

Mathematische Logik 2: Vorlesungsmitschrift

Theodor Tesla

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre	1
1.1 Mengen und Klassen	1
1.1.1 Axiomensysteme für die Mengenlehre	2
1.2 Stufen und Geschichten	3
1.3 Relationen und Funktionen	9

1 Mengenlehre

„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“
(David Hilbert, 1926)

1.1 Mengen und Klassen

Reine Mengen sind Kollektion an Objekten, die ebenfalls wieder Mengen sind, als Alternative lassen sich Mengen ausgehend von Urelementen definieren.

Wie führt die Mathematik Objekte ein?

- Explizite Konstruktion aus schon vorhandenen Objekten, bspw. Konstruktion der rationalen, reellen und komplexen Zahlen, ausgehend von den ganzen und natürlichen.
- Axiomatisches formulieren von gewünschten Eigenschaften der Objekte und betrachte alle Objekte, die die Eigenschaften erfüllen, bspw. Gruppen, Vektorräume, ...

Definition 1.1 (Mengen)

Intuitiv sind Mengen *Kollektionen von Objekten*, die selbst wieder Mengen sind.

$a \in b$: a ist ein Element in der Menge b .

$a \subseteq b$: Jedes Element von a ist auch in b .

Eine konstruktive Definition von aller Menge könnte wie folgt aussehen:

$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}$ usw. Problem: Wie sieht dieses *usw.* aus?

Mengen lassen sich auch als Bäume darstellen. Dies lässt sich in Abbildung 1 beispielhaft für die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ erkennen.

Definition 1.2 (Hereditär endliche Mengen)

Die *hereditär endlichen Mengen* (HF) bilden eine Miniaturversion der Mengenlehre. Es gilt $HF_0 \subset HF_1 \subset HF_2 \subset \dots$. Definiert sind diese Mengen induktiv als $HF_0 := \emptyset$ und $HF_{n+1} := \{x : x \subseteq HF_n\}$, so dass HF_{n+1} die Potenzmenge von HF_n ist.

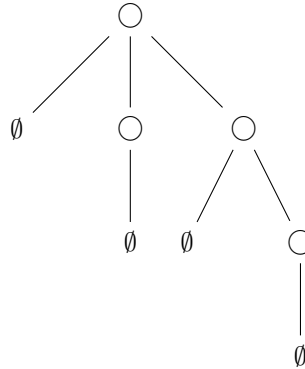


Abbildung 1: Darstellung der Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ als Baum

Eine Menge ist hereditär endlich, wenn sie Element einer Menge HF_n für ein n ist. Weiter wird $HF := \{x : x \in HF_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ definiert. Dies wirft folgende Frage auf: Ist HF eine Menge?

Die ersten HF Mengen lauten $HF_0 = \emptyset$, $HF_1 = \{\emptyset\}$, $HF_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $HF_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Es lässt sich erkennen, dass $HF_n \subset HF_{n+1}$ und $HF_n \in HF_{n+1}$ für ein beliebiges n . Auch ist es möglich zu folgern, dass HF_n endlich viele Elemente besitzt und jede Menge $a \in HF_{n+1}$ die Gestalt $a = \{b_0, \dots, b_{k-1}\}$ mit $b_0, \dots, b_{k-1} \in HF_n$. Außerdem gilt, dass HF nicht hereditär endlich ist.

Definition 1.3 (Natürliche Zahlen)

Eine *natürliche Zahl* n ist definiert als $[n] := \{[0], \dots, [n-1]\}$, wobei $[0] = \emptyset$ gilt. Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} lässt sich nun als $\mathbb{N} := \{[n] : n \text{ eine nat. Zahl}\} \notin HF$. Eine Folgerung ist $[n] \in HF_{n+1} \setminus HF_n$.

1.1.1 Axiomensysteme für die Mengenlehre

Das Modell der Mengenlehre besteht aus einer Kollektion \mathcal{S} von Objekten, die wir Mengen nennen und einer Beziehung \in zwischen diesen Objekten, so dass alle Axiome des Axiomensystems erfüllt werden.

