天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第16讲

4/20/2022 10:26:14 AM

内容：向量组的线性组合等

第16讲：内容大概 Outline of lectures

1 作业释疑与§3.1复习；

2 向量组的线性组合；

3 向量组的等价；

4 向量组的线性相关性；

5 小结.

第1部分：作业释疑与§3.1复习

2. 线性方程组有解的条件

结论：非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A|b)$

或者：非齐次线性方程组$Ax=b$无解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)\neq\mathrm{r}(A|b)$

或者是 $\mathrm{r}(A)<\mathrm{r}(A|b)$

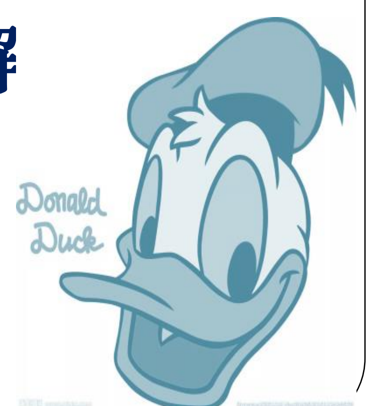
或者是 $\mathrm{r}(A)+1=\mathrm{r}(A|b)$

2. 线性方程组有解的条件

定理：n 元线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(A|b)$

结论：n 元线性方程组 $Ax=b$

- $r(A)\neq r(A|b)$ $\Rightarrow$ 方程组无解；
- $r(A)=r(A|b)=n$ $\Rightarrow$ 方程组有唯一解；
- $r(A)=r(A|b)<n$ $\Rightarrow$ 方程组有无穷多解



3.线性方程组$Ax=b$求解的步骤

- 第一步：把增广矩阵$(A|b)$用初等行变换化成行阶梯形矩阵$(B|c)$；
- 第二步：判断$r(B)=r(B|c)$是否成立（即$r(A)=r(A|b)$是否成立）；如果不成立，方程组无解计算中止；如果$r(B)=r(B|c)$成立，转入第三步；
- 第三步：将矩阵$(B|c)$继续用行换化简成行最简形；
- 第四步：根据行最简形写出$Ax=b$的同解方程组，进一步写出方程组的解。

例3　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+4x_3+3x_4=7, \\ 3x_1-2x_2+x_3+7x_4=8, \\ 2x_1+x_2-4x_3+7x_4=3. \end{cases}$$

解:

$$(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得同解方程组 $\begin{cases} x_1 \quad -x_3+3x_4=2 \\ x_2-2x_3+x_4=-1 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x_1=x_3-3x_4+2 \\ x_2=2x_3-x_4-1 \\ x_3=x_3 \\ x_4=\quad\quad x_4 \end{cases}$ 其中x_3,x_4是自由未知量，$\therefore\ x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ k_1,k_2\in R$

练习 $\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \qquad 2x_4 = 3 \\ x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{\substack{r_4 - r_1 - r_2 - r_3 \\ r_2 - r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 + 1 \\ x_2 = -x_4 + 2 \\ x_3 = -x_4 + 3 \\ x_4 = \quad x_4 \end{cases}$$

这里的 x_4 是自由未知量

令 $x_4 = k$； 得方程组的通解

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

第2部分：齐次线性方程组求解

4. 齐次线性方程组 Homogeneous linear equations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

一定有零解

结论：n 元线性方程组 $Ax = b$

- ~~$r(A) \neq r(A|b) \Rightarrow$ 方程组无解；~~
- $r(A) = r(A|b) = n \Rightarrow$ 方程组有唯一解；
- $r(A) = r(A|b) < n \Rightarrow$ 方程组有无穷多解.

定理：n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$

① 只有零解的充分必要条件是 $r(A) = n$；

② 有非零解的充分必要条件是 $r(A) < n$.

4. 齐次线性方程组解（特殊情况）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

定理： n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$

① 只有零解的充分必要条件是 $r(A) = n$；

② 有非零解的充分必要条件是 $r(A) < n$.

结论： n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$

① 若方程个数m<未知数个数n，则必有非零解；

② 若方程个数m=未知数个数n，则 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

仅有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

思考题：

1. A是4行3列的矩阵，那么齐次线性方程组Ax=0只有零解的条件是（　　　）

2. A是一个3行4列矩阵，能不能说齐次线性方程组Ax=0必定有非零解?

3. A是一个m行n列矩阵，如果齐次线性方程组Ax=0只有零解，那么Ax=b解可能是（　　　）

4. 齐次线性方程组解（求解步骤）

把齐次线性方程组的系数矩阵A用初等行变换化成行最简形矩阵；

1） 如果$r(A)=n$，则齐次线性方程组$Ax=0$只有零解；

2） 如果$r(A)<n$，则根据行最简形写出$Ax=0$的最简同解方程组，进一步写出方程组的解。

例5　求解齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\
3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\
2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0.
\end{cases}
$$

解：对方程组的系数矩阵A进行初等行变换

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$\because \quad r(A) = 2 < n = 4$

所以方程组有非零解

例6　设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

问： λ为何值时，该方程组只有零解，非零解？有非零解时求出其通解.

