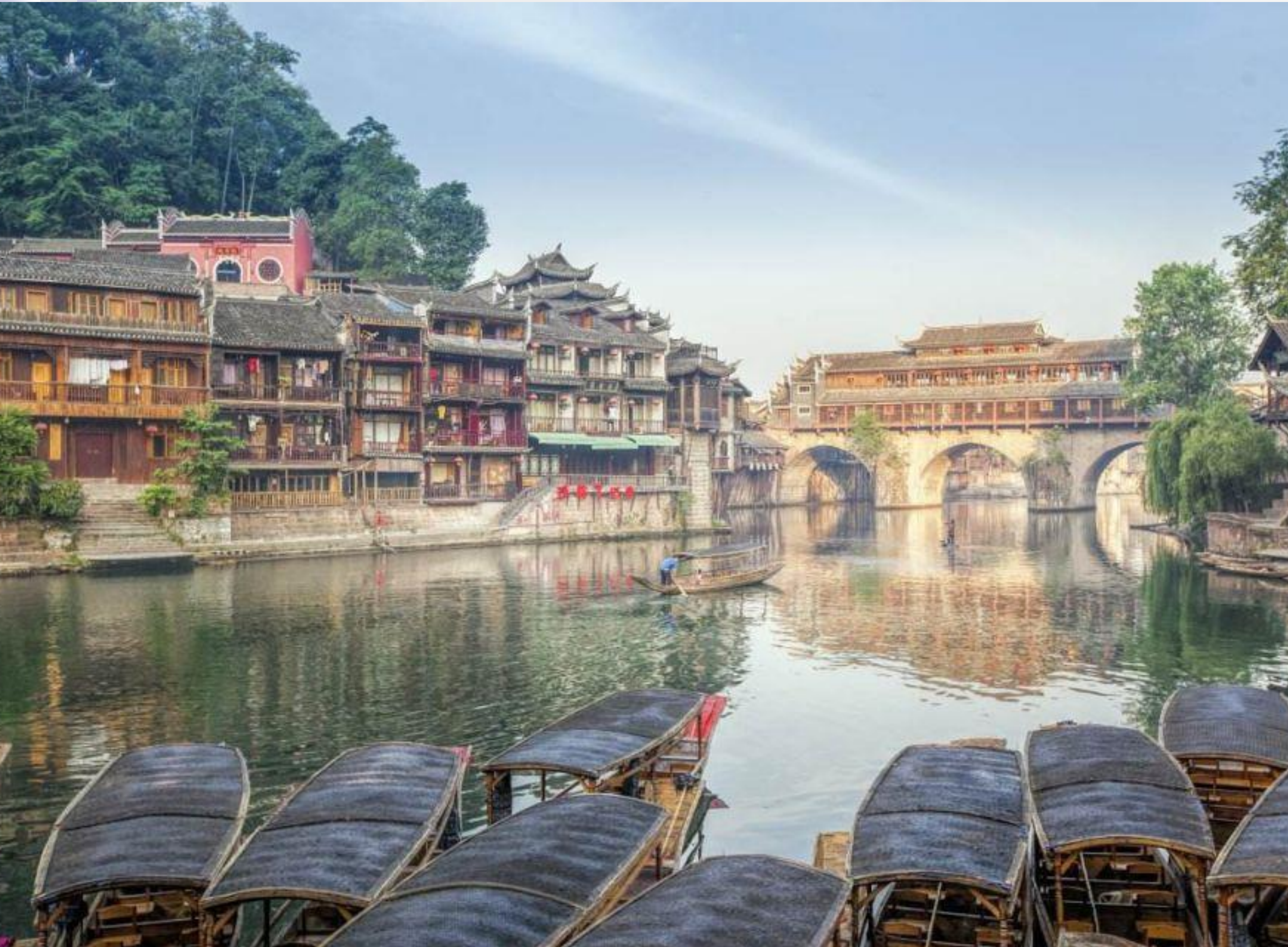
天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第8讲

3/24/2022 10:59:56 PM

内容：矩阵的对称转置等

秀丽风光




栖凤湖
——张时红 摄

第8讲 内容大概 Outline

1. 上次内容回顾；
2. 矩阵的转置；
3. 对称矩阵；
4. 方阵的行列式；
5. 逆矩阵（1）；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

