天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第7讲

3/23/2022 12:44:51 PM

内容：矩阵的概念和计算等

第7讲 内容大概 Outline

1. 上次内容回顾；
2. 矩阵的乘法；
3. 矩阵的转置运算；
4. 矩阵的行列式；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

行列式和矩阵的区别和联系

1. 行列式必须是正方形的；矩阵可以是长方形的

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -7 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$ 是行列式；

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$ 不是行列式

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -7 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$ 是矩阵；

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ 也是矩阵

加（减法）运算对矩阵的要求：

例如

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

但计算 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 没有意义

只有**同型矩阵**才能进行加（减）法运算.

矩阵的数乘运算，即数与矩阵相乘

数k与矩阵A的数量积记作kA，规定

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

如 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，则 $-3 \times A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix}$

数乘矩阵(kA)的意义举例

$$A=\begin{pmatrix}174 & 186 & 178 & 182\\ 166 & 163 & 172 & 160\\ 178 & 180 & 188 & 182\end{pmatrix}$$

$$B=0.01\times A=\begin{pmatrix}1.74 & 1.86 & 1.78 & 1.82\\ 1.66 & 1.63 & 1.72 & 1.60\\ 1.78 & 1.80 & 1.88 & 1.82\end{pmatrix}$$

本例可以认为A与B描述的是一个事情，只是量纲不同。

一个数乘以矩阵与一个数乘以行列式的区别

$$3\times\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3x & 3y & 3z \\ 3m & 3n & 3p \end{pmatrix}$$

数乘矩阵

$$3\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

数乘行列式

数乘行列式

$$or \qquad 3\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3x & 3y & 3z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

矩阵线性运算的运算规律

$(1)\ A+B=B+A;$

$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C).$

$(3)\ (-1)A=-A$ 负矩阵.

$(4)\ A+(-A)=0,\ A-B=A+(-B).$

$(5)\ 1A=A$

$(1)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$

$(2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$

$(3)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

该有的算律都有了

矩阵线性运算的例子

二、矩阵的乘积

二、矩阵的乘法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

则，矩阵A与矩阵B的乘积记作AB，规定为

$$AB=C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$

$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$,

矩阵的乘法定义解读

- 矩阵A和矩阵B相乘，关注三个事情:
  - 能不能相乘?
    - 乘积C=AB几行几列?
      - C的每个元素等于多少?

矩阵乘法可以进行运算的条件

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

故只有A的列数等于B的行数时，AB才有意义；然后，AB的行数是A的行数，AB的列数是B的列数

只有A的列数等于B的行数时，AB才有意义；然后，AB的行数是A的行数，AB的列数是B的列数

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ 不可以

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ 可以

(3) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 可以

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}(2,4,9)$ 可以

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -9 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 可以

(6) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 可以

(7) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可以

(8) $(2,4,9)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 不可以

矩阵乘法的例子

例 1　已知 $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，求$C=AB$

解：$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times2}$

?

矩阵乘法的例子

已知 $A=\begin{pmatrix}17 & 7 & 11 & 20\\ 15 & 9 & 13 & 18\\ 18 & 6 & 15 & 16\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ ，求$C=AB$

解： $C=AB=\begin{pmatrix}17 & 7 & 11 & 20\\ 15 & 9 & 13 & 18\\ 18 & 6 & 15 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}97 & 123\\ 101 & 119\\ 100 & 120\end{pmatrix}$

矩阵乘法例子的现实意义

1. 小明同学要去超市（永旺）买四类小食品：

2袋坚果（单价17元），3瓶饮料（7），

2瓶酸奶（11）,1盒小点心（20）共花费：

$17\times2+7\times3+11\times2+20\times1=97$元；

可以写成：

$$\begin{array}{ccc} \text{单价} & & \text{总花费} \\ (17\ \ 7\ \ 11\ \ 20) & \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} & =97 \\ & \text{数量清单} & \end{array}$$

