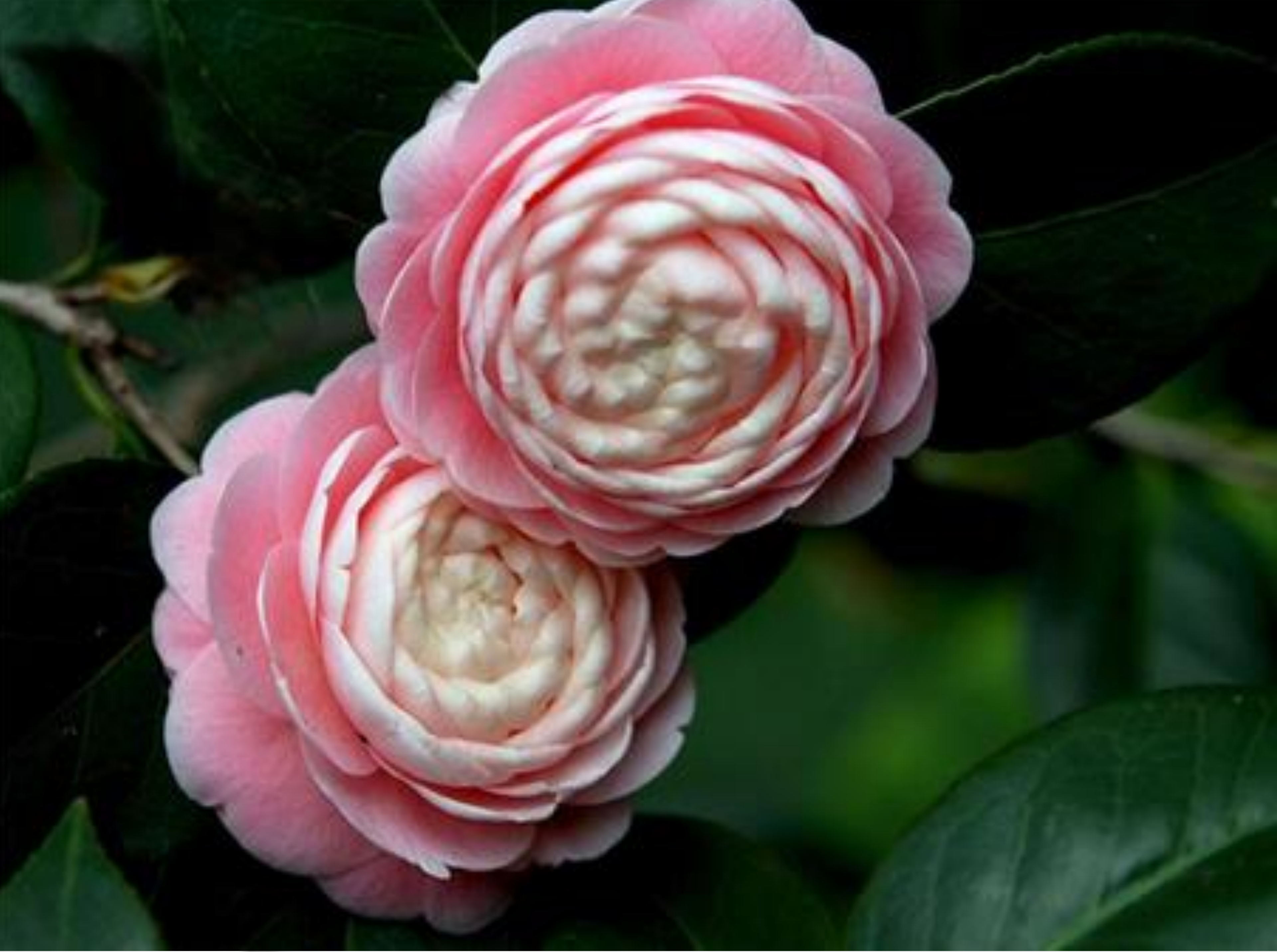
线性代数第11讲

4/6/2022 1:12:31 PM

内容：矩阵的初等变换等







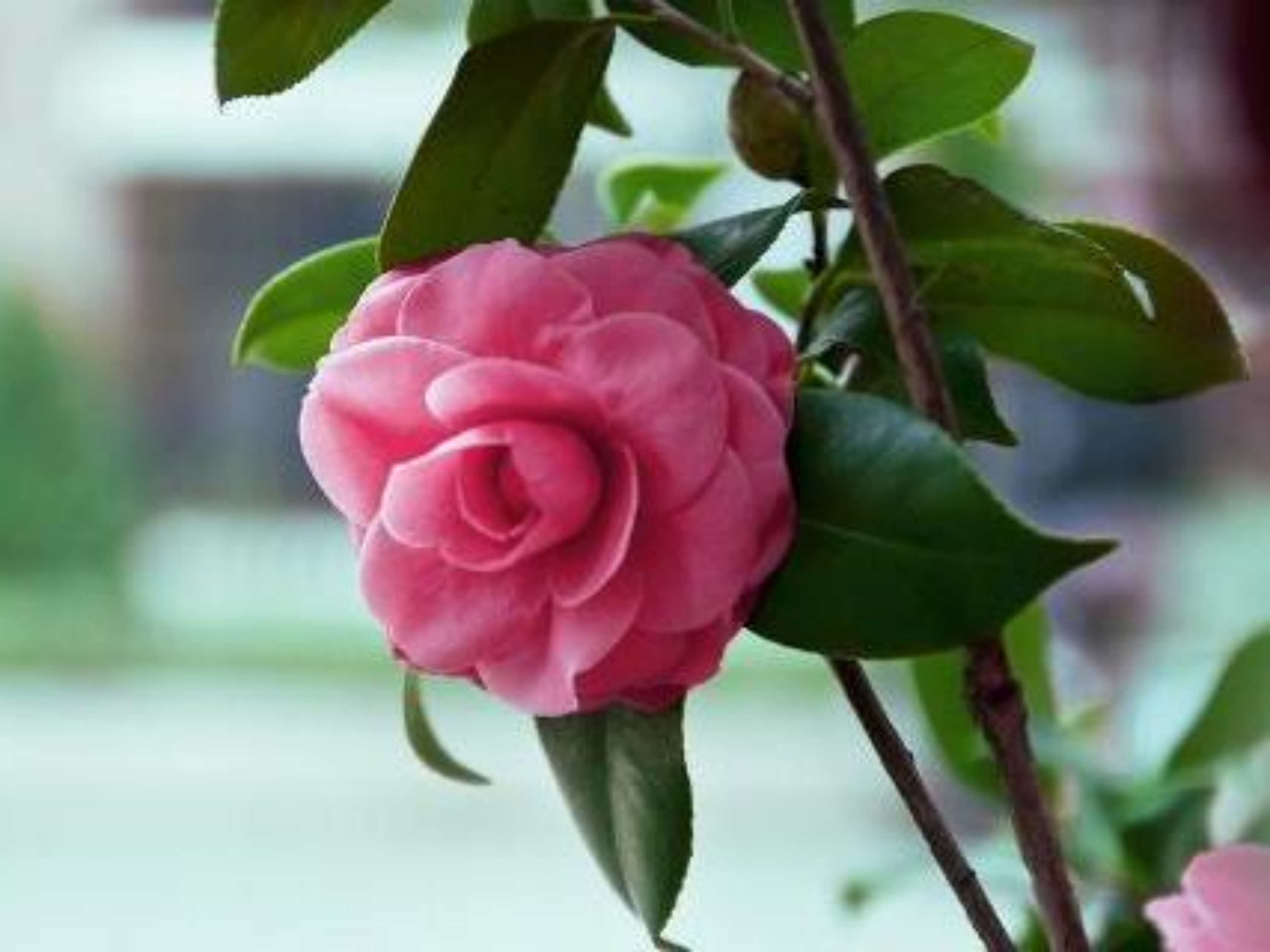
山茶花 【杨慎】

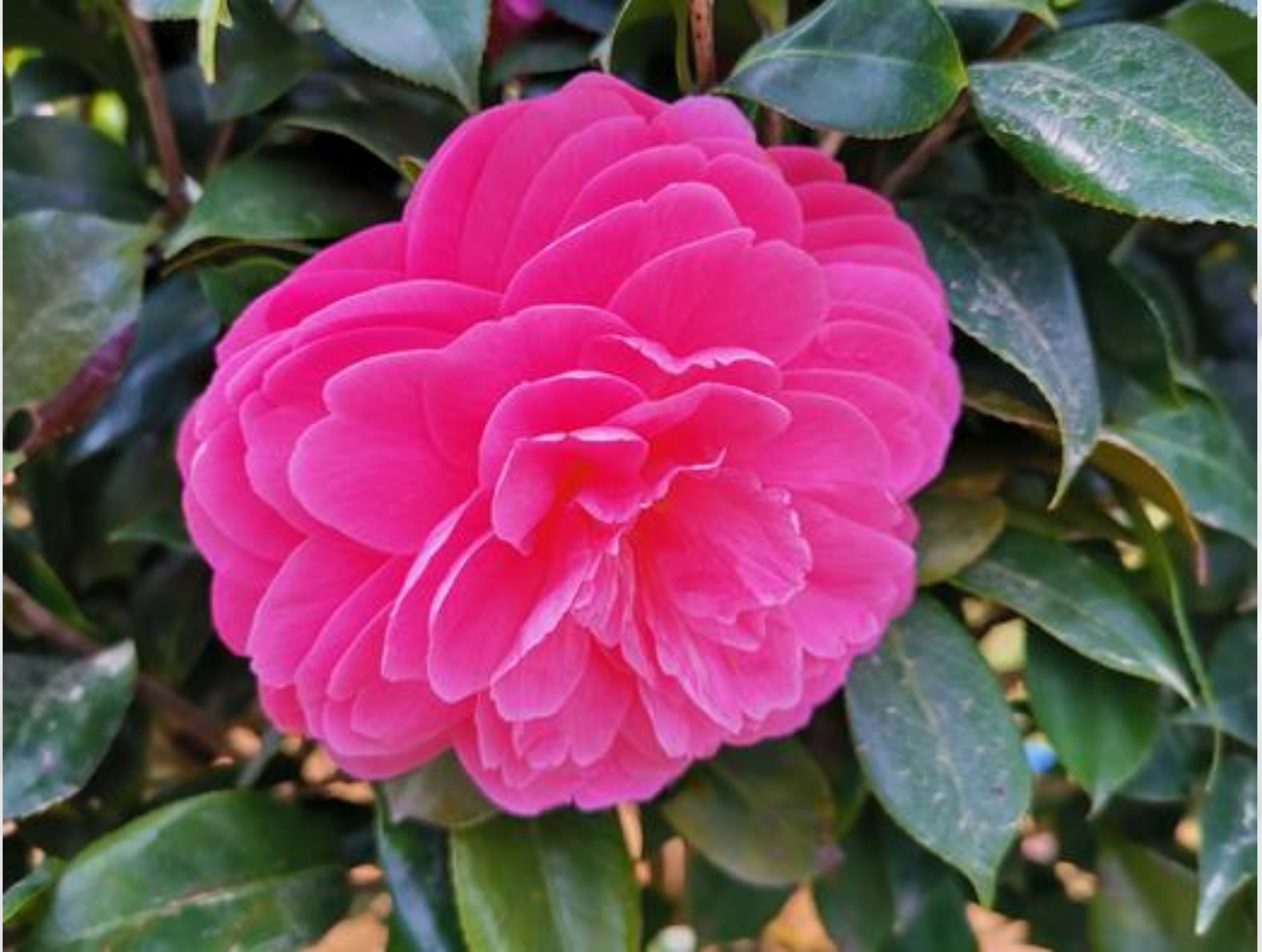
绿叶红英斗雪开，黄蜂粉蝶不曾来；
海边朱树无颜色，羞把琼枝照玉台。

山茶花

[宋] 俞国宝

玉洁冰寒自一家，地偏惊此对山花。
归来不负西游眼，曾识人间未见花。





第11讲内容大概 Outline

1. 逆矩阵回顾；
2. 高斯消元法；
3. 矩阵的初等变换；
4. 初等矩阵；
5. 初等变换法求逆矩阵；

主讲：邱玉文

第1部分：逆矩阵性质复习

Part One: Explanation of definition

矩阵的定义及判断

1. 矩阵A可逆定义$AB=BA=E$

2. 矩阵A如果可逆，其逆矩阵必然唯一，可以将其记为A^{-1}

3. 如果两个方阵A，B满足AB=E，则B=A^{-1}　　记第3条就行

定理2：方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$，**且当A可逆时，**

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}$$

会求逆矩阵

关于伴随矩阵 $AA^{*}=A^{*}A=|A|\cdot E$ 或者 $A^{*}=|A|A^{-1}$

4. 矩阵可逆的充分必要条件

Necessary and Sufficient Conditions for reversibility of Matrix

