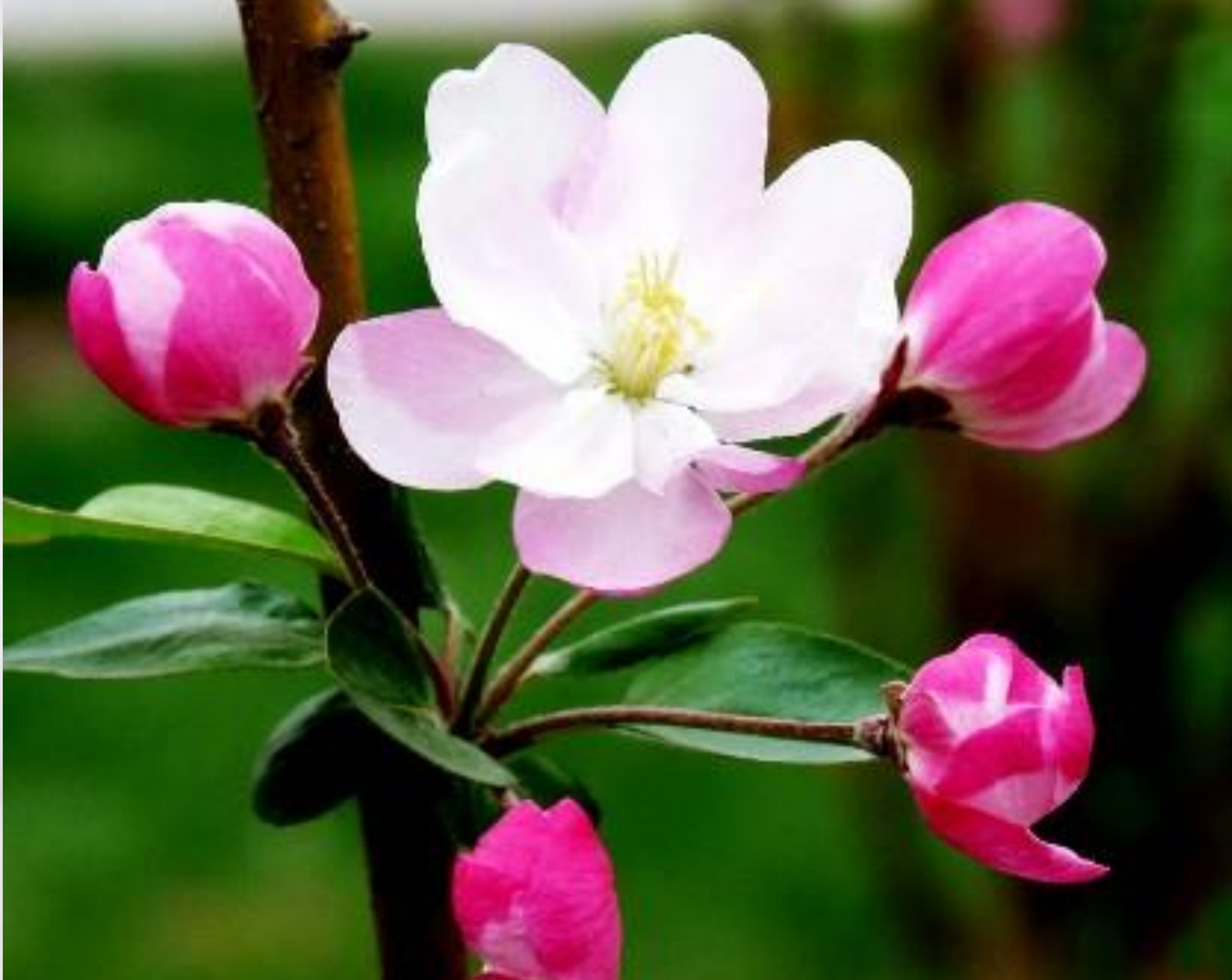
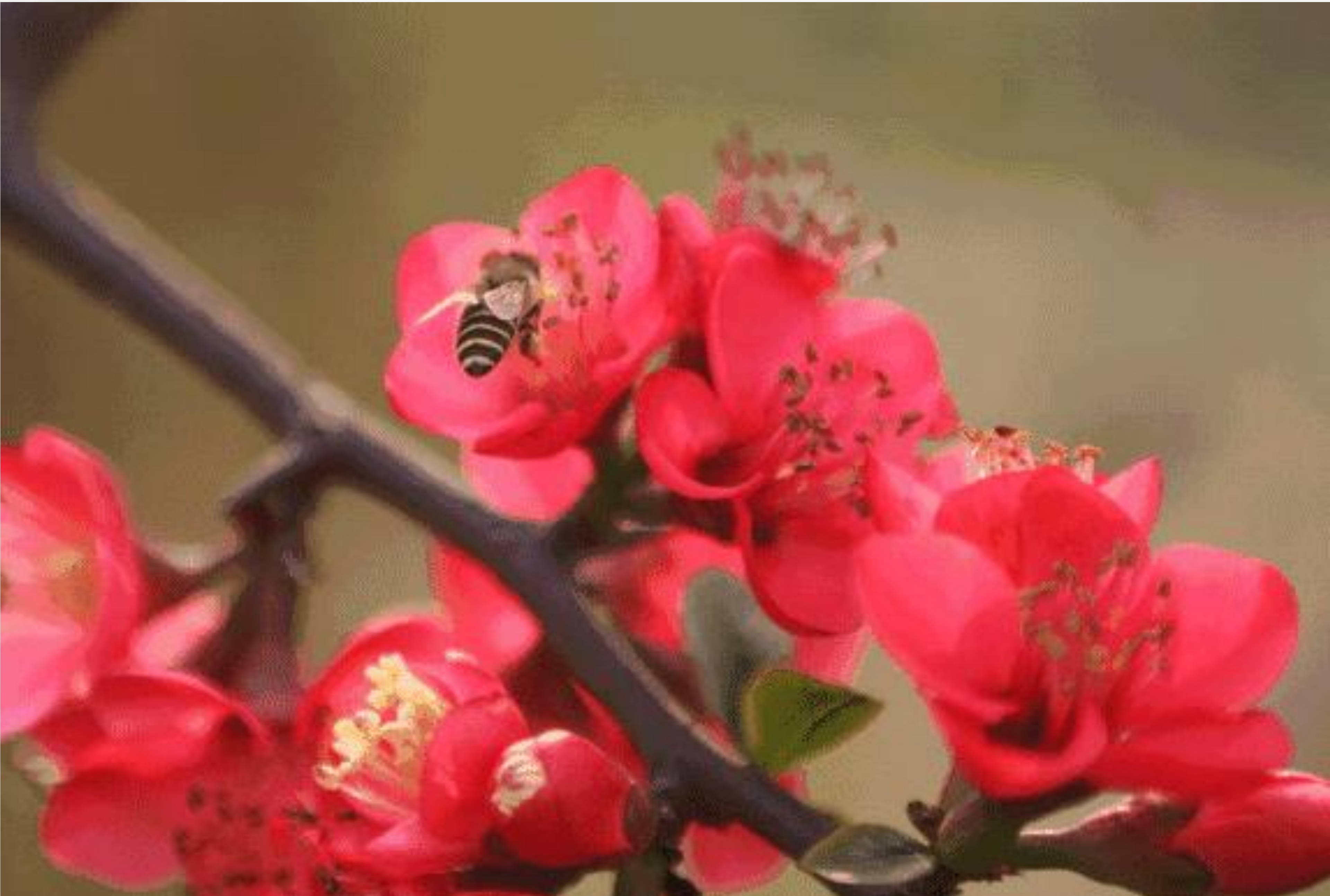
天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第14讲

