天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

# 线性代数第15讲

4/15/2022 1:06:59 PM

内容：方程组的解法


學爲人師
行爲世範


上善若水
太上老君老子
大道無為

# 荀子


孟子

# 第11讲：内容大概 Outline of lectures

1 作业释疑与§2.7复习；

2 线性方程组有解的条件；

3 求解方程组的方法；

4 齐次线性方程组的解；

5 小结.

# 第1部分：作业释疑与§2.7复习

Part One:  Homework explanation and  § 2.7Review

# 一、§2.7复习（矩阵的秩）

1. **矩阵的秩定义：** 若$A$有一个$r$阶子式不等于0，而所有的$r+1$阶子式（如果存在的话）全为0，那么 $r(A)=r$.

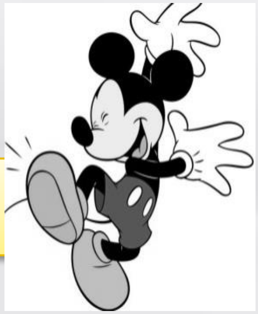
2. 矩阵的秩$r(A)$实际上 是“$A$ 中非零子式的最高阶数”

3. 若$A=O$，则$r(A)=0$; 若$A\neq O$，则$r(A)\geq 1$;

4. 把$A$化简成行阶梯形，非零行的行数即为$r(A)$;

5. $r(A_{m\times n})\leq m, r(A_{m\times n})\leq n$;

即$A$的秩不大于它的行数，也不大于它的列数。



# 一、§2.7复习（矩阵的秩）

思考题1.　　设$A$是一个4行5列矩阵，且r($A$)=2,按照定义，$A$的所有3阶子式都等于0；问：$A$中的4阶子式是不是都等于0?

回答：r($A$)=2，2就是$A$中不为0子式的最高阶数；$A$中所有3阶子式都等于0；所有4阶子式也都等于0；

理由：

$$D_4 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = 0$$

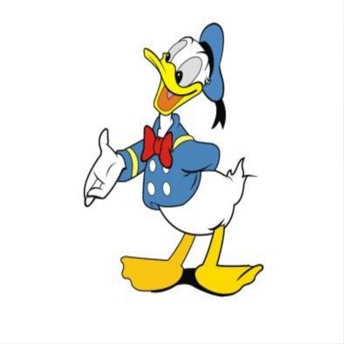
4阶子式中任意元的余子式是$A$的3阶子式（都等于0）

# 一、§2.7复习（矩阵的秩）

思考题2.　设$A$是一个3行4列矩阵，问：$A$的秩可能是多少？为什么？

回答：一个3行4列矩阵的秩可能是0,1,2,3

理由：矩阵$A$的秩不大于其行数和列数。



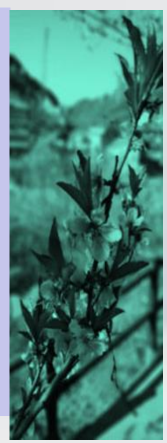
# 一、矩阵的秩（复习）

**思考题2.** 设$A$是一个4行4列矩阵，且$r(A)=3$，$b$是一个4维列向量；请填空：$r(A|b)=($ $\quad\quad$ $)$

**回答：** $r(A|b)=\underline{3或4}$

**$r(A|b)=3$或4两种情况举例**

(1) $$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$



(2) $$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O,\qquad r(A)=0$$

$$(2)\quad B=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&-2&6\\-3&-6&3&-9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad r(B)=1.$$

$$(3)\quad C=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&0&5\\0&3&0\end{pmatrix},\quad |C|=-60\neq 0,\quad r(C)=3$$

$$(4)\quad D=\begin{pmatrix}2&8&1&5\\-4&2&7&3\\2&6&4&9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&8&1&5\\0&18&9&13\\0&-2&3&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&8&1&5\\0&-2&3&4\\0&0&36&49\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad r(D)=3.$$

# 一、矩阵的秩（复习）

**以3阶方阵为例，已有过三次分类:**

**第一次分类（矩阵乘法）：** $A=O$； $A\neq O$；

**第二次分类（逆矩阵）：** $A$可逆； $A$不可逆；

**第三次分类（矩阵的秩）：** $r(A)=0, 1, 2, 3$；

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad r(A)=0$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\2&4&2\end{pmatrix},\quad r(B)=1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\2&3&7\end{pmatrix},\quad r(C)=2$$

$$D=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&3\\0&4&2\end{pmatrix},\quad r(D)=3$$

# 一、§2.7复习（满秩矩阵）

1. 对$n$阶方阵$A$，若 $r(A) = n$，称$A$为满秩矩阵；
若$r(A) < n$，称$A$为降秩矩阵.