Definition 1.4 (Extensionalitätsaxiom (Ext.))

Zwei Mengen sind gleich, genau dann, wenn sie die selben Elemente haben. In einer Prädikatenlogischen-Formel mit Signatur $\{\in\}$ wäre dies $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

Die *Konsistenz* des Axiomensystems der Mengenlehre beschreibt, ob es ein Modell des Axiomensystems gibt oder ob dieses widersprüchlich ist. Es ist nicht möglich, die Konsistenz unseres Axiomensystems zu beweisen.

Das Axiomensystem der Mengenlehre ist *Vollständig*, wenn alle Modelle „gleich“ sind, in dem Sinn, dass die gleichen Eigenschaften gelten. Es gibt kein vollständiges Axiomensystem für die Mengenlehre.

Nehmen wir an, dass (\mathcal{S}, \in) ein beliebiges, aber festes Modell der Mengenlehre ist. Die Axiome sollen regeln, welche Kollektionen von Elementen aus \mathcal{S} selbst wieder Elemente von \mathcal{S} , also

Mengen sind. Dabei werden Kollektionen *Klassen* genannt und Klassen, die keine Mengen sind, werden als *echte Klassen* bezeichnet.

Definition 1.5 (Die naive Mengenlehre)

Das Axiomensystem der naiven Mengenlehre besitzt zwei Axiome. Zum einen das Extensionalitätsaxiom (siehe Definition 1.4) und das Axiomenschema der vollen Komprehension. Dieses besagt, dass sich für jede Formel $\psi(x)$ die Menge $\{x : \psi(x)\}$ bilden lässt: $\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow \psi(x))$.

Satz 1.1 (Zermelo-Russel Paradoxon)

Die naive Mengenlehre ist inkonsistent.

Sei $\psi(x) := x \notin x$. Nach dem Komprehensionsschema muss nun folgende Formel gelten: $\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow x \notin x)$, aus welcher die Menge $z = \{x : x \notin x\}$ folgt. Eine solche Menge kann aber nicht existieren, da sonst $z \in z \leftrightarrow z \notin z$ gelten müsste. Es folgt, dass $\{x : x \notin x\}$ immer einer echten Klasse sein muss.

Definition 1.6 (Das Axiomensystem ZFC)

Das Axiomensystem ZFC (**Z**ermelo-**F**raenkel-**C**hoice) ist das heutzutage benutzte Axiomensystem. Es besitzt die folgenden Axiome:

- Das Extensionalitätsaxiom
- Das Aussonderungsaxiom: $\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \psi(x)))$. Dieses ist eine schwächere Version des Komprehensionsschemas, bei dem eine Menge aus bereits bestehenden Menge ausgewählt wird.
- Das Erzeugungsaxiom (Kreationsaxiom): Für jede Menge x ex. eine *Stufe* $s \in S$ mit $x \in s$.
- Das Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine *Limesstufe* und damit eine unendliche Menge.
- Das Ersetzungsaxiom: Für jede Funktion $F : S \rightarrow S$ mit der Eigenschaft, dass wenn $Def(F)$ eine Menge ist, ist auch $Bild(F)$ eine Menge.
- Das Auswahlaxiom: Auf jeder Menge ex. eine *Auswahlfunktion*

Definition 1.7 (Klassenoperatoren)

Seien A, B Klassen.

$A \subseteq B$: Jede Menge aus A ist auch in B .

$\bigcap A := \{x : x \in y \text{ für alle } y \in A\}$

$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ aber } x \notin B\}$

Für eine Formel $\psi(x)$ kann $\{x : \psi(x)\}$ entweder eine Menge oder eine echte Klasse sein. Somit lässt sich das Aussonderungsaxiom umformulieren: Für jede Menge a und jede Klasse A ist $a \cap A$ eine Menge. Daraus folgt, dass auch $a \setminus A$ eine Menge sein muss, dass $\bigcap A$ eine Menge ist, falls A mindestens eine Menge enthält und, dass $\bigcap \emptyset = S$ keine Menge ist.

