天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第5讲

3/16/2022 8:56:04 AM

内容：克莱姆法则等

第五讲内容大概 Outline

1.上次内容回顾；

2. 克莱姆法则简介；

3. 齐次线性方程组的解的判断；

4. 矩阵初步；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

行列式按行（列）展开定理

定理：n 阶行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

作业讲解：

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

解：$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$

例题：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

解：$D \overset{2c_1+c_3}{\underset{c_1+c_4}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -12 & -9 \\ 2 & -4 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 7 & -12 & -9 \\ -4 & 11 & 9 \end{vmatrix}$

$$\overset{2c_1+c_2}{\underset{c_1+c_3}{=\!=}} -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 48$$

【作业讲解】

设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\a&b&c&d\\x&y&z&u\end{vmatrix}$，$D$ 中 a_{ij} 的代数余子式是 A_{ij}，求：

（1） $3A_{11}+5A_{12}+3A_{13}+9A_{14}=?$

（2） $2_{11}+5A_{12}+11A_{13}+6A_{14}=?$

（3） $5A_{11}+6A_{12}+7A_{13}+8A_{14}=?$

代数余子式重要性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

具体的例子（重要）：

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

1) $D=8A_{11}+9A_{12}+7A_{13}+(-4)A_{14}$

2) $D=2A_{22}+4A_{24}$

3) $D=9A_{12}+2A_{22}+2A_{32}+3A_{42}$

4) $9A_{14}+2A_{24}+2A_{34}+3A_{44}=0$

5) $8A_{31}+9A_{32}+7A_{33}+(-4)A_{34}=0$

再来理解结论：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

【填空练习】

已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ x & -2 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式，则：

（1） $3A_{11}+5A_{13}+9A_{14}=$ ____________

（2） $7A_{23}+5A_{33}=$ ____________

（3） $7A_{21}+5A_{31}=$ ____________

（4） $4A_{41}+A_{42}+2A_{44}=$ ____________

例3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 3 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}.$

解

$$D=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2\times5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=-2\times5\times\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=-2\times5\times(-2)\times\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=-1080$$

行列式计算练习题：Exercise of Nature 6

$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a-b & c \\ a & b+c-a & a \\ b & 0 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & c-a-b & c-a-b \\ a & b+c-a & 0 \\ b & 0 & c+a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c-a-b & -2a \\ a & b+c-a & 0 \\ b & 0 & c+a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2b & -2a \\ a & b+c-a & 0 \\ b & 0 & c+a-b \end{vmatrix}$$

$$= -a(-2b)(c+a-b) - b(b+c-a)(-2a)$$

$$= 2abc + 2a^2b - 2ab^2 + 2ab^2 + 2abc - 2a^2b \quad = 4abc$$

行列式计算延伸题目

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & z-x & y-x \\ 0 & z-y & -y & x-y \\ 0 & y-z & x-z & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} -x & z-x & y-x \\ z-y & -y & x-y \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} z-y-x & z-x-y & 0 \\ z-y & -y & x-y \\ y-z & x-z & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} z-y-x & 0 & 0 \\ z-y & -z & x-y \\ y-z & x-y & -z \end{vmatrix} = (x+y+z)(z-x-y)\begin{vmatrix} -z & x-y \\ x-y & -z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$$

二、特殊行列式的计算

具体的例子：

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \\ 2 & -4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 21$$

特色例题：Special example

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = ??$$

$$= axnv - bymu$$ X

四阶行列式不能用对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} = (av - ub)(xn - my)$$

推导过程在下页

按第一行展开可得结果，记结论

后加的关于结论的推导：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & v \end{vmatrix} + b(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & m & n \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= av\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} - bu\begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ m & n \end{vmatrix} = (av - bu)(xn - my)$$

$$= avxn - avmy - buxn + bumy$$

范德蒙（Vandermonde）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) \qquad (*)$$

证 用数学归纳法. $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

所以当 $n=2$ 时（*）式成立.

证明过程可以不看

假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立.