矩阵乘法例子的现实意义（续）

2. 小明同学要去超市（永旺）买四类小食品：
2袋坚果（单价17元），3瓶饮料（7），
2瓶酸奶（11）,1盒小点心（20）共花费：
$17\times2+7\times3+11\times2+20\times1=97$元；
小强同学听说有顺风车，也要去一起购物：
数量分别为： 2件 1件 2件 3件；花123元
可以写成：

$$\underbrace{(17\ \ 7\ \ 11\ \ 20)}_{\text{单价}}\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 1\\2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}}_{\text{二人数量清单}}=\overbrace{(97\ \ 123)}^{\text{总花费}}$$

矩阵乘法例子的现实意义（续）

小明和小强要去超市购物：

小强建议，我们不一定非要去永旺；也可以考虑乐购，人人乐等其他超市。

小明说，很好啊。我们货比三家，可以对比一下，看去那合适。

$$\begin{array}{r} \text{永旺} \\ \text{乐购} \\ \text{人人乐} \end{array}\begin{pmatrix}17 & 7 & 11 & 20\\ 15 & 9 & 13 & 18\\ 18 & 6 & 15 & 16\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}\text{小明} & \text{小强}\end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}97 & 123\\ 101 & 119\\ 100 & 120\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}\text{小明} & \text{小强}\end{array}\end{array}\begin{array}{l} \text{永旺} \\ \text{乐购} \\ \text{人人乐} \end{array}$$

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

解 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 6 & 7\\ 10 & 2 & -6\\ -2 & 17 & 10\end{pmatrix}.$$

练习：

(1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的运算规律

$$(1)\ (AB)C = A(BC);$$

$$(2)\ A(B+C) = AB+AC,\quad (B+C)A = BA+CA;$$

$$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$ （其中 λ 为数）；

$$(4)\ E_m A_{m\times n} = A_{m\times n},\quad A_{m\times n} E_n = A_{m\times n};$$

$$(5)\ OA = O,\ AO = O;$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$D=B-C$，求 AB，AC，AD，DA.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 10\\ 39 & -30\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}-13 & 10\\ 39 & -30\end{pmatrix} \qquad D=B-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$DA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 9 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}$$

矩阵乘法中单位矩阵E和零矩阵O的作用

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

对任意m行n列矩阵A，都有 EA=A；AE=A；

矩阵乘法中单位矩阵E和零矩阵O的作用（续）

(3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & u \\ m & n & p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对任意m行n列矩阵A，都有 OA=O；AO=O；

三、矩阵乘法的算律

矩阵乘法特点:

1) 矩阵乘法不满足交换律, $AB \neq BA$.

$$AD = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

3) 矩阵乘法不满足消去律，

$AB = AC$ 且 $A \neq O$ 推不出 $B = C$

比如： $AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

例4 计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

解 (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times2 \\ 3\times1 & 3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

$$(2)\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

解 $$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{21}b_2+a_{31}b_3 & a_{12}b_1+a_{22}b_2+a_{32}b_3 & a_{13}b_1+a_{23}b_2+a_{33}b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}b_1^2+a_{22}b_2^2+a_{33}b_3^2+2a_{12}b_1b_2+2a_{13}b_1b_3+2a_{23}b_2b_3$$

例5 若 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，求 $AB+AC$.

解1 $$AB+AC=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&5\\-6&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&2\\11&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\5&15\end{pmatrix}$$

解2 $$AB+AC=A(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7\\5&15\end{pmatrix}$$

例6 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 A^2-2A.

解一

$$A^2-2A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解二

$$A^2-2A=(A-2E)A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

三、矩阵乘法的运算规律

$(1)\ (AB)C = A(BC)$;

$(2)\ A(B+C) = AB + AC,\quad (B+C)A = BA + CA$;

$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$(4)\ E_m A_{m\times n} = A_{m\times n},\ A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$;

$(5)\ OA = O,\ AO = O$;

矩阵乘法结合律的例子

Examples of Matrix Multiplication Combination Law

例：已知 $A=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}, B=(1,\ 2,\ 1),$ 求$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$(AB)^{50}$

