线性代数第19讲

5/11/2022 12:05:20 AM

内容：线性方程组解的结构等

第19讲：内容大概 Outline of lectures

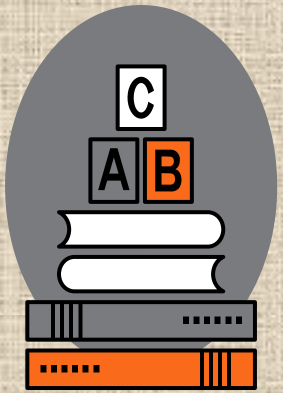
1 作业释疑与§3.4复习；

2 齐次线性方程组解的性质；

3 齐次线性方程组的解空间；

4 非齐次线性方程组解的结构；

5 非齐次线性方程组解的例题。



一、极大无关组复习

三、(10 分)求向量组 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 1,\ 2)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_3=(2,\ 1,\ 0,\ 3)^T$，$\alpha_4=(2,\ 5,\ 4,\ -1)^T$，$\alpha_5=(1,\ -1,\ -1,\ 3)^T$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

解：

$$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&1&5&-1\\1&1&0&4&-1\\2&1&3&-1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$，故向量组的秩为 3，极大无关组是 α_1，α_2，α_3，

$\alpha_4=-2\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$.

五（9分）求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示

答案在下页，自己练习

解：$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$（2 分）$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（4 分

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（5 分）　　$r = 2$　（6 分），

α_1, α_2（或 α_1, α_3，或 α_1, α_4）是一个极大无关组 （7 分），

$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$，$\alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$（9 分）.

一、§3.1 已经学过的结论

学过1： n元线性方程组$Ax=b$

(1) 无解的充分必要条件是 $r(A) < r(A|b)$;

(2) 有唯一解的充要条件是 $r(A) = r(A|b) = n$;

(3) 有无穷解的充要条件是 $r(A) = r(A|b) < n$.

一、§3.1 已经学过的结论

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

一定有零解

结论：n 元线性方程组 $Ax=b$

- $r(A)\neq r(A|b) \Rightarrow$ 方程组无解；
- $r(A)=r(A|b)=n \Rightarrow$ 方程组有唯一解；
- $r(A)=r(A|b)<n \Rightarrow$ 方程组有无穷多解.

定理：n 元齐次线性方程组 $Ax=0$

① 只有零解的充分必要条件是 $r(A)=n$；

② 有非零解的充分必要条件是 $r(A)<n$.

学过的方法3： 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由 $r(A) = 2 < n = 4$ 齐次方程组有非零解

可得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = \qquad x_4 \end{cases}$$

所以原方程组的解是

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k_1, k_2 \in R$$

二、齐次线性方程组解的结构

齐次方程组的矩阵方程形式$Ax=0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

可写成矩阵方程方程形式 $Ax=0.$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

【线性方程组的几种形式】

例如，方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3-2x_4=1 \\ -2x_1+4x_2+3x_3-x_4=2 \\ 3x_1+2x_2-5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+5x_2-5x_3-x_4=1 \end{cases}$

可写为 $Ax=b$ 的形式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 齐次方程组$Ax=0$解的性质

（1）若α，β是$Ax=0$的解，则$\alpha+\beta$也是$Ax=0$的解；

（2）若α为$Ax=0$的解，则$k\alpha$也是$Ax=0$的解；

（3）综合(1)和(2)，若α，β是$Ax=0$的解，则$k\alpha+m\beta$也是$Ax=0$的解；

齐次方程组$Ax=0$的基础解系

齐次方程组$Ax=0$有若干个解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 满足:

（1） $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关;

（2） 齐次方程组$Ax=0$的任意一个解，都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示;

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是齐次方程组$Ax=0$的一个基础解系

齐次线性方程组$Ax=0$的全部解

（1）如果齐次方程组 $Ax=0$有基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$；则齐次线性方程组 $Ax=0$的全部解是 $\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

（2）如果齐次方程组 $Ax=0$只有零解，则 $Ax=0$没有基础解系；

齐次方程组$Ax=0$全部解的几何意义

以三元齐次线性方程组$Ax=0$为例，它的解

（1）只有零解，解集是单元素集合；

（2）基础解系含一个向量，全部解为过原点的一条直线；

（3）解空间为二维子空间，全部解为过原点的一个平面；

$$\xi=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

（1）

$$\xi=k\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad k\in R$$

（2）

$$\xi=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in R$$

（3）

齐次方程组$Ax=0$的解的结构

对于齐次方程组 $Ax=0$，设$r(A)=r<n$，则基础解系一定存在，且基础解系含向量个数为$n-r$个；其中n为方程组未知数个数，也是系数矩阵的列数。

【定理】设 A 是$m\times n$矩阵，$r(A)=r<n$，则齐次线性方程组

$\mathbf{Ax}=0$ 的基础解系有$n-r(A)$个解向量 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$；

齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=0$的全部解是$\vec{x}=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$；

例1　求齐次线性方程组的基础解系与通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解：用行换把系数矩阵A化成行最简矩阵，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

便得 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{4}{7}x_4. \end{cases}$ 令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

即得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

并由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

求线性方程组的基础解系和通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

答案：基础解系： $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数 .

三、非齐次线性方程组解的结构

The Structure of Solutions to Non-homogeneous Linear Equations

8 非齐次线性方程组Ax=b解的结构

性质1 设η_1,η_2是$Ax=b$的解,则$\eta_1-\eta_2$是$Ax=0$的解.

证 设η_1,η_2是$Ax=b$的解,则$A\eta_1=b,A\eta_2=b$,于是

$$A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$$

所以$\eta_1-\eta_2$是$Ax=0$的解.

类似地,可以证明:

性质2 设η是$Ax=b$的解,ξ是$Ax=0$的解,则$\eta+\xi$是$Ax=b$的解.

齐次方程组：$Ax=0$；非齐次方程组 $Ax=b$

1. 若 α 是 $Ax=0$ 的解；β 是 $Ax=b$ 的解，则 $\alpha+\beta$ 是 $Ax=b$ 的解.

因为：$A\alpha=0$，$A\beta=b \Rightarrow A(\alpha+\beta)=b$

∴ $\alpha+\beta$ 是 $Ax=b$ 的解

2. α 和 β 都是 $Ax=b$ 的解；则 $\alpha+\beta$ 是 $Ax=2b$ 的解

因为：$A\alpha=b$，$A\beta=b \Rightarrow A(\alpha+\beta)=2b$

∴ $\alpha+\beta$ 是 $Ax=2b$ 的解；

4. 若 α,β 都是 $Ax=b$ 的解，

① $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 也是 $Ax=b$ 的解；

② $3\alpha-2\beta$ 也是 $Ax=b$ 的解

③ k 是任意实数，$k(\alpha-\beta)+\beta$ 也是 $Ax=b$ 的解

$A\alpha=b,\ A\beta=b \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)=b$；

$A(3\alpha-2\beta)=b$； $A\left(k(\alpha-\beta)+\beta\right)=b$

非齐次线性方程组Ax=b的通解

当r(A)=r(A|b)<n时，非齐次线性方程组Ax=b有无穷多解；

“Ax=b的通解”= “Ax=0的通解” + “Ax=b的特解”

Ax=b的通解是 $x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*;\quad k_i \in R$

定理 16 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，如果 η^* 是方程组 Ax = b 的一个特解，ξ 是导出组 Ax = 0 的通解，则 $\eta^*+\xi$ 是 Ax = b 的通解．也就是说，如果 Ax = 0 的基础解系是 ξ_1，ξ_2，$\cdots\xi_{n-r}$，则 Ax = b 的通解可以表示为

$$\eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*.$$

如何求非齐次线性方程组Ax=b的通解

1 对增广矩阵(A|b)进行行换，化成行最简形；

2 根据行最简形得到同解方程组；确定自由未知量；

3 确定齐次方程组Ax=0的一个基础解系$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$;；

4 写出非齐次方程组Ax=b的一个特解，比如让自由未知量都等于0

5 Ax=b的通解是 $x = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*; \quad k_i \in R$

例 19　求线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

解　$$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

从而对应齐次线性方程组的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{7}{4}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

令 $x_3=x_4=0$，得方程组的一个特解为

$$\eta^*=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0\end{pmatrix}^T$$

于是所求原方程组的通解为

$$\eta=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2\quad(k_1,k_2\in R).$$

例 20 设η_1, η_2是 3 元线性方程组Ax=b的两个不同的解向量，且$r(A)=2$，求方程组Ax=b的通解。

解 由于$r(A)=2$，$n=3$，所以 Ax=0的基础解系只有一个向量。由于η_1, η_2是方程组Ax=b的解，且$\eta_1 \neq \eta_2$，所以 $\eta_1-\eta_2$是Ax=0的非零解，也是Ax=0的基础解系。

所以，Ax=b的通解是 $x=\eta_1+k_1(\eta_1-\eta_2)$ $(k_1,k_2 \in R)$

【例题】 求下列齐次线性方程组的一个基础解系

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

【解】 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

所以 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \quad\quad x_4 \\ x_4 = \quad\quad x_4 \end{cases}$，其中 x_2, x_4 是自由未知量；方程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 全部解是 $\mathbf{x} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in R$

与方程组Ax=b有解等价的命题

$\Leftrightarrow$ 线性方程组Ax=b有解

$\Leftrightarrow$ 向量b能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

$\Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价;

$\Leftrightarrow$ 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$与矩阵$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$的秩相等.

