天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第6讲

3/18/2022 12:50:06 PM

内容：矩阵的概念和计算等

第6讲 内容大概 Outline

1. 上次内容回顾;
2. 矩阵的概念;
3. 矩阵的线性运算;
4. 矩阵的乘法;

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

代数余子式重要性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

【作业讲解】

设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}$，$D$ 中 a_{ij} 的代数余子式是 A_{ij}，求：

（1） $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=?$

（2） $6A_{11}+7A_{12}+9A_{14}=?$

（3） $4A_{14}+8A_{24}+9A_{44}=?$

【作业讲解】

4．四阶行列式的 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ 0 & 0 & m & n \\ 0 & 0 & u & v \end{vmatrix}$ 值为______．

范德蒙行列式记结果（结论比较重要）

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$$

$$D_4 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)D_3$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)$$
$$(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

利用范德蒙行列式结论填空：

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 25 & 49 \end{vmatrix} =$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix} =$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

【作业讲解】

1. 设某非齐次线性方程组（n 个方程 n 个未知数）的系数行列式是 D，则 $D=0$ 是该方程组有无穷多解的（　　　）.

(A) 充分条件；　　(B) 必要条件；

(C) 充分必要条件；　　(D) 既非充分也非必要条件.

2. 设某齐次线性方程组（n 个方程 n 个未知数）的系数行列式是 D，则 $D \neq 0$ 是该方程组仅有零解的（　　　）.

(A) 充分条件；　　(B) 必要条件；

(C) 充分必要条件；　　(D) 既非充分也非必要条件.

【作业讲解】

2. 如果线性方程组$\begin{cases}2x-5y=0\\4x+ky=0\end{cases}$有非零解，则 k=____；

二、矩阵的概念

§ 2.1 矩阵的概念

¶ 1 矩阵的定义

¶ 2 几种特殊的矩阵

矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 a_{ij}

排成m 行n 列的数表 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m行n列矩阵或 $m\times n$矩阵.

记为 $A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$.

矩阵一般用大写字母 A，B，X，E，O表示.

¶ 1 引例

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x \qquad\qquad = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ \qquad y - z = 1 \\ \quad 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

¶ 1 例1 线性方程组可以用矩阵描述

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

增广矩阵　　　　系数矩阵

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$ 可以记为 $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$ 可以记为 $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 1 \\ 2y + 3z = 7 \end{cases}$$ 可以记为 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

实矩阵和复矩阵

Real Matrix and Complex Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 4 & \pi & 7 & -2 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{是实矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 1+i & 0 & 4 \\ 2 & -i & 6 \\ -3 & 7 & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 2i \\ i & 1+i \end{pmatrix} \text{是复矩阵}$$

同型矩阵和矩阵相等

行数和列数都相同的矩阵是同型矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 8 & 0\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

矩阵A和B是同型矩阵;

矩阵C和D也是同型矩阵.

同型矩阵和矩阵相等

若两个矩阵是同型矩阵，且每一个位置的元素对于相等，称**两个矩阵相等**.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且各对应元相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & b & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 2 & 1\\ -1 & c & -1\end{pmatrix}$$

是同型矩阵.当且仅当 $a=3,b=2,c=4$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 成立.

特殊矩阵 Special type of matrix

1、零阵

所有元素全是0的 $m\times n$ 矩阵，记作 O或 $O_{m\times n}$.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad O_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

这三个都是零矩阵，这说明零矩阵不一定相等的.

不能说，A=B成立，因为0的个数不一样

¶ 2 特殊矩阵 Special type of matrix

2、行矩阵

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

规定 $(3,4,5)$ 与 $(3\quad 4\quad 5)$ 没有区别.

既可以称其为行向量，也可以称为行矩阵.

特殊矩阵 *Special type of matrix*

3、列矩阵 只有一列的矩阵.

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

列矩阵也称为列向量.

向量是有序数组，在高等数学里向量不分行向量和列向量，线性代数把向量分成行向量和列向量仅仅是满足矩阵运算形式上的需要.

4、n 阶方阵（简称方阵）

当 $m=n$ 时，也就是外形上是正方形时

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

如： $A=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 是3阶方阵

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ 是2阶方阵

而 $B=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ 不是方阵

5、上三角矩阵 Upper triangular matrix

非零元素只出现在主对角线及其上方的方阵.

4阶上三角矩阵 $$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

主对角线上可以有0 $$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6、下三角矩阵

非零元素只出现在主对角线及其下方的方阵.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 7 & \sqrt{3} & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

4阶下三角矩阵

7、对角矩阵

非零元素只可能出现在主对角线上，其它元素皆为零的方阵.

$$\Lambda = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

如：$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -5 & \\ & & 7 \end{pmatrix} = diag(2, -5, 7)$ 是3阶对角矩阵

8、数量矩阵 Quantity matrix

主对角线 $a_1,a_2,\cdots,a_n$都相等的对角矩阵.

$$kE = kE_n = \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}$$

如：$-2E = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 是3阶数量矩阵

7、*n* 阶单位矩阵 Unit matrix

主对角元素都是1，其余元素都是0的n阶方阵.