1.2 Stufen und Geschichten

Eine mögliche Methode zur Definition der gesamten Klasse aller Mengen ist es, die induktive Konstruktion der HF zu erweitern. So ist S dann die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Mengen S_α , welche wir die Stufen von S nennen. Es gilt $S_0 := \emptyset$ und für die bereits definierte Stufe S_α setzen wir $S_{\alpha+1} := \{x : x \in S_\alpha\}$.

Sobald eine unendliche Folge von solchen Stufen definiert wurde, lässt sich eine neue Stufe als Vereinigung aller bisherigen Stufen definieren.

$$\begin{aligned} S_0 &= HF_0 = \emptyset, S_1 = HF_1, \dots, S_n = HF_n \\ S_\omega &:= \bigcup_n S_n = \bigcup_n HF_n = HF \\ S_{\omega+1} &:= \{x : x \in S_\omega\}, \dots \\ S_{\omega+\omega} &:= \{x : x \in S_{\omega+n} \text{ für ein } n\} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Definition 1.8 (Die Akkumulation)

Sei A eine Klasse. Die *Akkumulation* von A ist $acc(A) := \{x : (\exists y \in A)x \in y \vee x \subset y\}$.

Da für eine Klasse A und ein Element $a \in A$ natürlich gilt, dass $a \subset a$, gilt auch $a \in acc(A)$ und somit $A \subseteq acc(A)$.

Definition 1.9 (Geschichten)

Eine *Geschichte* ist eine Klasse H , so dass für alle $a \in H$ gilt $acc(a \cap H) = a$.

Die Stufe mit Geschichte H ist $S := acc(H)$.

Beispiel 1.1 (Beispiele zu Geschichten und Stufen)

Im Folgenden soll für einige Mengen ihre Akkumulation gezeigt werden und bewiesen, dass es sich bei diesen auch um Geschichten handelt.

- $acc(\emptyset) = \emptyset$. \emptyset ist eine Geschichte und die Stufe mit Geschichte \emptyset ist \emptyset .
- $\{\emptyset\} = [1] = HF_1 = \{HF_0\}$: $acc(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$. $\{\emptyset\}$ ist auch eine Geschichte, denn für das einzige Element \emptyset gilt $acc(\emptyset \cap \{\emptyset\}) = acc(\emptyset) = \emptyset$. Die Stufe mit Geschichte $\{\emptyset\}$ ist $\{\emptyset\}$.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = [2] = HF_2 = \{HF_0, HF_1\}$: $acc(HF_2) = HF_2$. HF_2 ist eine Geschichte, denn $acc(\emptyset \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = acc(\emptyset) = \emptyset$ und $acc(\{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = acc(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$. Die Stufe mit Geschichte $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Dies wirft die Frage auf, ob es eine Verallgemeinerung gibt. Demnach soll nun überprüft werden, ob $[n]$ eine Geschichte ist, für jedes n in den natürlichen Zahlen. Für $k < n$ müsste gelten, dass $acc([n] \cap [k]) = acc([k]) \stackrel{!}{=} [k]$. Aber $acc([k])$ enthält alle Teilmengen von $[k-1]$, für $k = 4$ also alle Teilmengen von $\{[0], [1], [2]\}$, demnach auch $\{[0], [2]\}$. Es gilt aber, dass $\{[0], [2]\} \notin [4]$ und es folgt $acc([4]) \neq [4]$. Für $n \geq 3$ ist n also keine Geschichte.

Ist HF_n eine Geschichte? Nein, denn $[n-1] \in HF_n$ und $acc([n-1] \cap HF_n) = acc([n-1]) \neq [n-1]$.

Aber $G_n := \{HF_0, \dots, HF_{n-1}\}$ ist eine Geschichte mit Stufe HF_n . Für $n = 0, 1, 2$ wurde dies schon in Beispiel 1.1 gezeigt. Sei dies für G_n bereits bewiesen, wir zeigen dies nun für $G_{n+1} = G_n \cup \{HF_n\}$. G_{n+1} ist eine Geschichte, wenn für alle $k \leq n$ gilt: $acc(HF_k \cap G_{n+1}) = HF_k$. $HF_k \cap G_{n+1} = \{HF_0, \dots, HF_{k-1}\} = G_k$ und per Induktionsvoraussetzung gilt $acc(G_k) = HF_k$.