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

例：设 A 为4行5列矩阵，$r(A)=3$，非齐次线性方程组有解 η_1,η_2,η_3，则 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_1-\eta_3)+\eta_1$$

其中 $k_1,k_2\in R$

这里：$\eta_1-\eta_2$ 与 $\eta_1-\eta_3$ 线性无关。

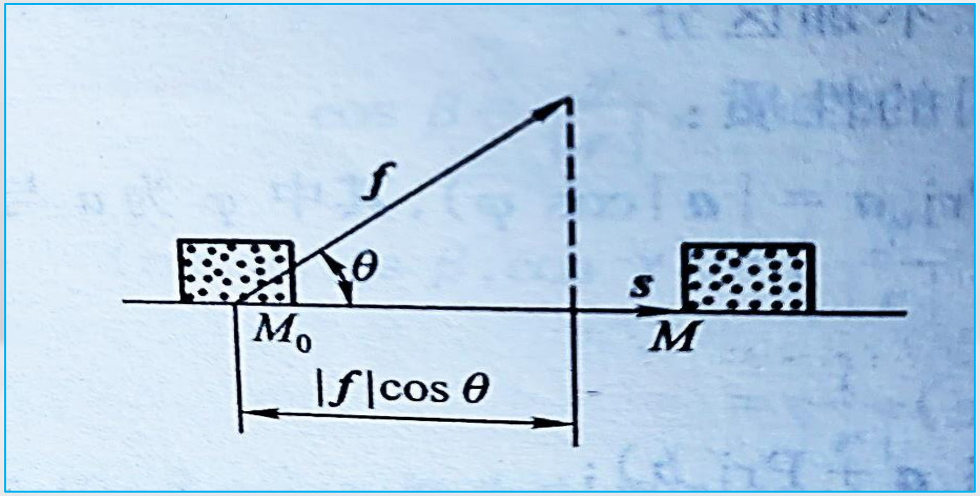
四、向量的内积与长度等

一、高数中的向量数量积

(1) $W = |f| \cdot |s| \cdot \cos\theta;$

(2) $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z);$

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$



二、向量的内积

1、内积是高数里数量积的推广；

2、内积的定义：

设有n维向量 $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

令 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

称 (α,β)为向量α与β的内积.

【向量内积的例子】 若某商店有四种商品，

存货向量为 $\alpha=\begin{pmatrix}300\\280\\270\\240\end{pmatrix}$,价值向量为 $\beta=\begin{pmatrix}30\\25\\40\\15\end{pmatrix}$ ，

则该商店存货总值为：

$$(\alpha,\beta)=300\times30+280\times25+270\times40+240\times15=30400$$ 。

当 $n=3$ 时，内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 即为 R^3 上的数量积。

向量的内积的运算性质

其中 α，β为n维向量，λ为实数：

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时, $(\alpha,\alpha)=0$.

向量的长度

1）定义　对任意 n 维向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为向量 α 的长度，即

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

2）性质：

（1）非负性：$\|\alpha\|\geq 0$,并且 $\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0.$

（2）齐次性：$\|k\cdot\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|.$

（3）三角形不等式：$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

向量的长度和夹角

1、单位向量：长度等于1的向量；

2、向量单位化 $\forall\beta\neq 0,\quad \beta^0=\dfrac{\beta}{\|\beta\|}$

$$\boxed{\left|\beta^0\right|=\left|\frac{\beta}{|\beta|}\right|=\frac{1}{|\beta|}\cdot|\beta|=1}$$

3、柯西—施瓦茨不等式 $(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

注 ① $|\alpha|,|\beta|$ 均不为0时，$\dfrac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\leq 1$

②非零向量 α 与 β 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$

向量的长度和夹角

当α，β为非零向量时，由柯西-施瓦兹不等式可得：

$$\left|\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\right| \le 1$$

两个向量α和β的夹角规定为

$$\theta = \arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

当$(\alpha,\beta)=0$时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，称α与β正交或垂直，记作$\alpha\perp\beta$

向量的长度和夹角的例子

例　求向量$\alpha=(1,2,2,3)$与$\beta=(3,1,5,1)$的夹角.