对 Dn 做运算 $r_n - x_1 r_{n-1},\ i = n, n-1, \cdots, 2$

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1}\\&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)\\&=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3\left(x_3-x_1\right)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}\left(x_3-x_1\right)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

范德蒙行列式记结果：

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

$$D_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)D_2 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

范德蒙行列式记结果（结论比较重要）

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

$$D_4 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)D_3$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

利用范德蒙行列式结论填空：

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 25 & 49 \end{vmatrix} = (5-2)(7-2)(7-5) = 30$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix} = (3-2)(5-2)(7-2)(5-3)(7-3)(7-5) = 240$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

三、克莱姆法则

§1.4 克莱姆法则知识点

- 克莱姆（Cramer）法则
- 非齐次线性方程组和齐次线性方程组
- 齐次线性方程组有非零解充要条件

1. 克莱姆法则（二元方程组的情况）

行列式法解线性方程组回顾

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$;

则$D\neq 0$时，方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

1. 克莱姆法则（三元方程组的例子）

例如：对于三元线性方程组 $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{x = \frac{D_1}{D} = 1, y = \frac{D_2}{D} = -1, z = \frac{D_3}{D} = 1,}$$

1、克莱姆（Cramer)法则

设n个未知数的n个线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若方程组(1)的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},\ (2)$$

例1 用 Cramer 法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

由于系数行列式$D \neq 0$，故线性方程组有唯一解；

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -30 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

所以

$$x_1 = -\frac{15}{7},\ x_2 = -\frac{3}{7},\ x_3 = \frac{2}{7},\ x_4 = \frac{2}{7}.$$

练习

1、解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$

解 $D = -2, D_1 = -2, D_2 = 4, D_3 = 0, D_4 = -1,$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 0, x_4 = \tfrac{1}{2}.$$

非齐次与齐次线性方程组的概念

如果线性方程组（1）中 $b_i = 0$ ，$i = 1, 2, \cdots, n$ 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

称其为齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

（1）中至少有一个$b_i \neq 0$，称其为非齐次线性方程组。

非齐次线性方程组解的情况：

（1） 有唯一解；（对应直线相交）
（2） 无穷解；　（对应直线的重合）
（3） 无解　　　（对应直线的平行）

非齐次线性方程组的解，不存在只有两组解的情况

几何意义：二元线性方程组两条直线位置关系；

三个平面的位置关系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

两条直线位置关系

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

三个平面的位置关系

齐次方程组一定有解

对于任意齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ 来说，

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定满足方程组,是方程组的(零)解。

因此，任何齐次方程组不会无解！区别在于除了零解，还有没有其它解。

齐次方程组和非齐次方程组的解

非齐次方程组的解

- 无解；
- 唯一解
- 无穷多解

齐次方程组的解

- 唯一解（只有零解）
- 无穷多解（有非零解）

齐次线性方程组有非零解的充分必要条件

任意齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ 只有零解

的充分必要条件是系数行列式$D \neq 0$

齐次方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式$D=0$

齐次方程组和非齐次方程组解的区别

非齐次方程组的解

- 无解；
- 唯一解
- 无穷多解

齐次方程组的解

- 唯一解（只有零解）
- 无穷多解（有非零解）

齐次方程组有非零解的例子

例题：当a与b为何值时下列齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$$

解：齐次线性方程组有非零解当且仅当$D=0$，即

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \quad (a-1)^2-4(b-a)=0 \qquad \therefore \quad (a+1)^2=4b$$

例题：当a为何值时下列齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \qquad + 2z = 0 \\ \qquad ay + z = 0 \end{cases}$$

解：齐次线性方程组有非零解当且仅当D=0，即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad -1 - a = 0 \qquad \therefore \quad a = -1$$

小结：务必弄会的几个知识点

1　行列式的余子式；代数余子式；注意区分考试时间的是余子式还是余子式的值。

2　行列式的展开定理，做题时按行或者按列，按哪一行，做什么前期变换，能熟练运用

3　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，知道结果，也要知道原因。为什么把无穷多解说成有非零解，知道原因。