由 $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ 推出的重要结论：

定理2：方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$，**且当A可逆时，**

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

另一个重要结论：A可逆时， $A^* = |A|A^{-1}$

逆矩阵性质 Properties of Inverse Matrix

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda \neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

(4) 若A可逆,则A^{T}亦可逆,且$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$.

(5) 若A可逆,有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}$.

逆矩阵性质的例子 Examples of Properties of Inverse Matrix

设A是3阶方阵，$|A| = 10$，求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - \frac{1}{2}A^*\right|$.

解 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - \frac{1}{2}A^*\right| = \left|3A^{-1} - \frac{1}{2}|A|A^{-1}\right|$

$$= \left|-2A^{-1}\right| = (-2)^3\frac{1}{|A|} = -\frac{4}{5}.$$

练习：设A为一个三阶方阵， $|A|=\frac{1}{2}, A^*$ 为 A 的伴随矩阵，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解 $\because AA^{-1}=I$ 及 $|A|=\frac{1}{2}, \therefore \left|A^{-1}\right|=2$

由 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，知 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|$$

$$=(-\frac{2}{3})^3\left|A^{-1}\right|=-\frac{16}{27}.$$

先讲后练 Example first, then practice

例14 $|A|=3$, A为4阶方阵，求$|A^*|$.

解: $\because \ A^* = |A|A^{-1} = 3A^{-1}$

$\therefore \ |A^*| = |3A^{-1}| = 3^4 \cdot |A^{-1}| = 3^4 \cdot \frac{1}{3} = 3^3 = 27.$

关于伴随矩阵，记住 $A^* = |A|A^{-1}$

先讲后练 Example first, then practice

例题： 已知$A^2-3A-E=0$，证明：$A-E$可逆. 并写出逆矩阵

解： $\because\ A^2-3A-E=O$

$\therefore\ (A-E)(A-2E)=A^2-3A+2E=E+2E=3E$

即 $(A-E)(A-2E)=3E \Rightarrow (A-E)\cdot\frac{1}{3}(A-2E)=E$

