

Mathematische Logik 2: Vorlesungsmitschrift

Erich Grädel

(Mitschrift von Theodor Tesla)

Inhaltsverzeichnis

1	Mengenlehre	2
1.1	Mengen und Klassen	2
1.1.1	Axiomensysteme für die Mengenlehre	3
1.2	Stufen und Geschichten	4
1.3	Relationen und Funktionen	10
1.4	Ordinalzahlen	11
1.4.1	Ordinale und Stufen	14
1.4.2	Der Rekursionssatz	15
1.5	Das Auswahlaxiom (AC)	18
1.5.1	Folgerungen aus dem Auswahlaxiom	19
1.5.2	Der Satz von Banach-Tarski	19
1.6	Mächtigkeiten und Kardinalzahlen	23
1.6.1	Kardinalzahlarithmetik	25
1.6.2	Die Kontinuumshypothese (CH)	28
2	Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze	30
2.1	Das Hilbertsche Programm	30
2.2	Theorien	31
2.3	Kodierung von Turing Maschinen	33
2.4	Gödelisierung von Termen und Formeln	34
3	Modelltheorie	36
3.1	Erhaltungssätze (Charakterisierungssätze)	36

1 Mengenlehre

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“
(David Hilbert, 1926)

1.1 Mengen und Klassen

Reine Mengen sind Kollektion an Objekten, die ebenfalls wieder Mengen sind, als Alternative lassen sich Mengen ausgehend von Urelementen definieren.

Wie führt die Mathematik Objekte ein?

- Explizite Konstruktion aus schon vorhandenen Objekten, bspw. Konstruktion der rationalen, reellen und komplexen Zahlen, ausgehend von den ganzen und natürlichen.
- Axiomatisches formulieren von gewünschten Eigenschaften der Objekte und betrachte alle Objekte, die die Eigenschaften erfüllen, bspw. Gruppen, Vektorräume, ...

Definition 1.1 (Mengen)

Intuitiv sind Mengen *Kollektionen von Objekten*, die selbst wieder Mengen sind.

$a \in b$: a ist ein Element in der Menge b .

$a \subseteq b$: Jedes Element von a ist auch in b .

Eine konstruktive Definition von aller Menge könnte wie folgt aussehen:

$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}$ usw. Problem: Wie sieht dieses usw. aus?

Mengen lassen sich auch als Bäume darstellen. Dies lässt sich in Abbildung 1 Beispielhaft für die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ erkennen.

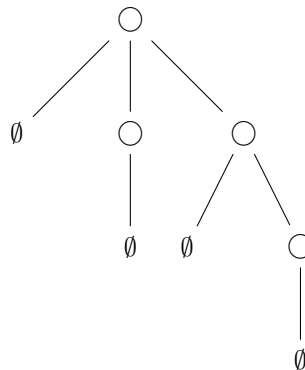


Abbildung 1: Darstellung der Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ als Baum

Definition 1.2 (Hereditär endliche Mengen)

Die *hereditär endlichen Mengen* (HF) bilden eine Miniaturversion der Mengenlehre. Es gilt $HF_0 \subset HF_1 \subset HF_2 \subset \dots$. Definiert sind diese Mengen induktiv als $HF_0 := \emptyset$ und $HF_{n+1} := \{x : x \subseteq HF_n\}$, so dass HF_{n+1} die Potenzmenge von HF_n ist.

Eine Menge ist hereditär endlich, wenn sie Element einer Menge HF_n für ein n ist. Weiter wird $HF := \{x : x \in HF_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ definiert. Dies wirft folgende Frage auf: Ist HF eine Menge?

Die ersten HF Mengen lauten $HF_0 = \emptyset$, $HF_1 = \{\emptyset\}$, $HF_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $HF_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Es lässt sich erkennen, dass $HF_n \subset HF_{n+1}$ und $HF_n \in HF_{n+1}$ für ein beliebiges n . Auch ist es möglich zu folgern, dass HF_n endlich viele Elemente besitzt und jede Menge $a \in HF_{n+1}$ die Gestalt $a = \{b_0, \dots, b_{k-1}\}$ mit $b_0, \dots, b_{k-1} \in HF_n$. Außerdem gilt, dass HF nicht hereditär endlich ist.

Definition 1.3 (Natürliche Zahlen)

Eine *natürliche Zahl* n ist definiert als $[n] := \{[0], \dots, [n-1]\}$, wobei $[0] = \emptyset$ gilt. Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} lässt sich nun als $\mathbb{N} := \{[n] : n \text{ eine nat. Zahl}\} \notin HF$. Eine Folgerung ist $[n] \in HF_{n+1} \setminus HF_n$.

1.1.1 Axiomensysteme für die Mengenlehre

Das Modell der Mengenlehre besteht aus einer Kollektion \mathcal{S} von Objekten, die wir Mengen nennen und einer Beziehung \in zwischen diesen Objekten, so dass alle Axiome des Axiomensystems erfüllt werden.

Definition 1.4 (Extensionalitätsaxiom (Ext.))

Zwei Mengen sind gleich, genau dann, wenn sie die selben Elemente haben. In einer Formel aus der Prädikatenlogik mit Signatur $\{\in\}$ wäre dies $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

Die *Konsistenz* des Axiomensystems der Mengenlehre beschreibt, ob es ein Modell des Axiomensystems gibt oder ob dieses widersprüchlich ist. Es ist nicht möglich, die Konsistenz unseres Axiomensystems zu beweisen.

Das Axiomensystem der Mengenlehre ist *Vollständig*, wenn alle Modelle „gleich“ sind, in dem Sinn, dass die gleichen Eigenschaften gelten. Es gibt kein vollständiges Axiomensystem für die Mengenlehre.

Nehmen wir an, dass (\mathcal{S}, \in) ein beliebiges, aber festes Modell der Mengenlehre ist. Die Axiome sollen regeln, welche Kollektionen von Elementen aus \mathcal{S} selbst wieder Elemente von \mathcal{S} , also Mengen sind. Dabei werden Kollektionen *Klassen* genannt und Klassen, die keine Mengen sind, werden als *echte Klassen* bezeichnet.

Definition 1.5 (Die naive Mengenlehre)

Das Axiomensystem der naiven Mengenlehre besitzt zwei Axiome. Zum einen das Extensionalitätsaxiom (siehe Definition 1.4) und das Axiomenschema der vollen Komprehension. Dieses besagt, dass sich für jede Formel $\psi(x)$ die Menge $\{x : \psi(x)\}$ bilden lässt: $\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow \psi(x))$.

Satz 1.1 (Zermelo-Russel Paradoxon)

Die naive Mengenlehre ist inkonsistent.

Sei $\psi(x) := x \notin x$. Nach dem Komprehensionsschema muss nun folgende Formel gelten: $\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow x \notin x)$, aus welcher die Menge $z = \{x : x \notin x\}$ folgt. Eine solche Menge kann aber nicht existieren, da sonst $z \in z \leftrightarrow z \notin z$ gelten müsste. Es folgt, dass $\{x : x \notin x\}$ immer einer echten Klasse sein muss.

Definition 1.6 (Das Axiomensystem ZFC)

Das Axiomensystem ZFC (**Z**ermelo-**F**raenkel-**C**hoice) ist das heutzutage benutzte Axiomensystem. Es besitzt die folgenden Axiome:

- Das Extensionalitätsaxiom
- Das Aussonderungsaxiom: $\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \psi(x)))$. Dieses ist eine schwächere Version des Komprehensionsschemas, bei dem eine Menge aus bereits bestehenden Menge ausgewählt wird.

- Das Erzeugungsaxiom (Kreationsaxiom): Für jede Menge x ex. eine *Stufe* $s \in S$ mit $x \in s$.
- Das Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine *Limesstufe* und damit eine unendliche Menge.
- Das Ersetzungsaxiom: Für jede Funktion $F : S \rightarrow S$ mit der Eigenschaft, dass wenn $Def(F)$ eine Menge ist, ist auch $Bild(F)$ eine Menge.
- Das Auswahlaxiom: Auf jeder Menge ex. eine *Auswahlfunktion*

Definition 1.7 (Klassenoperatoren)

Seien A, B Klassen.

$A \subseteq B$: Jede Menge aus A ist auch in B .

$\bigcap A := \{x : x \in y \text{ für alle } y \in A\}$

$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ aber } x \notin B\}$

Für eine Formel $\psi(x)$ kann $\{x : \psi(x)\}$ entweder eine Menge oder eine echte Klasse sein. Somit lässt sich das Aussonderungsaxiom umformulieren: Für jede Menge a und jede Klasse A ist $a \cap A$ eine Menge. Daraus folgt, dass auch $a \setminus A$ eine Menge sein muss, dass $\bigcap A$ eine Menge ist, falls A mindestens eine Menge enthält und, dass $\bigcap \emptyset = S$ keine Menge ist.

1.2 Stufen und Geschichten

Eine mögliche Methode zur Definition der gesamten Klasse aller Mengen ist es, die induktive Konstruktion der HF zu erweitern. So ist S dann die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Mengen S_α , welche wir die Stufen von S nennen. Es gilt $S_0 := \emptyset$ und für die bereits definierte Stufe S_α setzen wir $S_{\alpha+1} := \{x : x \in S_\alpha\}$.

Sobald eine unendliche Folge von solchen Stufen definiert wurde, lässt sich eine neue Stufe als Vereinigung aller bisherigen Stufen definieren.

$$S_0 = HF_0 = \emptyset, S_1 = HF_1, \dots, S_n = HF_n$$

$$S_\omega := \bigcup_n S_n = \bigcup_n HF_n = HF$$

$$S_{\omega+1} := \{x : x \in S_\omega\}, \dots$$

$$S_{\omega+\omega} := \{x : x \in S_{\omega+n} \text{ für ein } n\} \text{ usw.}$$

Definition 1.8 (Die Akkumulation)

Sei A eine Klasse. Die *Akkumulation* von A ist $acc(A) := \{x : (\exists y \in A) x \in y \vee x \subset y\}$.

Da für eine Klasse A und ein Element $a \in A$ natürlich gilt, dass $a \subset a$, gilt auch $a \in acc(A)$ und somit $A \subseteq acc(A)$.

Definition 1.9 (Geschichten)

Eine *Geschichte* ist eine Klasse H , so dass für alle $a \in H$ gilt $acc(a \cap H) = a$.

Die Stufe mit Geschichte H ist $S := acc(H)$.

Beispiel 1.1 (Beispiele zu Geschichten und Stufen)

Im Folgenden soll für einige Mengen ihre Akkumulation gezeigt werden und bewiesen, dass es sich bei diesen auch um Geschichten handelt.

- $acc(\emptyset) = \emptyset$. \emptyset ist eine Geschichte und die Stufe mit Geschichte \emptyset ist \emptyset .
- $\{\emptyset\} = [1] = HF_1 = \{HF_0\}$: $acc(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$. $\{\emptyset\}$ ist auch eine Geschichte, denn für das einzige Element \emptyset gilt $acc(\emptyset \cap \{\emptyset\}) = acc(\emptyset) = \emptyset$. Die Stufe mit Geschichte $\{\emptyset\}$ ist $\{\emptyset\}$.

- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = [2] = HF_2 = \{HF_0, HF_1\}$: $acc(HF_2) = HF_2$. HF_2 ist eine Geschichte, denn $acc(\emptyset \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = acc(\emptyset) = \emptyset$ und $acc(\{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = acc(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$. Die Stufe mit Geschichte $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Dies wirft die Frage auf, ob es eine Verallgemeinerung gibt. Demnach soll nun überprüft werden, ob $[n]$ eine Geschichte ist, für jedes n in den natürlichen Zahlen. Für $k < n$ müsste gelten, dass $acc([n] \cap [k]) = acc([k]) \stackrel{!}{=} [k]$. Aber $acc([k])$ enthält alle Teilmengen von $[k-1]$, für $k = 4$ also alle Teilmengen von $\{[0], [1], [2]\}$, demnach auch $\{[0], [2]\}$. Es gilt aber, dass $\{[0], [2]\} \notin [k]$ und es folgt $acc([k]) \neq [k]$. Für $n \geq 3$ ist n also keine Geschichte.

Ist HF_n eine Geschichte? Nein, denn $[n-1] \in HF_n$ und $acc([n-1] \cap HF_n) = acc([n-1]) \neq [n-1]$.

Aber $G_n := \{HF_0, \dots, HF_{n-1}\}$ ist eine Geschichte mit Stufe HF_n . Für $n = 0, 1, 2$ wurde dies schon in Beispiel 1.1 gezeigt. Sei dies für G_n bereits bewiesen, wir zeigen dies nun für $G_{n+1} = G_n \cup \{HF_n\}$. G_{n+1} ist eine Geschichte, wenn für alle $k \leq n$ gilt: $acc(HF_k \cap G_{n+1}) = HF_k$. $HF_k \cap G_{n+1} = \{HF_0, \dots, HF_{k-1}\} = G_k$ und per Induktionsvoraussetzung gilt $acc(G_k) = HF_k$.

Also ist G_{n+1} eine Geschichte. Die Stufe mit Geschichte G_{n+1} ist $acc(G_{n+1}) = acc(G_n \cup \{HF_n\}) = acc(GF_n) \cup HF_n \cup \{x : x \subseteq HF_n\} = HF_n \cup HF_n \cup HF_{n+1} = HF_{n+1}$.

Dies gibt die Idee für die Rückrichtung: Für jede Stufe S_α soll gelten, dass sie die Geschichte $H(S_\alpha) = \{S_\beta : \beta < \alpha\}$ hat.

Definition 1.10 (Minimales Element)

Eine Menge $m \in A$ ist ein *minimales Element* von A , wenn $m \cap A = \emptyset$, d.h. es gibt kein $a \in A$ mit $a \in m \in A$.

Eine Menge a ist fundiert, wenn jede Menge b mit $a \in b$ ein minimales Element enthält. Der fundierte Teil von A ist $fd(A) := \{x \in A : x \text{ ist fundiert}\}$.

Beispiel 1.2 (Beispiele für minimale Elemente und Fundiertheit)

\emptyset ist fundiert.

$\{\emptyset\}$ ist ebenfalls fundiert. Sei $\{\emptyset\} \in b$. Wenn $\{\emptyset\} \cap b = \emptyset$ ist $\{\emptyset\}$ das minimale Element. Andernfalls ist $\{\emptyset\} \cap b = \{\emptyset\}$ und \emptyset ist das minimale Element von b .

Satz 1.2

Wenn H eine Geschichte ist, dann enthält jede nicht-leere Teilmenge von H ein minimales Element

Beweis. Es sei $a \in b \subset H$ und $c = \{fd(x) : x \in a \cap b\} = \{y : y = fd(x) \text{ für } x \in a \cap b\}$. Wenn $c = \emptyset$, dann ist $a \cap b = \emptyset$ und a ist das minimale Element von b . Sei $c \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen, dass $c \subseteq fd(a)$.

Lemma 1.2.1: Sei H eine Geschichte, mit $a, b \in H$ und $a \in b$. Dann muss $fd(a) \in fd(b)$ gelten. Ansonsten wäre $fd(a) \in acc(b \cap H) = b$, da $fd(a) \subseteq a \in b \cap H$. Also gilt mit der Voraussetzung $fd(a) \in b \setminus fd(b)$. Demnach ex. eine Menge x mit $fd(a) \in x$ ohne minimale Elemente. Speziell ist $fd(a)$ kein minimales Element von x , d. h. $fd(a) \cap x \neq \emptyset$. Sei $y \in fd(a) \cap x$. Da $y \in fd(a)$ ist y fundiert. Da $y \in x$ hat x ein minimales Element. Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage, dass $fd(a) \in b \setminus fd(b)$, es muss also $fd(a) \in fd(b)$ gelten.

Sei $y \in c$. Dann ist $y = fd(x)$ für ein $x \in a \cap b$. Aus dem Lemma folgt, dass $y \in fd(a)$. Also $c \subseteq fd(a)$.

Wenn $y \in c \subseteq fd(a)$, dann ist y fundiert und c hat ein minimales Element z . Nach der Definition von c ist dann $z = fd(x)$ für ein $x \in a \cap b$.

Behauptung: x ist das minimale Element von b . Wenn nicht, dann existiert ein $u \in x \cap b$. Da $u \in x \in a \cap b \subseteq a \cap H$ und $a \in H$ ist auch u in $\text{acc}(a \cap H) = a$. Also $u \in a \cap b$ und daher $fd(u) \in c = \{fd(x) : x \in a \cap b\}$. Aus dem Lemma folgt $fd(u) \in fd(x)$, da $u \in b \subseteq H$ und $x \in b \subseteq H$. Also $fd(u) \in fd(x) \cap c \neq \emptyset$. Also ist $z = fd(x)$ nicht minimales Element von c . Dies ist ein Widerspruch. \square

Satz 1.3

Sei H eine Geschichte. Jedes Element $a \in H$ ist eine Stufe mit Geschichte $H \cap a$.

a). Da H eine Geschichte ist, gilt $a = \text{acc}(H \cap a)$. Wenn $H \cap a$ eine Geschichte ist, dann ist a die zugehörige Stufe. Sei $b \in H \cap a$. Dann $b \subseteq a$, da $c \in b \in H \cap a \Rightarrow c \in \text{acc}(H \cap a) = a$ und also $H \cap b = (H \cap a) \cap b$. Da $b \in H$ gilt, dass $b = \text{acc}(H \cap b) = \text{acc}((H \cap a) \cap b)$. Also ist $H \cap a$ eine Geschichte. \square

Definition 1.11 (Transitive und Erbliche Klassen)

Eine Klasse ist

- *transitiv*, wenn für alle $a \in b \in A$ auch $a \in A$ gilt, also jedes Element von A ist auch Teilmenge von A .
- *erblich*, wenn für alle $a \subset b \in A$ auch $a \in A$ gilt.

Satz 1.4

Sei S eine Stufe mit Geschichte H .

- S ist erblich und transitiv.
- $S = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$
- $H(S) := \{s \in S : s \text{ ist Stufe}\}$ ist eine Geschichte von S .

Beweis. a) Sei $b \in S = \text{acc}(H)$, es ist zu zeigen, dass $a \in b \Rightarrow a \in S$ und $a \subseteq b \Rightarrow a \in S$. Sei $c = \{s \in H : b \in s \vee b \subseteq s\} \subseteq H$. Da $b \in \text{acc}(H)$ ist $c \neq \emptyset$ und daher existiert ein $s \in c$ mit $s \cap c = \emptyset$. Nach Definition von c gilt $b \in s$ oder $b \subseteq s$.

Behauptung: $b \notin s$, da sonst $b \in s = \text{acc}(H \cap s)$, also ex. $z \in H \cap s$ mit $b \subseteq z$ oder $b \in z$. Dann ist aber $z \in c \cap s \neq \emptyset$, also ein Widerspruch. Es muss also $b \subseteq s$ gelten.

