天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

线性代数第18讲

4/26/2022 10:49:51 PM

内容：向量组的线性组合等

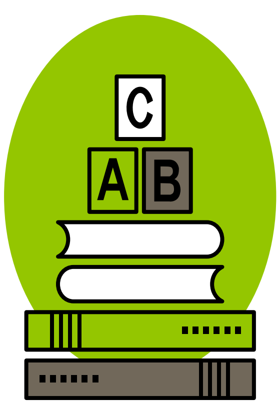
第18讲：内容大概 Outline of lectures

1 向量组的极大无关组（2）；

2 向量组的极大无关组定义；

3 如何求向量组的极大无关组?

4 向量组极大无关组的性质；



第1部分：向量组的线性相关性（2）

判断向量组是否线性相关

定理 6 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

有非零解.

判断向量组是否线性相关

推论 1 s 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关(无关)的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩 $r(A)<s(r(A)=s)$.

推论 2 s 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,若 $s>n$,即向量组中向量个数大于维数,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关.

例如:向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$;无论 x 取何值,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,这里 $s=3,n=2,s>n$.

推论 3 n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 组成的向量组线性相关的充分必要条件是 $|A|=0$,这里 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 n 阶方阵.

后三页方法连续看

判断向量组是否线性相关

2. 证明向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$线性无关。

证明：（方法不唯一）　设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，代入得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2 &=0\\ 2k_1+ \quad\; k_3&=0\\ k_1+2k_2+k_3&=0\end{cases}$$

解之得，方程组只有零解。所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

例题　已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$$

试讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性．

解法 1　由

$$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得$r(A)=2<3$，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关．

例题　已知

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$$

试讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性.

解法 2　设

$$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}，\text{由}|A|=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{vmatrix}=0，$$所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

定理 6 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\ge 2)$线性相关的充分必要条件是该向量组中至少存在一个向量能由其余$m-1$个向量线性表示.

充分性：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中至少存在一个向量能由其余$m-1$个向量线性表示．不妨设$\alpha_m$能由其余$m-1$个向量线性表示，即

$$\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1},$$

于是

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}-\alpha_m=0$$

由$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$，$-1$不全为 0，得出$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

线性相关意味着有"冗余"，如：

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ 3x+2y+2z=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x \qquad\quad =1 \\ \qquad 0=0 \end{cases}$$

三个方程仅有两个有效方程，内在关系是

$\alpha_1=(1,1,1,1)$，$\alpha_2=(2,1,1,2)$，$\alpha_3=(3,2,2,3)$ 相关

其中 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

换句话说，第三个方程是前两个方程"相当"出来的

再看方程组
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ 3x-y+5z=7 \end{cases}$$
，三个方程都有效，方程组有唯一解；任意去掉一个方程，则新方程组的解集会发生变化。从数量关系上看：

$\alpha_1=(1,1,1,1)$，$\alpha_2=(2,1,1,2)$，$\alpha_3=(3,-1,5,7)$

线性无关，每个向量都"无可取代"

线性相关性判断的特殊情况

定理 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$ $(s<m)$线性相关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$整体也线性相关。

推论：若向量组线性无关，则它的每一个部分组也线性无关。

简言之，向量组部分相关，整体相关；整体无关，部分组也无关。

例如：1. 如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$也线性相关；

2. 如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$也线性无关。

判断填空题：

1. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ 线性（　　　　）；

2. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. 线性（　　　　）；

3. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-6\\-8\end{pmatrix}$ 线性（　　　　）；

4. 向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\7\\-8\end{pmatrix}$ 线性（　　　　）；

练习：判断向量组是否线性相关

判断填空题：

5. 若向量组整体（　　），则部分组也（　　）；

6. 若向量组整体（　　），则部分组也（　　）；

7. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性（　　）；

8. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性（　　）；

9. 若向量组的延长组线性相关，则缩短组（　　）

第2部分：线性相关性的几个定理

三、线性相关性的有关定理

定理： 设某个向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关，而向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$（即增加了一个向量b）线性相关，则向量 b 必能由原向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性表示；且表示式唯一.

例如：$\beta=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，此时

① α_1,α_2 无关；② α_1,α_2,β 相关，故

β 可由 α_1,α_2 唯一表示，$\beta=\alpha_1+2\alpha_2$

再看 $\gamma_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 线性相关，

β 仍可由 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性表示.

