天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第3讲

3/2/2022 8:57:25 AM

内容：行列式的性质与展开定理等

第三讲内容大概 Outline

1.上次内容回顾；

2. 行列式的性质；

3. 余子式与代数余子式；

4. 行列式的展开定理；

5. 四阶数字行列式的计算；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

n 阶行列式的定义 Definition of n-order determinant

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

1. n 阶行列式共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（正负号除外），其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是1, 2, …, n 的某个排列.
4. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，对应的项取负号.

四阶行列式展开式的项

The term of the fourth-order determinant expansion

对于四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

$a_{13}a_{32}a_{34}a_{23}$ 不是四阶行列式D的项；

$a_{13}a_{32}a_{34}a_{43}$ 也不是四阶行列式D的项；

$a_{13}a_{32}a_{41}a_{24}$ 是四阶行列式D的项；取-号。

$a_{13}a_{32}a_{41}a_{24}$ 写成 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$ 列标3421是奇排列；

四阶行列式展开式的项

The term of the fourth-order determinant expansion

对于四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

$a_{13}a_{22}a_{34}a_{43}$ 是不是四阶行列式D的项?

$a_{13}a_{32}a_{24}a_{43}$ 是不是四阶行列式D的项?

$a_{12}a_{31}a_{44}a_{22}$ 是四阶行列式D的项?

$a_{13}a_{35}a_{41}a_{24}a_{52}$ 在五阶行列式里取什么符号?

什么是特殊行列式? Special determinant

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

什么是特殊行列式？（续）Special determinant

三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \cdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ 可以写成 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 7 & \\ -3 & 2 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$$ 都是上三角行列式

猜猜下面各个行列式的结果？（续）

$$(5)\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ??$$

$$(6)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ??$$

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ??$$

$$(8)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 5 & 10 & 22 & -10 \end{vmatrix} = ??$$

猜猜下面各个行列式的结果？（续）

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & -1 \\ 1 & 8 & -7 & 9 & 2 \end{vmatrix} = ??$$

利用行列式定义求行列式的值

(9) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & -1 \\ 4 & 8 & -7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

解：5阶行列式展开共120项，大多数项是0. 若使行列式的项不等于0，第一行必须取-2，第二行必须取3，第三行取-2，…。所以，不为0的项只有一个是$(-2)\times3\times(-2)\times(-1)\times4=-48$；由于列标顺序是54321，其逆序数是10，所以它的符号是正，故D=-48.

特殊行列式务必记住的结论：

(1) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

三角行列式

(3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(4)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \cdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

排列54321的逆序数是10，而7654321的逆序数是（1+2+3+4+5+6）=21

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

二、行列式的性质

本节要求：记住6个性质和一个推论

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T.$

2）互换行列式的两行（列），行列式变号.

3）D中某一行（列）的公因子可以提取出来

4）性质4及其推论：行列式中有两行（列）元对应相等(成比例，推论)时，该行列式等于零.

5）行列式具有分行（列）相加性。

6）行列式中有某一行（列）各元素乘以同一个数再加到另一行（列）对应元素上，行列式不变.

行列式的性质的推导或例举

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} a & x & m & 3 \\ b & y & n & 4 \\ c & z & p & 5 \\ d & u & q & 6 \end{vmatrix}$$

行列式D的第i行元素，变成新行列式的第j列，则新行列式即为D的转置行列式，简称转置，记为D^T； $D = D^T$

行列式的性质的推导或例举

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T.$

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} -2 & 66 & 387 \\ 144 & 369 & 187 \\ 33 & -84 & 97 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 144 & 33 \\ 66 & 369 & -84 \\ 387 & 187 & 97 \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

$$(3)\begin{vmatrix} 269 & 144 & -876 & 908 \\ -55 & -967 & 976 & 332 \\ -879 & 95 & 442 & 903 \\ -978 & 996 & -1033 & 94 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 269 & -55 & -879 & -978 \\ 144 & -967 & 95 & 996 \\ -876 & 976 & 442 & -1033 \\ 908 & 332 & 903 & 94 \end{vmatrix}$$

