天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第20讲

5/17/2022 3:53:31 PM

内容：矩阵的特征值特征向量等

第20讲：内容大概 Outline of lectures

1 正交向量组与正交化；

2 正交矩阵；

3 特征值的定义；

4 特征值与特征向量的计算；

5 特征值的性质；

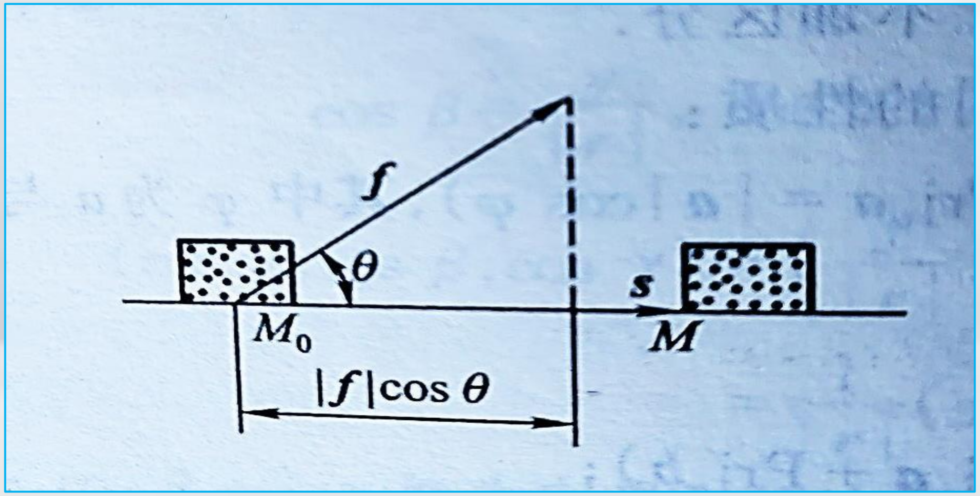
一、向量的内积与长度等

1. 高数中的向量数量积

$$(1)\quad W = |f| \cdot |s| \cdot \cos\theta;$$

$$(2)\quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z);$$

则 $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$



2. 向量的内积

1、内积是高数里数量积的推广;

2、内积的定义:

设有n维向量 $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

令 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

称(α,β)为向量α与β的内积.

【向量内积的例子】若某商店有四种商品，

存货向量为$\alpha=\begin{pmatrix}300\\280\\270\\240\end{pmatrix}$,价值向量为$\beta=\begin{pmatrix}30\\25\\40\\15\end{pmatrix}$，

则该商店存货总值为：

$$(\alpha,\beta)=300\times30+280\times25+270\times40+240\times15=30400$$。

当$n=3$时，内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$即为$R^3$上的数量积。

向量的内积的运算性质

其中 α，β为n维向量，λ为实数：

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时, $(\alpha,\alpha)=0$.

3. 向量的长度

1）定义　对任意n维向量$\alpha=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$

实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量α的长度，即

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

2）性质：

（1）非负性：$\|\alpha\|\geq 0$,并且 $\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0.$

（2）齐次性：$\|k\cdot\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|.$

（3）三角形不等式：$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

4. 向量的长度和夹角

1、单位向量：长度等于1的向量；

2、向量单位化 $\forall\beta\neq 0,\quad \beta^0=\dfrac{\beta}{\|\beta\|}$

$$\boxed{\left|\beta^0\right|=\left|\frac{\beta}{|\beta|}\right|=\frac{1}{|\beta|}\cdot|\beta|=1}$$

3、柯西—施瓦茨不等式 $(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

注 ① $|\alpha|,|\beta|$ 均不为0时，$\dfrac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\leq 1$

②非零向量 α 与 β 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$

向量的长度和夹角

当α，β为非零向量时，由柯西-施瓦兹不等式可得：

$$\left|\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\right| \le 1$$

两个向量α和β的夹角规定为

$$\theta = \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

当$(\alpha,\beta)=0$时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，称α与β正交或垂直，记作$\alpha\perp\beta$

5. 向量的长度和夹角的例子

例　求向量$\alpha=(1,2,2,3)$与$\beta=(3,1,5,1)$的夹角.

解 $\because \cos\theta=\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}.$

练习1：已知 $\alpha=(1,2,-2,1)^T$，求 α^0

五、正交向量组与正交化

1. 正交向量组

1 正交的概念

当$(\alpha,\beta)=0$时，称α与β正交. 记作$\alpha\perp\beta$

零向量与任何向量都正交.