2. $n$阶矩阵$A$是满秩矩阵；也就是可逆矩阵，也称为非奇异矩阵；也就是$\det(A)\neq 0$（$|A|\neq 0$）；

3. 一般来说，$r(AB)\leq r(A)$，$r(AB)\leq r(B)$.

但是当$A$可逆时，$r(AB)=r(B)$.

4. 与3等价的说法：如果$r(AB)<r(A)$，则$B$是降秩矩阵

# 一、 作业讲解与2.7复习

1. 设 $A$ 和 $B$ 是 3 阶方阵，且 $r(A)=2$, $B$ 是满秩矩阵，则 $r(AB)=$ __2____.

2. 设 $A$ 和 $B$ 是 4 阶方阵，且 $r(A)=3$, $A \to B$, 则 $|B|=$___0_______.

3. 设 $\alpha$ , $\beta$ 为 $n$ 维非零列向量，则 $n$ 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$ 的秩为 $r(A)=$ __1_.

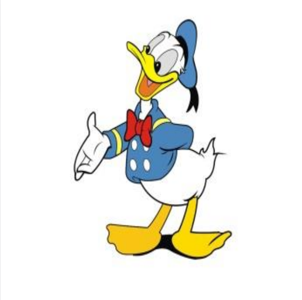
$A=\alpha\beta^T$ 是一个非零矩阵，所以 r(A)≥ 1；由 r(a)=1，r(A)≤r(a)=1；所以 r(A)= 1

$r(A_{m\times n})\leq m$, $r(A_{m\times n})\leq n$

$r(AB) \leq r(A)$; $r(AB) \leq r(B)$;

在A可逆时，$r(AB) = r(B)$;

$r(AB) < r(B)$时A是降秩矩阵，即A不可逆；



# 第2部分：线性方程组有解的条件

Part Two: Conditions for Linear Equations to Have Solutions

# §3.1 线性方程组的解法

1：线性方程组的基本概念；

2：线性方程组有解的条件；

3：线性方程组求解方法；

4：齐次线性方程组的解。

# 1. 线性方程组的解的复习

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
$$

**回顾1：什么是有效方程？多余方程？**

**回顾2：什么是矛盾方程？**

**思考3：线性方程组有（无）解如何判定？**

**思考4：方程组有解时，唯一解和无穷多解如何判定？**

# 回顾1：什么是有效方程？多余方程？

$$\begin{cases} -2x_1-3x_2+4x_3=4 \\ x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+2x_2-6x_3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ x_2+2x_3=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

该方程组有两个有效方程，“0=0”是多余方程；

$$\begin{cases} 2x-5y+4z=4 \\ x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 3x-4y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=-3 \\ -7y+8z=10 \\ 9z=27 \\ 0=0 \end{cases}$$

该方程组有三个有效方程，“0=0”是多余方程；

# 回顾2：什么是矛盾方程?

$$(1)\quad \begin{cases} x+y+3z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ x-2y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3y+4z=6 \\ 0=11 \end{cases}$$

“0=11” 是矛盾方程

$$(2)\quad \begin{cases} x+y+3z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3y+4z=6 \\ 3z=11 \end{cases}$$

该方程组没有矛盾方程

零等于一个非零数就是矛盾方程

# 思考3：方程组有解的判定

**线性方程组用初等变换化成阶梯形方程组，如果：**

**1. 出现了矛盾方程，则原方程组无解；**

**2. 没有出现矛盾方程，则原方程组有解；**

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 0=4 \end{cases}$$

原方程组无解

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+7y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ 5y=3 \end{cases}$$

原方程组有解

# 思考4： 唯一解和无穷多解的如何判定

**在方程组有解时，**

**也就是方程组化成阶梯形时没出现矛盾方程时：**

$$\begin{cases} 2x+3y+8z=-5 \\ x-2y-4z=3 \\ -5x+3y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-4z=3 \\ 7y+16z=-11 \\ -3z=6 \end{cases}$$