以后的学习，凡是对行列式关于行的结论，对于列来说，也都适用。反之亦然。

行列式的性质的推导或例举

2）互换行列式的两行（列），行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

换行了，别忘记写负号

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ m & p & n \end{vmatrix}$$

换列也得写负号

推论：行列式有两行（列）元素对应相等，则行列式的值为0.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=-D$$

$$\therefore \quad 2D=0 \Rightarrow D=0$$

行列式的性质的推导或例举

3）行列式中某一行（列）的公因子可以提取出来。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

以三阶行列式为例的证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3x & 3y & 3z \\ m & n & p \end{vmatrix} = a(3y)p + b(3z)m + (3x)nc - m(3y)c - (3x)bp - an(3z)$$

$$= 3(ayp + bzm + xnc - xbp - myc - anz)$$

$$= 3 \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

行列式列里的公共倍数也能提取出来

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

设 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$， 那么$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -2d & -2e & -2f \\ -2g & -2h & -2k \end{vmatrix}=??$

答案：$-8D$

行列式的性质的推导或例举

推论：行列式中有两行（列）元素对应成比例时，该行列式等于零.

不必计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & -14 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

事实上，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & -4 & -14 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -2\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

行列式的性质的推导或例举

推论：行列式中有两行（列）元素对应成比例时，该行列式等于零.

不必计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} & 3a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

行列式的性质的推导或例举

5）行列式具有分行（列）相加性，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+(-2) & 2+4 & 3+5 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

6）行列式中有某一行（列）各元素乘以同一个数再加到另一行（列）对应元素上，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x-2a & y-2b & z-2c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

即：行列式中第一行各元素（a，b，c）分别乘以-2，对应加到第二行各元素上，行列式值不变.

行列式的性质的推导或例举

6）行列式中有某一行（列）各元素乘以同一个数再加到另一行（列）对应元素上，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x-2a & y-2b & z-2c \\ m & p & n \end{vmatrix}$$

运用性质5可以证明上面结论：.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x-2a & y-2b & z-2c \\ m & p & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

行列式的性质的推导或例举

例题：运用性质6计算行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 10 & 22 & 45 \\ 34 & 66 & -97 \\ 20 & 97 & 66 \end{vmatrix} = ??$$

分析：如果手写，不建议直接用对角线法则展开；建议使用性质6把行列式适当“简化”．

$$\begin{vmatrix} 10 & 22 & 45 \\ 34 & 66 & -97 \\ 20 & 97 & 66 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 22 & 45 \\ 34 & 66 & -97 \\ 0 & 53 & -34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 22 & 45 \\ 4 & 0 & -232 \\ 0 & 53 & -34 \end{vmatrix}$$

如何求解四阶数字行列式？（方法1）

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = ??$$

学完本节，能用性质把这个行列式化成三角形行列式，然后求出结果。

例题：求行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 7 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

解: $$D=\begin{vmatrix}8&7&-6&2\\1&-3&0&2\\-2&1&2&4\\6&2&-1&10\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\8&7&-6&2\\-2&1&2&4\\6&2&-1&10\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&31&-6&-14\\0&-5&2&8\\0&20&-1&-2\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&1&6&34\\0&-5&2&8\\0&0&7&30\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&1&6&34\\0&0&32&178\\0&0&7&30\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}1&-3&0&2\\0&1&6&34\\0&0&32&178\\0&0&0&30-178\times\dfrac{7}{32}\end{vmatrix}=-286$$

注：为了便于计算，引入记号

（1）r_i: 第i行，c_j: 第j 列.

（2）$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$互换 i 行（列）与 j 行（列）.

（3）$kr_i\,(kc_i)$: 用k乘以第 i 行（列）.