4/12/2022 10:50:44 PM

内容：矩阵的秩等






@YUQING VIEW

海棠花

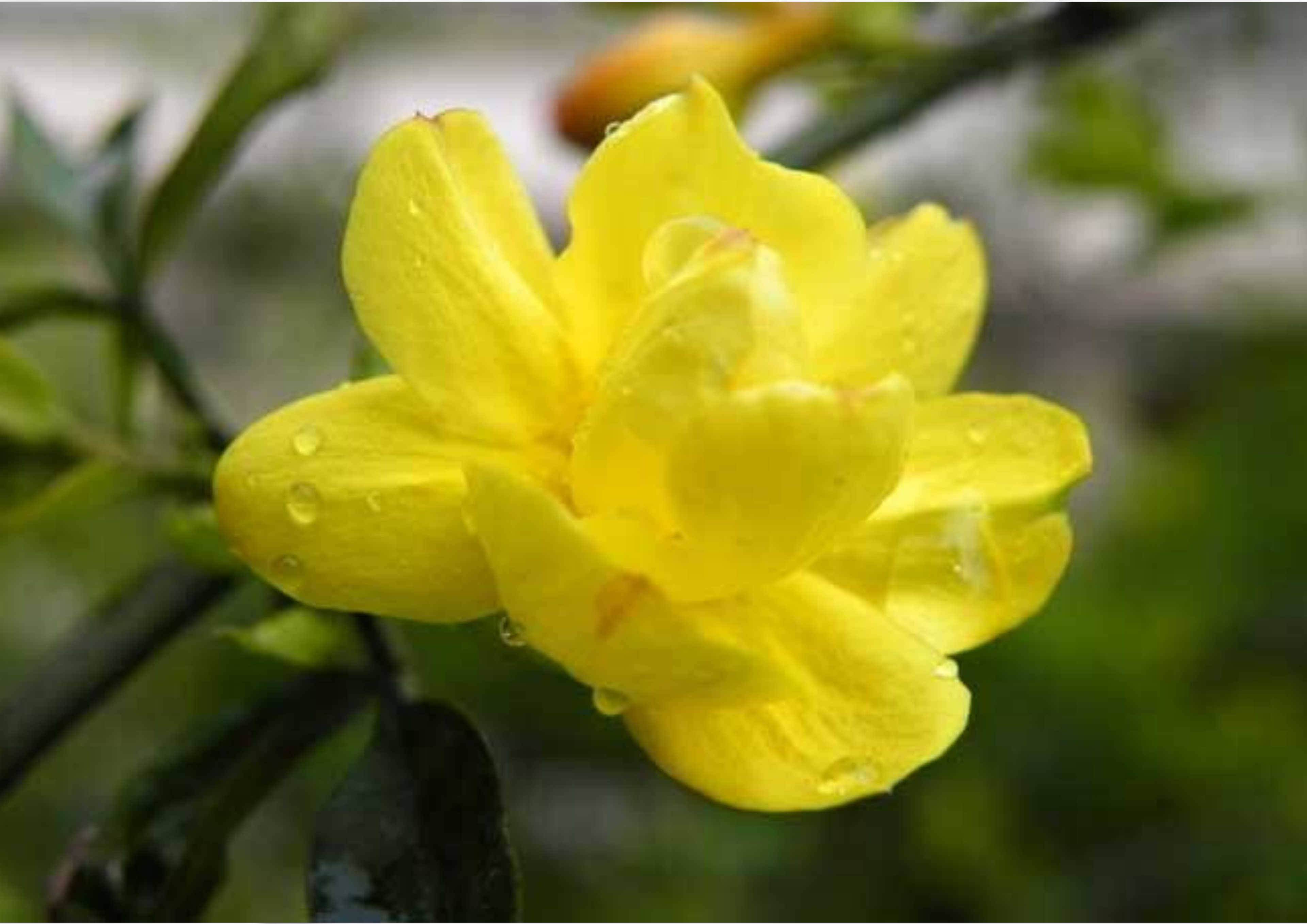
【元】方回

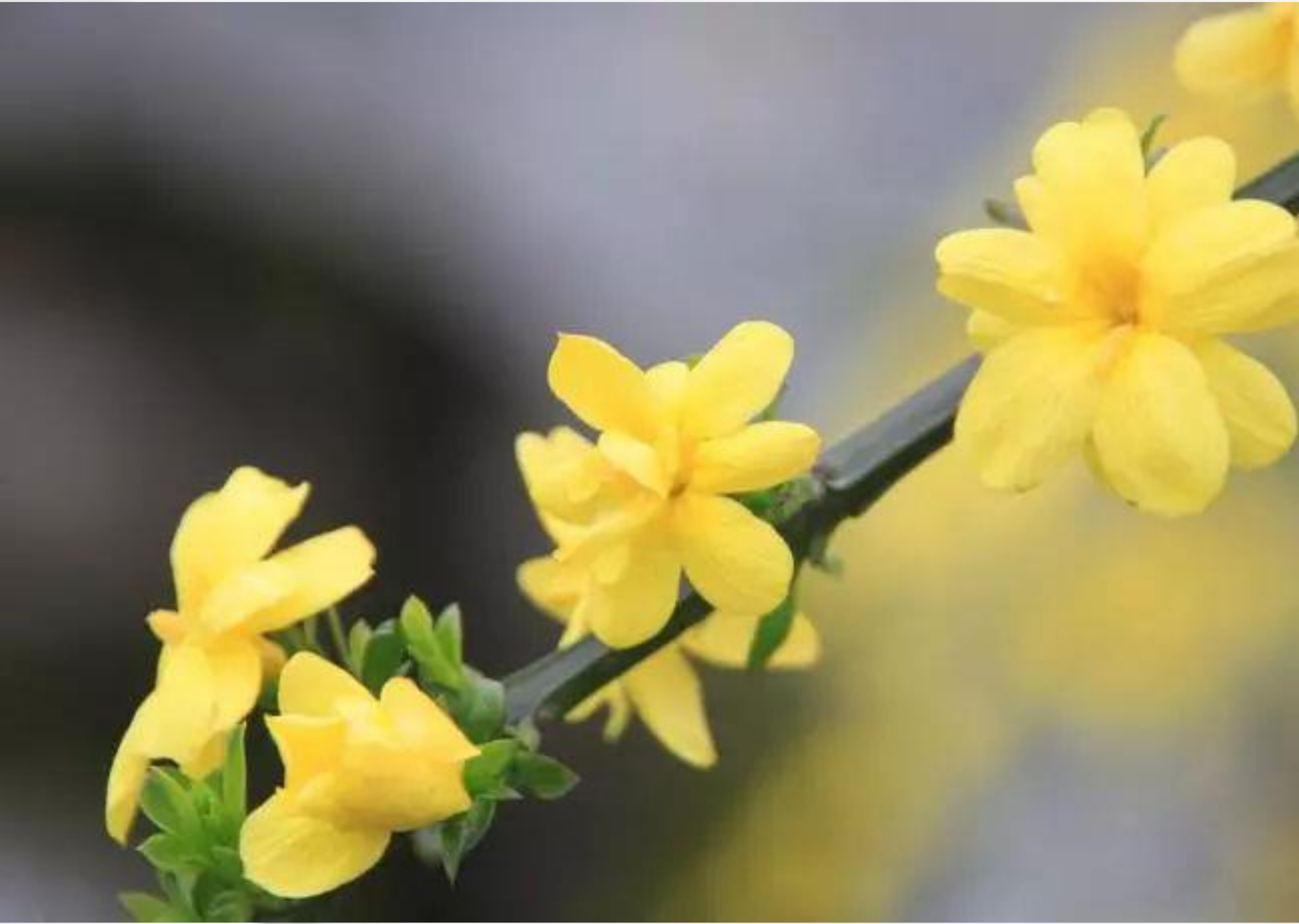
锦城春色万人迷，

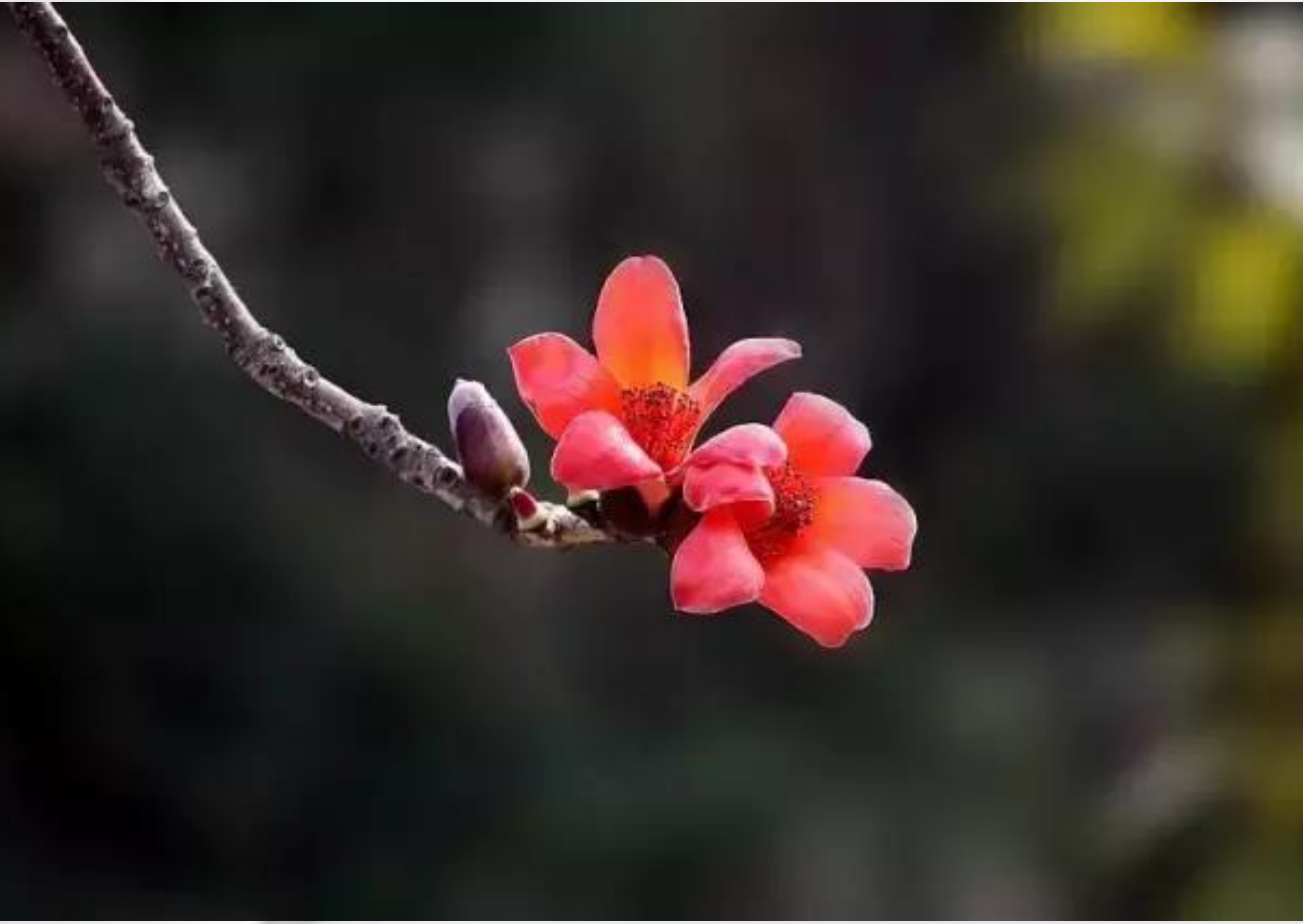
饭颗无心著品题。

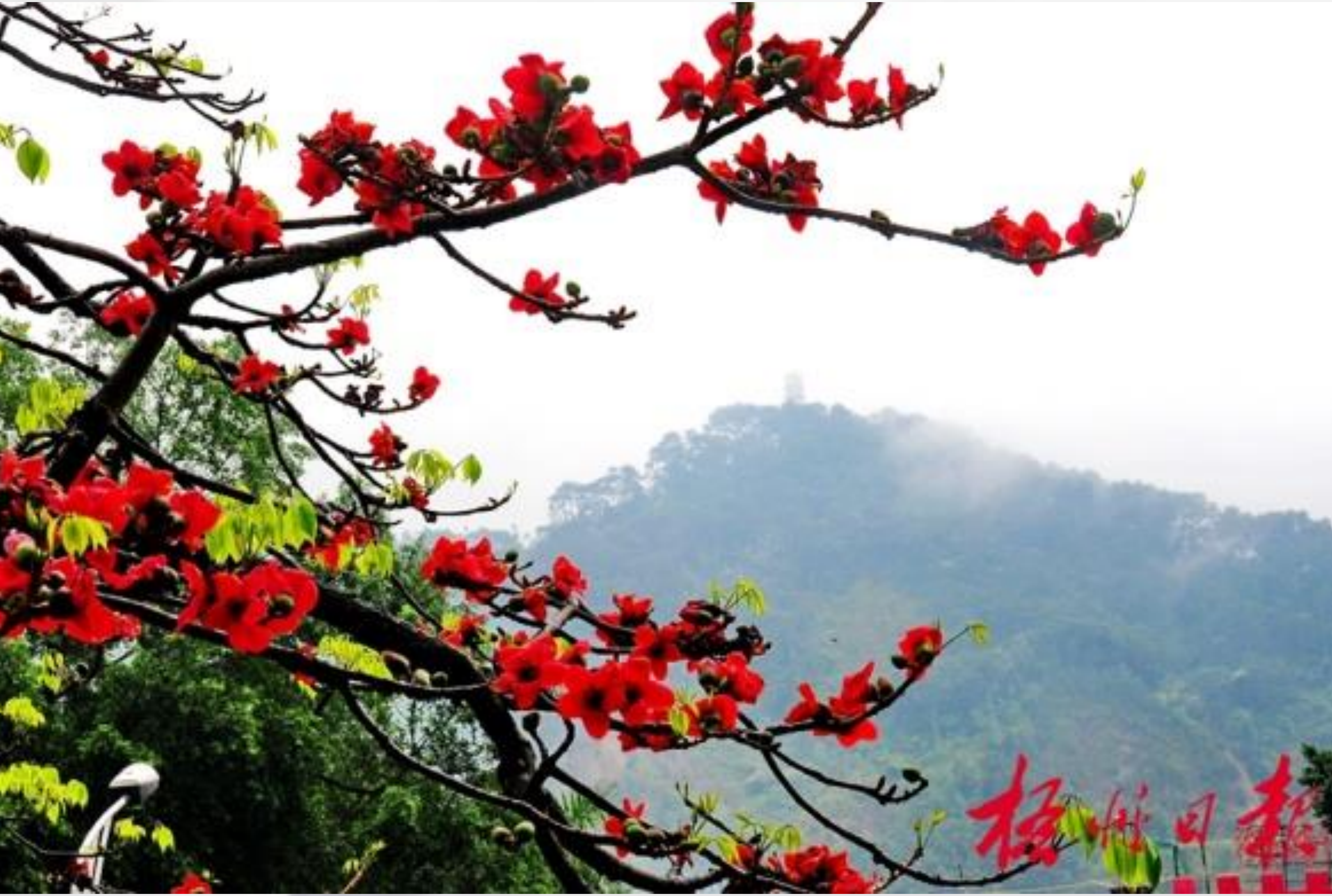
实不如华谩秾艳，

秋霜谁觑海棠梨。








梧州日報

第14讲 内容大概 Outline

1. 上次内容回顾；
2. 矩阵秩的定义；
3. 如何求矩阵的秩；
4. 矩阵秩的性质；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

矩阵的秩的概念

