天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第9讲

3/30/2022 8:41:14 AM

内容：逆矩阵等

第9讲 内容大概 Outline

1. 上次内容回顾；
2. 逆矩阵定义；
3. 伴随矩阵求逆矩阵；
4. 逆矩阵性质；
5. 例题练习；

主讲：邱玉文

一、前次课程结论回顾

第1部分：前节结论和作业

Part One: Explanation of homework

【作业讲解】

4．设 $A=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\end{pmatrix}$，则 $A^5=$ ________________.

答案：$-A=\begin{pmatrix}-12 & 6 & -9\\ 8 & -4 & 6\\ 20 & -10 & 15\end{pmatrix}$

矩阵乘法结合律的例子

Examples of Matrix Multiplication Combination Law

例：已知 $A=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}, B=(1,\ 2,\ 1),$ 求$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$(AB)^{50}$

解：$AB=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -2\\-1 & -2 & -1\\3 & 6 & 3\end{pmatrix},\quad BA=-1,$

$$(AB)^{50}=(AB)(AB)\cdots(AB)=A(BA)(BA)\cdots(BA)B$$

$$=A(BA)^{49}B=A(-1)B=-AB=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\1 & 2 & 1\\-3 & -6 & -3\end{pmatrix}$$

1. 设 A 为任意 n 阶方阵，矩阵 B 满足 $AB=BA$，则 $B=$ ___ kE

举例说明：设 B 是对角矩阵，

$$AB=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & & \\ & n & \\ & & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ma & nb & pc \\ mx & ny & pz \\ mu & nv & pw \end{pmatrix},$$

但是 $$BA=\begin{pmatrix} m & & \\ & n & \\ & & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ma & mb & mc \\ nx & ny & nz \\ pu & pv & pw \end{pmatrix};$$

由 $AB=BA$ 得：$m=n=p=k$，即 $B=kE$；

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $PAQ=($　　　　$)$.

(A) $\begin{pmatrix} a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32}+a_{12} & a_{31}+a_{11} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{21}+a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{11}+a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}$.

矩阵乘法应用的例子

Examples of Matrix Multiplication Applications

3) 用矩阵和向量描述方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

可以写成 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ***A**x*=**b**形式

也可以写成 $x_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 向量组合形式

例 17 设 A,B 均为 3 阶方阵且 $|A|=\frac{1}{3}$，$|B|=4$，求 $|-A|$ 及 $|2B^{T}A^{2}|$.

解 $|-A|=(-1)^{3}|A|=(-1)\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

$|2B^{T}A^{2}|=2^{3}|B^{T}||A|^{2}=8\times4\times\frac{1}{9}=\frac{32}{9}$

【课堂练习】

已知：A,B 是 3 阶方阵，$|A|=-2,|B|=3$，则 $\left|-2A^TB^3\right|=$（　　）

第2部分：逆矩阵定义

Part Two: Definition of Inverse Matrix

1. 逆矩阵的例子：Examples of inverse matrices

定义 8 对于 n 阶矩阵 A，若存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 A 为可逆矩阵(invertible matrix)，简称 A 可逆，称矩阵 B 为矩阵 A 的逆矩阵(inverse).

可逆矩阵的例子：（1）单位矩阵E 可逆，其逆矩阵是E

（2）零矩阵O不可逆

(3) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ 可逆，其逆矩阵是 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(4) $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ 不可逆

2. 逆矩阵的唯一性 Uniqueness of Inverse Matrix (if Existed)

【定理】 如果矩阵 A 可逆，那么 A 的逆矩阵是惟一的.

【证明】 设 A 有两个逆矩阵 B 和 C，据可逆矩阵的定义

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E$$

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$$

以，A 的逆矩阵若存在，则是惟一的.

将可逆矩阵 A 的逆矩阵记为 A^{-1}.

第3部分：伴随矩阵法求逆矩阵

Part Four： Solving Inverse Matrix by Adjoint Matrix

3. 伴随矩阵 Adjoint matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为方阵A的伴随矩阵，其中A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式

千万注意：$|A|$中第一行元素的代数余子式，在A^*中是在第一列；

伴随矩阵的例子 Examples of Adjoint Matrices

例 18　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解　按定义 9，因为

$$A_{11}=-3,\quad A_{12}=-4,\quad A_{13}=5,\quad A_{21}=3,\quad A_{22}=0$$

$$A_{23}=-1,\quad A_{31}=1,\quad A_{32}=4,\quad A_{33}=-3$$

$$A^*=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 4\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