$\therefore\ (A-E)^{-1}=\frac{1}{3}(A-2E).$

小结：考虑(A–E)(？)=E?

提示：方阵$AB=E$，则A可逆

退一步考虑，(A–E)(？)=kE?

已知条件 $A^2-3A-E=O$ **如何使用?**

逆矩阵的消去律 Elimination law of inverse matrix

$AB = AC,$ A可逆 $\Longrightarrow B = C$

$AB = AC \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC$

$\Longrightarrow B = C$

$AB = O,$ A可逆 $\Longrightarrow B = O$

结论：（1）*A*可逆时，*AB*=*O*是*B*=*O*的充分必要条件；

（2）*A*可逆时，*AB*=*AC*是*B*=*C*的充分必要条件

矩阵方程 Matrix equation

1. 当矩阵A可逆时，由 $AB=C$, 可得：$B=A^{-1}C$

2. 当矩阵A可逆时，由 $BA=C$, 可得：$B=CA^{-1}$

3. 当矩阵A和B都可逆时，

由 $AXB=C$, 可得：$X=A^{-1}CB^{-1}$

矩阵没有除法，靠两边同时**同侧**乘以A^{-1}而消除A

$$AB=C \Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}C \Rightarrow (A^{-1}A)B=A^{-1}C \Rightarrow B=A^{-1}C$$

解矩阵方程$AXB=C$，其中$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}$.