如3阶单位方阵 $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

3阶单位方阵 $E_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, 简记为$E$ 或E_3

n阶单位方阵 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&&&\\&\mathbf{1}&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

行列式和矩阵的区别和联系

1. 行列式必须是正方形的；矩阵可以是长方形的

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -7 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$ 是行列式；$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$ 不是行列式

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -7 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$ 是矩阵；$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ 也是矩阵

三、矩阵的线性运算

§2.2 矩 阵 的 运 算

一、矩阵的线性运算

二、矩阵的乘法运算

三、线性方程组的矩阵表示

四、方阵的多项式

矩阵的线性运算（加法和数乘）

设有两个$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 那么矩阵A与B的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

加（减法）运算对矩阵的要求：

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

但计算 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 没有意义

只有同型矩阵才能进行加（减）法运算.

加（减法）运算的意义：

例如 $\begin{pmatrix} 29 & 30 & 19 & 38 & 29 \\ 28 & 29 & 18 & 40 & 27 \\ 27 & 30 & 20 & 36 & 28 \\ 29 & 28 & 17 & 35 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & 68 & 75 & 54 & 69 \\ 58 & 70 & 72 & 48 & 57 \\ 63 & 28 & 73 & 46 & 58 \\ 47 & 56 & 69 & 55 & 47 \end{pmatrix}$

可以认为是四位同学五科的期中、期末成绩之和。

但计算 $\begin{pmatrix} 29 & 30 & 19 & 38 & 29 \\ 28 & 29 & 18 & 40 & 27 \\ 27 & 30 & 20 & 36 & 28 \\ 29 & 28 & 17 & 35 & 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & 68 & 75 & 54 \\ 58 & 70 & 72 & 48 \\ 63 & 48 & 73 & 46 \\ 47 & 55 & 69 & 55 \end{pmatrix}$ 没有意义

只有同型矩阵才能进行加减运算，可理解为合表

矩阵的数乘运算，即数与矩阵相乘

数*k*与矩阵*A*的数量积记作*kA*，规定

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

如 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则 $-3 \times A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix}$

数乘矩阵(k*A*)的意义举例

$$A=\begin{pmatrix}174 & 186 & 178 & 182\\ 166 & 163 & 172 & 160\\ 178 & 180 & 188 & 182\end{pmatrix}$$

$$B=0.01\times A=\begin{pmatrix}1.74 & 1.86 & 1.78 & 1.82\\ 1.66 & 1.63 & 1.72 & 1.60\\ 1.78 & 1.80 & 1.88 & 1.82\end{pmatrix}$$

可以认为A与B描述的是一个事情，只是量纲不同。

一个数乘以矩阵与一个数乘以行列式的区别

$$3\times\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3x & 3y & 3z \\ 3m & 3n & 3p \end{pmatrix}$$

数乘矩阵

$$3\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

数乘行列式

数乘行列式

$$or \qquad 3\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3x & 3y & 3z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

矩阵线性运算的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$(3)\ (-1)A=-A$ 负矩阵.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

$(5)\ 1A=A$

$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$

$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$

$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

该有的算律都有了

矩阵线性运算的例子

例 4 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3&-5\\6&0&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&3\\5&-1&-8\end{pmatrix}$, 求 $3A-2B$.

解

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}1&3&-5\\6&0&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&4&3\\5&-1&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-21\\8&2&40\end{pmatrix}$$

例 5 已知矩阵

$A=\begin{pmatrix}-2&4&6&-2\\-4&8&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&-3&2\\5&-3&2&4\end{pmatrix}$, 如果矩阵 X 满足关系式 $3X-A=X+2B$, 求矩阵 X.

解 由 $3X-A=X+2B$, 可得 $2X=A+2B$. 所以

$$X=\frac{1}{2}A+B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&4&6&-2\\-4&8&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4&-3&2\\5&-3&2&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&2&3&-1\\-2&4&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4&-3&2\\5&-3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&0&1\\3&1&4&4\end{pmatrix}$$

四、矩阵的乘积

二、矩阵的乘法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

则，矩阵*A*与矩阵*B*的乘积记作*AB*，规定为

$$AB=C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

矩阵乘法可以进行运算的条件

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

故只有A的列数等于B的行数时，AB才有意义；然后，AB的行数是A的行数，AB的列数是B的列数

矩阵的乘法定义解读

- 矩阵A和矩阵B相乘，关注三个事情:
  - 能不能相乘?
    - 乘积C=AB几行几列?
      - C的每个元素等于多少?