- $a \in b \Rightarrow a \in b \subset s = \text{acc}(H \cap s) \subset (H) = S \Rightarrow a \in S$
- $a \subseteq b \Rightarrow a \subseteq b \subseteq s \in H \Rightarrow a \in \text{acc}(H) = S$

b) „ \supseteq “: $a \subseteq s \in S \xrightarrow{a)} a \in S$

„ \subseteq “: Sei $a \in S = \text{acc}(H)$. Es gilt $s \in H$ mit $a \in s$ oder $a \subseteq s$. Nach dem Satz 1.3 ist s eine Stufe mit Geschichte $H \cap s$ und daher erblich und transitiv (nach a)). Wenn $a \in s$, dann $a \subseteq s$. Also $a \subseteq s \in H \subseteq S$ und daher $a \in \{x : x \subseteq s \text{ für ein } s \in S\}$.

c) $\text{acc}(H(S)) = \{x : (\exists s \in H(S)) x \in s \vee x \subseteq s\} = \{x : (\exists s \in S) s \text{ ist Stufe, } x \subseteq s \in\} \stackrel{b)}{=} S$. $H(S)$ ist eine Geschichte. $H(S) \cap s = \{s \in S \cap s : x \text{ Stufe}\} = \{x \in s : x \text{ Stufe}\}$. Dann $\text{acc}(H(S) \cap s) = \{y : (\exists s' \in s) s' \text{ ist Stufe, } y \subseteq s'\} \stackrel{b)}{=} S$ \square

Aus diesen Sätzen folgt, dass für die Geschichte H einer Stufe S gilt, dass $H \subset H(S)$. Sei $a \in H$. Es folgt $a \in S = \text{acc}(H)$ und a ist eine Stufe mit Geschichte $H \cap a$, also $a \in H(S)$.

Satz 1.5

Jede nicht-leere Klasse A von Stufen hat ein minimales Element $s_0(A)$.

Beweis. Sei $A \subset \{s : s \text{ ist eine Stufe}\}$, so dass kein $s \in s_0(A) \cap A$ existiert. Sei $s \in A$ und $x := s \cap A$. Wenn $x = \emptyset$, dann $s_0(A) = s$. Andernfalls ist $x \subseteq \{t \in s : t \text{ ist eine Stufe}\}$ eine nicht-leere Teilmenge einer Geschichte und hat daher ein minimales Element $m \in x$, so dass gilt $m \cap x = \emptyset$. Setze $s_0(A) = m$, es folgt $s_0(A) \cap A = \emptyset$. Wäre nämlich $t \in s_0(A) \cap A = m \cap A$, da $t \in m \in x \subset s$, also $t \in s$, da m transitiv ist, also $t \in x$. Es würde also ein $t \in m \cap x$ existieren. Widerspruch! \square

Satz 1.6

Seien S, T Stufen, welche auch Mengen sind. Dann gilt entweder $S \in T$, $S = T$ oder $T \in S$.

Beweis. Wenn nicht, dann ist die Klasse $A := \{s : s \text{ ist Stufe und es gibt eine Stufe } t \text{ mit } s \notin t, s \neq t \text{ und } t \notin s\}$ nicht leer und enthält ein minimales Element $s_0 = s_0(A)$. Die Klasse $B := \{t : t \text{ ist eine Stufe, so dass } s_0 \notin t, s_0 \neq t \text{ und } t \notin s_0\}$ muss dann ebenfalls ein minimales Element t_0 enthalten. Es gilt $s_0 \notin t_0, s_0 \neq t_0$ und $t_0 \notin s_0$. Sei $s \in s_0$. Dann ist $s \neq t_0$, da sonst $t_0 \in s_0$. Zweitens ist $t_0 \notin s$, da sonst $t_0 \in s \notin s_0$ und damit $t_0 \in s_0$. Wenn auch noch $s \notin t_0$ gelten würde, dann wäre $s \in A$ im Widerspruch zur Minimalität von s_0 . Also muss $s \in t_0$. Aber damit ist gezeigt, dass $s_0 \subseteq t_0$. Analog lässt sich zeigen, dass $t_0 \subseteq s_0$ sein muss. Also $s_0 = t_0$. Widerspruch! \square

Aus dieser wichtigen Eigenschaft lassen sich einige Folgerungen feststellen. Seien S, T Stufen aus \mathcal{S} .

- a) $S \notin S$
- b) $S \subseteq T \Leftrightarrow S = T \text{ oder } S \in T$
- c) $S \subseteq \text{ oder } T \subset S$
- d) $S \subsetneq T \Leftrightarrow S \in T$

Beweis. a) Wäre $S \in S$, wäre $A = \{s : s \text{ ist Stufe, } s \in s\}$ eine nicht-leere Klasse an Stufen, mit minimalem Element s_0 , das heißt $s_0 \cap A = \emptyset$. Aber $s_0 \in A$, wonach $s_0 \in s_0$, was zur Folge hat, dass $s_0 \in s_0 \cap A \neq \emptyset$. Widerspruch!

b) „ \Leftarrow “: Wenn $S = T$, dann ist offensichtlich $S \subseteq T$ und wenn $S \in T$, dann gilt wegen der Transitivität auch $S \subseteq T$.

„ \Rightarrow “: Wenn $S \neq T$ und $S \notin T$, dann muss $T \in S$ gelten, wenn nun aber $S \subseteq T$, dann ist $T \in S \subseteq T$, was ein Widerspruch zu Teil a) ist.

c) Wenn $S \not\subseteq T$, dann muss wegen b) $S \notin T$ und $S \neq T$ gelten. Also ist $T \in S$ und daher auch $T \subseteq S$.

d) $S \subsetneq T \Leftrightarrow S \subseteq T \wedge S \neq T \Rightarrow S \in T$ \square

Statt $S \in T$, bzw. $S \subsetneq T$ schreibt man oft $S < T$. Die so erzeugte lineare Ordnung von Stufen bezeichnet man als *kumulative Hierarchie* und ist die durch \in linear geordnete Kollektion aller Stufen.

Das *Kreationsaxiom* besagt, dass zu jeder Menge a eine Menge s existiert, welche eine Stufe ist, mit $a \in s$. Aus diesem folgt, dass es zu jeder Stufe s eine höhere Stufe t mit $s \in t$ gibt, welche ebenfalls eine Stufe ist. Es lässt sich dadurch auch erkennen, dass \mathcal{S} die Vereinigung aller Stufen ist. Wenn wir zudem akzeptieren, dass \emptyset eine Menge ist, also $\mathcal{S} \neq \emptyset$, dann folgt, dass $HF \subset \mathcal{S}$ und, dass \mathcal{S} selbst wieder eine Stufe mit der Geschichte $H(\mathcal{S}) = \{s : s \text{ ist eine Stufe}\}$ ist.

Definition 1.12 (Nachfolgerstufe)

Eine Stufe T ist die *Nachfolgerstufe* zur Stufe S , wenn $S \in T$ und keine Stufe T' existiert, mit $S \in T' \in T$.

Definition 1.13 (Limesstufe)

Eine Stufe $S \neq \emptyset$ ist eine *Limesstufe*, wenn sie keine Nachfolgerstufe ist.

Definition 1.14

Für jede Klasse A ist $S(A)$ die kleinste Stufe mit $A \subseteq S$. Dies ist wohldefiniert, da jede nicht-leere Klasse von Stufen ein minimales Element besitzt. Es gilt $S(s) = s$ für jede Stufe s .

Es gilt, dass HF_{n+1} die Nachfolgerstufe von HF_n ist.

Aus dem *Aussonderungsaxiom* lassen sich weitere praktische Eigenschaften folgern. Sei a eine Menge. Es lassen sich nun Elemente aussondern, so dass man die Mengen $\{a\}$, $acc(a)$ und $\bigcup a := \{b : b \in x \text{ für ein } x \in a\}$ bilden kann.

Für eine Stufe s mit $a \in s \in \mathcal{S}$ gilt:

- $\{a\} = \{x \in s : x = a\}$
- $\{acc(a)\} = \{x \in s : (\exists b \in a) x \in b \vee x \subseteq b\}$
- $\bigcup a = \{b \in s : (\exists x \in a) b \in x\}$

Sei nun A eine Klasse. Dann ist $S(A)$ die kleinste Stufe, so dass $A \subseteq S(A)$. Es lässt sich daraus auch leicht erkennen, dass für jede Stufe s gilt $S(s) = s$.

Lemma 1.2.2: Wenn $a \in b$, dann $S(a) \in S(b)$.

Beweis. Da $a \in b \subseteq S(b) = acc(H(S(b)))$ ex. $s \in S(b)$ mit $a \in s$ (und durch die Transitivität $a \subseteq s$), also ist $S(a) \subseteq s$ und daher $S(a) \subseteq s \in S(b)$ und da $S(b)$ erblich ist, folgt $S(a) \in S(b)$. \square

Lemma 1.2.3: \mathcal{S} ist die einzige Stufe, welche eine echte Klasse ist.

Beweis. Sei S eine Stufe, $S \neq \mathcal{S}$. Also ex. $a \in \mathcal{S} \setminus S$. Es folgt, dass $S(a) \notin S$, da sonst $a \subseteq S(a) \in S$ und daher $a \in S$. Für Stufen $T \supseteq S(a)$ gilt daher $T \notin H(S) = \{s \in \mathcal{S} : s \text{ ist Stufe}\}$. Also $H(S) \subseteq \{T : T \text{ ist Stufe}, T \in S(a)\}$. Da $S(a)$ und $H(S(a))$ mengen sind, ist auch $H(S)$ eine Menge und damit auch $S = acc(H(S))$. \square

Daraus lässt sich folgern, dass die folgenden Aussagen für eine Klasse A äquivalent sind:

1. A ist eine echte Klasse.
2. $S(A)$ ist eine echte Klasse.
3. $S(A) = \mathcal{S}$.

Beweis. $3. \Rightarrow 1.$: Wenn A eine Menge ist, ist auch $S(A)$ eine Menge. Nach Kontraposition gilt die Folgerung.

$1. \Rightarrow 2.$: Wenn $S(A)$ eine Menge ist, ist auch $A = A \cap S(A)$ eine Menge. Nach Kontraposition gilt die Folgerung.

$2. \Rightarrow 3.$: Dies wurde in Lemma 1.2.3 bewiesen. \square

Satz 1.7

Für jede Menge a gilt $a \notin a$.

Beweis. Es gelte $a \in a$. Dann $a \in a \subseteq S(a)$. $S(a) = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S(a)\}$, also existiert $s \in S(a)$ mit $a \subseteq s$. $S(a)$ ist aber die minimale Stufe, die a als Teilmenge enthält. Widerspruch! \square

Durch diesen Satz ist die Fundiertheit der Mengenlehre bewiesen.

Satz 1.8

Jede nicht-leere Klasse enthält ein minimales Element.

Beweis. Sei A eine nicht-leere Klasse. $B = \{S(b) : b \in A\}$ ist die nicht-leere Klasse der Stufen in A und hat ein minimales Element $s_0 = S(b_0)$. D.h. $S(b_0) \cap B = \emptyset$. Behauptung: b_0 ist das minimale Element von A . Andernfalls ex. $b_1 \in b_0 \cap A$. Da $b_1 \in b_0$ ist auch $S(b_1) \in S(b_0)$. Da $b_1 \in A$ folgt $S(b_1) \in b$. Also $S(b_1) \in S(b_0) \cap B \neq \emptyset$. Widerspruch! \square

Lemma 1.2.4: Set $S \in \mathcal{S}$ eine Stufe. Die Nachfolgerstufe von S ist $\mathcal{P}(S)$, wobei \mathcal{P} die Potenzfunktion ist.

Beweis. Es gibt eine minimale Stufe T mit $S \in T$. Nun ist zu zeigen, dass $\mathcal{P}(S) = T$.

Aus $a \subseteq S \in T$ folgt wegen der Erbllichkeit von T auch $a \in T$. Also $\mathcal{P}(S) \subseteq T$. Sei $s \in T$ eine Stufe. $S \notin s$, da T die Nachfolgerstufe von S ist. Also gilt $S = s$ oder $s \in S$ und $s \subseteq S$. Für alle Stufen s gilt $s \in T \Leftrightarrow s \subseteq S$. Nun gilt $T = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in T\} = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \subseteq S\} = \{x : x \subseteq S\} = \mathcal{P}(S)$ \square

Satz 1.9

Sei $S \neq \emptyset$ eine Stufe. Nun sind äquivalent:

1. S ist eine Limesstufe.
2. $S = \bigcup H(S)$.
3. Für alle $a \in S$ ex. eine Stufe $t \in S$ mit $a \in t$.
4. Wenn $a \in S$, dann $\mathcal{P}(a) \in S$.
5. Wenn $a \in S$, dann $\{a\} \in S$.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Es gilt $S = \{x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$ und $H(S) = \{s \in S : s \text{ ist eine Stufe}\}$. Wenn S eine Limesstufe ist, dann gilt für alle $s \in S$ auch $\mathcal{P}(s) \in S$. $\bigcup H(S) = \{x : x \in s \text{ für ein } s \in H(S)\} = \{x : x \in s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$ und da S eine Limesstufe gilt, dass dies gleich zu $\{s : s \in \mathcal{P}(s) \text{ für eine Stufe } s \in S\} = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\} = S$ ist.

2. \Rightarrow 1.: Sei $S = \mathcal{P}(T)$ für eine Vorgängerstufe T mit $H(S) = H(T) \cup \{T\}$. $\bigcup H(S) = \{x : x \in s \in S, s \text{ ist Stufe}\} = \{x : x \in T\} = T \neq S$. Widerspruch!

1. \Rightarrow 3.: Da $S = \{s : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$ folgt für $a \in S$, dass eine Stufe s existiert mit $a \subset s$, also $a \in \mathcal{P}(s) \in S$.

3. \Rightarrow 4.: Für $a \in S$ ex. eine Stufe $t \in T$ mit $a \in t$. Sei nun $x \in \mathcal{P}(a)$. Aus $x \subseteq a \in t$ folgt $x \in t$, das heißt $\mathcal{P}(a) \in S = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$.

4. \Rightarrow 5.: Wenn $a \in S$, dann $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(a) \in S$. Da S erblich ist, ist $\{a\} \in S$.

5. \Rightarrow 1.: Wenn S keine Limesstufe ist, also $S = \mathcal{P}(T)$, dann $T \in S$ und nach 5. $\{T\} \in S$. Da $S = \mathcal{P}(T)$ ist $\{T\} \subseteq T$, also $T \in T$. Widerspruch! \square

Definition 1.15 (*cut* einer Klasse)

Der *cut* einer Klasse A ist die Menge $\text{cut}(A) := \{x \in A : S(x) \subseteq S(y) \text{ für alle } y \in A\}$. In Worten enthält $\text{cut}(A)$ also die Menge von A mit minimaler Stufe. Es gilt $\text{cut}(\emptyset) = \emptyset$ und $\text{cut}(\{a\}) = \{a\}$. Für $a \in A$ ist $\text{cut}(A) \subseteq S(a)$.

Satz 1.10

Eine Stufe ist eine Limesstufe, genau dann, wenn $\text{cut}(a) \in S$ für alle $a \subseteq S$.

Beweis. \Rightarrow : Für $a = \emptyset$ ist $cut(a) = \emptyset \in S$. Sei $x \in a \subseteq S$. Dann ex. ein $s \in S$ mit $x \in s$ und $x \subseteq s$, also $cut(a) \subseteq s \in S$.

\Leftarrow : Sei $S = \emptyset$. Dann $\emptyset \subseteq S$, aber $cut(\emptyset) = \emptyset \notin S$. Sei $S = \mathcal{P}(T)$ eine Nachfolgerstufe. Dann ist $T \in S$, also $\{T\} \subseteq S$, aber $cut(\{T\}) = \{T\} \notin S$. Also muss S eine Limesstufe sein. \square

Nun wurden die ersten vier der sechs Axiome des Axiomensystems ZFC betrachtet. Das Aussonderungs-, Extensionalitäts-, Kurations- und Unendlichkeitsaxiom.

Mit den ersten dreien ist es noch möglich, dass $\mathcal{S} = \emptyset$ oder $\mathcal{S} = HF$ gilt. Durch das Unendlichkeitsaxiom, welches die Existenz einer Limesstufe fordert ist dies nicht mehr möglich. Benutzt man diese vier Axiome lässt sich also aussagen, dass $S \neq \emptyset$, die Mengen HF_n für beliebige n existieren und HF eine Menge ist.

Der bisherige Aufbau von \mathcal{S} sieht also wie folgt aus: $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_\omega \subset S_{\omega+1} \subset S_{\omega+2} \subset \dots$. Wobei S_ω die kleinste Limesstufe ist. Weiter gilt dann auch, dass $S_{\omega+n+1} = \mathcal{P}(S_{\omega+n})$.

Nun stellt sich aber die Frage, wie es weiter geht. Ist $S_{\omega+\omega} := \{x : x \in S_{\omega+n} \text{ für ein } n\}$ eine Menge? Seien nun also (\mathcal{S}, \in) und (\mathcal{S}', \in) zwei Modelle der vier Axiome mit den Stufen $(S_\alpha)_{\alpha < \kappa}$, $(S'_\alpha)_{\alpha < \lambda}$. Es lässt sich einsehen, dass $\kappa, \lambda \geq \omega + \omega$ gilt und, dass $S_n = S'_n = HF_n$ für endliche n gelten muss.

1.3 Relationen und Funktionen

Sei (a, b) ein geordnetes Paar. Es ist bekannt, dass wenn $(a, b) = (a', b')$ gilt, auch $a = a'$ und $b = b'$ gelten muss.

Definition 1.16

Seien a, b Mengen. Nun wird das geordnete Paar $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ definiert. Für Klassen A, B gilt $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Lemma 1.3.1: Wenn $\{a, b\} = \{a, c\}$ gilt, muss $b = c$ folgen.

Beweis. $b \in \{a, b\} = \{a, c\}$. Also $b = a$ oder $b = c$. Wenn $b \neq c$, dann $b = a$ und $c \in \{a, c\} = \{a, b\} = \{a\}$. Also $c = a = b$. Widerspruch! \square

Lemma 1.3.2: Wenn $(a, b) = (c, d)$ muss $a = c$ und $b = d$ folgen.

Beweis. $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, das heißt $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c, d\}$. In beiden Fällen gilt aber $a = c$ und $\{a\} = \{c\}$. Nach Lemma 1.3.1 gilt wegen $\{a, b\} = \{c, d\}$ und $a = c$ auch $b = d$. \square

Weiter lässt sich $\langle A, B \rangle := (\{[0] \times A\}) \cup (\{[1]\} \times B)$ definieren.

Für Mengen a_0, \dots, a_n sei $() := \emptyset$, $(a_0) = a_0$ und $(a_0, \dots, a_n) := ((a_0, \dots, a_{n-1}), a_n)$. Weiter ist $A^0 := \{()\}$, $A^1 := A$, $A^{n+1} := A^n \times A$.

Nun ist eine n -stellige Relation eine Klasse $R \subseteq \mathcal{S}^n$. Wenn $R \subseteq A^n$ für eine Klasse A ist, dann sagen wir zu R , dass sie eine n -stellige Relation über A ist.

Definition 1.17 (Binäre Relation)

Eine *binäre Relation* R ist eine Relation, mit $R \subseteq A^2$.

Weiter ist $Def(R) := \{a : (a, b) \in R \text{ für ein } b\}$ und $Bild(R) := \{b : (a, b) \in R \text{ für ein } a\}$. Offensichtlich gilt $R \subseteq Def(R) \times Bild(R)$.

Eine binäre Relation ist funktional, wenn für alle $a \in Def(R)$ genau ein $b \in Bild(R)$ existiert so, dass $(a, b) \in R$. Die zugehörige Notation ist dann $R(a)$, wobei $R = \{(a, R(a)) : a \in Def(R)\}$.

Definition 1.18 (Partielle und Totale Funktionen)

Eine *partielle Funktion* von A nach B ist eine funktionale Relation $F \subseteq A \times B$.

Eine *totale Funktion* von A nach B dagegen ist eine funktionale Relation $F \subseteq A \times B$ f+r die zusätzlich gilt, dass $\text{Def}(F) = A$ und $\text{Bild}(F) \subseteq B$. Die Notation hierfür ist dann $F : A \rightarrow B$.