解 $\because \cos\theta=\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

练习1：已知 $\alpha=(1,2,-2,1)^T$，求 α^0

五、正交向量组与正交化

七、向量的正交化方法

1 正交的概念

当 $(\alpha,\beta)=0$ 时，称 α 与 β 正交. 记作 $\alpha\perp\beta$

零向量与任何向量都正交.

2 正交向量组的概念

若一非零向量组中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

4 正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明　设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$$

上式两边分别与α 作内积，得

$$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_1)+\lambda_2(\alpha_2,\alpha_2)+\cdots+\lambda_r(\alpha_r,\alpha_r)=0$$

由正交定义知 $(\alpha_i,\alpha_j)=0\ (i\neq j,\ i=1,2,\cdots,r)$

所以 $\lambda_1(\alpha_1,\alpha_1)=\lambda_1\left|\alpha_1\right|^2=0$, 从而有 $\lambda_1=0$.

同理可得 $\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

八 标准正交向量组（标准正交组）

正交单位向量组成的向量组.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 标准正交组

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_i,\alpha_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,s)$$

九、正交向量组表示向量时的优势

例1 下列向量 β是否能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？若能表示，则写出其线性表示式.

$$(1)\ \beta=\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\7\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=0\\3x_1+2x_2=-2\\-5x_1+4x_2-3x_3=7\end{cases}$$

九、正交向量组表示向量时的优势

已知 n 维向量 V 的任意一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,

则 $\forall\alpha\in V$, $\alpha=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n$,

$$\left(\alpha,\alpha_i\right)=c_1\left(\alpha_1,\alpha_i\right)+\cdots+c_i\left(\alpha_i,\alpha_i\right)+\cdots+c_n\left(\alpha_n,\alpha_i\right)$$

$$\Rightarrow c_i=\left(\alpha,\alpha_i\right)$$

向量在标准正交基中坐标的计算公式.

5 正交基

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是两两正交的非零向量组,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量空间$V$的正交基.

例1 已知三维向量空间中两个向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

正交，试求α_3使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

解 设$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$,且分别与$\alpha_1,\alpha_2$正交.

则有 $[\alpha_1,\alpha_3]=[\alpha_2,\alpha_3]=0$

即 $$\begin{cases}[\alpha_1,\alpha_3]=x_1+x_2+x_3=0\\ [\alpha_2,\alpha_3]=x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

解之得 $x_1=-x_3,\ x_2=0.$

若令 $x_3=1$,则有 $$\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

由上可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构成三维空间的一个正交基.

3.正交基： 向量空间V中的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是正交向量组.

4.标准正交基：

向量空间V中的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是标准正交向量组.

注：设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$是向量空间 V 中的一个标准正交基，则V中任意一个向量α可唯一表示为 $\alpha = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_r\varepsilon_r$,

其中$\lambda_i = (\alpha, \varepsilon_i)$.