矩阵的乘积满足的算律：

（1）结合律 $(AB)C = A(BC)$ ；

（2）分配律 $A(B+C) = AB + AC$

（3）数的位置： $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

矩阵的乘积不满足的算律：

（1） $AB = BA$ 一般不成立；

（2） $A \neq O, AB = AC$ 不能得出 $B = C$ 一定成立；

（3） $A \neq O, AB = O$ 不能得出 $B = O$ 一定成立；

矩阵乘法不满足交换律的例子

思考：如果***A***和***B***是同阶方阵，那么

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 成立吗？

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ 成立吗？

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

成立的充分必要条件是*AB=BA*

【矩阵结合律的例子】

已知$B=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，设$A=BC$，

（1）求 A;

（2）求A^{500}；

矩阵乘法结合律的例子

Examples of Matrix Multiplication Combination Law

例：已知 $A=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}, B=(1,\ 2,\ 1),$ 求 AB，BA，$(AB)^{50}$

解：$AB=\begin{pmatrix}-2&-4&-2\\-1&-2&-1\\3&6&3\end{pmatrix},\quad BA=-1,$

$$(AB)^{50}=(AB)(AB)\cdots(AB)=A(BA)(BA)\cdots(BA)B$$

$$=A(BA)^{49}B=A(-1)B=-AB=\begin{pmatrix}2&4&2\\1&2&1\\-3&-6&-3\end{pmatrix}$$

$$(2)\ (b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解 $$(b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3 & a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3 & a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}b_1^2+a_{22}b_2^2+a_{33}b_3^2+2a_{12}b_1b_2+2a_{13}b_1b_3+2a_{23}b_2b_3$$

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $PAQ=($ $\quad\quad\quad$ $)$.

(A) $\begin{pmatrix} a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32}+a_{12} & a_{31}+a_{11} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{21}+a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}$.

二、线性方程组的矩阵表示

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

1) 用矩阵描述方程组.

对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_4=-1 \end{cases}$$

设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 则方程组(1)可表示为

$$Ax=b$$

的形式.

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

2) 用向量描述方程组.

若记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,

则方程组(1)可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{b} \tag{3}$$

的形式.

学习有点吃力的同学可以把这部分跳过去

到了后面还会专门从向量的角度再学习

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

3) 用矩阵和向量描述方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

可以写成 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ***Ax*=b**形式

也可以写成 $x_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 向量组合形式

三、矩阵的幂运算

方阵的幂 The power of a square matrix

定义 n 阶方阵 A 的幂 A^k(k,l 是非负整数)如下:

$$A^0=E,\quad A^1=A,\quad A^k=A^{k-1}A\quad (k>1)$$

容易验证

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}$$

设有 m 次多项式 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_m\neq0)$,则矩阵多项式

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

仍是 n 阶方阵,称为方阵 A 的 m 次多项式.注意上式最后一项是 $a_0E(=a_0A^0)$,不能写成 a_0.

***A*的*n*次方也就是*n*个*A*的乘积**

方阵多项式的例子

An example of the polynomials of a square matrix

例7 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$， $f(x)=x^2+x+3$ 求 $f(A)$

解 $f(A)=A^2+A+3E$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}+3E$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}+3E$$

$$=3E$$

需要注意的细节：Details that need attention

如果A是三阶方阵，$f(x)$是一元多项式，比如：

$$f(x)=2x^3-5x^2+7x-4$$

则 $f(A)=2A^3-5A^2+7A-4E$

$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是三阶单位矩阵，相当于A^0

$f(x)=2x^3-5x^2+7x-4$ 可以看成是 $2x^3-5x^2+7x-4x^0$

方阵多项式的例子 An example of the polynomials of a square matrix

例 12 设 $f(x)=2x^2-3x+1$，$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}$，求 $f(A)$。

解 方法 1

$$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1\\3&4\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2A^2-3A+E=2\begin{pmatrix}7&1\\3&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-1\\-3&12\end{pmatrix}$$