k阶子式：在$m\times n$矩阵A中，任取k行k列($k\le m$，$k\le n$)，位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

矩阵的秩：若矩阵A有一个r阶子式非零，而所有的$r+1$阶子式（如果存在的话）全为零，那么数r称为矩阵A的秩，记作$r(A)$.

$r(A)=$“A 中非零子式的最高阶数”

规定：零矩阵的秩等于零.

例：对于 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 14 \end{pmatrix}$，

① 任何一个元素都是其1阶子式

② $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 等都是其2阶子式，

共 $C_3^2 \times C_5^2 = 30$ 个

③ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ 是其3阶子式，共10个

例：已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$；求 $r(A)$

解：A中有2阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$；

A中所有3阶子式都等于0，

$\therefore r(A)=2$.

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O,\qquad r(A)=0$$

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&-2&6\\-3&-6&3&-9\end{pmatrix},\qquad r(A)=1$$

$$(3)\quad A=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&0&5\\0&3&0\end{pmatrix},\quad |A|=-60\neq 0,\quad r(A)=3$$

$$(4)\quad B=\begin{pmatrix}2&8&1&5\\-3&2&7&3\\2&6&4&9\end{pmatrix},\quad r(B)=?$$

看不出来

(5) 行阶梯形矩阵能看出它的秩；（即非零行的行数）

3.性质：

- 若A为$m\times n$非零矩阵，则 $0<r(A)\le\min(m, n)$.
- $r(A^{T}) = r(A)$.
- $r(kA) = r(A)$, $(k\neq 0)$
- 若A为n阶方阵，则 $r(A) = n$ 的充分必要条件为$|A|\neq 0$.

注：对n阶方阵A，若$r(A) = n$，称A为满秩矩阵；若$r(A) < n$，称A为降秩矩阵.