解：$AB=\begin{pmatrix}-2&-4&-2\\-1&-2&-1\\3&6&3\end{pmatrix},\quad BA=-1,$

$$(AB)^{50}=(AB)(AB)\cdots(AB)=A(BA)(BA)\cdots(BA)B$$

$$=A(BA)^{49}B=A(-1)B=-AB=\begin{pmatrix}2&4&2\\1&2&1\\-3&-6&-3\end{pmatrix}$$

矩阵乘法不满足交换律的例子

思考：如果***A***和***B***是同阶方阵，那么

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 成立吗？

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ 成立吗？

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

成立的充分必要条件是*AB*=*BA*

小结：必须掌握的内容

1. 矩阵乘法：给出A和B，能算出AB和BA；

2. 给出A和B，能判断出AB运算能不能进行；如果能，AB几行，几列；

3. 矩阵乘法满足结合律，分配律，不满足消去律，不满足交换律；

4. 矩阵线性运算：给出A和B，能算出$2A$-$3B$；

四、线性方程组的矩阵表示

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

1) 用矩阵描述方程组.

对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_4=-1 \end{cases}$$

设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 则方程组(1)可表示为

$$Ax=b$$

的形式.

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

1) 用矩阵描述方程组.

对于线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_4=-1 \end{cases}$$

设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 则方程组(1)可表示为

$$Ax=b$$

的形式.

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

2) 用向量描述方程组.

若记 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,

则方程组(1)可表示为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=b \tag{3}$$

的形式.

学习有点吃力的同学可以把这部分跳过去

到了后面还会专门从向量的角度再学习

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

3) 用矩阵和向量描述方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

可以写成 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ***Ax*=b**形式

也可以写成 $x_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 向量组合形式

五、矩阵的幂运算

方阵的幂 The power of a square matrix

定义 n 阶方阵 A 的幂 A^k(k,l 是非负整数)如下：

$$A^0=E,\quad A^1=A,\quad A^k=A^{k-1}A\quad(k>1)$$

容易验证

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}$$

设有 m 次多项式 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_m\neq0)$，则矩阵多项式

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

仍是 n 阶方阵，称为方阵 A 的 m 次多项式.注意上式最后一项是 $a_0E(=a_0A^0)$，不能写成 a_0.

***A*的*n*次方也就是*n*个*A*的乘积**

方阵多项式的例子

An example of the polynomials of a square matrix

例7 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+x+3$ 求 $f(A)$

解 $f(A)=A^2+A+3E$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}+3E$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}+3E$$

$$=3E$$

需要注意的细节：Details that need attention

如果A是三阶方阵，$f(x)$是一元多项式，比如：

$$f(x)=2x^3-5x^2+7x-4$$

则 $f(A)=2A^3-5A^2+7A-4E$

$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是三阶单位矩阵，相当于$A^0$

$f(x)=2x^3-5x^2+7x-4$可以看成是 $2x^3-5x^2+7x-4x^0$

方阵多项式的意义 The Meaning of Square Matrix Polynomials

如果A是n阶方阵，专业课里要用到$e^{2A}, \sin A$ 等

在高等数学里，

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

可以认为：$e^A \approx E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}$

类似可以想象：$\cos A,\ \ln A,\ \sin 2A$

方阵多项式的例子 An example of the polynomials of a square matrix

例 12 设 $f(x)=2x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

解 方法 1

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2A^2-3A+E=2\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1\\ -3 & 12\end{pmatrix}$$

方法 2 因为 $f(x)=(x-1)(2x-1)$, 所以

$$f(A)=(A-E)(2A-E)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1\\ -3 & 12\end{pmatrix}$$

六、矩阵的转置

矩阵的转置 Transposition of matrices

定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做矩阵 A 的转置矩阵，记作 A^{T} .

运算性质：

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

一般地：$(AB)^T \neq A^T B^T$

矩阵转置的例子 Examples of Matrix Transposition

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix}1&4&0&7\\5&-8&2&-1\\0&3&-5&9\end{pmatrix},\qquad A^T{}_{4\times3}=\begin{pmatrix}1&5&0\\4&-8&3\\0&2&-5\\7&-1&9\end{pmatrix}$$

体会： $\left(A^T\right)^T=A$ 和 $(kA)^T=kA^T$

矩阵转置的例子 Examples of Matrix Transposition

例 13　已知 $A=(2,1,1)^T$，$B=(1,0,-1)$，求 $(AB)^{100}$.

解　$(AB)^{100}=(AB)(AB)\cdots(AB)=A(BA)(BA)\cdots(BA)B=$

$$A(BA)^{99}B=AB=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$，其中 $BA=(1,0,-1)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=1$.