3个未知数3个有效方程，
方程组有唯一解

$$\begin{cases} 2x+3y+8z=-5 \\ x-2y-4z=3 \\ -5x-4y+12z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-4z=3 \\ 7y+16z=-11 \\ 0=0 \end{cases}$$

3个未知数2个有效方程，
方程组有无穷多解

# ¶ 3.1 复习 非齐次线性方程组解的情况：

（1） 有唯一解；（对应直线相交）
（2） 无穷解；（对应直线的重合）
（3） 无解 （对应直线的平行）

**非齐次线性方程组的解，不存在只有两组解的情况**

**几何意义：二元线性方程组的解对应两条直线位置关系；**

**三元线性方程组的解对应三个平面的位置关系**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

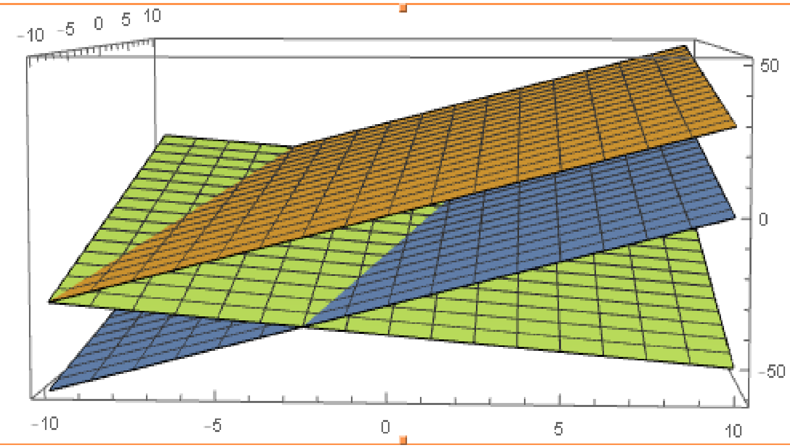
**两条直线位置关系**

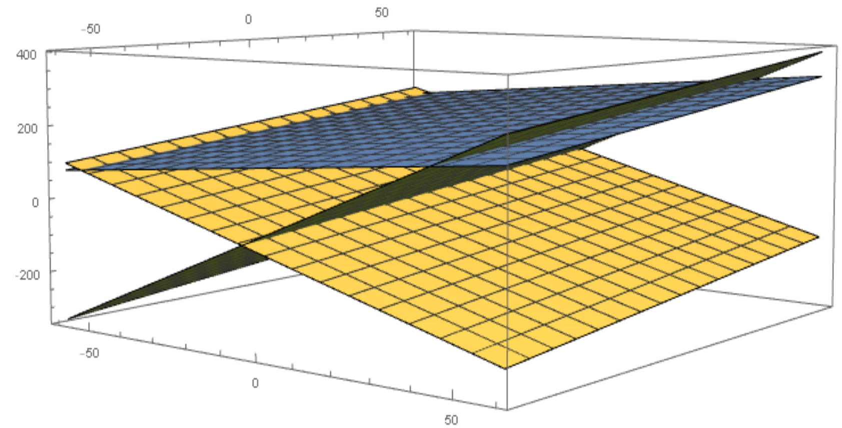
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