4 范德蒙行列式结论的运用。

行列式法求解线性方程组的缺陷：

1　当未知数个数比较多时，运算量特别特别大，以致于从来不考虑用克莱姆法则编程求解线性方程组；

2　克莱姆法则只能求解方程个数与未知数个数相同的方程组，也只有在方程组有唯一解时，计算才有意义，对于三个方程，四个未知数这样的方程组，无能为力。

在某种意义上可以说，行列式不是线性代数的主力，矩阵和方程组才是线性代数的顶梁柱。

四、矩阵的概念

§ 2.1 矩阵的概念

¶ 1 矩阵的定义

¶ 2 几种特殊的矩阵

¶ 1 矩阵的概念

由 $m \times n$ 个数

排成 m 行 n 列的数表
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵或 $m \times n$ 矩阵.

记为 $A_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$.

矩阵一般用大写字母 A，B，X，E，O 表示.

¶ 1　引例

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x \qquad\qquad = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ \qquad y - z = 1 \\ \quad 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

¶ 1 例1 线性方程组可以用矩阵描述

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

增广矩阵　　　　系数矩阵

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$ 可以记为 $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$ 可以记为 $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 1 \\ 2y + 3z = 7 \end{cases}$$ 可以记为 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

2 实矩阵和复矩阵

Real Matrix and Complex Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 4 & \pi & 7 & -2 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ 是实矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 1+i & 0 & 4 \\ 2 & -i & 6 \\ -3 & 7 & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 2i \\ i & 1+i \end{pmatrix}$$ 是复矩阵

¶ 2 同型矩阵和矩阵相等

行数和列数都相同的矩阵是同型矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 8 & 0\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

矩阵A和B是同型矩阵;

矩阵C和D也是同型矩阵.

¶ 2 同型矩阵和矩阵相等

若两个矩阵是同型矩阵，且每一个位置的元素对于相等，称**两个矩阵相等**.

两个矩阵相等的条件极其严格，实际上，一个矩阵只和它自己相等，有一点“差错”都不能说相等.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且各对应元相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & b & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 2 & 1\\ -1 & c & -1\end{pmatrix}$$

是同型矩阵. 当且仅当 $a=3,b=2,c=4$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 成立.

¶ 2　特殊矩阵 Special type of matrix

1、零阵

所有元素全是0的 $m \times n$ 矩阵，记作 O或 $O_{m \times n}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这三个都是零矩阵，这说明零矩阵不一定相等的.

不能说，A=B成立，因为0的个数不一样

¶ 2 特殊矩阵 Special type of matrix

2、行矩阵

$$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

规定 $(3,4,5)$ 与 $(3\quad 4\quad 5)$ 没有区别.

既可以称其为行向量，也可以称为行矩阵.

§2 特殊矩阵 *Special type of matrix*

3、列矩阵 只有一列的矩阵.

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

列矩阵也称为列向量.

向量是有序数组，在高等数学里向量不分行向量和列向量，线性代数把向量分成行向量和列向量仅仅是满足矩阵运算形式上的需要.

4、n 阶方阵（简称方阵）

当 $m=n$ 时，也就是外形上是正方形时

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

如： $A=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 是3阶方阵

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ 是2阶方阵

而 $B=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ 不是方阵

5、上三角矩阵 Upper triangular matrix

非零元素只出现在主对角线及其上方的方阵.

4阶上三角矩阵 $$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

主对角线上可以有0 $$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6、下三角矩阵

非零元素只出现在主对角线及其下方的方阵.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 7 & \sqrt{3} & 8 & 0 \end{pmatrix}$$ 4阶下三角矩阵

7、对角矩阵

非零元素只可能出现在主对角线上，其它元素皆为零的方阵.

$$\Lambda = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

如：$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -5 & \\ & & 7 \end{pmatrix} = diag(2, -5, 7)$ 是3阶对角矩阵

8、数量矩阵 Quantity matrix

主对角线 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都相等的对角矩阵.

$$kE = kE_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

如：$-2E = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 是3阶数量矩阵

7、n 阶单位矩阵 Unit matrix

主对角元素都是1，其余元素都是0的n阶方阵.