Für eine Menge a und eine Klasse B schreibt man B^a für die Klasse aller Funktionen $f : a \rightarrow B$. Die Einschränkung einer Funktion $F : A \rightarrow B$ auf eine Teilklasse $C \subseteq A$ ist $F \upharpoonright C := F \cap (C \times B)$. Das Bild von C unter F ist $F[C] := \text{Bild}(F \upharpoonright C)$.

Die bereits bekannten Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* sind wie üblich definiert.

Lemma 1.3.3: Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Mengen. Wenn eine injektive Funktion $f : C \rightarrow A$ existiert, dann gibt es auch eine injektive Funktion $g : C \rightarrow B$.

Beweis. Sei $Z := \bigcap \{X \subseteq C : C \setminus B \subseteq X, f[X] \subseteq X\}$. Es gilt $C \setminus B \subseteq Z$ und also $C \setminus Z \subseteq B, C \setminus Z = B \setminus Z$.

$f[Z] \subseteq Z$. Daraus folgt die Behauptung, dass die Funktion $g(x)$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in Z \\ id & \text{für } x \in C \setminus Z \end{cases}$$

eine bijektive Funktion von C nach B ist. Es gilt $g \upharpoonright Z = f \upharpoonright Z$ ist injektiv und $g[Z] \subseteq Z \cap B$ und $g \upharpoonright C \setminus Z = id_{C \setminus Z}$ ist bijektiv und $g[C \setminus Z] \subseteq B$.

Es bleibt zu zeigen, dass $g[Z] = f[Z] = Z \cap B$, denn dann ist $g[C] = g[Z] \cup g[C \setminus Z] = (Z \cap B) \cup B \setminus Z = B$, da $C \setminus Z = B \setminus Z$ und $g[C \setminus Z] = C \setminus Z$.

Angenommen es gibt $a \in (Z \cap B) \setminus f[Z]$. Da $a \in B$ gilt für $X := Z \setminus \{a\}$

- $C \setminus B \subseteq X$ (da $C \setminus B \subseteq Z, a \in B$)
- $f[X] \subseteq X$ (da $f[X] = f[Z \setminus \{a\}] \subseteq f[Z] \subseteq Z \setminus \{a\} = X$)

Also müsste $Z \subseteq X$ gelten. Widerspruch! □

Satz 1.11 (Cantor-Schröder-Bernstein)

Wenn es eine injektive Funktion $f : A \rightarrow B$ und eine andere injektive Funktion $g : B \rightarrow A$ existiert, dann gibt es auch eine bijektive Funktion $h : A \rightarrow B$.

Beweis. Die Funktion $g \circ f : A \rightarrow g[f[A]]$ ist bijektiv. Nach dem Lemma 1.3.3 muss dann auch eine weitere bijektive Funktion $p : A \rightarrow g[B]$ existieren. Der Zusammenhang lässt sich einfach in Abbildung 2 erkennen.

Nun ist $g^{-1} \upharpoonright g[B] : g[B] \rightarrow B$ ebenfalls bijektiv. Es lässt sich dann $h := g^{-1} \circ p : A \rightarrow B$ als bijektive Funktion von A nach B definieren. □

1.4 Ordinalzahlen

Es wurden bereits die Zahlen $0, 1, 2, \dots, n, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega$ diskutiert, mit welchen sich in diesem Kapitel genauer befasst werden soll.

Ein *Graph* ist ein Paar (A, R) so, dass $R \subseteq A \times A$ ein binäre Relation ist.

Definition 1.19 (Partielle Ordnungen)

Eine *partielle Ordnung* ist ein Graph $(A, <)$ so, dass $<$ irreflexiv und transitiv ist. Eine alternative Definition ist (A, \leq) , wobei \leq reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

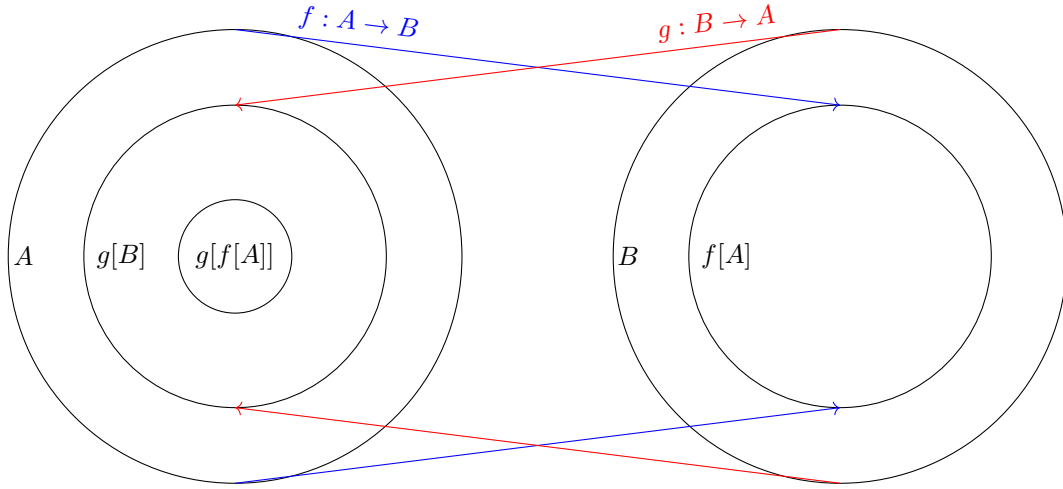


Abbildung 2: Grafik des Sachverhalts im Satz 1.11

Eine *lineare Ordnung* $(A, <)$ ist eine partielle Ordnung so, dass für alle $a, b \in A$ entweder $a < b$, $a = b$ oder $b < a$ gilt.

Ein Graph (A, R) ist *fundiert*, wenn jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$ ein Element $b \in B$ enthält so, dass $\{a \in B : (a, b) \in R\} = \emptyset$. Also: Eine partielle Ordnung ist fundiert, wenn jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$ ein $<$ -minimales Element enthält.

Definition 1.20 (Wohlordnungen)

Eine *Wohlordnung* $(A, <)$ ist eine fundierte lineare Ordnung so, dass für jedes $a \in A$ die Klasse $\downarrow a := \{b \in A : b < a\}$ eine Menge ist. Eine Relation $R \subseteq A \times A$, bei der für ein beliebiges b die Klasse $\{a \in A : (a, b) \in R\}$ eine Menge ist wird auch als mengenähnlich bezeichnet.

Lemma 1.4.1: Sei $(A, <)$ eine fundierte, mengenähnliche, partielle Ordnung. Dann existiert in A keine unendliche absteigende Folge $(a_n)_{n \in \omega}$ mit $a_{n+1} < a_n$ für alle n , wobei ω die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

Bemerkung: $(a_n)_{n \in \omega}$, $f : \omega \rightarrow A$ mit $a_n := f(n)$

Beweis. Wenn eine solche Folge existiert, dann ist $\{a_n : n \in \omega\} = f[\omega] \subseteq A$ eine nicht-leere Klasse ohne $<$ -minimales Element. Da $f[\omega] \subseteq \{a_0\} \cup \downarrow a_0$ und A mengenähnlich ist, ist $f[\omega]$ eine Menge. Dies ist aber ein Widerspruch zur Fundiertheit. \square

Um zu zeigen, dass jedes Element einer fundierten, mengenähnlichen partiellen Ordnung $(A, <)$ eine Eigenschaft ψ erfüllt zeigt man, dass für jedes a , dass wenn ψ für alle $b < a$ gilt, dann auch für a .

Satz 1.12 (Induktionsprinzip)

Sei $(A, <)$ eine fundierte, mengenähnliche partielle Ordnung. Dann gilt

- Jede nicht-leere Klasse hat ein $<$ -minimales Element.
- Sei $X \subseteq A$ so, dass für alle $a \in A$ gilt: Wenn $\downarrow a \subseteq X$, dann ist $a \in X$. Es folgt, dass $X = A$.

Beweis. a): Sei $B \subset A, a \in B$. Wegen der Mengenähnlichkeit ist $\downarrow a$ eine Menge und aus dem Aussonderungssaxiom folgt, dass auch $X := B \cap (\downarrow a \cup \{a\})$ eine nicht-leere Teilmenge von A ist. Es folgt auch, dass X ein minimales Element b besitzt.

Behauptung: b ist auch das $<$ -minimale Element von B . Andernfalls gibt es ein $c \in B$ mit $c < b \leq a$. Da $b \in X \subseteq B$ würde aber auch $c \in X$ folgen. Widerspruch!

b): Annahme: X sei wie gefordert, aber $X \neq A$. Also existiert ein $a \in A \setminus X$. Definiere $B := \downarrow a \cup \{a\} \setminus \{X\}$. Dies ist eine nicht-leere Teilmenge und hat daher ein minimales Element b . Also ist $\downarrow b \subseteq A \setminus B \subseteq X$ und daher ist $b \in X$. Widerspruch! \square

Definition 1.21 (Ordinalzahlen)

Eine *Ordinalzahl* ist eine transitive Menge, welche durch \in linear geordnet ist. Beispiele sind $[n]$ für beliebige n , ω , $\omega \cup \{\omega\}$. Die Klasse aller Ordinalzahlen ist On

Lemma 1.4.2: Ordinalzahlen sind wohlgeordnet durch \in .

Beweis. Sei $\beta \subseteq \alpha \in On$ und $\beta \neq \emptyset$. Da β fundiert ist existiert ein $\gamma \in \beta$ mit $\gamma \cap \beta = \emptyset$. Also ist γ kleinstes Element in β bezüglich \in . \square

Definition 1.22 (Anfangsstück)

Ein *Anfangsstück* einer Ordnung $(A, <)$ ist eine Teilmenge $I \subseteq A$ so, dass, wenn $a \in I$ und $b < a$, auch $b \in I$ ist.

Ein Anfangsstück von $\alpha \in On$ ist also eine Teilmenge $\beta \subseteq \alpha$ so, dass $\delta \in \gamma \in \beta \Rightarrow \delta \in \beta$, also eine transitive Teilmenge von α .

Lemma 1.4.3: Sei $\alpha \in On$. β ist ein echtes Anfangsstück von α , genau dann wenn $\beta \in \alpha$

Beweis. \Rightarrow : Sei γ das kleinste Element von $\alpha \setminus \beta$. Es gilt $\beta = \gamma \in \alpha$, da für beliebige δ gilt, dass $\delta \in \gamma \Leftrightarrow (\delta \in \alpha \wedge \delta \notin \alpha \setminus \beta) \Leftrightarrow \delta \in \beta$

\Leftarrow : Sei $\beta \in \alpha$ und $\delta \in \gamma \in \beta$. Es gilt $\delta \in \beta$, da sonst $\delta = \beta$ oder $\beta \in \delta$. Widerspruch! \square

Satz 1.13 a) (On, \in) ist eine Wohlordnung

b) Wenn $\alpha \in On$, dann ist $\alpha = \{\beta \in On : \beta \in \alpha\} = \downarrow \alpha$

c) On ist eine echte Klasse

Beweis. a) Zu zeigen ist, dass \in eine lineare Ordnung ist. $\alpha \notin \alpha$ und $\alpha \in \beta, \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$ folgt direkt aus der Definition der Ordinalzahlen.

Seien nun $\alpha, \beta \in On, \alpha \neq \beta$. Nun ist $x \in \alpha \cap \beta$ ein Anfangsstück von α und β . Aus $y \in z \in \alpha \cap \beta$ folgt wegen der Transitivität $y \in \alpha \cap \beta$. Nun muss $x = \alpha$ oder $x = \beta$ gelten. Sonst ist $x \in \alpha$ und $x \in \beta$, also $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$. Widerspruch!

Wenn $x \in \alpha$, dann ist $x \in \beta$, also $\alpha \in \beta$, oder umgekehrt.

b) Dies folgt direkt aus a)

c) Wäre On eine Menge, wäre sie eine transitive, durch \in linear geordnete Menge und müsste sich dadurch selbst enthalten. Widerspruch! \square

Definition 1.23 (Nachfolgerordinal)

Für $\alpha \in On$ ist $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ das *Nachfolgerordinal* von α .

Definition 1.24 (Limesordinal)

$\alpha \in On$ ist ein *Limesordinal*, wenn $\alpha \neq \emptyset$ und α kein Nachfolgerordinal ist.

Da (On, \in) , bzw. $(On, <)$, eine Wohlordnung ist, existiert die transfinite Induktion über On . Das heißt: für jede Teilklasse $X \subseteq On$ gilt: wenn für alle $\alpha \in On$ gilt, dass für jedes $\beta < \alpha$ aus $\beta \in X$ folgt, dass $\alpha \in X$, dann ist $X = On$.

Um zu zeigen, dass irgendeine Eigenschaft $\varphi(x)$ aus alle Ordinale zutrifft, also $X := \{\alpha \in On : \varphi(\alpha)\} = On$ gibt es folgende Strategien.

1. Zeige, dass $\varphi(0)$ gilt. Zeige, dass wenn $\varphi(\alpha)$ auch $\varphi(\alpha + 1)$ ist. Zeige für jedes Limesordinal λ , dass $\varphi(\lambda)$ gilt, wenn für alle $\alpha < \lambda$ auch $\varphi(\alpha)$ korrekt ist.
2. Betrachte eine beliebige Ordinalzahl α und nimm an, dass $\varphi(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$ gilt. Zeige, dass dann $\varphi(\alpha)$ folgt.

1.4.1 Ordinale und Stufen

Zur Erinnerung: für jede Menge a ist $S(a)$ die kleinste Stufe mit $a \subseteq S(a)$ und aus $a \in b$ folgt $S(a) \in S(b)$.

Letzteres gilt natürlich auch für Ordinalzahlen. Wir wollen nun aber auch die Umkehrung betrachten. Wenn $\alpha \notin \beta$ ist, dann folgt $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$, also $S(\alpha) = S(\beta)$ oder $S(\beta) \in S(\alpha)$. In beiden Fällen gilt $S(\alpha) \notin S(\beta)$. Es gilt also auch die Rückrichtung: $\alpha \in \beta \Leftrightarrow S(\alpha) \in S(\beta)$.

Satz 1.14

Die Funktion $F : On \rightarrow H(\mathcal{S}), F(\alpha) := S(\alpha)$ ist ein Isomorphismus zwischen On und $H(\mathcal{S})$. Das heißt F ist bijektiv und $\beta < \alpha \Leftrightarrow F(\beta) \in F(\alpha)$.

Bemerkung: Mit $H(\mathcal{S})$ wird die Klasse aller Stufen, die Mengen sind, also aller Stufen außer \mathcal{S} bezeichnet.

Beweis. Es ist bereits bekannt, dass F injektiv und ein starker Homomorphismus ist. Es bleibt die Surjektivität zu beweisen. Wenn dies nicht der Fall wäre, dann existierte eine minimale Stufe $S \in \mathcal{S}$ mit $S \notin \text{Bild}(F)$.

Sei $X := \{\beta \in On : S(\beta) \in S\}$. X ist ein echtes Anfangsstück von On , das heißt es gibt $\alpha \in On$ so, dass $X = \downarrow \alpha = \alpha$. Demnach betrachten wir nun $S(\alpha)$ und wie sich dies zu S verhält.

- $S(\alpha) \in S$, dann ist $\alpha \in X = \alpha$. Widerspruch!
- $S(\alpha) = S$, dann ist $S \in \text{Bild}(F)$. Widerspruch!
- $S \in S(\alpha)$, dann ist $S(\alpha)$ die kleinste Stufe so, dass $\alpha \subseteq S(\alpha)$, sodass $\beta \in S(\alpha)$ für alle $\beta \in \alpha$ gilt. Da aber $\beta \in S(\beta) \in S$ für alle $\beta \in \alpha$ ist, folgt $S(\alpha) \subseteq S$. Widerspruch!

□

Definition 1.25

Für $\alpha \in On$, setze $S_\alpha := S(\alpha)$. Dies sind dann die *Indices der kumulativen Hierarchie*.

Es folgt, dass $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_\omega \subset \dots \subset S_\alpha \subset S_{\alpha+1} \subset \dots$, $H(\mathcal{S}) = \{S_\alpha : \alpha \in On\}$ und $\mathcal{S} = \bigcup \{S_\alpha : \alpha \in On\}$.

Definition 1.26 (Rang einer Menge)

Der *Rang* einer Menge a ist das Ordinal $\rho(a) = \alpha$ mit $S(a) = S_\alpha$.

Für Ordinale α gilt $\rho(\alpha) = \alpha$. Eine Klasse X ist eine Menge genau dann, wenn $\{\rho(x) : x \in X\}$ durch eine Ordinalzahl beschränkt ist.

1.4.2 Der Rekursionssatz

Sei A eine Klasse und definiere $A^\infty := \{f : f : \alpha \rightarrow A, \text{Fkt. für ein } \alpha \in On\}$. Dies lässt sich in Worten als die Menge aller Folgen der Länge α .

Sei G nun eine partielle Funktion $G : \mathcal{S}^\infty \rightarrow \mathcal{S}$.

Lemma 1.4.4: Es gibt höchstens eine Funktion $f : \alpha \rightarrow \mathcal{S}$ so, dass f eine Menge ist und $f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta)$ für alle $\beta < \alpha$.

Bsp.: $f(17) = G(f \upharpoonright \{0, \dots, 16\})$.

Beweis. Nehmen wir an, dass f und f' die geforderte Eigenschaft erfüllen. Sei $X = \{\beta \in \alpha : f(\beta) = f'(\beta)\}$. Wenn $\beta < \alpha$ und $\beta \subseteq X$, dann $f \upharpoonright \beta = f' \upharpoonright \beta$, also $f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta) = G(f' \upharpoonright \beta) = f'(\beta)$, also $\beta \in X$. Es folgt $X = \alpha$ und $f = f'$. \square

Nun ist das Ziel zu zeigen, dass jede totale Funktion $G : \mathcal{S}^\infty \rightarrow \mathcal{S}$ auf eindeutige Weise eine Funktion $F : On \rightarrow \mathcal{S}$ definiert.

Für die Existenz wird aber ein zusätzliches Axiom benötigt:

Ersetzungsaxiom: Wenn $F : A \rightarrow \mathcal{S}$ eine Funktion ist und $a \subseteq A$ eine Menge ist, dann ist auch $F[a]$ eine Menge. Oder in anderen Worten: Wenn F eine Funktion ist und $Def(F)$ eine Menge ist, dann ist auch $Bild(F)$ eine Menge.

Satz 1.15 (Rekursionssatz)

Zu jeder Funktion $G : \mathcal{S}^\infty \rightarrow \mathcal{S}$ gibt es genau eine Funktion $F : On \rightarrow \mathcal{S}$ so, dass $F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$ für alle $\alpha \in On$.

Beweis. Sei $\alpha \in On$. Wir wissen dass es höchstens eine Funktion $f_\alpha : \alpha \rightarrow \mathcal{S}$ mit $f_\alpha(\beta) = G(f_\alpha \upharpoonright \beta)$ für alle $\beta < \alpha$ gibt.

Die Existenz solch einer Funktion f_α soll nun per Induktion nach α geschehen so, dass für alle $\beta < \alpha$ gilt, dass $f_\beta = f_\alpha \upharpoonright \beta$.

$\alpha = 0$: Dann ist $f_\alpha = \emptyset$, die Bedingung gilt also.

$\alpha + 1$: Dann lässt sich $f_{\alpha+1}$ als $f_{\alpha+1} := f_\alpha \cup \{(\alpha, F(f_\alpha))\}$ definieren.

Sei α ein Limesordinal. Setze $X := \{f_\beta : \beta < \alpha\}$. X ist eine Menge, denn X ist das Bild der Funktion $H : \alpha \rightarrow \mathcal{S}^\infty$ mit $H(\beta) = f_\beta$ für $\beta \in \alpha$.