（4）$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 第 j 行（列）元素乘k再加到第 i 行（列）上去.

练习 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解 $D \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_4+5r_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$\underset{\substack{r_4-8r_2 \\ r_3+4r_2}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

例题：不计算，运用性质证明下面结论.

$$D=\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\ a & 0 & -c\\ b & c & 0\end{vmatrix}=0$$

证明:

$$D=\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\ a & 0 & -c\\ b & c & 0\end{vmatrix}=D^T=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix}$$ 转置

三次提取负号

$$=(-1)^3\times\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\ a & 0 & -c\\ b & c & 0\end{vmatrix}=-D \quad \therefore \quad 2D=0$$

练习：运用性质6计算行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

答案：-8

三、行列式的代数余子式

行列式的代数余子式

一、代数余子式

在n阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第i行和第j列划去，留下的n-1阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

在四阶行列式D中

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & -3 & 7 \\ 8 & 4 & -2 & -9 \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix} \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 8 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

元素a_{ij}的余子式及其代数余子式与元素a_{ij}本身及其所在行、列元素无关.

练习：在四阶行列式D中

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 6\\ 0 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

试写出 $M_{12}=\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 0 & 5\end{vmatrix}$ $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{vmatrix}$

三阶行列式展开式用代数余子式描述

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$=a_{11}\times M_{11}+a_{12}\times M_{12}+a_{13}\times M_{13}$$

三阶行列式用代数余子式描述(手写)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式按行（列）展开法则

定理：n 阶行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

行列式按行（列）展开的意义

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & -3 & 4 & 2} \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}=A_{11}-3A_{12}+4A_{13}+2A_{14}$$

4阶行列式的计算转化成为3阶行列式的计算

行列式按行（列）展开的意义

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}=A_{21}+0A_{22}-2A_{23}-A_{24}$$

意义：计算时选择按第二行展开，比按第一行展开，计算量就相对小一些。

例题：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

例题：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

解：
$$D \overset{2c_1+c_3}{\underset{c_1+c_4}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -12 & -9 \\ 2 & -4 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 7 & -12 & -9 \\ -4 & 11 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{2c_1+c_2}{\underset{c_1+c_3}{=\!=}} -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 48$$

例 11 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&-4\\9&-1&0&1\\-2&6&1&0\\6&10&-2&-5\end{vmatrix}$$

解：

$$D_4\xlongequal{c_4+2c_1}\begin{vmatrix}2&0&0&0\\9&-1&0&19\\-2&6&1&-4\\6&10&-2&7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&0&19\\6&1&-4\\10&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_2}2\begin{vmatrix}-1&0&19\\6&1&-4\\22&0&-1\end{vmatrix}=2\times1\times\begin{vmatrix}-1&19\\22&-1\end{vmatrix}$$

$$=2\times(1-19\times22)$$

$$=-834$$

注：按第三列展开也是不错选择

例 12 计算行列式

代数余子式重要性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

具体的例子（重要）：

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

1) $D=8A_{11}+9A_{12}+7A_{13}+(-4)A_{14}$

2) $D=2A_{22}+4A_{24}$

3) $D=9A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+3A_{42}$

4) $9A_{14}+2A_{24}+2A_{34}+3A_{44}=0$

5) $8A_{31}+9A_{32}+7A_{33}+(-4)A_{34}=0$

再来理解结论：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

2022年3月2日10时9分

具体的例子:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -4 & 7 \\ 2 & -4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -8 & -5 \\ 7 & 7 \end{matrix}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 21$$

特色例题：Special example

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = ??$$

$$= axnv - bymu$$

X

四阶行列式不能用对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} = (av - ub)(xn - my)$$

推导过程在下页

按第一行展开可得结果，记结论

后加的关于结论的推导：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & v \end{vmatrix} + b(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & m & n \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= av\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} - bu\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} = (av - bu)(xn - my)$$

$$= avxn - avmy - buxn + bumy$$