思考：能不能用系数行列式是否等于0来判断得出结论?

第3部分：向量组的线性组合

向量及其线性运算

定义 1　n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 组成的数组，把它们排成一行

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为 n 维行向量，把它们排成一列

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为 n 维列向量，两者统称为 n 维向量。

n维向量的实际意义

确定飞机的状态，需要以下6个参数：

机身的仰角 $\varphi \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

机翼的转角 $\psi \quad (-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 $\theta \quad (0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数P(x,y,z)

所以，确定飞机的状态，需用6维向量

$$a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$$

描述飞机状态的6个参数可以反映飞机所处在位置，高度，下一时刻所处位置的预估。

向量组和矩阵的关系

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -8\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix};\quad A=(\beta_1\beta_2\beta_3);$$

可以拆成行向量组，也可以拆成列向量组；

向量组也可以合成矩阵。

向量的相等和运算

零向量：$0=(0,0,\cdots,0)$

向量相等：$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,$

满足$a_i=b_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$，称向量 α与 β相等， $\alpha=\beta.$

向量加减法：

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,$$

$$\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)^T$$

向量数乘运算：

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\ k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T.$$

向量线性运算的算律

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
3. $\alpha+0=\alpha$
4. $\alpha+(-\alpha)=0$
5. $1\alpha=\alpha$
6. $k(l\alpha)=(kl)\alpha$
7. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
8. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

向量的线性表示

【定义】 设有n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$，若存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，

则称$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，也称$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合,称$k_1,k_2,\cdots,k_m$为组合系数.

【例 1】 设$\boldsymbol{\beta}=(3,2,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0)^T$，

经验证，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,所以$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.

向量的线性表示

【例 3】 零向量是任何向量组α_1，α_2，…，α_s的线性组合，显然

$$0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s.$$

【例 4】 向量组α_1，α_2，…，α_s中任一成员$\alpha_i\,(1\le i\le s)$都能由α_1，α_2，…，α_s线性表示，因为

$$\alpha_i=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+1\alpha_i+\cdots+0\alpha_s.$$

向量的线性表示

3. 向量组中任一向量都能由向量组自身线性表示:

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 1\alpha_i + \cdots + 0\alpha_s .$$

定理：向量b能由向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ 线性表示；

$\Leftrightarrow$线性方程组$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_s a_s = b$ （即$Ax=b$）有解；

$\Leftrightarrow$$r(A) = r(A|b)$； 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$

向量的线性表示

例2下列向量β是否能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能表示，则写出其线性表示式.

(1) $\beta=\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$

(2) $\beta=(0,0,1),\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(2,1,3),\alpha_3=(1,0,1)$

第4部分：向量组的等价关系

向量组之间的线性表示

定义： 设有向量组 $S:\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 及 $T:\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，

- 若向量组 S 中的每个向量 α_i 都能由向量组 T 线性表示，则称**向量组 S 能由向量组 T 线性表示**.
- 若向量组 S 与向量组 T 能互相线性表示，则称这两个**向量组等价**.

（自身性、对称性、传递性）

向量组等价的意义

向量组$A:\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix}$与向量组$B:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\11\\8\end{pmatrix}$等价；则

（1）向量$\gamma=\begin{pmatrix}0\\13\\4\end{pmatrix}$可以由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示；

（2）向量$\varphi=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示；

（3）凡是能向量组α_1,α_2线性表示的向量，也能由向量组β_1,β_2,β_3线性表示；

（4）凡是不能向量组α_1,α_2线性表示的向量，也不能由向量组β_1,β_2,β_3线性表示；

定理： 向量组 $A:\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 及 $B:\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$，且向量组 B 能由向量组 A 线性表示，

- 若 A, B 为列向量组，则存在 $s\times t$ 阶矩阵 K，使得 $B=AK$.
- 若 A, B 为行向量组，则存在 $t\times s$ 阶矩阵 K，使得 $B=KA$.

定理： 矩阵 A 与 B

$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$ 　则 B 的行向量组与 A 的行向量组等价；

$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} B$ 　则 B 的列向量组与 A 的列向量组等价；

小 结

1.向量的线性运算 $k\alpha + l\beta$

2.向量的线性表示 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s$

定理： 向量β能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性表示；

$\Leftrightarrow$ 线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_s\alpha_s = \beta$（即$Ax=\beta$）有解；

$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A|b)$； 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$

3.向量组的等价 向量组 S 与向量组 T 能互相线性表示

第5部分：向量组的线性相关性

五、两个向量组的区别（引例）

- 对于向量组$\alpha_1 = (2,0,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (3,2,4)$
- 零向量可被任何向量组表示:
- $0 = 0 \times \alpha_1 + 0 \times \alpha_2 + 0 \times \alpha_3$
- 除此之外，$0 = 1 \times \alpha_1 + 1 \times \alpha_2 + (-1) \times \alpha_3$;

- 对于向量组 $\beta_1 = (1,2,1), \beta_2 = (3,5,7)$ $0 = 0 \times \beta_1 + 0 \times \beta_2$
- 只有这一种表示方式，当组合系数不都等于0时，等式不可能成立。

线性相关性的概念

定义 6 设有 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \tag{8}$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性相关**(linearly dependent)；如果只有当

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$$

时才能使(8)成立，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ **线性无关**(linearly independent).