Nun ist $f_\alpha := \bigcup X = \{(\gamma, f_\beta(\gamma)), \gamma < \beta < \alpha\}$. f_α ist tatsächlich eine Funktion von α nach \mathcal{S} : Für alle $\gamma < \alpha$ existiert ein β mit $\gamma < \beta < \alpha$ und damit ein Paar $(\gamma, f_\beta(\gamma)) \in f_\alpha$. Für $(\gamma, f_\beta(\gamma)), (\gamma, f_{\beta'}(\gamma)) \in f_\alpha$ so, dass $\beta < \beta'$ ist $f_\beta = f_{\beta'} \upharpoonright \beta$, also $f_\beta(\gamma) = f_{\beta'}(\gamma)$. Es folgt also $Def(f_\alpha) = \alpha$.

Setze $F = \bigcup \{f_\alpha : \alpha \rightarrow \mathcal{S} : \alpha \in On\}$. $F = \{(\beta, f_\alpha(\beta)) : \beta < \alpha \in On\}$, F ist eine Funktion mit $Def(F) = On$.

Für jedes $\beta \in On$ ist $F(\beta) = f_\alpha(\beta)$ für ein (und damit alle!) α mit $\beta < \alpha$.

$F \upharpoonright \beta = f_\alpha \upharpoonright \beta$ für $\beta < \alpha$, $F(\beta) = f_\alpha(\beta) = G(f_\alpha \upharpoonright \beta) = G(F \upharpoonright \beta)$. \square

Damit ist der Rekursionssatz bewiesen. Nun sollen Anwendungen von diesem gezeigt werden.

Konstruktion von $F : On \rightarrow A$: Sei $a \in A, s : A \rightarrow A, h : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$. Nun lässt sich $G : A^\infty \rightarrow A$ definieren durch: $G(\emptyset) := a, G(F \upharpoonright \alpha + 1) := s(F(\alpha)), G(F \upharpoonright \lambda) := h(F[\lambda])$ für ein Limesordinal λ und Nachfolgerordinal α .

Mit dem Rekursionssatz folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion $F : On \rightarrow A$ mit $F(\alpha) = F(F \upharpoonright \alpha)$. Es gilt $F(\emptyset) = a, F(\alpha + 1) = s(F(\alpha)), F(\lambda) = h(F[\lambda])$.

Addition von Ordinalzahlen: Es sollen nun Ausdrücke wie $\alpha + \beta$ definiert werden, für $\alpha, \beta \in On$. $\alpha + \beta := F_\alpha : On \rightarrow On, \beta \mapsto \alpha + \beta$. Genauer lässt sich rekursiv definieren, dass

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &:= \alpha, \\ \alpha + (\beta + 1) &:= (\alpha + \beta) + 1, \\ \alpha + \lambda &:= \sup\{\alpha + \beta : \beta < \lambda\}\end{aligned}$$

für ein Limesordinal λ .

Bemerkung: Addition ist nicht kommutativ! Dies lässt sich leicht an einem Beispiel erkennen: $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} \neq \omega$, aber $1 + \omega = \sup\{1 + n : n \in \omega\} = \omega$.

Eine andere interessante Beobachtung ist, dass sich Addition zweier Ordinalzahlen durch „Hintereinanderlegen“ zweier Wohlordnungen darstellen lässt. Für $\alpha + \beta$ lassen sich Strukturen $\mathfrak{A} = (A, <), \mathfrak{B} = (B, <)$ finden, wobei beide Strukturen Wohlordnungen sind. Das „Hintereinanderlegen“ lässt sich in Abbildung 3 erkennen. Da \mathfrak{A} und \mathfrak{B} beides Wohlordnungen sind, lässt sich leicht einsehen, dass dann auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ eine Wohlordnung ist.



Abbildung 3: Darstellung von Addition durch „Hintereinanderlegen“ von Wohlordnungen

Multiplikation von Ordinalzahlen: Analog zur Addition kann man auch die Multiplikation definieren. Für $\alpha, \beta \in On$ ist dafür definiert:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 0 &:= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &:= \alpha \cdot \beta + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda &:= \sup\{\alpha \cdot \beta : \beta < \lambda\}\end{aligned}$$

für ein Limesordinal λ .

Und ebenso, wie Addition durch Wohlordnungen darstellbar ist, lässt sich Multiplikation mithilfe von zwei Wohlordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ und $\mathfrak{B} = (B, <)$ bilden. Dabei gilt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} := \mathfrak{C} = (A \times B, <_C)$ mit $(a, b) <_C (a', b')$ genau dann, wenn $b < b'$ oder $b = b' \wedge a < a'$. Graphisch dargestellt ist dies in Abbildung 4.

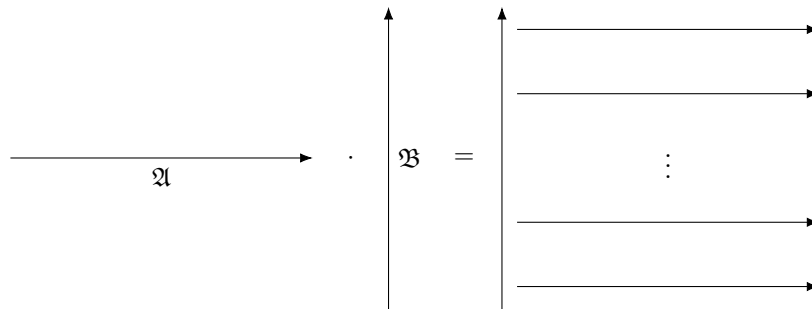


Abbildung 4: Graphische Darstellung von Multiplikation mithilfe von Wohlordnungen

Auch hier lässt es sich wieder feststellen, dass Multiplikation nicht kommutativ ist. Ein Beispiel hierfür ist $\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1 + 1) = \omega + \omega = \sup\{\omega + n : n \in \omega\} > \omega + n$ für alle $n \in \omega$, aber $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n : n < \omega\} = \omega < \omega + 1$.

Also gilt im Allgemeinen auch **nicht** $(\alpha + \alpha') \cdot \beta = \alpha\beta + \alpha'\beta$, da beispielsweise $(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$.

Potenzen von Ordinalzahlen: Zuletzt wird nun noch das Potenzieren von Ordinalzahlen definiert. Für $\alpha, \beta, \lambda \in On$, α, β Nachfolgerordinale und λ ein Limesordinal sein nun definiert:

$$\begin{aligned}\alpha^0 &:= 1 \\ \alpha^{\beta+1} &:= \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda &:= \sup\{\alpha^\beta : \beta < \lambda\}.\end{aligned}$$

Satz 1.16 (Cantor-Normalform)

Jedes $\alpha \in On$ hat eine eindeutige Darstellung $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k$ mit $k \in \omega, n_1, \dots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ und $\alpha \geq \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k \geq 0$.

Beweis. Dies soll per Induktion gezeigt werden. Für $\alpha = 0$ ist dies trivial, da dies die einzige Darstellung der 0 ist. Sei unsere Induktionsvoraussetzung nun also, dass alle Ordinale, die kleiner als α sind eine eindeutige Cantor-NF besitzen.

Sei γ das kleinste Ordinal so, dass $\omega^\gamma > \alpha$. γ muss ein Nachfolger sein, denn wäre es ein Limesordinal, dann wäre γ nicht das kleinste Ordinal mit der geforderten Eigenschaft.

Also ist $\gamma = \beta + 1$ und β ist das größte Ordinal mit $\omega^\beta \leq \alpha$. Also existieren Ordinale $n < \omega$ und γ so, dass $\alpha = \omega^\beta \cdot n + \gamma, \gamma < \omega^\beta \leq \alpha$.

Nach der Induktionsvoraussetzung hat γ eine eindeutige Cantor-Normalform und damit auch α . □

Es lässt sich jedoch feststellen, dass die Cantor-NF nicht immer hilfreich ist. Sei beispielsweise $\omega_1 = \min\{\alpha \in On : \text{es gibt keine injektive Abb. } f : \alpha \rightarrow \omega\}$ das kleinste nicht abzählbare Ordinal. Gesucht sei nun die Cantor-Normalform von ω_1 .

$\omega_1 = \sup\{\alpha \in On : \alpha \text{ ist abzählbar}\}$ ist ein Limesordinal. Betrachte nun $\omega^{\omega_1} = \sup\{\omega^\alpha : \alpha \text{ ist abzählbar}\}$. Es lässt sich feststellen, dass $\omega^{\omega_1} \leq \omega_1 \leq \omega^{\omega_1}$, also muss $\omega_1 = \omega^{\omega_1}$ sein.

Die Cantor-NF von ω_1 ist also ω^{ω_1} , was offensichtlich nicht sonderlich hilfreich ist.

Satz 1.17 (Ordinale Normalform für Wohlordnungen)

Jede Wohlordnung $(a, <)$ über einer Menge a ist isomorph zu genau einer Ordinalzahl.

Beweis. Zu einer gegebenen Wohlordnung $(a, <)$ suchen wir ein $\alpha \in On$ und eine bijektive Abbildung $f : \alpha \rightarrow a$ so, dass für $\gamma < \beta < \alpha$ auch $f(\gamma) < f(\beta)$ ist.

Definiere $F : On \rightarrow a \cup \{a\}$ durch

$$F(\alpha) := \begin{cases} \min\{a \setminus F[\alpha]\} & \text{wenn } F[\alpha] \subsetneq a \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: $a \in \text{Bild}(F)$. Andernfalls wäre F eine injektive Abbildung von On nach a , dann wäre für $\beta < \alpha$ aber entweder $F(\alpha) \notin F[\alpha]$ oder $F(\beta) \in F[\alpha]$, also $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Das heißt, dass $F : On \rightarrow \text{Bild}(F)$ bijektiv ist und da $\text{Bild}(F) \subseteq a$ eine Menge ist, müsste $F^{-1}[\text{Bild}(F)] = On$ nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge sein. Widerspruch!

Sei α also die kleinste Ordinalzahl so, dass $F(\alpha) = a$. Dann ist $f : F \upharpoonright \alpha$ die gesuchte Bijektion:

- f ist Ordnungserhaltend und damit auch injektiv, da für $\gamma < \beta < \alpha$ folgt, dass $f[\gamma] \subsetneq f[\beta]$, da $f(\gamma) = \min\{a \setminus f[\gamma]\} < \min\{a \setminus f[\beta]\} = f(\beta)$.

- f ist surjektiv, da sonst ein kleinstes Element $b \in a \setminus f[\alpha]$ existieren würde. Dann wäre $F(\alpha) = b$ im Widerspruch zu $F(\alpha) = a$.

□

1.5 Das Auswahlaxiom (AC)

Definition 1.27 (Auswahlfunktionen)

Eine *Auswahlfunktion* auf einer Menge x ist eine Funktion $f : x \rightarrow \mathcal{S}$ so, dass $f(z) \in z$ für jedes nicht-leere $z \in x$.

Das Auswahlaxiom (AC) besagt, dass auf jeder Menge eine solche Auswahlfunktion existiert.

Es lässt sich sehen, dass wenn auf $\bigcup X$ eine Wohlordnung existiert, man eine Auswahlfunktion bilden kann, ohne das Auswahlaxiom nutzen zu müssen. Sei $z \in x, z \neq \emptyset$. Dann ist $f(z) = \min(z)$ eine Auswahlfunktion.

Dies ist die eine Richtung des Wohlordnungssatzes von Zermelo, welches auch aus dem AC folgt. Die andere Richtung soll nun ebenfalls gezeigt werden.

Satz 1.18 (Wohlordnungssatz von Zermelo)

Auf jeder Menge a existiert eine Wohlordnung.

Beweis. Aus einer Auswahlfunktion f auf $\mathcal{P}(a)$ können wir eine Wohlordnung auf a konstruieren. Sei $F : On \rightarrow a \cup \{a\}$ mit

$$F(\alpha) = \begin{cases} f(a \setminus F[\alpha]) & \text{wenn } F[\alpha] \subsetneq a \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie im letzten Beweis gezeigt gibt es ein $\alpha \in On$ mit $F(\alpha) = a$ und $F \upharpoonright \alpha : \alpha \rightarrow a$ bijektiv.

$F \upharpoonright \alpha$ ist surjektiv, denn sonst ist $F(\alpha) \neq a$ und $F \upharpoonright \alpha$ überträgt die Wohlordnung von α auf a . Für $y, z \in a$ setze $y <_a z$ genau dann, wenn $(F \upharpoonright \alpha)^{-1}(y) < (F \upharpoonright \alpha)^{-1}(z)$. □

Ein weiteres, zum Auswahlaxiom äquivalentes Axiom ist das Lemma von Zorn (Kuratowski). Dieses besagt, dass wenn $(a, <)$ eine partielle Ordnung auf einer Menge a ist, in der jede linear geordnete Teilmenge $b \subseteq a$ eine obere Schranke $s_b \in a$ hat, die Menge ein maximales (bemerke: nicht größtes) Element m_a besitzt.

Satz 1.19

Aus den Axiomen von ZF und dem Auswahlaxiom lässt sich das Lemma von Zorn folgern.

Beweis. Sei f eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(a)$. Für jede Teilmenge $b \subseteq a$, welche durch $<$ linear geordnet ist, setze $y_b := \{x \in a : \forall u(u \in b \rightarrow u < x)\}$ als die Menge der *echten* oberen Schranken von b .

Definiere nun $F : \mathcal{P}(a) \rightarrow a \cup \{a\}$ durch

$$F(b) := \begin{cases} f(y_b) & \text{wenn } b \text{ durch } < \text{ linear geordnet ist und } y_b \neq \emptyset \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Mithilfe des Rekursionssatzes lässt sich dann eine Funktion $G : On \rightarrow a \cup \{a\}$ mit $\alpha \mapsto G(G[\alpha]) = F(\text{Bild}(G \upharpoonright \alpha))$ definieren.

$G[\alpha]$ ist eine linear geordnete Teilmenge von a und $G(\alpha)$ ist eine echte obere Schranke für $G[\alpha]$ außer dann, wenn $G[\alpha]$ keine echte obere Schranke besitzt, dann gilt $G(\alpha) = a$.

Wie in vorherigen Beweisen folgt, dass G den Wert a annehmen muss, da sonst G eine ordnungserhaltende Abbildung von On nach a wäre und On eine Menge sein würde.

Sei α also minimal mit $G(\alpha) = a$. $G[\alpha]$ ist nach Konstruktion eine linear geordnete Teilmenge von a ohne *echte* obere Schranke.

Sei m eine obere Schranke (und damit größtes Element) von $G[\alpha]$. Damit ist m maximales Element von (a, y) . \square

Satz 1.20

Aus den Axiomen von ZF und dem Lemma von Zorn folgt das Auswahlaxiom.

Beweis. Sei x eine beliebige Menge und $a := \{f : z \rightarrow \bigcup z : z \subseteq x \text{ und } f \text{ ist eine Auswahlfunktion auf } z\}$. Es gilt $a \neq \emptyset$, da die leere Funktion in a ist und a ist durch \subseteq partiell geordnet.

Wir behaupten, dass jede lineare geordnete Teilmenge $b \subseteq a$ eine obere Schranke $g_b \in a$ besitzt. Setze $g_b := \bigcup b \subseteq x \times \bigcup x$, so dass $g_b = \{(c, f(c)) : c \in z \subseteq x, f : z \rightarrow \bigcup z, f \in b\}$. Wenn $(c, f(c)), (c, f'(c)) \in g_b$ sind, dann ist $f, f' \in b$, aber es gilt $f \subseteq f'$ oder $f' \subseteq f$. Da f, f' Funktionen sind, folgt $f(c) = f'(c)$, g_b ist also eine wohldefinierte Funktion.

Für $c \in \text{Def}(g_b)$ ist $g_b(c) = f(c) \in c$ für ein $f \in b$. Also ist g_b eine Auswahlfunktion, das heißt $g_b \in a$.

Schließlich ist g_b eine obere Schranke für b , also besitzt a nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element $f \in a$.

Behauptung: f ist eine Auswahlfunktion auf x . Wenn nicht, dann ist f eine Auswahlfunktion auf einer echten Teilmenge $z \subsetneq x$ und es gibt ein nicht-leeres $y \in x \setminus z$. Für jedes $c \in y$ ist dann $f' := f \cup \{(y, c)\}$ eine Auswahlfunktion auf $z \cup \{y\} \subseteq x$ mit $f \subsetneq f'$. Widerspruch zur Maximalität von f . \square

1.5.1 Folgerungen aus dem Auswahlaxiom

Satz 1.21

Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Beweis. Sei V ein Vektorraum. Wenn $V = \{0\}$, dann ist \emptyset eine Basis. Sei also $V \neq \{0\}$. Definiere $X := \{B \subseteq V : B \text{ ist unabhängig}\}$ (zur Erinnerung: $B \subseteq V$ ist unabhängig, wenn kein Element $v \in B$ sich als endliche Linearkombination von anderen Elementen aus B schreiben lässt).

X ist nicht leer, da für $V \neq \{0\}$, $v \in V$ die Menge $\{v\}$ linear unabhängig ist.

Weiter folgt, dass (X, \subseteq) eine partielle Ordnung ist, in der jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke, nämlich $\bigcup K$ besitzt. Es gilt $\bigcup K \in X$, denn sonst lässt sich ein $v \in \bigcup K$ als endliche Linearkombination $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ schreiben. Aber dann existiert ein $B \in K$ mit $v, v_1, \dots, v_k \in B$.

Nach dem Lemma von Zorn hat X also ein maximales Element B_{max} . B_{max} ist unabhängig, jedes $v \in V$ lässt sich als Linearkombination $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ schreiben. Sonst wäre $B_{max} \cup \{v\}$ unabhängig, im Widerspruch zur Maximalität von B_{max} . \square

Eine weitere Folgerung des Auswahlaxioms ist der Satz von Banach-Tarski, welcher im folgenden Kapitel genauer betrachtet werden soll.

1.5.2 Der Satz von Banach-Tarski

Informell lässt sich der Satz wie folgt definieren: „Eine Kugel $B \subseteq \mathbb{R}^3$ kann in endlich viele Teile zerlegt werden, die dann via einfacher Isometrien zu zwei disjunkten Kopien von B zusammengesetzt werden können.“

Im Folgenden werden nun einige begriffe definiert:

Definition 1.28 (Isometrie)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine Funktion $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine *Isometrie*, wenn $\|\varphi(a) - \varphi(b)\| = \|a - b\|$ für alle $a, b \in A$.

Definition 1.29 (Kongruenz)

Zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ sind *kongruent* ($A \cong B$), wenn eine Isometrie φ auf A existiert mit $\varphi(A) = B$.

Definition 1.30 (Zerlegungsäquivalenz)

A, B sind *Zerlegungsäquivalent* ($A \sim_z B$), wenn $n \in \mathbb{N}$ und Partitionen $A = A_1 \cup \dots \cup A_n, B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ existieren, mit $A_i \cong B_i$ für alle $i \leq n$.

Es bleibt nun zu zeigen, dass \sim_z eine Äquivalenzrelation ist. Reflexivität und Symmetrie ist leicht einsehbar, gezeigt werden muss nun also nur noch die Transitivität.

Sei $A \sim_z B$ und $B \sim_z C$. Es gibt also Partitionen

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup \dots \cup A_n, \\ B &= B_1 \cup \dots \cup B_n \text{ mit} \\ \varphi_i \text{ so, dass } \varphi_i A_i &\cong B_i, \forall i \leq n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B &= B'_1 \cup \dots \cup B'_m, \\ C &= C_1 \cup \dots \cup C_m \text{ mit} \\ \psi_i \text{ so, dass } B'_i &\cong C_i, \forall i \leq m \end{aligned}$$

Setze $B_{ij} := B_i \cap B'_j, i \leq n, j \leq m$, wodurch wieder eine Partition von B gebildet wird. Weiter sei $A_{ij} := \varphi_i^{-1}(B_{ij})$ und $C_{ij} := \psi_j(B_{ij})$.