伴随矩阵的例子 Examples of Adjoint Matrices

练习：已知 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求 A^*

答案： $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

伴随矩阵的例子 Examples of Adjoint Matrices

练习：已知 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 B^*

答案：$B^*=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

伴随矩阵的结论 Conclusion of Ad joint Matrices

引理：设A^*为n阶方阵A的伴随矩阵，则

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E$$

部分推导过程

充分性.设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,则

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}$$

$$= |A| E.$$

4. 矩阵可逆的充分必要条件

Necessary and Sufficient Conditions for reversibility of Matrix

由 $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ 推出的重要结论：

定理2：方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$，**且当A可逆时，**

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

另一个重要结论：A可逆时，$A^* = |A|A^{-1}$

求逆矩阵的例子 Examples of Solving Inverse Matrix

填空：2阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件是

____________________ 若A可逆，则 $A^{-1}=$ ________________

求逆矩阵的例子 Examples of Solving Inverse Matrix

已知 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，判断$B$是否可逆，若B可逆，求 B^{-1}

提醒：**B**是不是可逆，由|**B**|是否等于**0**来确定。计算结束后可以演算。

主要结果：$|B|=-4\neq 0$ 所以B可逆；

第4部分：逆矩阵的性质

Part Four： Properties of Inverse Matrix

矩阵可逆条件的简化 Simplification of Reversible Condition of Matrix

对n阶方阵A，B，若$AB=E$（或$BA=E$），则A可逆，且$B=A^{-1}$．

证明　由$AB=E$知，$|A||B|\neq 0$，得$|A|\neq 0$，由定理1知A可逆，其惟一逆阵为A^{-1}，

有
$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}$$

即
$$B=A^{-1}.$$

这个结论的意义：把可逆矩阵定义$AB=BA=E$ **简化了**

小结： brief summary

1. 矩阵A可逆定义$AB = BA = E$

2. 矩阵A如果可逆，其逆矩阵必然唯一，可以将其记为A^{-1}

3. 如果两个方阵A，B满足AB=E，则B=A^{-1} 记第3条就行

定理2：方阵A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$，**且当A可逆时，**

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$$

会求逆矩阵

关于伴随矩阵 $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$ 或者 $A^* = |A|A^{-1}$

逆矩阵性质 Properties of Inverse Matrix

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

(4) 若A可逆,则A^{T}亦可逆,且$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$.

(5) 若A可逆,有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}$.

逆矩阵性质的例子 Examples of Properties of Inverse Matrix

设A是3阶方阵，$|A|=10$，求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$.

解 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|=\left|3A^{-1}-\frac{1}{2}|A|A^{-1}\right|$

$$=\left|-2A^{-1}\right|=(-2)^3\frac{1}{|A|}=-\frac{4}{5}.$$

练习：设A为一个三阶方阵， $|A|=\frac{1}{2}, A^*$ 为 A 的伴随矩阵，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解 $\because AA^{-1}=I$ 及 $|A|=\frac{1}{2}$, $\therefore \left|A^{-1}\right|=2$

由 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$, 知 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|$$

$$=(-\frac{2}{3})^3\left|A^{-1}\right|=-\frac{16}{27}.$$

先讲后练 Example first, then practice

例14　$|A|=3, A$为4阶方阵，求$|A^*|$.

解：　$\because\ A^*=|A|A^{-1}=3A^{-1}$

$\therefore\ |A^*|=|3A^{-1}|=3^4\cdot|A^{-1}|=3^4\cdot\dfrac{1}{3}=3^3=27.$

关于伴随矩阵，记住　$A^*=|A|A^{-1}$

先讲后练 Example first, then practice

例题： 已知$A^2-3A-E=0$，证明：$A-E$可逆. 并写出逆矩阵

解： $\because\ A^2-3A-E=O$

$\therefore\ (A-E)(A-2E)=A^2-3A+2E=E+2E=3E$

即 $(A-E)(A-2E)=3E \Rightarrow (A-E)\cdot\frac{1}{3}(A-2E)=E$

$\therefore\ (A-E)^{-1}=\frac{1}{3}(A-2E).$

小结：考虑(A–E)(？)=E?

提示：方阵$AB=E$，则A可逆

退一步考虑，(A–E)(？)=kE?

已知条件$A^2-3A-E=O$ **如何使用？**

天津中德应用技术大学 TianjinSino-German University of Applied Sciences

先讲后练 Example first, then practice

已知A满足$A^2+2A-5E=O$，证明A-2E可逆，并写出其逆矩阵

解： $\because\ A^2+2A-5E=O$ $\therefore\ A^2+2A=5E$

$$(A-2E)(A+4E)=A^2+2A-8E$$

$$=5E-8E=-3E$$

$$\therefore\ (A-2E)\left(-\frac{1}{3}(A+4E)\right)=E$$

所以，A-2E可逆，且 $\therefore\ (A-2E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+4E)$

逆矩阵的消去律 Elimination law of inverse matrix

$AB = AC$, A可逆 $\Longrightarrow$ $B = C$

$AB = AC$ $\Longrightarrow$ $A^{-1}AB = A^{-1}AC$

$\Longrightarrow$ $B = C$

$AB = O$, A可逆 $\Longrightarrow$ $B = O$

结论：（1）*A*可逆时，*AB*=*O*是*B*=*O*的充分必要条件；

（2）*A*可逆时，*AB*=*AC*是*B*=*C*的充分必要条件

第5部分：矩阵方程

Part Five： Matrix equation

矩阵方程 Matrix equation

1. 当矩阵A可逆时，由$AB=C$，可得：$B=A^{-1}C$

2. 当矩阵A可逆时，由$BA=C$，可得：$B=CA^{-1}$

3. 当矩阵A和B都可逆时，

由 $AXB=C$，可得：$X=A^{-1}CB^{-1}$

矩阵没有除法，靠两边同时**同侧**乘以A^{-1}而消除A

$$AB=C\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}C\Rightarrow (A^{-1}A)B=A^{-1}C\Rightarrow B=A^{-1}C$$

解矩阵方程$AXB=C$，其中$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}$.

解：$|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$，知A，B皆可逆，

$$X=A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$$

其中 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-2/3&-3&5/2\\1&1&-1\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$，

于是 $$X=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-2/3&-3&5/2\\1&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{bmatrix}$$

矩阵方程练习：Exercise of Matrix Equation

已知 $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求$A$，使得 $AB=C$