由定义 6 得出证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的方法：

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \quad (k_i\in\mathbf{R})$. 由此推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，即可证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

七、如何证明向量组线性相关（无关）

定义 6 设有 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0} \tag{8}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(linearly dependent)；如果只有当

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$$

时才能使(8)成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关(linearly independent).

由定义 6 得出证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的方法：

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ $(k_i\in\mathbf{R})$. 由此推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，即可证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

例 12 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

证 设有 x_1,x_2,x_3，使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

亦即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_1)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+x_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3=0 \\ x_1+x_2 \quad\quad =0 \\ \quad\quad x_2+x_3=0 \end{cases}$$

解这个方程组得 $x_1=x_2=x_3=0$，所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

八、线性相关性的简单情况

- 若向量组只包含一个向量：当a是零向量时，线性相关；当a不是零向量时，线性无关.
- 若向量组包含两个向量：a,b 线性相关当且仅当 $a=kb$或$b=la$.(几何意义是两向量共线)
- 若向量组包含三个向量：a_1,a_2,a_3线性相关的几何意义是三个向量共面.

- n维基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关.
- 若向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$中含有零向量，则$A$线性相关.

九、如何判断一个向量组是否线性相关?

定理 6　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

有非零解.

判断线性相关性的方法

推论 1　s 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关(无关)的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩 $r(A)<s(r(A)=s)$.

推论 2　s 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,若 $s>n$,即向量组中向量个数大于维数,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关.

例如:向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$;无论 x 取何值,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,这里 $s=3,n=2,s>n$.

推论 3　n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 组成的向量组线性相关的充分必要条件是 $|A|=0$,这里 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 n 阶方阵.

多选题 2分

设置

以下向量组线性相关的有

A $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

B $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

C $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

D $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

提交

二、向量组线性相关性的有关定理

定理 7 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少存在一个向量能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

证 必要性.设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则存在 s 个不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

不妨设 $k_1\neq 0$,于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{1}{k_1}(k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由其余 $s-1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

充分性.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少存在一个向量能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 能由其余 $s-1$ 个向量线性表示,即 $\boldsymbol{\alpha}_s=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$,于是

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}-\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

由 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s-1},-1$ 不全为 0,可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

二、线性相关性的判定

定理:

向量组		齐次线性方程组		
向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关	⟺	齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_s\alpha_s = 0$ $(Ax = 0)$ 有非零解	⟺	$r(A) < s$
向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关	⟺	齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_s\alpha_s = 0$ $(Ax = 0)$ 只有零解	⟺	$r(A) = s$

推论:

- n维向量组$A: \alpha_1, \ldots, \alpha_s$，若$s>n$，则向量组 A必线性相关.
- n维向量组$A: \alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性相关充分必要条件是$|A|=0$.

例1 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$

判定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关.

例2 判定向量组$\alpha_1=(1,2,0,1),\alpha_2=(1,3,0,-1),$
$\alpha_3=(-1,-1,1,0)$是否线性相关.

例3 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,$b_1=\alpha_1+\alpha_2,$ $b_2=\alpha_2+\alpha_3,b_3=\alpha_3+\alpha_1,$试证$b_1,b_2,b_3$线性无关.

三、线性相关性的有关定理

（1）如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}(s\le m)$ 线性相关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 整体也线性相关；反之，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则它的每一个部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}(s\le m)$ 也线性无关.

向量组部分相关，则整体相关.

向量组整体无关，则部分也无关.

三、线性相关性的有关定理

（2）记

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\end{pmatrix},\ \beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\\a_{r+1,j}\end{pmatrix},\ (j=1,2,\cdots,m),$$

向量β_j是由向量α_j添加一个分量组成的. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.

向量组线性无关， 则延长组也线性无关.

向量组线性相关，则缩短组也线性相关.

三、线性相关性的有关定理

（3）设向量组 A： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 B： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则向量 β 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.

单选题 1分

设置

以下向量组线性无关的是

A

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

B

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

C

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

D

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\8\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

提交

小结

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$， 使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m = 0 \text{（零向量）}.$$

$\Leftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(a_1, a_2, \dots, a_m) < m$.

$\Leftrightarrow$ A 中至少有一个向量能由其余 m-1个向量线性表示.

小 结

向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 如果 $k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m = 0$（零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0 .$$

$\Leftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(a_1, a_2, \dots, a_m) = m$.

$\Leftrightarrow$ A中任何一个向量都不能由其余 m-1个向量线性表示.

小结

- 向量组部分相关，则整体相关.
- 向量组线性无关，则延长组也线性无关.
- 设向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 B：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则向量 β 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.
- n维向量组A: $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$，若$s>n$，则向量组 A必线性相关.
- 若向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中含有零向量，则A线性相关.