Dann ist $\psi_j \circ \varphi_i$ eine Isometrie von A_{ij} nach C_{ij} und A_{ij}, C_{ij} bilden Partitionen von A bzw. C , also ist $A \sim_z C$.

Weiter kann man folgende Eigenschaften der Relationen \sim_z feststellen, welche hier aber nicht bewiesen werden sollen:

- Wenn $A \sim_z B$, dann existiert eine Bijektion $g : A \rightarrow B$ mit $C \sim_z g(C)$ für alle $C \subseteq A$
- Für Partitionen $A = A_1 \cup \dots \cup A_n, B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ mit $A_i \sim_z B_i$ folgt $A \sim_z B$.
- Wir definieren $A \leq B : \Leftrightarrow \exists B' \subseteq B : A \sim_z B'$
- Wenn $A \leq B$ und $B \leq A$, dann ist $A \sim_z B$

Ein Vorbereitender Satz für den Satz von Banach-Tarski ist das Hausdorff-Paradoxon. Dieses beschreibt eine Paradoxe Zerlegung der 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Satz 1.22 (Hausdorff-Paradoxon)

Es gibt Mengen $A, B, C, D \subseteq S^2$ mit

- A, B, C, D bilden eine Partition von S^2
- D ist abzählbar
- $A \cong B \cong C \cong (B \cup C)$

Beweis. Definiere

$$\psi := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als eine Rotation um $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, um die z-Achse (die z-Achse ist die Achse, die nach „oben“ geht). Es gilt $\psi^3 = 1 = id_{\mathbb{R}^3}$.

Weiter sei

$$\varphi_\theta := \begin{pmatrix} -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

eine Rotation um $\pi = 180^\circ$, um die Achse a_θ in der x-z-Ebene (die x-z-Ebene ist die Ebene parallel zur Tafel in der Vorlesung). Hier gilt dann $\varphi_\theta \cdot \varphi_\theta = 1$.

Die Gruppe (G_θ, \cdot) lässt sich nun durch reduzierte Wörter $g = g_1 \dots g_n$ über dem Alphabet $\Gamma = \{\psi, \psi^2, \varphi\}$ darstellen so, dass hintereinander stehende Zeichen, welche sich zu 1 kürzen nicht vorkommen. Die Darstellung ist also eindeutig.

Wir wollen θ so wählen, dass G_θ frei ist, das heißt, dass für jedes $g \in G_\theta$ genau eine Darstellung $g = g_1 \dots g_n$ durch ein reduziertes Wort existiert. Solche θ existieren.

Für $g = g_1 \dots g_n \in \Gamma^*$ sei $g(\theta)$ die Rotation die entsteht, wenn wir $\varphi = \varphi_\theta$ setzen. Und es sei $\theta_g := \{\theta \in [0, 2\pi) : g(\theta) = 1\}$.

Lemma 1.5.1: Für jedes $g \in \Gamma^* \setminus \{\varepsilon\}$ ist θ_g endlich.

Mithilfe des Lemmas 1.5.1 lässt sich folgern, dass $M = \bigcup_{g \in \Gamma^+, g \text{ red.}} \theta_g$ abzählbar ist und wir ein $\theta \in [0, 2\pi] \setminus M$ finden können. Dann ist $g(\theta) \neq 1$ für alle reduzierten $g \in \Gamma^+$ und also G_θ frei über $\{\psi, \psi^2, \varphi_\theta\}$. Fixiere ein solches θ und sei $\varphi := \varphi_\theta$ sowie $D := \{s \in S^2 : gx = x \text{ für ein } g \in G_\theta\}$. Jede nicht-triviale Rotation fixiert genau zwei Punkte von S^2 , die Schnittpunkte mit der Rotationsachse, also ist D abzählbar.

Sei $Q := S^2 \setminus D$. Die Bahn von $x \in Q$ unter G_θ ist $G_\theta x = \{gx : g \in G_\theta\}$. Die Bahnen von G_θ auf Q bilden eine Partition. Mit dem Auswahlaxiom existiert also eine Auswahlfunktion auf der Menge dieser Bahnen und damit eine Menge R , welche aus jeder Bahn $G_\theta x$ für $x \in Q$ genau ein Element enthält. Damit ist $Q = \bigcup \{gR : g \in G_\theta\} = \{gr : g \in \Gamma^*, r \in R\}$.

Wir konstruieren die Zerlegung $Q = A \dot{\cup} B \dot{\cup} C$ induktiv gemäß der Länge von g . Wenn $|g| = 0$, d.h. $g = 1$ und $gr = r$, setzen wir $r \in A$, also ist $R \subseteq A$. Für $|g| = n + 1$, also ist $gr = h\tilde{g}r$ mit $h \in \{\psi, \psi^2, \varphi\}$, definieren wir die Zugehörigkeit von gr zu A, B, C gemäß der Tabelle 1.

$\tilde{g}h$	φ	ψ	ψ^2
A	B	B	C
B	A	C	A
C	A	A	B

Tabelle 1: Tabelle für die Zugehörigkeiten zu den Mengen für das Hausdorff-Paradoxon

Da jedes Element von Q eine eindeutige Darstellung $g \cdot r$ hat, ist damit die Partition $Q = \dot{\cup} B \dot{\cup} \dot{\cup} C$ und damit $S^2 = A \dot{\cup} B \dot{\cup} C \dot{\cup} D$ definiert. Es bleibt zu zeigen, dass $A \cong B \cong C \cong B \cup C$ gilt. Wir behaupten, $\psi(A) = B$, $\psi^2(A) = C$ und $\varphi(A) = B \cup C$.

$\psi(A) \subseteq B$: Sei $A = g \cdot r \in A$.

- Falls $g = \varphi\tilde{g}$, ist $\psi(a) = \psi\varphi\tilde{g}r \in B$ gemäß der Tabelle 1.

- Falls $g = \psi\tilde{g}$, ist $\psi(a) = \psi^2\tilde{g}r$. Da $a = \psi\tilde{g}r \in A$, ist $\tilde{g}r \in C$ und daher $\psi^2gr \in B$.
- Falls $g = \psi^2\tilde{g}$ gilt $\psi(a) = \tilde{g}r$. Da $a = \psi^2\tilde{g}r \in A$, ist $\tilde{g}r \in B$.

$B \subseteq \psi(A)$: Sei $b \in B$. Gemäß der Tabelle gilt einer der folgenden Fälle:

- Wenn $b = \varphi(a)$ für ein $a \in A$, setze $\tilde{a} = \psi^2(b) \in A$. Dann ist $\psi(\tilde{a}) = \psi\psi^2(b) = b$, also $b \in \psi(A)$.
- Für $b = \psi(a)$ für ein $a \in A$ ist nichts zu zeigen.
- Falls $b = \psi^2(c)$ für ein $c \in C$, setze $a = \psi(c) \in A$. Wir erhalten $\psi(a) = \psi^2(c) = b$, also $b \in \psi(A)$.

Analog kann $\psi^2(A) = C$ gezeigt werden.

$\varphi(A) \subseteq B \cup C$: Sei $a = g \cdot r \in A$.

- Für $g = \varphi\tilde{g}$ ist $\varphi(a) = \varphi\varphi\tilde{g}r$. Da $a = \varphi\tilde{g}r \in A$, ist $\tilde{g}r \in B \cup C$. Also $\varphi(a) \in B \cup C$.
- Wenn $g = \psi\tilde{g}$ oder $g = \psi^2\tilde{g}$, dann gilt $\varphi(a) = \varphi gr \in B \subseteq B \cup C$.

$B \cup C \subseteq \varphi(A)$: Sei $x \in B \cup C$. Folgende Fälle können auftreten

- Wenn $x = \varphi(a)$ für ein $a \in A$ ist nichts zu zeigen.
- Falls $x \in \psi(A) \cup \psi(B) \cup \psi^2(A) \cup \psi^2(C)$, setze $a = \varphi(x) \in A$. Dann erhalten wir $\varphi(a) = \varphi^2(x) = x$, also $x \in \varphi(A)$.

Also liefern φ , ψ und ψ^2 die gesuchten Isometrien. \square

Wir nutzen nun das Hausdorff-Paradoxon aus, um eine paradoxe Zerlegung der Einheitskugel $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ zu erhalten.

Satz 1.23 (Banach-Tarski-Paradoxon)

Für disjunkte Kopien U' von U gilt $U \sim_z U \dot{\cup} U'$.

Beweis. Sei $S = S^2$ die Oberfläche von U . Nach dem Satz von Hausdorff haben wir die Zerlegung $A \dot{\cup} B \dot{\cup} C \dot{\cup} D$ mit D abzählbar und den Kongruenzen $A \cong B \cong C \cong B \cup C$. Für $X \subseteq S^2$ sei $X^* := \{rx : x \in X, 0 < r \leq 1\} \subseteq U$.

Nun gilt $A^* \dot{\cup} B^* \dot{\cup} C^* \dot{\cup} D^* \dot{\cup} \{0\}$ ist eine Partition von U . Es folgt aus dem Hausdorff-Paradoxon, dass $A^* \sim_z B^* \cup C^*$ und $B^* \sim_z B^* \cup C^*$. Weiter ist $A^* \cup B^* \sim_z B^* \cup C^*$, da $A^* \cong C^*$. Analog gilt $A^* \cup B^* \sim_z A^* \cup B^* \cup C^*$, da $B^* \cong B^* \cup C^*$. Aus den letzten Feststellungen ergibt sich, dass $A^* \sim_z A^* \cup B^* \cup C^*$.

Sei nun $X := A^* \cup D^* \cup \{0\}$. Dann ist $X \sim_z U$, da, wie eben festgestellt, $A^* \sim_z A^* \cup B^* \cup C^*$ gilt.

Fixiere eine Rotation φ so, dass $\varphi(D) \cap D = \emptyset$. Dann ist $\varphi(D)^* \subsetneq A^* \cup B^* \cup C^* \sim_z A^* \sim_z B^*$. Also existiert ein $M \subsetneq B^*$ mit $\varphi(D)^* \sim_z M$.

Wir wählen ein $p \in B^* \setminus M$ und setzen $Y := C^* \dot{\cup} M \dot{\cup} \{p\}$. Dann ist $Y \sim_z U$, denn $C^* \sim_z A^* \cup B^* \cup C^*$, $M \sim_z D^*$ und $\{p\} \sim_z \{0\}$ und damit ist $Y = C^* \dot{\cup} M \dot{\cup} \{p\} \sim_z A^* \cup B^* \cup C^* \dot{\cup} D^* \dot{\cup} \{0\} = U$.

Daraus folgt ebenfalls, dass $Y \sim_z U'$. Da $X \cap Y = \emptyset$, ist $X \dot{\cup} Y \sim_z U \dot{\cup} U'$. Da außerdem $X \cup Y \subseteq U \subseteq U \dot{\cup} U'$ erhalten wir auch $X \cup Y \sim_z U$. Also gilt $U \sim_z U \dot{\cup} U'$. \square

1.6 Mächtigkeiten und Kardinalzahlen

Definition 1.31

Zwei Mengen x, y sind *gleichmächtig* ($x \sim y$) genau dann, wenn eine Bijektion $f : x \rightarrow y$ existiert. Wir sagen x ist höchstens so mächtig wie y ($x \preceq y$), wenn eine injektive Funktion $f : x \rightarrow y$ existiert.

Lemma 1.6.1: Ohne das Auswahlaxiom, also nur mit ZF, gelten folgende elementare Eigenschaften:

1. \sim ist eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{S} .
2. $x \sim y$ gilt genau dann, wenn $x \preceq y \wedge y \preceq x$ (nach Cantor-Schröder-Bernstein).
3. \preceq ist reflexiv und transitiv. Wir nennen dies eine *Quasiordnung*.
4. Wenn $x \subseteq y$, dann ist $x \preceq y$.

Auf Basis von ZF ist das Auswahlaxiom äquivalent dazu, dass \preceq eine totale Quasiordnung ist. Auch folgt mithilfe des Auswahlaxioms, dass für jedes x ein $\beta \in On$ existiert, mit $x \sim \beta$.

Definition 1.32 (Kardinalität)

Die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* $|x|$ einer Menge x ist die kleinste Ordinalzahl α , die gleichmächtig zu x ist, also $|x| = \min\{\alpha \in On : \alpha \sim x\}$.

Lemma 1.6.2: Es gilt

- a) $x \sim y$ gdw. $|x| = |y|$.
- b) $x \preceq y$ gdw. $|x| \leq |y|$.

Beweis. a): Der Beweis dient als Übung für den Leser. Als Hinweis: Es lässt sich einfach eine passende Bijektion finden, wodurch die Gleichheit klar ist.

b): \Leftarrow : Nach Definition existiert eine bijektive Abbildung $f : x \rightarrow |x|$. Nach Voraussetzung ist $|x| \leq |y|$ und von $|y|$ existiert eine Bijektion nach y . Also gibt es eine injektive Funktion von x nach y , also $x \preceq y$.

\Rightarrow : Nach Voraussetzung gibt es eine injektive Abbildung $f : x \rightarrow y$ und eine injektive Funktion $\hat{f} : |x| \rightarrow |y|$. Weiter folgt offensichtlich, dass $\hat{f} : |x| \rightarrow f[|x|] \subseteq |y|$ eine Bijektion auf eine Teilmenge von $|y|$ ist.

Auch lässt sich erkennen, dass $f[|x|]$ isomorph zu einem $\beta \in On$ ist, da $f[|x|]$ ebenfalls eine Wohlordnung ist. Also gibt es einen Isomorphismus $g : (\beta, <) \xrightarrow{\sim} (f[|x|], <) \subseteq (|y|, <) = (\alpha, <)$ für ein Ordinal α .

Nun bleibt zu zeigen, dass falls g ordnungserhaltend ist auch $\beta \leq \alpha$ gilt.

Voraussetzung: Dies wurde bereits für alle $\beta' < \beta$ gezeigt. Da $g : \beta \rightarrow \alpha$ für jedes $\beta' < \beta$ eine ordnungserhaltende Abbildung $g \upharpoonright \beta' : \beta' \rightarrow g[\beta']$ induziert, also $\beta' \leq g[\beta'] < \alpha$. Aus der Definition von $\beta = \{\beta' : \beta' < \beta\} \subseteq \{\beta' : \beta' < \alpha\} = \alpha$, also ist $\beta \leq \alpha$. \square

Definition 1.33 (Kardinalzahlen)

Die Klasse aller *Kardinalzahlen* ist $Cn := \{|x| : x \in \mathcal{S}\} = \{\alpha \in On : |\alpha| = \alpha\}$

Es lässt sich feststellen, dass alle natürlichen Zahlen Kardinalzahlen sind, ebenso wie ω . Aber das Ordinal $\omega + 1 \notin Cn$, da sich eine Bijektion von ω nach $\omega + 1$ definieren lässt, wodurch $\omega + 1$ die Kardinalität ω hat.

Definition 1.34 (Endlichkeit und Abzählbarkeit)

Eine Menge x ist *endlich*, falls $x \sim n$ für ein $n \in \omega$ gilt.

Eine Menge x ist *abzählbar*, falls $x \preceq \omega$.

Satz 1.24 (Cantor)

Für alle Mengen x gilt, dass $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.

Beweis. Es soll gezeigt werden, dass es keine surjektive Abbildung $f : x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ geben kann.

Sei $y = \{a \in x : a \notin f(a)\}$. Nun gilt $y \notin \text{Bild}(f)$. Sonst gilt $y = f(b)$ für ein $b \in x$.

- Falls $b \in y$, dann gilt nach der Definition von y , dass $b \notin f(b)$, aber da $f(b) = y$ folgt dann $b \notin y$. Widerspruch!
- Falls $b \notin y$, dann lässt sich das obige Argument umkehren und genauso zu $b \in y$ führen, was auch hier wieder ein Widerspruch ist.

□

Damit folgt, dass zu jeder Kardinalzahl $\kappa \in Cn$ ein $\kappa' \in Cn$ existiert, mit $\kappa' > \kappa$.

Weil $Cn \subseteq On$ gibt es ein kleinstes solches κ' , wir nennen dieses dann κ^+ .

Lemma 1.6.3: Sei κ eine Kardinalzahl und unendlich. Dann ist κ ein Limesordinal.

Beweis. Wir zeigen $\alpha \sim \alpha + 1$ für alle $\alpha \in On$ mit $\alpha \geq \omega$.

Definiere eine bijektive Abbildung

$$f : \alpha + 1 \rightarrow \alpha, \beta \mapsto \begin{cases} \beta + 1 & \text{falls } \beta < \omega \\ \beta & \text{falls } \omega \leq \beta < \alpha \\ 0 & \text{falls } \beta = \alpha \end{cases}$$

Also kann $\alpha + 1$ keine Kardinalzahl sein, da es eine kleinere Ordinalzahl gibt, zu der $\alpha + 1$ bijektiv ist. □

Definition 1.35

Cn^∞ bezeichne $Cn \setminus \omega$ (Bemerke: $\omega \in Cn^\infty$).

Da $Cn^\infty \subseteq On$ und nach dem Satz von Cantor unbeschränkt ist, ist Cn^∞ (und damit auch Cn) eine echte Klasse.

Definition 1.36 (Nachfolger- und Limeskardinale)

Sei $\kappa \in Cn^\infty$. Dann ist κ ein *Nachfolgerkardinal*, falls $\kappa = \lambda^+$ für ein $\lambda \in Cn$.

Sonst heißt κ *Limesordinal*.

Beachte: Nachfolgerkardinale sind Limesordinals.

Definition 1.37

Wir definieren eine Funktion $\aleph : On \rightarrow On$ als $\aleph_0 := \omega$, $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$ und $\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \aleph_\alpha$ für ein Limesordinal λ . Man beachte, dass nicht $\aleph(\alpha)$ für ein Ordinal α geschrieben wird, sondern \aleph_α .

Satz 1.25

Es gilt $Cn^\infty = \{\aleph_\alpha : \alpha \in On\}$

Beweis. \supseteq : Dies soll induktiv gezeigt werden. Der Induktionsanfang und der Schritt für Nachfolgerordinale ist klar.

Zu zeigen: Für Limesordinale λ ist $\aleph_\lambda \in Cn^\infty$. Zuerst gilt nach der Übung $\aleph_\lambda \in On$. Sei $\beta \in \aleph_\lambda$. Dann existiert ein $\alpha < \lambda$, mit $\beta \in \aleph_\alpha = |\aleph_\alpha| \subseteq |\aleph_\lambda|$. Also ist \aleph_λ die nächste Kardinalzahl.

\subseteq : Der Basisfall ist klar, da $\omega = \aleph_0$. Sei $\kappa \in Cn^\infty$ und $\kappa > \omega$.

Es existiert ein $\alpha \in On$ mit $\aleph_\alpha \geq \kappa$ (sonst wäre $Bild(\aleph)$ beschränkt und damit eine Menge, aber \aleph ist eine Bijektion von On nach $Bild(\aleph)$ und damit wäre On eine Menge. Widerspruch!).

Sei nun $\alpha = \min\{\beta \in On : \aleph_\beta \geq \kappa\}$. Dann gilt $\kappa = \aleph_\alpha$, ansonsten wäre $\kappa < \aleph_\alpha$ und somit für alle $\beta < \alpha$ gilt $\aleph_\beta < \kappa < \aleph_\alpha$.