解: $|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$，知A，B皆可逆，

$$X=A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$$

其中 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-2/3&-3&5/2\\1&1&-1\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$,

于是 $X=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-2/3&-3&5/2\\1&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{bmatrix}$

矩阵方程练习：Exercise of Matrix Equation

已知 $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$ 求$\boldsymbol{A}$，使得 $AB=C$

第2部分：高斯消元法

Part Two：Gauss elimination

例 26 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-5x_2+4x_3=4\\ x_1+\ x_2-2x_3=-3\\ 5x_1-2x_2+7x_3=22\\ 3x_1-4x_2+2x_3=1\end{cases} \qquad (5)$$

解 将方程组中的第一、第二个方程位置互换，得

$$\begin{cases}x_1+\ x_2-2x_3=-3\\ 2x_1-5x_2+4x_3=4\\ 5x_1-2x_2+7x_3=22\\ 3x_1-4x_2+2x_3=1\end{cases}$$

第一个方程分别乘−2、−5 和−3，加到第二、第三和第四个方程上，消去这三个方程中的 x_1 项，有

$$\begin{cases}x_1+x_2-\ 2x_3=-3\\ -7x_2+\ 8x_3=10\\ -7x_2+17x_3=37\\ -7x_2+\ 8x_3=10\end{cases}$$

将第二个方程乘-1分别加到第三、第四个方程上，有

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3 \\ \quad -7x_2+8x_3=10 \\ \qquad\qquad 9x_3=27 \end{cases} \tag{6}$$

第四个方程化成0=0，表明这个方程是多余方程，方程组(6)的解与原方程组(5)的解完全相同，这一过程称为消元过程.方程组(6)中自上而下的各方程未知量个数依次减少.这样的方程组称为**阶梯形方程组**.

在方程组(6)中的第三个方程两边同时除以9，得 $x_3=3$，将 $x_3=3$ 代入方程组(6)的第二个方程，可求得 $x_2=2$.最后，将 $x_2=2,x_3=3$ 代入方程组(6)的第一个方程，可得 $x_1=1$，所以原方程组(5)的解为

$$x_1=1,x_2=2,x_3=3$$

由阶梯形方程组依次求得各未知量的过程，称为回代过程，线性方程组的这种解法称为消元法.

【解方程组的初等变换】

（1） 交换两个方程的位置；

（2） 以一个非零数 k 乘以一个方程的两边；

（3） 一个方程各项乘以同一数 k 后加到另一个方程上.

这三种变换称为方程组的初等变换.

第3部分：矩阵的初等变换

Part Three： Elementary transformation of matrix

增广矩阵 Augmented matrix

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+z=4 \\ -x-y+2z=3 \end{cases}$$ 可以记为 $$(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-5y+4z=4 \\ x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 3x-4y+2z=1 \end{cases}$$ 可以记为 $$(A|b)=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 7 & 22 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

这种全面记录线性方程组的矩阵称为增广矩阵

求解线性方程组即为对方程组施行若干次初等变换，这些变换可以转化为对增广矩阵的操作。

方程组求解和矩阵的行变换举例

$$\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ x+4y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y=9 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y=9 \\ -14y=-28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4y=9 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

可以用增广矩阵模拟上述解方程组过程

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & -14 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 矩阵初等行变换

Elementary Row Transformation of Matrix

在上述解线性方程组的过程中，我们对方程组反复施行了以下三种变换：

(1) 交换两个方程的位置；

(2) 以一个非零数 k 乘一个方程的两边；

(3) 将一个方程各项乘同一数 k 后加到另一个方程的对应各项上.

这三种变换称为方程组的初等变换.

定义 10 下列三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 交换矩阵的第 i 行和第 j 行，记作 $r_i \longleftrightarrow r_j$；

(2) 以数 $k(k\neq 0)$ 乘矩阵第 i 行的各元，记作 kr_i；

(3) 将矩阵的第 i 行各元乘数 k 加到第 j 行各对应元上，记作 r_j+kr_i.