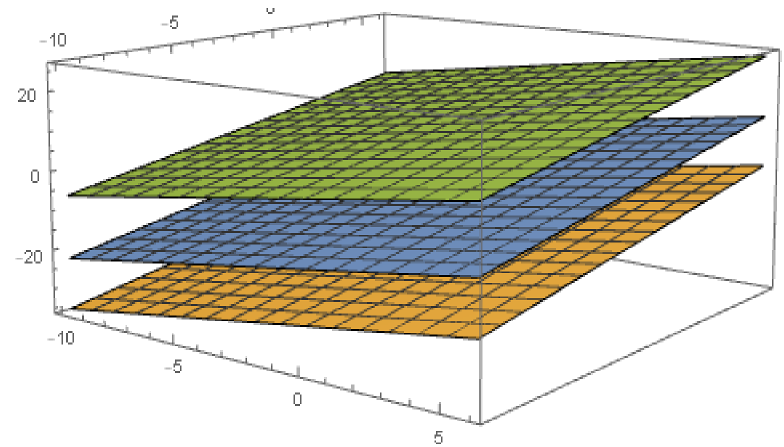
**三个平面的位置关系**

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

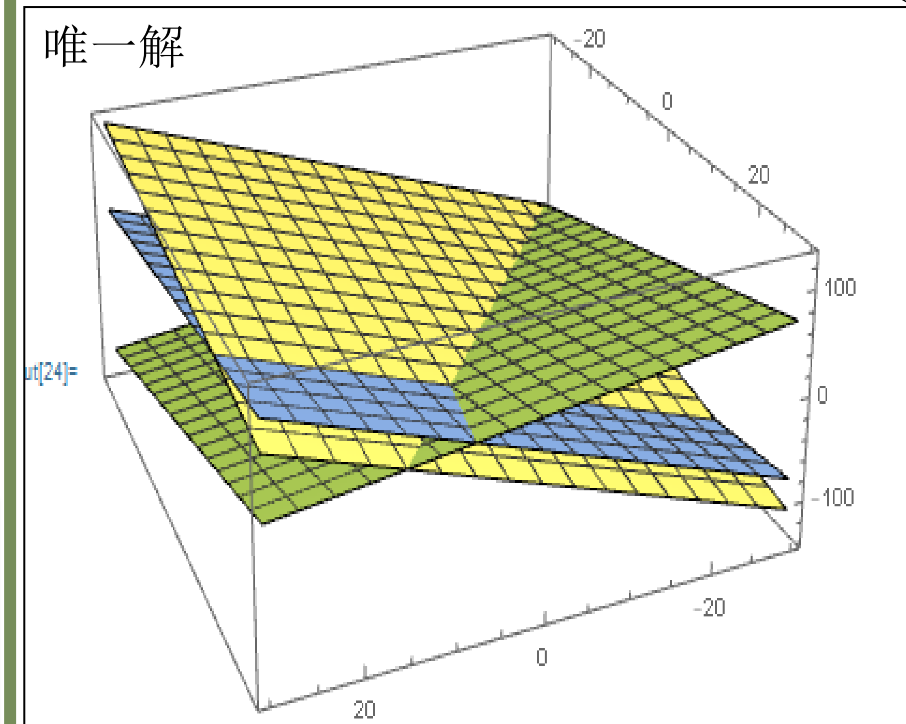
# 以三个未知数三个方程的方程组为例，方程组无解的几何意义示意图

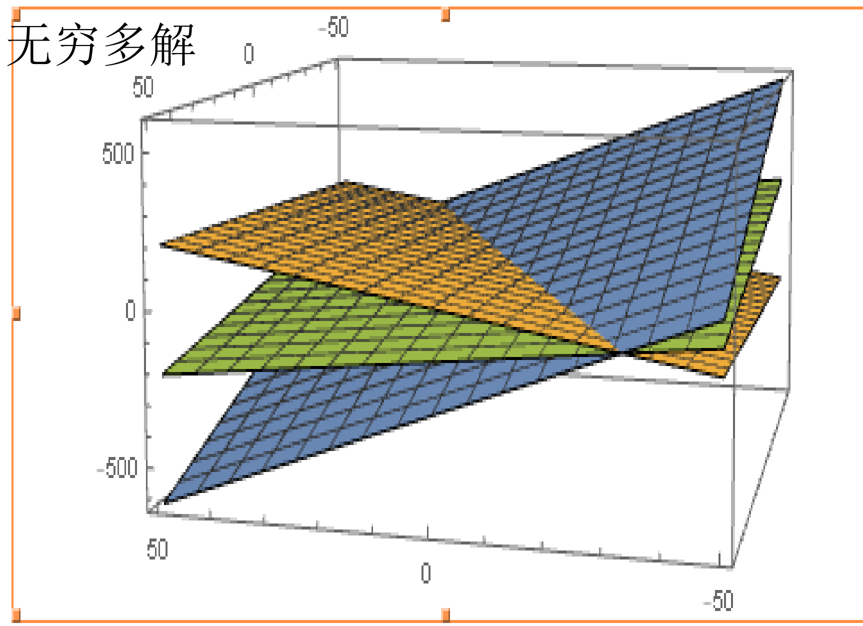



**以三个未知数三个方程的方程组为例，方程组有解的几何意义示意图**




# 2．用矩阵的秩解释方程组有解的条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

**写成矩阵方程$Ax=b$的形式，并对方程组的增广矩阵$(A|b)$进行初等行变换,然后得出：**

**结论1：方程组有解无解的判定；**

**结论2：方程组唯一解和无穷多解的区分；**

## 线性方程组无解

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ x-2y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3y+4z=6 \\ 0=11 \end{cases}$$