- Falls $\alpha = \beta + 1$. Dann ist $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+$ die kleinste Kardinalzahl größer \aleph_β . Widerspruch.
- Falls α ein Limesordinal ist, dann ist $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_\alpha$.

□

1.6.1 Kardinalzahlarithmetik

Seien $\kappa, \lambda, \mu \in Cn$.

Dann sei

- $\kappa + \lambda = |\kappa \dot{\cup} \lambda| = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$.
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$.
- $\kappa^\lambda = |\kappa^\lambda| = |\{f|f : \lambda \rightarrow \kappa\}|$.

Weiter lässt sich feststellen, dass die für endliche Kardinale bekannten Eigenschaften, auch für alle Kardinale gelten. Diese werden hier nun beispielhaft aufgeführt.

1. $(Cn, +, 0)$ bildet ein abelsches Monoid.
2. $(Cn \setminus 0, \cdot, 1)$ bildet ebenfalls ein abelsches Monoid.
3. Wenn $\kappa \leq \lambda$, dann ist $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$.
4. Es gilt $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
5. Für $\kappa \leq \lambda$ gilt $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$.
6. Für alle κ ist $0 \cdot \kappa = \kappa \cdot 0 = 0$.
7. Es gilt $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$ und $\kappa^{\lambda \cdot \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$.
8. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
9. Es gelten $\kappa^0 = 1$, $\kappa^1 = \kappa$ und $0^\kappa = 0$ für $\kappa \neq 0$.

Satz 1.26 (Hessenberg, 1906)

Für $\lambda \in Cn^\infty$ gilt $\lambda \cdot \lambda = \lambda$.

Um dies zu zeigen werden noch einige Zwischenschritte benötigt. Zuerst lässt sich erkennen, dass der Satz bewiesen ist, falls sich zeigen lässt, dass $\alpha \times \alpha \sim \alpha$ für alle $\alpha \geq \omega$ gilt, denn dann gilt $\lambda \cdot \lambda = |\lambda \times \lambda \times \lambda| = |\lambda| = \lambda$.

Wie entweder leicht einsehbar oder bereits bekannt, gilt $\omega \times \omega \sim \omega$, da sich sehr einfach eine Bijektion zwischen natürlichen Zahlen und Paaren von diesen finden lässt. Beispielsweise stellt die Abbildungsvorschrift $(i, j) \mapsto \frac{1}{2}(i + j)(i + j + 1) + j$ eine solche dar.

Nun wollen wir eine Wohlordnung $<^*$ auf $On \times On$ definieren. Für $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in On$ gilt $(\alpha, \beta) <^* (\alpha', \beta')$ genau dann, wenn

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\alpha', \beta'\}$ oder
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ und $\alpha < \alpha'$ oder
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ und $\alpha = \alpha'$ und $\beta < \beta'$.

Für ein $\gamma \in On$ wird zusätzlich die Menge $S_\gamma := \{(\alpha, \beta) \in On^2 : \max\{\alpha, \beta\} = \gamma\}$ definiert. Eine grafische Darstellung lässt sich in Abbildung 5 sehen. Die blau gezeichnete Linie stellt die Menge S_γ dar und das grüne Rechteck illustriert, welche Paare kleiner als ein gegebenes Paar (α, β) sind.

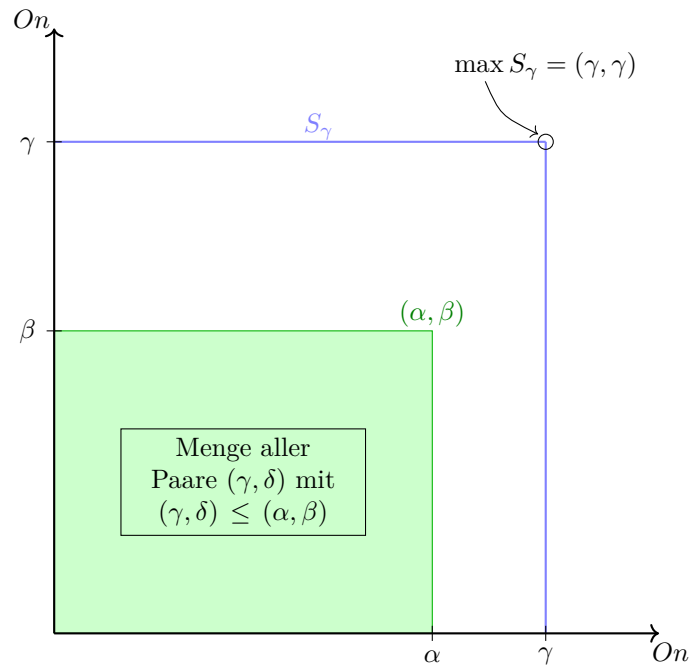


Abbildung 5: Die grafische Darstellung von $<^*$.

Lemma 1.6.4: $<^*$ ist eine Wohlordnung.

Beweis. Sei $A \subseteq On \times On$ nicht-leer. Setze $\delta := \{\delta' \in On : A \cap S_{\delta'} \neq \emptyset\}$. Nun ist das Minimum von A das Paar (α_0, β_0) mit $\alpha_0 := \min\{\alpha \in On : \exists \beta[(\alpha, \beta) \in A \cap S_\delta]\}$ und $\beta_0 := \min\{\beta \in On : (\alpha_0, \beta) \in A \cap S_\delta\}$. \square

Definition 1.38

Die Gödelsche Paarfunktion $G : On \times On \rightarrow On$ ist definiert als $G(\alpha, \beta) = otp(\{(\alpha', \beta') : (\alpha', \beta') <^* (\alpha, \beta)\}, <^*)$.

Hierbei bezeichnet $otp(A, <)$ die Ordinalzahl α so, dass $(A, <) \cong (\alpha, <)$. Also ist $(\alpha, \beta) \downarrow^{<^*} \cong (G(\alpha, \beta), <)$.

Lemma 1.6.5: Es gilt $G(\alpha, \beta) = \{G(\alpha', \beta') : (\alpha', \beta') <^* (\alpha, \beta)\}$.

Der Beweis zum obigen Lemma lässt sich durch eine Graphik, welche den Isomorphismus von $((\alpha, \beta), <)$ nach $(G(\alpha, \beta), <)$ verdeutlicht.

Damit folgt dann, dass G ordnungserhaltend und injektiv.

Lemma 1.6.6: a) $G(\alpha, \beta) \geq \max\{\alpha, \beta\}$.

b) $G[\alpha \times \alpha] = G(0, \alpha)$. Insbesondere ist $\alpha \leq G[\alpha \times \alpha]$.

c) $G[\omega \times \omega] = \omega$.

Beweis. a): $G(\alpha, \beta) = (\{(\alpha', \beta') \in On : (\alpha', \beta') <^* (\alpha, \beta)\}, <^*) \supset (\{(\gamma, 0) : \gamma < \alpha\}, <^*) \cong (\alpha, <)$. Es folgt, dass $G(\alpha, \beta) \geq \beta$. Analog lässt sich dies für $G(\alpha, \beta) \geq \alpha$ zeigen.

b): $\alpha \times \alpha = \{(\beta, \gamma) \in On^2 : (\beta, \gamma) <^* (0, \alpha)\}$. Nach dem Lemma folgt $G[\alpha \times \alpha] = G(0, \alpha)$ und wegen a) ist $\alpha \leq G(0, \alpha) = G[\alpha \times \alpha]$.

c): Jedes $(m, n) \in \omega \times \omega$ hat nur endlich viele $<^*$ -Vorgänger, also folgt $G(m, n) < \omega$. Demnach ist $G[\omega \times \omega] \leq \omega$. $G[\omega \times \omega] \geq \omega$ folgt aus b). Also muss $G[\omega \times \omega] = \omega$ gelten. Die Abbildung $G \upharpoonright \omega \times \omega$ ist also eine Bijektion von $\omega \times \omega$ nach ω . \square

Nachdem nun einige Hilfsaussagen gezeigt und diskutiert wurden können wir jetzt den Satz von Hessenberg beweisen. Zu Erinnerung: Wir müssen zeigen, dass, basierend auf ZFC, für alle Ordinale $\alpha \geq \omega$ gilt, dass $\alpha \times \alpha \sim \alpha$.

Beweis: Satz von Hessenberg. Wir wollen dies durch eine transfinite Induktion über α zeigen. Induktionsanfang: $\alpha = \omega$: Dies folgt aus dem Teil c) des eben bewiesenen Lemmas.

Für $\alpha > \omega$ lassen sich zwei Fälle aufstellen.

- Falls ein $\beta < \alpha$ existiert mit $\beta \sim \alpha$, dann ist $\alpha \times \alpha \sim \beta \times \beta \stackrel{\text{IV}}{\sim} \beta \sim \alpha$.
- Sonst ist α ein Limesordinal, da $\beta + 1 \sim \beta$ wäre. Mit b) des Lemmas folgt $G[\alpha \times \alpha] \geq \alpha$. Für einen Widerspruch nehmen wir $G[\alpha \times \alpha] > \alpha$ an.

Wähle $(\beta, \gamma) \in \alpha \times \alpha$ mit $G(\beta, \gamma) = \alpha$. Setze $\delta := \{\beta, \gamma\} + 1$. Also ist $(\beta, \gamma) \in \delta \times \delta$ und $\alpha = G(\beta, \gamma) \in G[\delta \times \delta]$ und daher $\alpha \subseteq G[\delta \times \delta]$.

Nun ist $\alpha \stackrel{(1)}{>} \delta \stackrel{(2)}{>} \omega$, weil (1) α ein Limesordinal ist und (2), weil $\alpha \notin G[\omega \times \omega]$.

Nach der Induktionsvoraussetzung existieren die Bijektion $g : \delta \rightarrow \delta \times \delta$ und die Abbildung $h := G \circ g : \delta \rightarrow G[\delta \times \delta] \supseteq \alpha$.

Die Umkehrabbildung $h^{-1} \upharpoonright \alpha \rightarrow \delta$ ist nun aber eine injektive Abbildung von α in eine Teilmenge von δ . Es folgt $\alpha \sim \delta$, also müsste für α eigentlich der erste Fall gelten. Widerspruch!

Es gilt also $G[\alpha \times \alpha] = \alpha$ und damit ist $G \upharpoonright \alpha \times \alpha$ eine Bijektion von $\alpha \times \alpha$ nach α . \square

Es wurde nun also gezeigt, dass aus dem Wohlordnungssatz, daher auch dem Auswahlaxiom, die eben bewiesene Eigenschaft folgt. Die Umkehrung lässt sich aber auch zeigen.

Satz 1.27 (Tarski, 1924)

In ZF gilt: Die Aussage, dass $a \times a \sim a$ für alle unendlichen Mengen a gilt impliziert das Auswahlaxiom

Beweis. Sei a eine Menge und $\beta \in On$ so, dass keine Surjektion von a nach β existiert. Nach Voraussetzung gilt $f : a \cup \beta \rightarrow (a \cup \beta) \times (a \cup \beta)$. Nun konstruieren wir eine Wohlordnung auf a .

Beobachtung: $\beta \times \{x\} \not\subseteq f[a]$, denn sonst ist $h : a \rightarrow \beta \times \{x\} \rightarrow \beta$ surjektiv. Widerspruch!

Also $S_b := \{\gamma \in \beta : f(\gamma) \in \beta \times \{b\}\} \neq \emptyset$.

Damit ist die Funktion $g : a \rightarrow \beta, x \mapsto \min S_x$. Dies ist injektiv und wohldefiniert, denn $S_c \cap S_d = \emptyset$ für $c \neq d \in a$ und g induziert eine Wohlordnung auf a durch:

$$b < c \text{ gdw. } g(b) < g(c).$$

Damit wurde eine Wohlordnung gefunden und der Satz von Tarski ist bewiesen. \square

Aus dem Satz von Hessenberg lassen sich einige Eigenschaften folgern.

Für $\kappa \in Cn$ und $\kappa \leq \lambda \in Cn^\infty$ gilt $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \lambda$. Dies lässt sich daran sehen, dass $\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda \leq 2 \cdot \lambda = \lambda$ bzw. $\lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$.

Weiter gilt für $n \geq 1$ und $\lambda \in Cn^\infty$, dass $\lambda^n = \lambda$.

Satz 1.28 a) $|\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|}$.

b) Wenn $2 \leq \kappa \leq \lambda$ mit $\kappa \in Cn, \lambda \in Cn^\infty$, dann ist $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Beweis. a): $\mathcal{P}(x) \sim \{f : x \rightarrow 2\}$ und nach Definition ist $|\{f : x \rightarrow 2\}| = 2^{|x|}$.

b): $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda$. \square

Durch weitere Überlegungen kann man feststellen, dass $|\mathbb{Q}| = |\omega \times \omega| = \omega$ und $|\mathbb{R}| = \omega^\omega = 2^\omega = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Und mit Hilfe von Satz 1.24 folgt, dass $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{Q}|$.

1.6.2 Die Kontinuumshypothese (CH)

Die Kontinuumshypothese (englisch: continuum hypothesis) besagt, dass $\omega^+ = 2^\omega$ oder anders ausgedrückt: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Zusätzlich gibt es auch die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (GCH), nach welcher $\aleph_\alpha + 1 = 2^{\aleph_\alpha}$ für alle $\alpha \in On$ gilt.

Es lässt sich aber zeigen, dass *CH unabhängig von ZFC ist*. Das heißt, es gilt sowohl $ZFC \not\models CH$, als auch $ZFC \not\models \neg CH$, wobei davon ausgegangen wird, dass ZFC konsistent ist und es somit überhaupt ein Modell von ZFC gibt.

Der Beweis dafür wurde von zwei Mathematikern geführt. Der erste Teil wurde von Kurt Gödel im Jahre 1938 bewiesen. Dafür hat er aus dem bekannten Stufenmodell $(S_\alpha)_{\alpha \in On}$ eine konstruierbare Hierarchie $(L_\alpha)_{\alpha \in On}$ erzeugt. Für diese gilt $L_0 := \emptyset$, für Limesordinae λ ist $L_\lambda := \bigcup_{\beta < \lambda} L_\beta$ und für $\alpha + 1$ ist $L_{\alpha+1} := \{x \subseteq L_\alpha : \exists a_1, \dots, a_n \exists \varphi(z, y_1, \dots, y_n) : x = \{z \in L_\alpha : (L_\alpha, \in) \models \varphi(z, a_1, \dots, a_n)\}\}$ die Menge aller Teilmengen, die sich mithilfe einer FO-Formel darstellen lassen.

Damit konnte Gödel folgern, dass $(L, \in) \models ZF$, $(L, \in) \models AC$ und $(L, \in) \models GCH$.

Den zweiten Teil konnte Paul Cohen im Jahre 1963 beweisen. Sein Endresultat war, dass $ZF \not\models AC$ und $ZFC \not\models CH$.

Daraus folgt also, dass mithilfe von ZFC nichts über die Korrektheit der Kontinuumshypothese aussagen lässt. ZFC ist also nicht vollständig. Zusätzlich nehmen die obigen Überlegungen die Konsistenz von ZFC an.

Trotz dieser Probleme mit ZFC wird dieses als „Standard “ Axiomensystem angenommen. Wie im nächsten Kapitel nämlich gezeigt werden wird gilt für alle Axiomensysteme, welche genügend Aussagekraft haben, dass deren Konsistenz nicht gezeigt werden kann und sie nicht vollständig sein können.

2 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

In diesem Kapitel sollen die Gödelschen Unvollständigkeitssätze behandelt werden. Durch diese wird einsehbar sein, dass die Unvollständigkeit von ZFC, wie sie im Kapitel zur Kontinuums-hypothese festgestellt wurde, nicht behoben werden kann, egal wie das Axiomensystem der Mengenlehre gewählt wird.

2.1 Das Hilbertsche Programm

Unter dem Hilbertschen Programm versteht man die Bestrebungen des deutschen Mathematiker David Hilbert (1862 – 1943) zur Axiomatisierung der verschiedenen Zweige der Mathematik in der Prädikatenlogik erster Ordnung. Insbesondere sollte es möglich sein mathematische Folgerungen auf syntaktische Ableitungen in einem formalen Kalkül zu reduzieren. Ebenso war das Ziel effektive Verfahren (heute auch Algorithmen genannt) zu konstruieren, um die Gültigkeit mathematischer Aussagen in einer Theorie zu entscheiden. Diese Teilergebnisse sollten dann im Beweis der Widerspruchsfreiheit der Mathematik gipfeln. All diese Vorhaben kommen einem mit dem heutigen Wissen sehr utopisch vor und so soll im weiteren Verlauf des Kapitels auch bewiesen werden, dass viele Teile des Programms nicht so aufgehen, wie es sich Hilbert gewünscht hätte.

Dennoch konnte einige Erfolge erzielt werden:

- Die Axiomatisierung wichtiger Teile der Mathematik durch geeignete Axiomensysteme konnte gezeigt werden
- Die Peano-Arithmetik stellt eine mögliche Axiomatisierung der bekannten Arithmetik in den natürlichen Zahlen dar
- Das Axiomensystem ZFC erlaubt eine Formalisierung der Mathematik innerhalb der Mengenlehre
- Der Begriff *Beweis* konnte durch formale Systeme wie das Hilbert-Frege-System, den Sequenzenkalkül und weiteren, präzisiert werden.
- Durch den Beweis des Vollständigkeitssatzes von Kurt Gödel in 1931, welcher aussagt, dass $\Phi \models \psi$ äquivalent ist zu $\Phi \vdash \psi$ (für $\Phi \subseteq FO, \psi \in FO$), konnte gezeigt werden, dass die gewünschte Reduktion von mathematischen auf syntaktische Folgerungen gültig ist.
- Zuletzt konnten algorithmische Verfahren gefunden werden, um die Erfüllbarkeit bzw. Gültigkeit von *Fragmenten* von FO zu entscheiden.

Jedoch haben fundamentale Resultate aus den 30er-Jahren das Hilbertsche Programm scheitern lassen:

1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz Jede hinreichend reichhaltige, rekursiv axiomatisierbare Theorie ist unvollständig (bspw. bezieht sich dies auf PA und ZFC).

Satz von Church/Turing Die Erfüllbarkeit bzw. Gültigkeit von FO ist unentscheidbar.

2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz Ist Φ ein entscheidbares, hinreichend starkes Axiomensystem, dann ist aus Φ die Widerspruchsfreiheit von Φ nicht beweisbar. Insbesondere gilt dies für $\Phi = ZFC$.

2.2 Theorien

Definition 2.1 (Theorie)

Eine *Theorie* $T \subseteq FO(\tau)$ ist eine erfüllbare Satzmenge, welche unter \models abgeschlossen ist. Das heißt, wenn $T \models \psi$, dann ist bereits $\psi \in T$.

Im weiteren Verlauf wird die Notation $\Phi \models$ für den Abschluss von Φ unter \models verwendet. Aus dem Vollständigkeitssatz und der Definition der Theorie ergibt sich für eine Theorie $T = T^\models = T^+$.

Definition 2.2 (Vollständigkeit)

Eine Theorie T ist *vollständig*, wenn für jeden Satz $\psi \in FO(\tau)$ gilt: $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$.

Definition 2.3 (Rekursive Axiomatisierbarkeit)

Eine Theorie T ist *rekursiv axiomatisierbar*, wenn eine entscheidbare Menge $\Phi \subseteq FO$ existiert mit $\Phi \models T$.

Satz 2.1

Sei T eine vollständige Theorie. Dann sind äquivalent:

1. T ist rekursiv axiomatisierbar.
2. Es gibt ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem Φ mit $T = \Phi \models$.
3. T ist rekursiv aufzählbar.
4. T ist entscheidbar.