通常称(1) 为对调行变换，(2) 为倍乘行变换，(3) 为倍加行变换.

2. 矩阵初等变换

矩阵的初等**列**变换与初等**行**变换统称为矩阵的**初等变换**.

矩阵经有限次初等变换化成新的矩阵，则这两个矩阵是同型矩阵。

矩阵经有限次初等变换化成新的矩阵，则两个矩阵称为等价矩阵。记为$A \rightarrow B$，**或者$A \cong B$**

初等变换的逆变换 Inverse transformation

初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i \times k$ 逆变换 $r_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $r_i \div k$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

3. 矩阵的等价

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B 等价，记作$(A \sim B)$

等价关系的性质：

(1) 反身性：$A \to A$;

(2) 对称性：若$A \to B$, 则 $B \to A$;

(3) 传递性：若$A \to B, B \to C$, 则 $A \to C$.

具有上述三条性质的关系称为等价关系.

等价关系是逻辑关系，不仅仅在数学课程里才有

阶梯形方程组的意义

$$\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ \quad -7y+8z=10 \\ \qquad\quad 9z=27 \end{cases}$$

1. 方程组的该形式是阶梯形方程组；
2. 此时能看出有几个有用的方程；
3. 此时能看出方程组解的情况，有无解，唯一解，还是无穷多解；
4. 此时确定了未知数的主未知数；

第3部分：矩阵的行标准型

Part Three： Elementary transformation of matrix

行阶梯形矩阵特点：

（1）可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

（2）每个台阶只有一行，有一个主元素

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的意义在于确定初等行变换以后，矩阵有几个零行和非零行.

行最简形矩阵特点：

矩阵 B_2 称为 A 的行最简形矩阵(reduced row echelon matrix)，其特点是：

（1） B_2 是一个行阶梯形矩阵；

（2） 所有主元素都是 1,主元素所在列的其余元素均为 0.

行最简形矩阵的例子:

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$是行阶梯形矩阵。

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是行最简形矩阵。

第4部分：矩阵的等价标准形

Part Four：Equivalent canonical form of matrix

矩 阵 的 标 准 形

（1） 任何一个非零矩阵都可以用若干次初等行变换化成行阶梯形矩阵；

（2） 任何一个矩阵都可以通过有限次初等行变换化成行最简形矩阵；

（3） 任何一个矩阵都可以通过有限次初等变换(行换和列换）化成标准形。

A通过初等行变换化成行阶梯形B，继续用初等行变换化成行最简形C，用初等列变换化成标准形D

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 6 \\ -1 & -3 & 4 & -17 \\ 1 & 4 & -7 & 3 \\ -1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -143 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的等价标准形

$$B_5=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&4\\0&1&0&-1&3\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=F$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的标准形.

行最简形矩阵再经过初等列变换，可化成标准形.

矩阵的等价标准形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

特点： F的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零.

$m \times n$ 矩阵 A 总可经过初等变换化为标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

此标准形由m,n,r 三个数唯一确定，其中r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

矩阵的等价标准形

记矩阵的等价标准形为$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}_{m\times n}$。

其特点是：**F** 的左上角（分块时的一个子块）是一个单位矩阵E_r，其余元素都是零.

需要指出的是，$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}_{m\times n}$ 仅仅是等价标准形的一个记号，

矩阵的等价标准形

任意一个 3 行 4 列的矩阵 $A_{3\times4}$ 为例，它的等价标准形为以下四个矩阵之一：

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第5部分：初等矩阵

Part Five： Primary matrix

初等矩阵 Elementary matrix

以 $n=3$ 为例，

$$E(2,3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\qquad E\big((-3)2\big)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$E\big(2+(-5)3\big)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

初等矩阵 Elementary matrix

对于 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$，有

$$E(2,3)\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

A 的右边乘以 $E((-3)2)$，相当于将 A 的第 2 列乘以倍数 -3 .

初等矩阵 Elementary matrix

设A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

初等矩阵 Elementary matrix

初等矩阵的行列式都不等于 0，因此初等矩阵是可逆的：

(1) $|E(i,j)|=-1$； 且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$.