四、求标准正交基方法

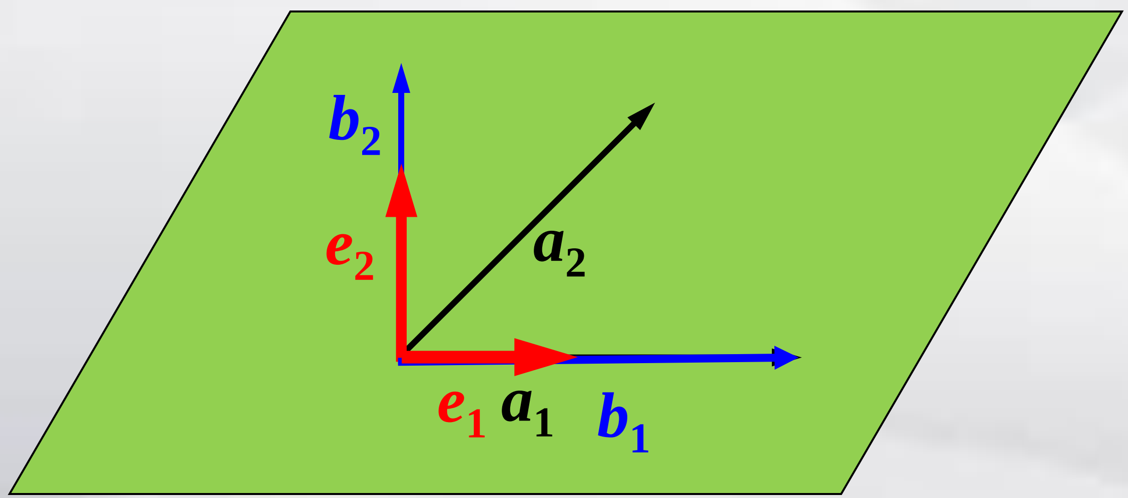
V 中的一组基 $a_1, a_2, \dots, a_n$（线性无关组）

↓ 施密特正交化

正交基 $b_1, b_2, \dots, b_n$

↓ 单位化

标准正交基 $e_1, e_2, \dots, e_n$



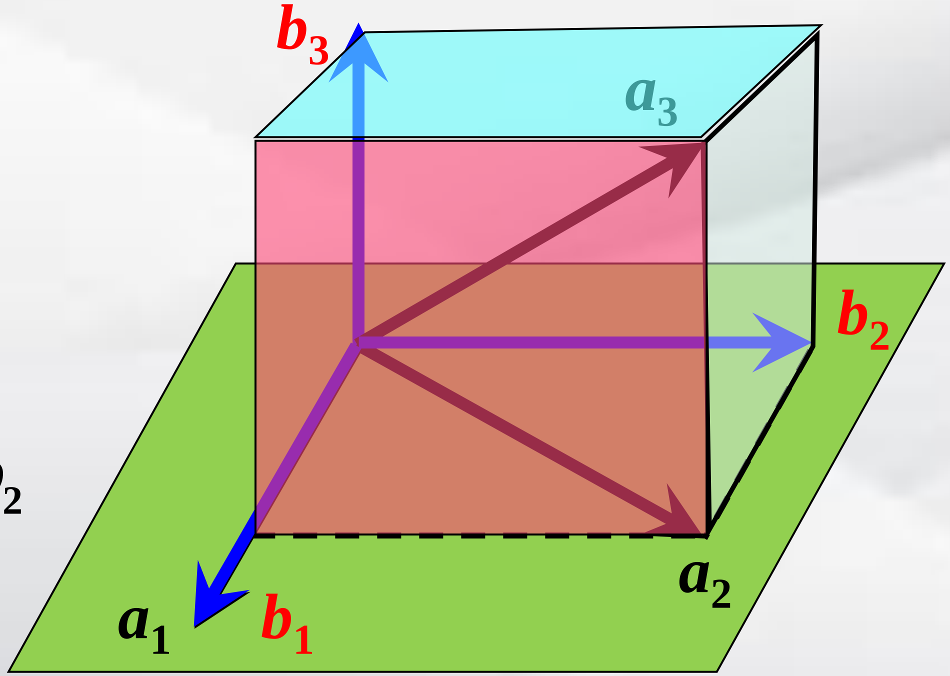
第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是向量空间 V 中的一组基，

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \qquad b_1$$

$$b_3 = a_3 - \qquad b_1 - \qquad b_2$$



$$\vdots$$

$$b_n = a_n - \frac{(b_1, a_n)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_n)}{(b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(b_{n-1}, a_n)}{(b_{n-1}, b_{n-1})} b_{n-1}$$

第二步：单位化

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为向量空间V 中的正交基，那么令

$$e_1 = \frac{1}{\| b_1 \|} b_1,\ e_2 = \frac{1}{\| b_2 \|} b_2, \cdots,\ e_n = \frac{1}{\| b_n \|} b_n$$

从而 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是向量空间 V 中的一个标准正交基.

例2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ 试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

五、正交矩阵

定义：若 n 阶方阵 A 满足 $A^TA=E$，则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

性质：设 A,B 均为 n 阶正交矩阵，则

- ✓ A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$；
- ✓ $|A|=1$ 或 -1；
- ✓ $A^{-1}(A^T)$ 和 A^* 也是正交矩阵；
- ✓ 若 A 和 B 是正交阵，则 AB 也是正交阵.

定理：方阵 A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组是标准正交向量组.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$ 是否为正交矩阵？

A 是正交矩阵

B 不是正交矩阵

提交

例3 设$A=\begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & b & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & d \end{pmatrix}$是正交矩阵，求$a,b,c,d.$

A 正交矩阵 $\Rightarrow$ A的行（列）为单位正交向量组.