Bemerkung: Um *Rekursive Aufzählbarkeit* abzukürzen wird r.e. geschrieben, was für *recursively enumerable* steht.

Beweis. 1. \Rightarrow 2. Da 1. eine schwächere Aussage als 2. ist, welches 1. sogar impliziert, ist die Folgerung trivial.

2. \Rightarrow 3. Wenn Φ r.e. ist, dann ist dies auch die Menge aller endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Sei M nun ein Algorithmus mit Haltemenge $L(M) = \Phi$. Um zu überprüfen, ob ein $\Phi_0 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subseteq \Phi$ ist, soll M nacheinander auf $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ angewendet werden und halten, wenn M auf allen φ_i hält.

Indem man nun systematisch alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und alle im Sequenzenkalkül ableitbaren Sequenzen $\Phi \Rightarrow \psi$ aufzählt, erhält man ein Aufzählungsverfahren für T .

3. \Rightarrow 4. T ist vollständig, also gilt $\psi \notin T$ genau dann, wenn $\neg\psi \in T$. Mit T ist also auch das Komplement von T in $FO(\tau)$ r.e. Also ist T entscheidbar.

4. \Rightarrow 1. Wähle $\Phi = T$. Mit der Definition ergibt sich, dass T dann rekursiv aufzählbar ist. \square

Wir betrachten nun die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Die Theorie $TA := Th(\mathfrak{N}) = \{\psi : \mathfrak{N} \models \psi\}$ wird als echte Arithmetik (engl.: *true arithmetic*) bezeichnet. Offensichtlich ist TA vollständig.

Das Axiomensystem der Peano-Arithmetik Φ_{PA} besteht aus folgenden Axiomen:

- $\forall x \neg(x + 1 = 0)$
- $\forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$
- $\forall x (x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
- $\forall x (x \cdot 0 = 0)$

- $\forall x \forall y (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$

und dem Axiomenschema der vollständigen Induktion:

$$\forall \bar{y} ((\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(x + 1, \bar{y}))) \rightarrow \forall x \varphi(x, \bar{y}))$$

für jede Formel $\varphi(x, \bar{y}) \in FO(\tau_{ar})$.

Erlaubt man anstatt der Prädikatenlogik erster Ordnung auch die monadische Logik zweiter Stufe, lässt sich das Axiomenschema der vollständigen Induktion auch als allgemeines Induktionsaxiom formulieren:

$$\forall X ((X(0) \wedge \forall x (X(x) \rightarrow X(x + 1))) \rightarrow \forall x X(x)) \in MSO$$

In Φ_{PA} wird das Induktionsaxiom dagegen aber nur für definierbare Teilmengen gefordert. Die Peano Arithmetik $PA := \Phi_{PA}^{\models}$ ist rekursiv axiomatisiert und daher r.e.

Definition 2.4

Ein Axiomensystem Φ ist repräsentativ (oder erlaubt Kodierungen), wenn man zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ einen Term t_n angeben kann (z.B. $t_n := \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}$) so, dass gilt:

1. $\Phi \vdash \neg t_n = t_m$ (für $n \neq m$)
2. Für jede totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ existiert eine Formel $\varphi_f(\bar{x}, y)$ so, dass für alle n_1, \dots, n_k
 - $\Phi \vdash \exists! y \varphi_f(t_{n_1}, \dots, t_{n_k}, y)$
 - Wenn $f(n_1, \dots, n_k) = m$, dann $\Phi \vdash \varphi_f(t_{n_1}, \dots, t_{n_k}, t_m)$
 - Wenn $f(n_1, \dots, n_k) \neq m$, dann $\Phi \vdash \neg \varphi_f(t_{n_1}, \dots, t_{n_k}, m)$

Wenn Φ repräsentativ ist, dann wird auch jede entscheidbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ durch eine Formel $\varphi_R(x_1, \dots, x_k)$ dargestellt:

- $(n_1, \dots, n_k) \in R \Rightarrow \Phi \vdash \varphi_R(t_{n_1}, \dots, t_{n_k})$
- $(n_1, \dots, n_k) \notin R \Rightarrow \Phi \vdash \neg \varphi_R(t_{n_1}, \dots, t_{n_k})$

Insgesamt lässt sich feststellen, dass TA, PA und auch ZFC repräsentativ sind.

Definition 2.5

Wir definieren die Funktion $[\cdot, \cdot] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x$.

Lemma 2.2.1: Die Funktion $[\cdot, \cdot]$ ist bijektiv.

Beweis. Das Paar (x, y) erhält die Nummer $(\sum_{0 \leq n < x+y} n + 1) + x = (\sum_{1 \leq n \leq x+y} n) + x = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x = [x, y]$. □

Weiter lässt sich dann definieren, dass Tupel als $[a_1, \dots, a_n] := [a_0, [a_1, \dots, a_n]]$ definieren, für $n > 1$. Demnach lässt sich eine definierbare Bijektion $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ für ein festes, aber beliebiges k finden.

Satz 2.2 (Chinesischer Restsatz)

Seien q_0, \dots, q_{n-1} paarweise teilerfremd und $q := \prod_{i < n} q_i$. Dann ist die Funktion $F : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/q_0\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_{n-1}\mathbb{Z}$, $a \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$ eine Bijektion.

Beweis. Seien $a, a' \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ so, dass $a \equiv a' \pmod{q_j}$ für alle $j < n$. Also wird $a - a'$ von allen q_j geteilt und daher, da die q_j teilerfremd sind, auch von dem Produkt q , also ist $a \equiv a' \pmod{q}$. \square

Lemma 2.2.2 (Gödelsches β -Lemma): Es gibt eine totale berechenbare Funktion $\beta : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass zu jeder endlichen Folge (a_0, \dots, a_{n-1}) über \mathbb{N} zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ existieren, mit $\beta(a, b, j) = a_j$ für alle $j < n$.

Beweis. Setze $\beta(x, y, z) := x \pmod{1+y(z+1)}$. β ist definierbar durch die Formel $\varphi_\beta(x, y, z, v) := v < 1 + y(z+1) \wedge \exists u(x = u + uy(z+1) + v)$.

Es ist nun zu zeigen, dass sich für alle a_0, \dots, a_{n-1} zwei a, b angeben so, dass $a \equiv a_j \pmod{1+b(j+1)}$ und $b := m!$ für $m = \max\{n, a_0, \dots, a_n - 1\}$.

Behauptung: Für $0 \leq i < j \leq n$ sind $1 + (i+1) + b$ und $1 + (j+1) + b$ teilerfremd.

Andernfalls ex. ein $p > 1$ mit $p|1 + (i+1) + b$ und $p|1 + (j+1) + b$. Es folgt, dass $p|(i-j)b$, aber $p \nmid b$ (sonst $p \nmid 1 + (i+1) + b$), also $p|(i-j)$ und daher $p < n$. Dies ist aber unmöglich, da b von jeder Zahl, welche kleiner als n geteilt wird.

Nach dem chinesischen Restsatz existiert dann ein $a < \prod_{j=0}^{n-1} (1 + b(j+1))$ mit $a \equiv a_j \pmod{1+b(j+1)}$ für alle $j < n$. \square

Eine Folge (a_0, \dots, a_{n-1}) über \mathbb{N} kodieren wir nun durch $\langle a_0, \dots, a_{n+1} \rangle := [a, b, n]$ so, dass $\beta(a, b, i) = a_i$ für alle $i < n$, mit $b = (\max\{n, a_0, \dots, a_{n-1}\})!$. Weiter ist die Länge solch einer Folge $ln(\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle) := n$ und ebenso ist $\pi_i(\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle) = a_i$.

Es lässt sich feststellen, dass $[\cdot, \cdot]$, β , ln und π in TA , PA und ZFC definierbar sind.

2.3 Kodierung von Turing Maschinen

Mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Kapitel ist es nicht schwer Turing Maschinen zu kodieren und mithilfe dieser gewisse Widersprüche zu zeigen.

Eine Turing Maschine (kurz: TM) ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ und eine Konfiguration einer TM ist ein Tripel $c = [q, w, p]$, wobei $q < |Q|$, $w = (w_0, \dots, w_{n-1}) \in \Sigma^*$ mit $w_i \leq |\Sigma|$, und $p \leq |w|$. Es soll zudem noch bemerkt werden, dass die Relation \vdash_M die Nachfolgerrelation ist. $x \vdash_M y$ gilt also genau dann, wenn y in M eine gültige Nachfolgerkonfiguration ist.

Sei nun $\Phi \in \{TA, \Phi_{PA}, ZFC\}$ und M eine TM. Es gibt Formeln $Konf_M(x)$, $Start_m(x, y)$, $End_M(x, y)$ und $Lauf_M(x)$ mit

- $\Phi \vdash Konf_M(n)$ gdw. n kodiert eine gültige Konfiguration von M , also $n = [q, w, p]$.
- $\Phi \vdash Start_M(n, m)$ gdw. n kodiert die Inputkonfiguration von M auf m .
- $\Phi \vdash End_M(n, m)$ gdw. n kodiert eine Endkonfiguration von M mit Bandinschrift (Output) m .
- $\Phi \vdash Lauf_M(x)$ gdw. x beschreibt eine gültige Berechnung von M , d.h. eine Folge $x = \langle c_0, \dots, c_n \rangle$ mit $Konf_M(c_i)$ und $c_i \vdash_M c_{i+1}$.

Mit diesen Formeln und der Repräsentation von TA , Φ_{PA} und ZFC erhält man die Folgerung, welche zuerst von Tarski formuliert wurde:

TA ist unentscheidbar

Der Beweis lässt sich mithilfe des Halteproblems führen. Angenommen, TA wäre entscheidbar. Da TA vollständig ist, ließe sich mithilfe der obigen Formeln für beliebige TMs entscheiden, ob gegebene Läufe gültig sind. Mithilfe der Formeln würde man dann das Halteproblem lösen können. Nach Turing (1937) ist dies aber nicht möglich, weshalb TA nicht entscheidbar sein kann.

Die exakt gleiche Argumentation lässt sich auch auf PA und $ZFC \models$ übertragen, weshalb diese ebenfalls nicht entscheidbar sein können.

Dies führt zum ersten Unvollständigkeitssatz von Gödel:

Satz 2.3 (1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Die beiden getroffenen Aussagen sind:

1. Es gibt kein entscheidbares Axiomensystem für TA .
2. PA ist unvollständig

1. ist zwar die gleiche Aussage wie die Folgerung Tarskis, Gödel hat dies aber über einen anderen Weg noch vor Turings Entdeckung der unentscheidbarkeit des Halteproblems gezeigt.

2. ist durch einen Widerspruch mithilfe des ersten Teiles möglich. Wäre PA vollständig, dann wäre es ein Axiomensystem für TA . Nach 1. wäre PA dann aber nicht entscheidbar, was entgegen der Definition von PA geht. Also muss PA unvollständig sein.

2.4 Gödelisierung von Termen und Formeln

Wie im vorherigen Kapitel erwähnt hat Gödel einen anderen Weg für seine Unvollständigkeitssätze verwendet, unter anderem, weil Turing seinen Beweis erst einige Jahre nach Gödel veröffentlicht hat. In diesem Kapitel soll nun der Beweisweg von Gödel werden.

Als Gödelisierung wird das Verfahren bezeichnet, den Termen und Formeln einer Logik eine eindeutige natürliche Zahl zuzuordnen. Ein Term t wird zu einer natürlichen Zahl $\ulcorner t \urcorner \in \mathbb{N}$ und eine Formel φ wird zu der Zahl $\ulcorner \varphi \urcorner \in \mathbb{N}$. Für eine Formel $\theta(x)$ und $k \in \mathbb{N}$ schreibt man $\theta(k)$ für $\theta[x / \underbrace{1 + \dots + 1}_{k\text{-mal}}]$, also das Ersetzen von jedem Vorkommen von x in θ durch einen Term, welcher zu k auswertet.

Satz 2.4 (Fixpunktsatz)

Φ erlaube Kodierungen. Zu jeder Formel $\psi(x) \in FO(+, \cdot, 0, 1)$ ex. ein Satz φ mit $\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Der Fixpunktsatz lässt sich auch anders formulieren: Aus jeder Formel $\psi(x) \in FO(+, \cdot, 0, 1)$ wird eine Funktion $f_{\psi, \varphi} : \varphi \mapsto \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ gebildet. Jede solche Funktion hat einen bis auf Äquivalenz bestimmten Fixpunkt.

Beweis. Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Funktion mit $f(\ulcorner \theta(x) \urcorner, k) := \ulcorner \theta(k) \urcorner$ und $f(n, k) = 0$, wenn n nicht die Gödelnummer einer Formel $\theta(x)$ ist.

Da f berechenbar ist, gibt es eine Formel $\alpha(x, y, z)$ mit $\Phi \vdash \alpha(n, k, m)$ gdw. $m = f(n, k)$. Für eine gegebene Formel $\psi(x)$ setze $\theta(x) := \forall z(\alpha(x, x, z) \rightarrow \psi(z))$ und $\varphi := \theta(\ulcorner \theta \urcorner)$. Dann gilt $f(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner) = \ulcorner \varphi \urcorner$, also

$$\Phi \vdash \alpha(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner) \quad (*)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ gilt.

\Rightarrow : Man betrachte die Sequenz $\Phi \vdash (\varphi \wedge \alpha(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner)) \rightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$. Zur Erinnerung ist φ definiert als $\varphi := \forall z(f(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner) = z \rightarrow \psi(z))$. Falls nun also φ und $\alpha(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner)$ gilt, dann muss, wegen der Aussage von φ , auch $\psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$ gelten.

Durch (*) folgt dann $\Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$

\Leftarrow : Es gilt $\Phi \vdash \exists! z \alpha(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner, z)$. Die Existenz folgt aus (*) und die Eindeutigkeit, da α eine Funktion repräsentiert. Demnach ist dann

$$\Phi \vdash \forall z (\alpha(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner, z) \rightarrow z = \ulcorner \varphi \urcorner)$$

. Mit der Definition von φ folgt dann

$$\Phi \vdash \psi(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \underbrace{(\forall z (f(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner) = z \rightarrow \psi(z)))}_{\varphi}$$

bzw. $\Phi \vdash \psi(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$. □

Satz 2.5

Sei \mathfrak{A} eine Struktur deren Universum \mathbb{N} umfasst so, dass $Th(\mathfrak{A})$ Kodierungen erlaubt. Dann existiert keine Formel $True_{\mathfrak{A}}(x)$ so, dass für alle ψ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models True_{\mathfrak{A}}(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Beweis. Wir nehmen an $True_{\mathfrak{A}}(x)$ existiert. Nach dem Fixpunktsatz existiert zu $\neg True_{\mathfrak{A}}(x)$ ein Fixpunkt φ so, dass

$$Th(\mathfrak{A}) \vdash \varphi \leftrightarrow \neg True_{\mathfrak{A}}(\ulcorner \varphi \urcorner). \quad ((*))$$

Informell „behauptet“ φ , dass φ falsch ist. Nun folgt

$$\mathfrak{A} \models \varphi \xLeftrightarrow{(*)} \mathfrak{A} \models \neg True_{\mathfrak{A}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \xLeftrightarrow{\text{Def. von } True_{\mathfrak{A}}} \mathfrak{A} \not\models \varphi.$$

Widerspruch! □

Die wahren Sätze von $Th(\mathfrak{N})$ sind also nicht in $Th(\mathfrak{N})$ repräsentierbar. Anders formuliert:

Sei T eine repräsentative und vollständige Theorie. Dann ist T nicht in T definierbar. Das heißt es gibt keine Formel $True_T(x)$ mit $\psi \in T \Leftrightarrow True_T(\ulcorner \psi \urcorner) \in T$.

Damit folgt wieder der 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz (die genau Definition kann in Satz 2.3 gefunden werden): Sei T rekursiv axiomatisierbar und repräsentativ. Dann ist T unvollständig. Sonst wäre T entscheidbar und da T repräsentativ ist, wäre die entscheidbare Menge $\{\ulcorner \psi \urcorner : \psi \in T\}$ in T definierbar.

Sei Φ entscheidbar und repräsentativ. Nun nehmen wir uns eine geeignete Kodierung von Ableitungen im Sequenzenkalkül und betrachten $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(n, m) \in B$ gdw. n kodiert eine Ableitung mit Sequenz $\Phi_0 \Rightarrow \psi$ so, dass $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich und $m = \ulcorner \psi \urcorner$. B ist entscheidbar, also existiert eine Formel $Beweis_{\Phi}(x, y)$ so, dass $\Phi \vdash Beweis_{\Phi}(n, m)$ gdw. $(n, m) \in B$. Weiter werden die Formeln $Abl_{\Phi}(x) := \exists y Beweis_{\Phi}(y, x)$ und $Wf_{\Phi} := \neg Abl_{\Phi}(\ulcorner \neg 0 = 0 \urcorner)$ definiert. Dabei bezeichnet $Abl_{\Phi}(x)$, dass es einen Beweis für x gibt und Wf_{Φ} drückt die Widerspruchsfreiheit von Φ aus.

Satz 2.6 (2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Ist $\Phi \supseteq \Phi_{PA}$ entscheidbar und konsistent, dann ist $\Phi \not\vdash Wf_{\Phi}$.

Beweis. Nach dem Fixpunktsatz existiert ein Satz φ mit $\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \neg Abl_{\Phi}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. Ähnlich zum vorherigen Beweis „behauptet“ φ seine eigene Unbeweisbarkeit. Nun ist $\Phi \not\vdash \varphi$, da es sonst eine Ableitung $\Phi_0 \Rightarrow \varphi$ für $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich existiert und somit folgt $\Phi \vdash Abl_{\Phi}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ und damit $\Phi \vdash \neg \varphi$. Also ist $Wf_{\Phi} \rightarrow \neg Abl_{\Phi}(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Man kann diesen Beweis in $\Phi \supseteq \Phi_{PA}$ nachvollziehen und zeigen, dass $\Phi \vdash Wf_{\Phi} \rightarrow \neg Abl_{\Phi}(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Wenn $\Phi \vdash Wf_{\Phi}$, dann auch $\Phi \vdash \neg Abl_{\Phi}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ und damit $\Phi \vdash \varphi$. Widerspruch! □

Analog kann man zeigen, dass $ZFC \not\vdash Wf_{ZFC}$.

3 Modelltheorie

Nachdem in den letzten Teilen wichtige Konzepte der Mengenlehre und die Gödelschen Unvollständigkeitssätze vermittelt wurden, sollen werden hier nun zentrale Ideen der Modelltheorie gezeigt.

3.1 Erhaltungssätze (Charakterisierungssätze)

Ein wichtiges Ziel der Modelltheorie ist es, einen Zusammenhang zwischen Syntax und Semantik zu bilden. Allgemein lässt sich dies formalisieren: Eine Formel $\psi \in FO$ hat eine semantische Eigenschaft P gdw. wenn ψ äquivalent zu einer Formel in einem Fragment $F_p \subseteq FO$ ist.

Beispiele dafür sind der Satz von *Łos-Tarski* und *Satz von Benthem*.

Satz von Łos-Tarski $\psi \in FO$ ist erhaltend unter Substrukturen (d.h. wenn $\mathfrak{B} \models \psi$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, dann ist auch $\mathfrak{A} \models \psi$) gdw. ψ äquivalent ist zu einer universellen Formel $\forall \bar{x}(\varphi)$, wobei φ quantorenfrei ist.

Satz von Benthem $\psi(x) \in FO$ ist invariant unter Bisimulation (d.h. wenn $\mathfrak{K} \models \psi(v)$ und $\mathfrak{K}, v \sim \mathfrak{K}', v'$, dann gilt auch $\mathfrak{K}' \models \psi(v')$) gdw. $\psi(x)$ äquivalent zu einer Formel $\psi' \in ML$ ist.