方法 2 因为 $f(x)=(x-1)(2x-1)$，所以

$$f(A)=(A-E)(2A-E)=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-1\\-3&12\end{pmatrix}$$

方阵多项式的意义 The Meaning of Square Matrix Polynomials

如果A是n阶方阵，专业课里要用到 $e^{2A}, \sin A$ 等

在高等数学里，

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, -\infty < x < \infty$$

可以认为： $e^A \approx E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}$

类似可以想象： $\cos A,\ \ln A,\ \sin 2A$

四、矩阵的转置

矩阵的转置 Transposition of matrices

定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做矩阵 A的转置矩阵，记作A^{T} .

运算性质：

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

一般地：$(AB)^T \neq A^T B^T$

矩阵转置的例子 Examples of Matrix Transposition

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 7\\ 5 & -8 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -5 & 9\end{pmatrix},\qquad A^{T}{}_{4\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 4 & -8 & 3\\ 0 & 2 & -5\\ 7 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

体会： $\left(A^{T}\right)^{T}=A$ 和 $(kA)^{T}=kA^{T}$

对称矩阵 Symmetric matrix

设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

如果满足 $A = A^T$，那么 A 称为对称矩阵.

如果满足 $A = -A^T$，那么 A 称为反对称矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

性质： 设 A,B 为 n 阶对称矩阵，k为常数，则

(1) $A+B, kA, A^T$ 仍为对称矩阵；

(2) AB为对称矩阵 $\Leftrightarrow AB=BA$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ 不是反对称矩阵

反对称矩阵主对角元素都等于0，即 $a_{ii}=0$

对称矩阵满足 $a_{ij}=a_{ji}$，$A=A^T$ 反对称矩阵满足 $a_{ij}=-a_{ji}$，$A=-A^T$

课本上的例子 Examples from textbooks

例 16 设 A,B 为 n 阶矩阵，A 为反称矩阵，B 为对称矩阵．证明 $AB-BA$ 为对称矩阵．

证 由对称矩阵和反称矩阵的定义知，此时 $A^T=-A$，$B^T=B$．运用转置运算律，有

$$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T$$

$$=B(-A)-(-A)B=AB-BA$$

即 $AB-BA$ 为对称矩阵．

例16的意义在于证明习惯的训练，一道题目看似抽象，没一点思路。养成转换的习惯，即把概念，结论，条件都转换成等式。由等式推等式。

六、方阵的行列式

二、方阵的行列式

定义：由 n 阶方阵的元素所构成的行列式，叫做**方阵 A 的行列式**，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&5\\0&1&6\\0&4&7\end{pmatrix},\quad \det(A)=\begin{vmatrix}2&0&5\\0&1&6\\0&4&7\end{vmatrix}$$

$$\text{或者}\ |A|=\begin{vmatrix}2&0&5\\0&1&6\\0&4&7\end{vmatrix},\quad \det(A^T)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&4\\5&6&7\end{vmatrix}$$

方阵的行列式 Determinant of Square Matrix

运算性质 (1) $\left|A^T\right| = |A|$; (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$; $\Rightarrow |AB| = |BA|$.

课本上的例子 Examples from textbooks

例 17 设 A,B 均为 3 阶方阵且 $|A|=\frac{1}{3}$，$|B|=4$，求 $|-A|$ 及 $|2B^TA^2|$.

解 $|-A|=(-1)^3|A|=(-1)\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

$|2B^TA^2|=2^3|B^T||A|^2=8\times4\times\frac{1}{9}=\frac{32}{9}$

八、逆矩阵（备用）

§2.4 逆矩阵

1）定义 对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵 ，使得B满足：

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵.

① 若 A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

A的逆矩阵记作 A^{-1}.

2 伴随矩阵的结论

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ 为A 的伴随矩阵.

1) $A \cdot A^* = |A| \cdot E$

2) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$ 3) $A^* = |A| \cdot A^{-1}$

4) if $|A|=2, n=3,$ then $|A^*| = ?$

5) if $|A|=2, n=3,$ then $\left| \left(\dfrac{1}{5} A \right)^{-1} - 3A^* \right| = ?$

定理1　矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*},$$

其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.