$$(A|b) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

以前说法：有矛盾方程“0=11”

**现在说法：r(*A*)≠r(*A*|*b*)**

## 线性方程组有解

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3y+4z=6 \\ 3z=11 \end{cases}$$

$$(A|b) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

以前说法：没有矛盾方程；

**现在说法：r(*A*)=r(*A*|*b*)**

## 2．线性方程组有解的条件

**结论：** 非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充分必要条件是 $r(A)=r(A|b)$

**或者：** 非齐次线性方程组$Ax=b$无解的充分必要条件是 $r(A)\neq r(A|b)$

**或者是** $r(A)<r(A|b)$

或者是 $r(A)+1=r(A|b)$

# 线性方程组唯一解和无穷多解的判定

**在方程组有唯一解时，**

$$\begin{cases} 2x+3y+8z=-5 \\ x-2y-4z=3 \\ -5x+3y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-4z=3 \\ 7y+16z=-11 \\ -3z=6 \end{cases}$$

有效方程个数等于未知数个数时，方程组有唯一解

$$\left(A|b\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r(A) = r(A|b) = n}$$

**在方程组有无穷多解时，**

$$\begin{cases} 2x+3y+8z=-5 \\ x-2y-4z=3 \\ -5x-4y+12z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-4z=3 \\ 7y+16z=-11 \\ 0=0 \end{cases}$$

未知数个数多于有效方程个数时，方程组有无穷多解

$$\left(A|b\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

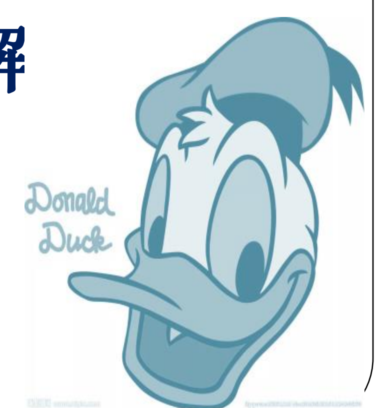
$$\boldsymbol{r(A) = r(A|b) < n}$$

# 2. 线性方程组有解的条件

**定理：** $n$ 元线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A|b)$

**结论：** $n$ 元线性方程组 $Ax = b$

- $r(A) \neq r(A|b)$ $\Rightarrow$ 方程组无解；
- $r(A) = r(A|b) = n$ $\Rightarrow$ 方程组有唯一解；
- $r(A) = r(A|b) < n$ $\Rightarrow$ 方程组有无穷多解



# 思考题：

对一个非齐次线性方程组的增广矩阵进行初等行变换得：

$$(A|b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & a^2-4 \end{array}\right)$$

$r(A) \neq r(A|b)$时方程组无解；

$r(A) = r(A|b) = n$ 时方程组有唯一解；

$r(A) = r(A|b) < n$时方程组有无穷多解。

问题：（1）$a$取何值时方程组无解?

（2）$a$取何值时方程组有唯一解?

（3）$a$取何值时方程组有无穷多解?