(2) $|\mathbf{E}((k)i)|=k\neq 0$； 且 $\mathbf{E}((k)i)^{-1}=E\left(\left(\frac{1}{k}\right)i\right)$.

(3) $|\mathbf{E}(i+(k)j)|=1$； 且 $\mathbf{E}(i+(k)j)^{-1}=E(i+(-k)j)$

第6部分：初等变换法求逆

Part Six： Solving inverse matrix by ETM

已知：$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$,用初等变换法求 A^{-1}

初等变换法求逆矩阵的理论支撑

1. 矩阵A若可逆，则其等价标准形必然是单位矩阵E;

2. 矩阵A若可逆，必能通过初等变换把A化成E;

3. 矩阵A若可逆，必能仅通过初等行换把A化成E;

4. 矩阵A若可逆，把A化成E的那些变换，依次施加到E上，能把E化成A^{-1};

5. 矩阵A若可逆，把A化成E的那些变换，依次施加到B上，能把B化成$A^{-1}B$;

理论支撑的分条解释

定理　矩阵 A 可逆充分必要条件 A 可以只通过有限次初等行变换化成单位矩阵 E。

证明：首先证矩阵 A 可逆，充分必要条件 A 的等价标准形是 E。设 $A \to \cdots \to \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

则 $P_1P_2\cdots P_sAQ_1\cdots Q_t=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，由 $|A|\neq 0, |P_i|\neq 0, |Q_j|\neq 0$, 所以等号右边的等价标准形矩阵只能是单位矩阵 E。

理论支撑的分条解释

定理：矩阵A可逆充分必要条件A可以只通过有限次初等列变换化成单位矩阵。

推论：（1）矩阵A可逆，充分必要条件A可以表示成有限个初等矩阵的乘积。

（2）两个同型矩阵等价的充分必要条件是存在可逆矩阵P,Q，使 B=PAQ

理论支撑的分条解释

定理 10 设 n 阶矩阵 A 可逆，则对 A 施以有限次初等行变换必可将 A 化成单位矩阵 E，而单位矩阵 E 经过相同的初等行变换必可化成 A^{-1}.

证 根据定理 9，若 A 可逆，则 A 与 E 等价，即存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E$$

因为初等矩阵均可逆，上式两边依次右乘 $Q_t^{-1}, \cdots Q_2^{-1}, Q_1^{-1}$，得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = E Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} = Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} \cdot E$$

再在上式两边依次左乘 $Q_1, \cdots, Q_2, Q_t$，得

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 A = E \tag{9}$$

上式表明，对 A 仅施以初等行变换可化成 E.

在(9)两边右乘 A^{-1}，得

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_s \cdots P_2 P_1 E = A^{-1} \tag{10}$$

上式表明，对单位矩阵 E 施以同样的初等行变换可化成 A^{-1}.

由式(10)，还可得到

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1}$$

而 $P_i^{-1}(i=1,2,\cdots,s)$ 和 $Q_j^{-1}(j=1,2,\cdots,t)$ 仍为初等矩阵，由此可得

推论 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 可以表示成一系列初等矩阵的乘积.

利用初等变换求逆阵的方法：

（1）为了求 A^{-1}，构造矩阵 $(A\mid E)$

（2）在 $(A\mid E)$ 中，对矩阵 A 进行初等行变换，把 A 化成 E 时，相同的行变换把 E 就变成了 A^{-1}。

这种方法称为求逆矩阵的初等行变换法，它蕴含着判别 n 阶矩阵是否可逆的过程；（1）当 A 可化成 E 时，A 就可逆。

（2）当 A 化成行阶梯形矩阵时，非零行的行数小于 n 时，则推知矩阵 A 不可逆。

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\quad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$．

$\because \quad A^{-1}(A \mid B) = (E \mid A^{-1}B)$

即

$$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \quad \boxed{A^{-1}B}\right)$$

例 2 求矩阵 X, 使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B.$

$$(A\,\vdots\,B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad \therefore X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

这节课要掌握的重点：

A1：初等行变换化矩阵为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵；

A2：利用初等变换求解A^{-1}和$A^{-1}B$

B1：初等矩阵；

B2：等价矩阵相关概念；