2 正交向量组的概念

若一非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

4 正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$$

上式两边分别与α 作内积，得

$$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_1)+\lambda_2(\alpha_2,\alpha_2)+\cdots+\lambda_r(\alpha_r,\alpha_r)=0$$

由正交定义知 $(\alpha_i,\alpha_j)=0\ (i\neq j,\ i=1,2,\cdots,r)$

所以 $\lambda_1(\alpha_1,\alpha_1)=\lambda_1\left|\alpha_1\right|^2=0,$ 从而有 $\lambda_1=0$.

同理可得 $\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

3. 标准正交向量组（标准正交组）

正交单位向量组成的向量组.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 标准正交组

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_i,\alpha_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,s)$$

2. 正交向量组表示向量时的优势

例1 下列向量 β 是否能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能表示，则写出其线性表示式.

$$(1)\ \beta=\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=0\\3x_1+2x_2=-2\\-5x_1+4x_2-3x_3=7\end{cases}$$

3. 正交向量组表示向量时的优势

已知 n 维向量 V 的任意一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,

则 $\forall \alpha \in V$, $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n$,

$$(\alpha,\alpha_i) = c_1(\alpha_1,\alpha_i) + \cdots + c_i(\alpha_i,\alpha_i) + \cdots + c_n(\alpha_n,\alpha_i)$$

$$\Rightarrow c_i = (\alpha,\alpha_i)$$

向量在标准正交基中坐标的计算公式.

5 正交基（不学）

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是两两正交的非零向量组,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的正交基.

例1 已知三维向量空间中两个向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交，试求α_3使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

解 设$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$,且分别与$\alpha_1,\alpha_2$正交.

则有 $[\alpha_1,\alpha_3]=[\alpha_2,\alpha_3]=0$

即 $$\begin{cases}[\alpha_1,\alpha_3]=x_1+x_2+x_3=0\\ [\alpha_2,\alpha_3]=x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

解之得 $x_1=-x_3,\ x_2=0.$

若令 $x_3=1$,则有 $$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由上可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