如3阶单位方阵 $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

3阶单位方阵 $E_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, 简记为$E$ 或E_3

n阶单位方阵 $E=E_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$

行列式和矩阵的区别和联系

1. 行列式必须是正方形的；矩阵可以是长方形的

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -7 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$ 是行列式；

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$ 不是行列式

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -7 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$ 是矩阵；

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ 也是矩阵

五、矩阵的运算（1）

§2.2 矩阵的运算

一、矩阵的线性运算

二、矩阵的乘法运算

三、线性方程组的矩阵表示

四、方阵的多项式

矩阵的线性运算（加法和数乘）

设有两个$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 那么矩阵A与B的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

加（减法）运算对矩阵的要求：

例如

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

但计算 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 没有意义

只有**同型矩阵**才能进行加（减）法运算.

加（减法）运算的意义：

例如 $\begin{pmatrix} 29 & 30 & 19 & 38 & 29 \\ 28 & 29 & 18 & 40 & 27 \\ 27 & 30 & 20 & 36 & 28 \\ 29 & 28 & 17 & 35 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & 68 & 75 & 54 & 69 \\ 58 & 70 & 72 & 48 & 57 \\ 63 & 28 & 73 & 46 & 58 \\ 47 & 56 & 69 & 55 & 47 \end{pmatrix}$

可以认为是四位同学五科的期中、期末成绩之和。

但计算 $\begin{pmatrix} 29 & 30 & 19 & 38 & 29 \\ 28 & 29 & 18 & 40 & 27 \\ 27 & 30 & 20 & 36 & 28 \\ 29 & 28 & 17 & 35 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & 68 & 75 & 54 \\ 58 & 70 & 72 & 48 \\ 63 & 48 & 73 & 46 \\ 47 & 55 & 69 & 55 \end{pmatrix}$ 没有意义

只有同型矩阵才能进行加减运算，可理解为合表

矩阵的数乘运算，即数与矩阵相乘

数k与矩阵A的数量积记作kA，规定

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

如 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则 $-3 \times A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix}$

数乘矩阵(k*A*)的意义举例

$$A=\begin{pmatrix}174 & 186 & 178 & 182\\ 166 & 163 & 172 & 160\\ 178 & 180 & 188 & 182\end{pmatrix}$$

$$B=0.01\times A=\begin{pmatrix}1.74 & 1.86 & 1.78 & 1.82\\ 1.66 & 1.63 & 1.72 & 1.60\\ 1.78 & 1.80 & 1.88 & 1.82\end{pmatrix}$$

可以认为A与B描述的是一个事情，只是量纲不同。

一个数乘以矩阵与一个数乘以行列式的区别

$$3\times\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3x & 3y & 3z \\ 3m & 3n & 3p \end{pmatrix}$$

数乘矩阵

$$3\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

数乘行列式

数乘行列式

$$or \qquad 3\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3x & 3y & 3z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

矩阵线性运算的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$(3)\ (-1)A=-A$ 负矩阵.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

$(5)\ 1A=A$

$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$

$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$

$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

该有的算律都有了

矩阵线性运算的例子

例 4　已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 6 & 0 & 8\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 5 & -1 & -8\end{pmatrix}$，求 $3A-2B$.

解

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 6 & 0 & 8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 5 & -1 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -21\\ 8 & 2 & 40\end{pmatrix}$$

例 5　已知矩阵

$A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -2\\ -4 & 8 & 4 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$，如果矩阵 X 满足关系式 $3X-A=X+2B$，求矩阵 X.

解　由 $3X-A=X+2B$，可得 $2X=A+2B$.所以

$$X=\frac{1}{2}A+B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -2\\ -4 & 8 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 5 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$$