$\beta=\gamma_1+0\cdot\gamma_2+2\gamma_3$；$\beta=-\gamma_1+2\gamma_2+2\gamma_3$

$\beta=-2\gamma_1+3\gamma_2+2\gamma_3$ …… 有无穷多表示法

一、关于向量组线性相关

1）存在一组不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_s$, 使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}. \qquad (8)$$

2）向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中至少有一向量是其余 $s-1$ 个向量的线性组合（有冗余）.

3）若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可表示向量 β 则表示法不唯一.

4） $r(A) < s \quad A = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s)$

向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$线性相关的判断

1) $\begin{cases}x+2y+4z=0\\2x-y+3z=0\\-x+y-z=0\\5x+y+11z=0\end{cases}$ 有非零解

2) $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{pmatrix},r(A)<3$

m=n的情况可以借助行列式判断线性相关性

设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$，令$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}$

（1） 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关；

（2） 齐次线性方程组$\begin{cases}k_1+2k_3=0\\k_1+2k_2+4k_3=0\\k_1+5k_2+7k_3=0\end{cases}$有非零解；（或者说

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\vec{0}$有非零解）；

（3） 行列式$|A|=0$ ；

（4） $r(A)<3$

二、关于向量组的线性无关

1）只有当 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 全为零时，才能使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0.$$

2）向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任一向量不能由其余 $s-1$ 个向量的线性组合.

3）若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可表示向量β 则表示法唯一.

4） $r(A) = s \quad A = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s)$

【结论】

（1）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$能由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则$r \le s$．

（2）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$都线性无关，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$和向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价，则$r=s$.

第3部分：向量组的极大无关组

一、极大线性无关向量组定义

设向量组S的部分组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足如下条件:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) 如果从S的其余向量中(如果还有)任取一个添加进去的话,所得的部分组都线性相关,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组S的极大线性无关向量组,简称极大无关组.

极大无关组定义的等价说法

设向量组S的部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足如下条件：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

（2）S的其余向量（如果还有），都能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，则称部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组S的极大无关组.

规定：向量组中如果只有零向量，则没有极大无关组

小结：极大无关组的特性

1 无关性：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 及其部分组线性无关；

2 极大性：在这 r 个向量中再添加任一向量得到的 $r+1$ 个向量组必线性相关；

3 极小性：从这 r 个向量中减去任一向量得到的部分组便不能表示该向量组的全部向量，与原向量组不再等价；

4 不唯一性：任意 n 维向量组的极大无关组一定存在，但向量组可能会有不只一个极大无关组；

1. S: $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; 只含零向量，故 S 没有极大无关组

2. A: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

故A的极大无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，也就是A本身；

3. B: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}7\\13\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$;

α_1,α_2 是B的极大无关组，从两方面理解：

① 任意向量 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均可被 α_1,α_2 表示，

② α_1,α_2 再添一个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_i$，则线性相关。

向量组的极大无关组不唯一，但彼此等价；

如：S：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\7\\10\end{pmatrix}$；$(\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2)$

α_1,α_2 和 α_1,α_3；α_2,α_3 都是S的极大无关组.

一个向量，比如 $\beta=\begin{pmatrix}5\\12\\17\end{pmatrix}$，能被 α_1,α_2 表示，也能被 α_1,α_3 表示，也能被S表示.

另一个向量，比如 $\gamma=\begin{pmatrix}3\\17\\29\end{pmatrix}$，不能被 α_1,α_2 表示，也不能被 α_2,α_3 表示，也不能被S表示。

小结：极大无关组的特性

（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组 S的极大无关组

$\Longleftrightarrow$ 向量组A 中的任一向量β能由向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，且表法唯一.

（2）向量组的任意两个极大无关组等价.

（3）向量组S和它的极大无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$等价.

向量组与极大无关组的等价

（1）向量组的任意两个极大无关组等价.

（2）向量组的任意两个极大无关组含向量个数相等.

（3）如果向量组S的某一个极大无关组含r个向量，则向量组S的任意r个线性无关的部分向量组都是S的极大无关组.

（4）向量组的极大无关组含向量的个数十分重要，称为向量组的秩.

第4部分：向量组的秩

二、 向量组的秩的定义

定义：向量组的极大无关组所含向量的个数r称为向量组的秩.