In beiden Fällen gilt, dass die Richtung von Syntax zur Semantik trivial ist. Beispielsweise ist die Bisimulations-Invarianz von zu einer Modallogischen Formel äquivalenten FO -Formel klar. Die Rückrichtung ist aber alles andere als offensichtlich und werden daher noch genauer in diesem Kapitel betrachtet.

Refresher zur Modallogik

Für eine Formel ψ gilt $\psi \in ML$ (Modallogik), wenn ψ induktiv definiert ist, als

$$\psi := P_i \mid \neg\psi \mid \psi \wedge \psi \mid \psi \vee \psi \mid \psi \rightarrow \psi \mid \Diamond\psi \mid \Box\psi.$$

Modell einer Modallogischen Formel ist ein Transitionssystem $\mathfrak{K} = (V, (P_i)_{i \in I}, E)$. Wobei V eine Menge an Knoten, E eine zweistellige Kantenrelation und P_i für jedes $i \in I$ eine einstellige Relation ist, welche die Eigenschaften von Knoten darstellt.

Semantisch ist ML definiert als

- $\mathfrak{K}, v \models P_i$ gdw. $v \in P_i$.
- Die Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ sind wie aus AL oder FO bekannt.
- $\mathfrak{K}, v \models \Diamond\psi$ genau dann, wenn es ein $w \in vE = \{w : (v, w) \in E\}$ gibt, mit $\mathfrak{K}, w \models \psi$.
- $\mathfrak{K}, v \models \Box\psi$ genau dann, wenn für alle $w \in vE$ gibt, mit $\mathfrak{K}, w \models \psi$.

Die Modallogik lässt sich in die Prädikatenlogik einbetten. Es gibt also eine Abbildung mit $\psi \mapsto \psi^*(x)$, bzw. nach Formelaufbau:

- $P_i \mapsto P_i x$
- $\psi_1 \circ \psi_2 \mapsto \psi_1^*(x) \circ \psi_2^*(x)$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $\Diamond\psi \mapsto \exists y(Exy \wedge \psi^*(y))$

- $\Box\psi \mapsto \forall y(Ey \rightarrow \psi^*(y))$

Das Bild dieser Abbildung wird als modales Fragment der Prädikatenlogik bezeichnet.

Eine Bisimulation zwischen zwei Transitionssystemen $\mathfrak{K} = (V, (P_i)_{i \in I}, E)$ und $\mathfrak{K}' = (V', (P'_i)_{i \in I}, E')$ ist eine Relation $Z \subseteq V \times V'$ so, dass für alle $(v, v') \in Z$ gilt:

- $v \in P_i \Leftrightarrow v' \in P'_i$
- Hin: Zu jedem Knoten $w \in vE$ existiert ein $w' \in v'E'$ so, dass $(w, w') \in Z$.
- Her: Zu jedem Knoten $w' \in v'E'$ existiert ein $w \in vE$ so, dass $(w, w') \in Z$,

Es lässt sich erkennen, dass ML Bisimulationsinvariant ist. Das heißt, wenn $\mathfrak{K}, v \models \psi$ und $\mathfrak{K}, v \sim \mathfrak{K}', v'$, dann ist auch $\mathfrak{K}', v' \models \psi$.

Weiter mit Erhaltungssätzen

Definition 3.1 (Existenziell-positiv)

Eine FO -Formel ist *existenziell positiv* (Σ_1^+ -Formel), wenn sie weder Allquantoren, noch Negationen oder Implikationen enthält, also aus Atomen mit \wedge, \vee und \exists aufgebaut ist.

Definition 3.2 (Existenzielle und universelle Formeln)

Eine FO -Formel ist existenziell (Σ -Formel), wenn sie die Form $\exists \bar{x}\varphi$ mit quantorenfreiem φ hat.

Eine FO -Formel ist universell (Π_1 -Formel), wenn sie die Form $\forall \bar{x}\varphi$ mit quantorenfreiem φ hat.

Induktiv ist weiter definiert, dass eine Formel ψ eine Σ_{n+1} -Formel ist, wenn $\psi = \exists \bar{x}\varphi$ gilt und φ eine Π_n -Formel ist. Dual ist dies für Π_{n+1} -Formeln definiert. Eine Π_{n+1} -Formel ist von der Form $\forall \bar{x}\varphi$ für ein φ , welches eine Σ_n -Formel ist. Offensichtlich sind diese Formeln in Pränex-Normalform. Auch lässt sich erkennen, dass wenn φ eine Σ_n -Formel ist, $\neg\varphi$ eine Π_n -Formel wird.

Definition 3.3 (Abgeschlossenheit)

Eine Formel $\psi(x)$ ist abgeschlossen unter einer Abbildung $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, wenn für alle \bar{a} aus \mathfrak{A} gilt $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(f\bar{a})$.

Ein *Homomorphismus* h ist eine Abbildung von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} , für welche gilt, wenn $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$, dann ist $(h\bar{a}) \in R^{\mathfrak{B}}$ für ein Relationssymbol R und analog für Funktionen.

Verglichen dazu ist ein *starker Homomorphismus* ein **injektiver** Homomorphismus h , für den gilt $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ **gdw.** $(h\bar{a}) \in R^{\mathfrak{B}}$. Einen starken Homomorphismus nennt man auch eine *Einbettung*.

Lemma 3.1.1: Jede Σ_1^+ -Formel bleibt unter Homomorphismen erhalten.

Beweis. Sei $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus. Zunächst gilt für jeden Term $t(\bar{x})$:

$$h(\llbracket t(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = \llbracket t(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \quad ((*)$$

denn:

- $t := x_i$: klar, da beide Seiten den Wert ha_i „erhalten“.

- $t := gt_1 \dots t_k$: Dann ist

$$\begin{aligned}
h\llbracket t(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} &= h(g^{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}})) \\
&\stackrel{h \text{ Hom.}}{=} g^{\mathfrak{B}}(h\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, h\llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \\
&\stackrel{\text{IV.}}{=} g^{\mathfrak{B}}(\llbracket t_1(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \dots, \llbracket t_k(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}) \\
&= \llbracket t(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}.
\end{aligned}$$

Durch eine Induktion über den Formelaufbau lässt sich dann diese Eigenschaft auch für Formeln ψ feststellen:

- $\psi := t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a}) &\iff \llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} \\
&\implies h\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} = h\llbracket t_2(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}} \\
&\stackrel{(*)}{\iff} \llbracket t_1(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}} = \llbracket t_2(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}} \iff \mathfrak{B} \models t_1(h\bar{a}) = t_2(h\bar{a}).
\end{aligned} \tag{\Delta}$$

- $\psi := Rt_1(\bar{x}), \dots, t_k(\bar{x})$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models Rt_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a}) &\iff (\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}} \\
&\stackrel{h \text{ Hom.}}{\implies} (h\llbracket t_1(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, h\llbracket t_k(\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{B}} \\
&\stackrel{(*)}{\iff} (\llbracket t_1(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}, \dots, \llbracket t_k(h\bar{a}) \rrbracket^{\mathfrak{B}}) \in R^{\mathfrak{B}} \iff \mathfrak{B} \models Rt_1(h\bar{a}), \dots, t_k(h\bar{a}).
\end{aligned} \tag{\bigcirc}$$

- Die Fälle $\psi := \varphi \wedge \varphi'$ und $\psi := \varphi \vee \varphi'$ sind klar.
- $\psi := \exists y \varphi(\bar{x}, y)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y) &\implies \text{es ex. } b \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, b) \\
&\stackrel{\text{IV.}}{\implies} \mathfrak{B} \models \varphi(h\bar{a}, hb) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists y \varphi(h\bar{a}, y).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.2: Σ_1 -Formeln $\psi(\bar{x})$ bleiben unter Einbettung erhalten.

Beweis. Sei h eine Einbettung. Ohne Einschränkung lässt sich voraussetzen, dass $\psi(\bar{x})$ in Negations-NF ist. Nun lässt sich die Behauptung durch eine Induktion über den Formelaufbau wie oben zeigen:

- Für $\psi := t_1 = t_2$ oder $\psi := Rt_1, \dots, t_n$ lässt sich dies genauso wie oben zeigen.
- Da h injektiv ist, gilt die Folgerung (Δ) auch in die andere Richtung. Man erhält also eine Kette an Äquivalenzen. Dadurch lässt sich diese analog auf den hier beschriebenen Fall ψ anwenden.
- Falls $\psi := \neg Rt_1, \dots, t_n$ lässt sich das Argument wie im vorherigen Beweis verwenden. Die Folgerung von (\bigcirc) wird aber eine Äquivalenz, da h ein starker Homomorphismus ist.
- Die Fälle $\psi := \varphi \wedge \varphi'$, $\psi := \varphi \vee \varphi'$ und $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ lassen sich genauso wie oben beweisen.

□

Lemma 3.1.3: Π_1 -Formeln bleiben unter Substrukturen erhalten.

Beweis. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\psi(\bar{x})$ eine Π_1 -Formel. Angenommen, es gilt $\mathfrak{A} \models \neg\psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$ für \bar{a} aus A . Dann ist $\neg\psi(\bar{x})$ aber äquivalent zu einer Σ_1 -Formel. Mit Lemma 3.1.1 folgt aber $\mathfrak{A} \models \neg\psi(\bar{x}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{a})$. Widerspruch! □

Definition 3.4

Eine Folge $(\mathfrak{A}_i)_{i < \alpha}$ von τ -Strukturen ist eine *Kette*, wenn jeweils $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$ für $i < j$. Die Vereinigung $\bigcup_{i < \alpha} \mathfrak{A}_i$ einer solchen Kette ist die Struktur \mathfrak{A} mit Universum $A = \bigcup_{i < \alpha} A_i$ und

- $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ gdw. $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}_i}$ für ein $i < \alpha$ (und daher für alle $j < \alpha$ mit $\bar{a} \in A_j$).
- $f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = b$ gdw. $f^{\mathfrak{A}_i} \bar{a} = b$ für ein (und dadurch alle) $i < \alpha$ mit $\bar{a} \in A_i$.

$\varphi(x)$ bleibt Erhalten unter Vereinigung von Ketten, wenn für jede Kette $(\mathfrak{A}_i)_{i < \alpha}$ mit $\bar{a} \in A_0$ und $\mathfrak{A}_i \models \varphi(\bar{a})$ für alle i , dann auch $\bigcup_{i < \alpha} \mathfrak{A}_i \models \varphi(\bar{a})$ gilt.

Dies sind nicht alle Formeln. Sei bspw. $\mathfrak{A}_i = (\{0, \dots, i\}, a^{\mathbb{N}})$. Jedes \mathfrak{A}_i hat ein maximales Element, aber $\bigcup \mathfrak{A}_i = (\mathbb{N}, <)$ nicht. Das heißt, es gibt Σ_2 -Formeln, welche nicht unter Vereinigung von Ketten erhalten bleiben ($\exists x \forall y (y \leq x)$).

Lemma 3.1.4: Π_2 -Formeln bleiben erhalten unter Vereinigung von Ketten.

Beweis. Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i < \alpha}$ eine Kette, $\mathfrak{A} := \bigcup_{i < \alpha} \mathfrak{A}_i$ und $\bar{a} \subseteq A_0$. Weiter sei $\forall \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ eine Π_2 -Formel (also $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ eine Σ_1 -Formel) so, dass $\mathfrak{A}_i \models \forall \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$ für alle $i < \alpha$.

Nun ist zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \models \forall \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$. Angenommen, es existiert ein $\bar{b} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a}, \bar{b})$. Da $|\bar{b}|$ endlich ist, existiert ein $j < \alpha$ mit $\bar{b} \subseteq A_j$. Da $\neg\varphi$ äquivalent zu einer Π_1 -Formel ist und $\mathfrak{A}_j \subseteq \mathfrak{A}$, folgt wegen Lemma 3.1.3, dass $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi(\bar{a}, \bar{b})$ im Widerspruch zu $\mathfrak{A}_j \models \forall \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$. □

Definition 3.5

Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur und $B \subseteq A$. Dann ist \mathfrak{A}_B die Expansion von \mathfrak{A} um je eine Konstante für b für jedes Element $b \in B$. Ist T eine vollständige Theorie und $\mathfrak{A} \models T$, dann ist $T(B) := Th(\mathfrak{A}_B)$. Im Fall $B = A$ nenne wir $T(A) := Th(\mathfrak{A}_A)$ das *elementare Diagramm* von \mathfrak{A} .

Im Gegensatz dazu ist das Diagramm $D(\mathfrak{A})$ definiert durch

$$D(\mathfrak{A}) := \{\varphi(\bar{a}) \in T(A) : \varphi \text{ atomar oder negiert-atomar}\}$$

Definition 3.6

\mathfrak{A} ist eine *elementare Substruktur* von \mathfrak{B} ($\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), wenn $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und für jede Formel $\varphi(\bar{x}) \in FO$ und alle \bar{a} aus A gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$.

Dies soll durch zwei Beispiele genauer beleuchtet werden.

- $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$. Dann lässt sich leicht feststellen, dass $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.
- $\mathfrak{A} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, <)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, <)$. Es gilt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und sogar $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Aber trotzdem ist $\mathfrak{A} \not\preceq \mathfrak{B}$. Sei $\varphi(x)$ in einer Struktur wahr, gdw. x das kleinste Element der Struktur ist. Dann ist $\mathfrak{A} \models \varphi(1)$, aber $\mathfrak{B} \not\models \varphi(1)$.

Satz 3.1 (Tarski-Vaught-Test)

Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Nun sind äquivalent:

1. $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

2. Für jede Formel $\varphi(\bar{x}, y)$ und alle \bar{a} aus \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, a')$ für ein $a' \in A$.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Sei $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$, das heißt $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, a')$ für ein $a' \in A$. Da $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, folgt $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, a')$.

2. \Rightarrow 1.: Das Kriterium des Tests sei erfüllt. Nun ist zu zeigen, dass für jede Formel $\psi(\bar{x})$ und \bar{a} aus \mathfrak{A} gilt: $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(\bar{a})$. Dies soll wieder durch eine Induktion über den Formelaufbau passieren.

- Die atomaren Fälle $\psi := x = y$ und $\psi := R\bar{x}$, als auch die einfachen Induktionsschritte $\psi := \neg\varphi$, $\psi := \varphi \wedge \varphi'$ und $\psi := \varphi \vee \varphi'$ sind klar.

- $\psi := \exists y \exists \varphi(\bar{a}, y)$:

- $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, a')$ für ein $a' \in A \xrightarrow{\text{IV}} \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, a') \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$.
- $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y) \xrightarrow{\text{Test}} \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, a')$ für ein $a' \in A \xrightarrow{\text{IV}} \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, a') \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$.

□

Definition 3.7 (Elementare Einbettung)

$f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist eine *elementare Einbettung* ($f : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), wenn gilt: f ist eine Einbettung und für alle $\varphi(\bar{x})$, $\bar{a} : \mathfrak{A} \models \bar{a} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(f\bar{a})$. Es ergibt sich dadurch folgendes Verhalten: $\mathfrak{A} \cong f[\mathfrak{A}] \preceq \mathfrak{B}$.

Definition 3.8 (Elementare Kette)

Eine Kette $(\mathfrak{A}_i)_{i \in \alpha}$ ist elementar, wenn $\mathfrak{A}_i \preceq \mathfrak{A}_j$ für $i \leq j$ gilt.

Satz 3.2

Für jede Kette elem. $(\mathfrak{A}_i)_{i \in \alpha}$ gilt $\mathfrak{A}_k \preceq \bigcup \mathfrak{A}_i$ für alle $k < \alpha$.

Lemma 3.1.5: Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_A \models Th(\mathfrak{A}_A) = T(A)$. Dann ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Zur Erinnerung: $T(A)$ ist das elementare Diagramm.

Beweis. Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, dann folgt $\varphi(\bar{a}) \in T(A)$ und da \mathfrak{B} Modell von $T(A)$ ist, gilt $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$.

Im Gegensatz ist mit den gleichen Argumenten, sowie der Vollständigkeit von $T(A)$ einsehbar, dass $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \neg\varphi(\bar{a}) \in T(A) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ gilt. □

Typen

Definition 3.9

Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur, $B \subseteq A$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist definiert:

1. Ein n -Typ von \mathfrak{A} über B ist eine Menge p von Formeln $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}) \in FO(\tau \cup B)$ so, dass $p \cup Th(\mathfrak{A}_B)$ erfüllbar ist.
2. $tp_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B) := \{\varphi(\bar{x}) \in FO(\tau \cup B) : \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})\}$.
3. \mathfrak{A} *realisiert* den Typen p über B , wenn ein Tupel \bar{a} aus \mathfrak{A} existiert mit $p \subseteq tp_{\mathfrak{A}}(\bar{a}/B)$.
4. Ein Typ p über B ist *vollständig*, wenn kein n -Typ q von \mathfrak{A} über B existiert, mit $p \subsetneq q$.
5. Der *Stone-Raum* $S^n(B)$ ist die Menge der vollständigen n -Typen über B .

Zwei Beispiele sollen dies verdeutlichen. Es sei $\mathfrak{A} = (\omega, s, 0)$, wobei $s(n) := n+1$ die Sukzessor-Funktion ist. Dann ist $S^1(\emptyset) \supseteq \{p_0, p_1, \dots\} \cup \{p_\infty\}$, mit

- $p_n := tp(n/\emptyset) \models x = \underbrace{ss \cdots s}_{n\text{-mal}} 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
- $p_\infty \models \{x \neq \underbrace{ss \cdots s}_{n\text{-mal}} 0 : n \in \omega\}$.

Es lässt sich feststellen, dass p_∞ nicht in \mathfrak{A} realisiert ist. Die Menge $\{x \neq \underbrace{ss \cdots s}_{n\text{-mal}} 0 : n \in \omega\} \cup Th(\omega, s, 0)$ ist aber dennoch erfüllbar. Dies lässt sich mithilfe des Kompaktheitssatzes zeigen. Offensichtlich ist jede endliche Teilmenge erfüllbar, demnach also auch die gesamte Menge.

Als zweites Beispiel soll $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ für ein festes, aber beliebiges $A \subseteq \mathbb{Q}$ betrachtet werden. Nun gibt es für ein festes $a \in A$ folgende Typen:

$$(a) \quad p \models x = a.$$

$(a^+) \quad p \models x > b$ für alle $A \ni b \leq a$ und $p \models x < b$ für alle $A \ni b > a$. Die erste Folgerung besagt, dass x größer als alle $b \in A$ ist, welche kleiner-gleich a sind. Insbesondere ist x also größer als a . Die Zweite Formel besagt, dass x kleiner als das nächste $b \in A$ ist, welches größer als a ist. Wenn a' also die nach a nächste Zahl in A ist, ist $x \in (a, a')$. Bzw. x ist *direkt über* a .

(a^-) Dieser Typ besagt, dass x *direkt unter* a ist und lässt sich analog zu (a^+) darstellen.

Zusätzlich gibt es noch den Typen $(+\infty)$ mit $p \models x > a$ für alle $a \in A$, sowie den dazu analog definierten Typen $(-\infty)$.

Falls $A = A_0 \dot{\cup} A_1$ gilt, A_0 kein größtes, A_1 kein kleinstes Element hat und $a_0 < a_1$ für beliebige $a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$ gilt, dann existiert noch der Typ p mit $p \models x > a$ für $a \in A_0$ und $p \models x < a$ für $a \in A_1$.

Lemma 3.1.6: Sei \mathfrak{A}