4. 向量组标准正交化的方法

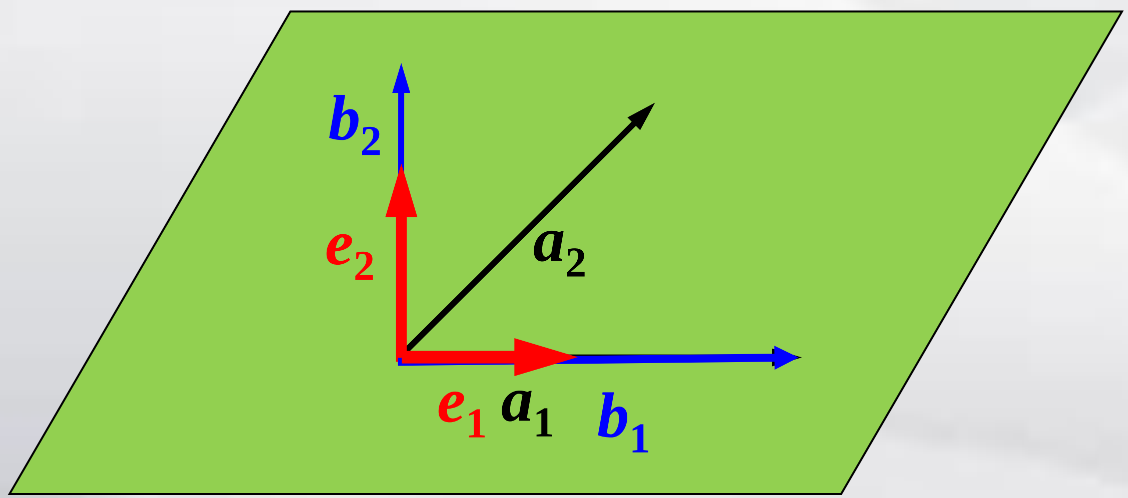
V 中的一组基 $a_1, a_2, \ldots, a_n$（线性无关组）

施密特正交化

正交基 $b_1, b_2, \ldots, b_n$

单位化

标准正交基 $e_1,e_2, \ldots, e_n$



第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是向量空间 V 中的一组基，

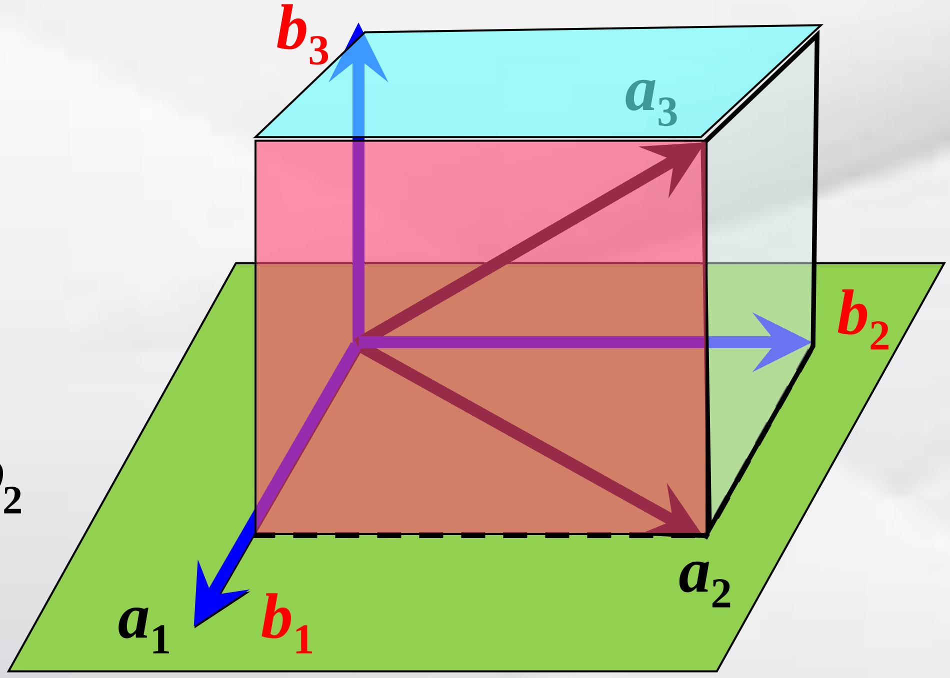
$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_n - \frac{(b_1, a_n)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_n)}{(b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(b_{n-1}, a_n)}{(b_{n-1}, b_{n-1})} b_{n-1}$$



第二步：单位化

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为向量空间V 中的正交基，那么令

$$e_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1,\ e_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2, \cdots,\ e_n = \frac{1}{\|b_n\|} b_n$$

从而 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是向量空间 V 中的一个标准正交基.

例2 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ 试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

五、正交矩阵

定义： 若n 阶方阵 A 满足 $A^{T}A = E$，则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

性质： 设A,B均为n阶正交矩阵，则

- ✓ A可逆，且 $A^{-1} = A^{T}$；
- ✓ $|A| = 1$ 或 -1；
- ✓ $A^{-1}(A^{T})$和A^{*}也是正交矩阵；
- ✓ 若 A 和B是正交阵，则 AB 也是正交阵.

定理： 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组是标准正交向量组.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$ 是否为正交矩阵？

A 是正交矩阵

B 不是正交矩阵

提交

例3 设$A=\begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & b & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & d \end{pmatrix}$是正交矩阵，求$a,b,c,d.$

A 正交矩阵 $\Rightarrow$ A的行（列）为单位正交向量组.

三、特征值与特征向量的定义

1. 特征值与特征向量的基本概念

定义： 设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零向量 x 满足 $Ax=\lambda x$，那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

例： $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

则 $\lambda=1$ 为 E 的特征值，

任意非零向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ 为属于 $\lambda=1$ 的特征向量.

2. 求特征值、特征向量方法

$\lambda x = Ax$ $\Leftrightarrow$ 非零向量 x 满足 $(\lambda E - A)x = 0$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|\lambda E - A| = 0$

特征方程

特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$

3. 求矩阵特征值和特征向量的一般步骤：

1. 由 $|\lambda E-A|=0$ 求出所有特征值 λ_i；

2. 对每个不同的特征值 λ_i 求齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$

的基础解系 $x_1, x_2, \dots, x_t$.

属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$x=k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_tx_t$（$k_1,\dots,k_t$ 不全为零）

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

$\lambda_1 = 10 \quad p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

$\lambda_1 = 2 \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

四、特征值的性质

结 论：

①如果 λ 是矩阵 A 的单特征值，则 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系只有一个向量.

②如果 λ 是矩阵 A 的 k 重特征值，则 $(\lambda E - A)X = 0$ 的基础解系中最多有 k 个向量.

③ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 特 征 值 为 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}

三、特征值、特征向量的性质

性质1： 矩阵A的任一特征向量所对应的特征值是唯一的。

性质2： 设x_1, x_2是A对应于特征值λ_0的两个特征向量，则非零线性组合$k_1x_1 + k_2x_2$也是A对应于λ_0的特征向量。

矩阵	A	kA	A^m	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)$	$1/\lambda$	$\|A\|/\lambda$	λ
特征向量	x	x	x	x	x	x	

零化多项式： 使得$f(A)=0$的多项式$f(x)$.

（A的特征值λ必满足$f(\lambda)=0$）

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值，$p_1, p_2, \dots, p_m$ 是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 线性无关.（属于不同特征值的特征向量线性无关）

性质3

- n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} =$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$

迹： $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$（方阵 A 主对角线元素之和）

A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 均不为零

例 5 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$，试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4.

证 记 $\varphi(x)=x^2-5x+4$，则 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$$

即 $\varphi(x)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式. 因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 必满足方程

$$\varphi(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-4)(\lambda-1)=0$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 4.

例 6 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，求 $|\boldsymbol{A}|$，并证明矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}$ 不可逆.

解 $|\boldsymbol{A}|=1\times 2=2$.

由性质 4 知，-1，0 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，从而 $|\boldsymbol{B}|=-1\times 0=0$，故 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

求特征值特征向量的步骤：

1. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 求出所有特征值 λ_i；
2. 对每个不同的特征值 l_i 求齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的基础解系 $x_1, x_2, \ldots, x_t$.

属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$x = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_tx_t \quad (k_1, \ldots, k_t \text{不全为零})$$

性质：

矩阵	A	kA	A^m	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T
特征值	λ	$k\lambda$	l^m	$f(\lambda)$	$1/\lambda$	$\lvert A\rvert/\lambda$	λ

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr}(A)$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

六、相似矩阵的定义（备学）

一、相似矩阵

定义： 设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B,$$

则称矩阵 A 和 B 相似．记作 $A \sim B$．

称可逆矩阵 P 为相似变换矩阵.

性质： 若 $A \sim B$ $\Rightarrow$ $A^T \sim B^T$;

$\Rightarrow$ $A^{-1} \sim B^{-1}$（A可逆时）；

$\Rightarrow$ $f(A) \sim f(B)$;

$\Rightarrow$ $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$;

（有相同的特征多项式和特征值）

$\Rightarrow$ $|A| = |B|$, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$;

二、矩阵对角化

定义：若 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，称矩阵 A 可对角化.

思考：1）什么样的矩阵可以对角化?

2）若 n 阶矩阵 A 可以对角化，相似矩阵 P 如何求？对角矩阵 Λ 又如何求?

二、矩阵对角化

定义：若 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，称矩阵 A 可对角化.

① 对角矩阵Λ 的主对角线上元素就是A 的全部特征值.

② 当 $A \sim \Lambda$ 时，相似变换矩阵 P 的列向量就是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的线性无关的特征向量 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，排列顺序满足对应法则.

例1

$$A=\begin{pmatrix}5&0&4\\3&1&6\\0&2&3\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&3&\\&&7\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

不可对角化

二、矩阵对角化

定义： 若 $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，称矩阵 A 可对角化.

定理： A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

推论：

1. n 阶方阵 A 有n 个互不相等的特征值 $\Longrightarrow$ A可对角化.
2. n 阶方阵 A可对角化

$\Longleftrightarrow$ A的每个r_i重特征值λ_i都有r_i个线性无关的特征向量

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_i E-A)=n-r_i$

例 12 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 能否对角化，已知 A 的特征值 $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1$.

解 1 是矩阵 A 的二重特征值，即重数 $r_i=2$，而

$$r(1\cdot E-A)=2,\quad n-r_i=3-2=1$$

即

$$r(1\cdot E-A)\neq n-r_i$$

由推论知矩阵 A 不能与对角矩阵相似，即 A 不能对角化.

例2 已知矩阵A的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$

讨论矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

能否相似于一个对角矩阵？为什么？

例3 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，问 x为何值时，矩阵 A

可以对角化？并求A^{10}.

A 和 B 相似（$A \sim B$）： $P^{-1}AP = B$

A 和 B 相似，则有相同的特征多项式和特征值

判断可否对角化，并对角化的一般步骤：

1. 求特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ；

（若 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互不相等，则A一定可对角化）

2. 求对应于 λ_i 的线性无关的特征向量；

（若A有n个线性无关的特征向量，则A可对角化）

3. 若A可对角化，$P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$，则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$