# 第3部分：线性方程组求解的步骤

Part Three：Steps for Solving Linear Equations

# 第3部分：线性方程组求解的步骤

Part Three：Steps for Solving Linear Equations

# 3.线性方程组$Ax=b$求解的步骤

- 第一步：把增广矩阵$(A|b)$用初等行变换化成行阶梯形矩阵$(B|c)$；
- 第二步：判断$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B|c)$是否成立（即$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A|b)$是否成立）；如果不成立，方程组无解计算中止；如果$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(B|c)$成立，转入第三步；
- 第三步：将矩阵$(B|c)$继续用行换化简成行最简形；
- 第四步：根据行最简形写出$Ax=b$的同解方程组，进一步写出方程组的解。

**例1**

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+8x_3=-5, \\ x_1-2x_2-4x_3=3, \\ -5x_1+3x_2+x_3=2. \end{cases}$$

**解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换**

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 8 & -5 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 16 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)=(B\,|\,c)$$

**由于r($B$)=r($B|c$)=3,所以方程组$Ax=b$有唯一解；**

$$(B\,|\,c)\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**从而可得方程组有唯一解** $$x=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**例 3** 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4-x_5=8 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4+x_5=6 \end{cases}$$

**解** 对方程组的增广矩阵施以初等行变换,化成行阶梯形矩阵

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

可以看出,$r(A)=2$,$r(A \mid b)=3$.所以方程组无解.

## 例3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases}$$

**解:**

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得同解方程组 $\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + 3x_4 = 2 \\ \quad x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 + 2 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 - 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = \quad\quad x_4 \end{cases}$ 其中$x_3,x_4$是自由未知量，$\therefore \quad x = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \in R$

练习 $\begin{cases} x_1 + \quad\quad\quad\quad x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \quad\quad 2x_4 = 3 \\ x_1 + \quad\quad x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}]{r_4-r_1-r_2-r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

可得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 + 1 \\ x_2 = -x_4 + 2 \\ x_3 = -x_4 + 3 \\ x_4 = \quad x_4 \end{cases}$$

这里的 $x_4$ 是自由未知量

令 $x_4 = k$； 得方程组的通解 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in R$

## 例4　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 8x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + bx_4 = a. \end{cases}$$

**问：　$a,b$取何值时，方程组无解，有唯一解或无穷多解？在有解时求出其解.**

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b & a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 & a-1 \end{array}\right)$$

# 第4部分：齐次线性方程组的解

Part Four： Conditions for Linear Equations to Have Solutions

# 4. 齐次线性方程组 Homogeneous linear equations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

一定有零解

结论：$n$ 元线性方程组 $Ax = b$

- ~~$r(A) \neq r(A|b) \Rightarrow$ 方程组无解；~~
- $r(A) = r(A|b) = n \Rightarrow$ 方程组有唯一解；
- $r(A) = r(A|b) < n \Rightarrow$ 方程组有无穷多解.

**定理：$n$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$**

**① 只有零解的充分必要条件是 $r(A) = n$；**

**② 有非零解的充分必要条件是 $r(A) < n$ .**

# 4. 齐次线性方程组解（特殊情况）

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0,
\end{cases}
$$

定理：$n$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$

① 只有零解的充分必要条件是 $r(A) = n$；

② 有非零解的充分必要条件是 $r(A) < n$ .

结论：$n$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$

① 若方程个数$m$<未知数个数$n$，则必有非零解；

② 若方程个数$m$=未知数个数$n$，则 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

仅有零解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

天津中德应用技术大学
Tianjin Sino-German University of Applied Sciences

## 思考题：

1. $A$是4行3列的矩阵，那么齐次线性方程组$Ax$=0只有零解的条件是（　　　）

2. $A$是一个3行4列矩阵，能不能说齐次线性方程组$Ax$=0必定有非零解?

3. $A$是一个$m$行$n$列矩阵，如果齐次线性方程组$Ax$=0只有零解，那么$Ax$=b解可能是（　　　）

# 4. 齐次线性方程组解（求解步骤）

把齐次线性方程组的系数矩阵$A$用初等行变换化成行最简形矩阵；

1）如果$r(A)=n$，则齐次线性方程组$Ax=0$只有零解；

2）如果$r(A)<n$，则根据行最简形写出$Ax=0$的最简同解方程组，进一步写出方程组的解。

# 例5　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

**解：对方程组的系数矩阵A进行初等行变换**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because \ r(A) = 2 < n = 4$

所以方程组有非零解

**练习：已知某齐次线性方程组的系数矩阵是4行5列矩阵*A*，且*A*经过初等行变换化成了**

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**试写出该齐次线性方程组的解。**

# 例6　设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

**问：　λ为何值时，该方程组只有零解，非零解？有非零解时求出其通解.**

思考：能不能用系数行列式是否等于0来判断得出结论?