1 等价的两个向量组S和T的秩相同.

2 若向量组S的秩为r，则S中任一r个线性无关向量就构成S的一个极大无关组，任一$r+1$个向量均线性相关.

定理：矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

证　设 $A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，　$r(A)=r$，

记结论

并设 r 阶子式 $D_r \neq 0$，

则 D_r 所在 r 列线性无关，

又由 A 中所有 $r+1$ 阶子式全为零，

知 A 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关.

$\therefore D_r$ 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个极大无关组.

$\therefore$ 列向量组的秩等于 r.

第5部分：求向量组的极大无关组

【定理】 矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量之间的线性相关性和线性表示关系.

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$A$ 经过有限次初等行变换化成 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，可得以下结论:

(1) 矩阵 A 中任意 r 个列向量线性无关的充分必要条件是矩阵 B 中对应位置的 r 个列向量线性无关；

【定理】 矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量之间的线性相关性和线性表示关系.

(2) A 中 r 个 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 A 的列向量组的极大无关组的充分必要条件是 B 中对应位置的这 r 个列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 B 的列向量组的极大无关组;

【定理】 矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量之间的线性相关性和线性表示关系.

(3) 矩阵 A 的列向量中有

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

的充分必要条件是矩阵 B 的对应位置列向量有

$$\boldsymbol{\beta}_i = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\beta}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\beta}_{i+1} + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}_r$$

初等行变换不改变矩阵列向量之间的线性关系：

$$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)\xrightarrow[\text{行换}]{}(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5)=B$$

若 β_1,β_2,β_3 线性相关 $\rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也相关

β_1,β_2,β_4 是极大无关组 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也是极大～

$2\beta_1+3\beta_2-\beta_4=\beta_5$，则 $2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_4=\alpha_5$

但 B 的向量之间的关系更容易看出来。

如：$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)\xrightarrow[\text{行换}]{}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&1&0&4\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{matrix}\end{array}$

β_1,β_2,β_4 是极大无关组

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\beta_3=\beta_1-\beta_2$

$\beta_5=\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\beta_5=4\beta_1+2\beta_2-\beta_4$

所以 可以得出：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也是极大无关组

且 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_5=4\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4$

【求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大无关组的方法】

(1) 构造$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$；

(2) 用行换将A化成行最简形矩阵C；

主元所在的列在A中对应的列向量$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$即为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组. 而$C$的非主元对应的第$j$列各数值，则为向量$\alpha_j$用极大无关组$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$线性表示的组合系数.

例 求向量组 $\alpha_1=(1,-2,2,1)^T,\alpha_2=(-1,3,2,5)^T$，

$\alpha_3=(2,-5,0,-4)^T,\alpha_4=(-3,4,1,-3)^T$，$\alpha_5=(1,-5,5,-5)^T$，

的秩和一个极大无关组，并把其余向量表示为这个极大无关组的线性组合.

解

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -5 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-3&1\\-2&3&-5&4&-5\\2&2&0&1&5\\1&5&-4&-3&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&1&-1&-2&-3\\0&0&0&15&15\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\because\ r(A)=3$ 所以，向量组的秩是3，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组的一个极大无关组

且 $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$ $\alpha_5=3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$

练习：求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\1\\7\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组表示。

结果：$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

答：秩为2，α_1, α_3 为一个极大无关组.

$\alpha_2 = -\alpha_1$，$\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_3$，

注意本题3问，是不是回答少了？

三、(10 分)求向量组 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 1,\ 2)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_3=(2,\ 1,\ 0,\ 3)^T$，$\alpha_4=(2,\ 5,\ 4,\ -1)^T$，$\alpha_5=(1,\ -1,\ -1,\ 3)^T$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

答案在下页，自己练习

解：

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&1&5&-1\\1&1&0&4&-1\\2&1&3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&1&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1\\0&1&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$，故向量组的秩为3，极大无关组是α_1，α_2,α_3，

$\alpha_4=-2\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$.

五（9分）求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示

答案在下页，自己练习

天津中德应用技术大学
TianjinSino-German University of Applied Sciences

解：$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$（2 分）$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（4 分

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（5 分）　　$r = 2$　（6 分），

α_1, α_2（或α_1, α_3，或α_1, α_4）是一个极大无关组 （7 分），

$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$，$\alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$（9 分）.