A 可逆 $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $r(A)= n$

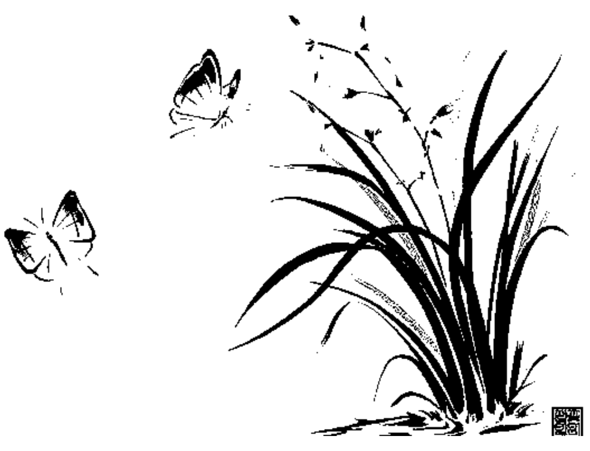
（A 为非奇异矩阵）　（A 为满秩矩阵）

满秩矩阵的几个等价说法

- A是可逆矩阵；
- A是非奇异矩阵；
- A的行列式不等于0；
- A是非退化矩阵；
- A是满秩矩阵；
- A的秩等于n（行数和列数）；

以上结论只要有一个成立，其余都成立

二、求矩阵的秩



二、求矩阵的秩

定理：初等变换不改变矩阵的秩.

$$A \xrightarrow{\text{初等变换}} A\text{的行阶梯型矩阵} \longrightarrow r(A)=\text{非零行行数}$$

结论：

1. 若 $A \to B$，则 $r(A) = r(B)$.
2. 矩阵A的等价标准型唯一，即 $A \xrightarrow{r(A)=r} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$
3. $r(AB) \le r(A), \quad r(AB) \le r(B).$
4. 若A可逆（满秩），则 $r(AB) = r(B).$

例 33　设 $r(A_{4\times3})=2$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$，求 $r(AB)$.

解　因为 $|B|\neq0$，B 是满秩矩阵. 所以 $r(AB)=r(A)=2$.

4.　设 A、B 均为 n 阶非零方阵，且 $AB=O$，则 A、B 的秩(　　　).

(A) 必有一个等于零；(B) 都小于 n；(C) 有一个小于 n；(D) 都等于 n.

$r(A_{m\times n})\leq m$, $r(A_{m\times n})\leq n$

$r(AB)\leq r(A)$; $r(AB)\leq r(B)$;

在A可逆时，$r(AB)=r(B)$;

$r(AB)<r(B)$时A是降秩矩阵，即A不可逆;

二．选择题

1. 设 A 为 $m\times s$ 阶矩阵，α 为 s 维非零列向量，0 为 s 维零列向量，$B=(\alpha \quad 0)$，则 $r(AB)$（ ）.

(A) $=0$；　(B) $=1$；　(C) $=2$；　(D) <2.

2. 设 4 阶矩阵 A 的秩为 2，则 $r(A^*)=$（ ）.

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

例：设 A 为 4 阶方阵，且 $r(A)=2$，则

$A^*=0$（或称 $r(A^*)=0$）

证：A^* 的元素为 A_{ij}，为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，故 A_{ij} 为 A 中 3 阶子式

但 $r(A)=2$，所以 A 的 3 阶子式都为 0

$\therefore A_{ij}=0$（对任 i,j） 即 $A^*=0$

$r(A^*)=0$.

文字矩阵的求秩

讨论 λ 的取值范围，确定矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

提示： 矩阵化成行阶梯形求举止的秩；
由于矩阵中有文字 λ，需要用到初等列变换

例：已知 A 为 3×2 矩阵，B 为 2×3 矩阵，

则 AB 必为降秩矩阵（也即不可逆矩阵）

证：根据题意 $r(A)\le 2$，$r(B)\le 2$

又 $\because$ $r(AB)\le r(A)$

$\therefore$ $r(AB)\le 2$

但 AB 为 3 阶方阵，$\therefore$ $r(AB)<3$

即 AB 为降秩矩阵

本节主要结论

- 计算矩阵的秩r(A);
- 满秩矩阵A就是可逆矩阵,$|A|\neq 0$
- A是降秩矩阵，$|A|=0$
- $\mathrm{r}(A_{m\times n})\leq m, \mathrm{r}(A_{m\times n})\leq n$
- $\mathrm{r}(AB)\leq r(A); r(AB)\leq r(B);$
- 在A可逆时，$r(AB)=r(B);$
- 在B可逆时，$r(AB)=r(A);$
- 当$r(AB)<r(B)$时，A是降秩矩阵，即A不可逆;
- 矩阵的秩实际上也就是它的标准形中1的个数