只有A的列数等于B的行数时，AB才有意义；然后，AB的行数是A的行数，AB的列数是B的列数

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ 不可以

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ 可以

(3) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 可以

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}(2,4,9)$ 可以

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -9 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 可以

(6) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 可以

(7) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可以

(8) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 不可以

矩阵乘法的例子

例 1　已知 $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，求$C=AB$

解：$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 \quad ? & 16\end{pmatrix}_{2\times2}$

矩阵乘法的例子

已知 $A=\begin{pmatrix}17 & 7 & 11 & 20\\ 15 & 9 & 13 & 18\\ 18 & 6 & 15 & 16\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，求$C=AB$

解： $C=AB=\begin{pmatrix}17 & 7 & 11 & 20\\ 15 & 9 & 13 & 18\\ 18 & 6 & 15 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}97 & 123\\ 101 & 119\\ 100 & 120\end{pmatrix}$

矩阵乘法例子的现实意义

1. 小明同学要去超市（永旺）买四类小食品：

2袋坚果（单价17元），3瓶饮料（7），

2瓶酸奶（11）,1盒小点心（20）共花费：

$17\times2+7\times3+11\times2+20\times1=97$元；

可以写成：

$$\underset{\text{单价}}{(17\ \ 7\ \ 11\ \ 20)}\underset{\text{数量清单}}{\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}}=\overset{\text{总花费}}{97}$$

矩阵乘法例子的现实意义（续）

2. 小明同学要去超市（永旺）买四类小食品：
   2袋坚果（单价17元），3瓶饮料（7），
   2瓶酸奶（11）,1盒小点心（20）共花费：
   $17\times2+7\times3+11\times2+20\times1=97$元；

   小强同学听说有顺风车，也要去一起购物：
   数量分别为： 2件 1件 2件 3件；花123元

可以写成：

$$\underbrace{(17\quad 7\quad 11\quad 20)}_{\text{单价}}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=(97\quad 123)$$

总花费

二人数量清单

矩阵乘法例子的现实意义（续）

小明和小强要去超市购物：

小强建议，我们不一定非要去永旺；也可以考虑乐购，人人乐等其他超市。

小明说，很好啊。我们货比三家，可以对比一下，看去那合适。

$$\begin{array}{r} \text{永旺} \\ \text{乐购} \\ \text{人人乐} \end{array} \begin{pmatrix}17&7&11&20\\15&9&13&18\\18&6&15&16\end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix}2&2\\3&1\\2&2\\1&3\end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{小明} & \text{小强} \end{array} \end{array} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}97&123\\101&119\\100&120\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}\text{小明}&\text{小强}\end{array}\end{array} \begin{array}{l}\text{永旺}\\\text{乐购}\\\text{人人乐}\end{array}$$

例 2　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{pmatrix}.$$

练习：

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的运算规律

$(1)\,(AB)C = A(BC)$;

$(2)\,A(B+C) = AB+AC,\ \ (B+C)A = BA+CA$;

$(3)\,\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$(4)\ \ E_m A_{m\times n} = A_{m\times n},\ \ A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}$;

$(5)\ \ OA = O,\ AO = O$;

例3 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$D=B-C$，求 AB，AC，AD，DA.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 10\\ 39 & -30\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}-13 & 10\\ 39 & -30\end{pmatrix} \qquad D=B-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$DA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}$$

矩阵乘法中单位矩阵E和零矩阵O的作用

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

对任意m行n列矩阵A，都有 EA=A；AE=A；

矩阵乘法中单位矩阵E和零矩阵O的作用（续）

(3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对任意m行n列矩阵A，都有 OA=O；AO=O；

矩阵乘法特点：

1) 矩阵乘法不满足交换律， $AB \neq BA$.

$$AD = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

3) 矩阵乘法不满足消去律，

$AB=AC$ 且 $A\neq O$ 推不出 $B=C$

比如： $AB=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

例4 计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

解 (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times2 \\ 3\times1 & 3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

$$(2)\ (b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解 $$(b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3 & a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3 & a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}b_1^2+a_{22}b_2^2+a_{33}b_3^2+2a_{12}b_1b_2+2a_{13}b_1b_3+2a_{23}b_2b_3$$

例5 若 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，求 $AB+AC$.

解1 $$AB+AC=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&5\\-6&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&2\\11&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\5&15\end{pmatrix}$$

解2 $$AB+AC=A(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\5&15\end{pmatrix}$$

例6 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 A^2-2A.

解一

$$A^2-2A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解二

$$A^2-2A=(A-2E)A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

小结：必须掌握的内容

1. 矩阵乘法：给出A和B，能算出AB和BA；

2. 给出A和B，能判断出AB运算能不能进行；如果能，AB几行，几列；

3. 矩阵乘法满足结合律，分配律，不满足消去律，不满足交换律；

4. 矩阵线性运算：给出A和B，能算出$2A$-$3B$；