Also ist G_{n+1} eine Geschichte. Die Stufe mit Geschichte G_{n+1} ist $acc(G_{n+1}) = acc(G_n \cup \{HF_n\}) = acc(GF_n) \cup HF_n \cup \{x : x \subseteq HF_n\} = HF_n \cup HF_n \cup HF_{n+1} = HF_{n+1}$.

Dies gibt die Idee für die Rückrichtung: Für jede Stufe S_α soll gelten, dass sie die Geschichte $H(S_\alpha) = \{S_\beta : \beta < \alpha\}$ hat.

Definition 1.10 (Minimales Element)

Eine Menge $m \in A$ ist ein *minimales Element* von A , wenn $m \cap A = \emptyset$, d.h. es gibt kein $a \in A$ mit $a \in m \in A$.

Eine Menge a ist fundiert, wenn jede Menge b mit $a \in b$ ein minimales Element enthält. Der fundierte Teil von A ist $fd(A) := \{x \in A : x \text{ ist fundiert}\}$.

Beispiel 1.2 (Beispiele für minimale Elemente und Fundiertheit)

\emptyset ist fundiert.

$\{\emptyset\}$ ist ebenfalls fundiert. Sei $\{\emptyset\} \in b$. Wenn $\{\emptyset\} \cap b = \emptyset$ ist $\{\emptyset\}$ das minimale Element. Andernfalls ist $\{\emptyset\} \cap b = \{\emptyset\}$ und \emptyset ist das minimale Element von b .

Satz 1.2

Wenn H eine Geschichte ist, dann enthält jede nicht-leere Teilmenge von H ein minimales Element

Beweis. Es sei $a \in b \subset H$ und $c = \{fd(x) : x \in a \cap b\} = \{y : y = fd(x) \text{ für } x \in a \cap b\}$. Wenn $c = \emptyset$, dann ist $a \cap b = \emptyset$ und a ist das minimale Element von b . Sei $c \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen, dass $c \subseteq fd(a)$.

Lemma 1.1: Sei H eine Geschichte, mit $a, b \in H$ und $a \in b$. Dann muss $fd(a) \in fd(b)$ gelten. Ansonsten wäre $fd(a) \in acc(b \cap H) = b$, da $fd(a) \subseteq a \in b \cap H$. Also gilt mit der Voraussetzung $fd(a) \in b \setminus fd(b)$. Demnach ex. eine Menge x mit $fd(a) \in x$ ohne minimale Elemente. Speziell ist $fd(a)$ kein minimales Element von x , d. h. $fd(a) \cap x \neq \emptyset$. Sei $y \in fd(a) \cap x$. Da $y \in fd(a)$ ist y fundiert. Da $y \in x$ hat x ein minimales Element. Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage, dass $fd(a) \in b \setminus fd(b)$, es muss also $fd(a) \in fd(b)$ gelten.

Sei $y \in c$. Dann ist $y = fd(x)$ für ein $x \in a \cap b$. Aus dem Lemma folgt, dass $y \in fd(a)$. Also $c \subseteq fd(a)$.

Wenn $y \in c \subseteq fd(a)$, dann ist y fundiert und c hat ein minimales Element z . Nach der Definition von c ist dann $z = fd(x)$ für ein $x \in a \cap b$.

Behauptung: x ist das minimale Element von b . Wenn nicht, dann existiert ein $u \in x \cap b$. Da $u \in x \in a \cap b \subseteq a \cap H$ und $a \in H$ ist auch u in $acc(a \cap H) = a$. Also $u \in a \cap b$ und daher $fd(u) \in c = \{fd(x) : x \in a \cap b\}$. Aus dem Lemma folgt $fd(u) \in fd(x)$, da $u \in b \subseteq H$ und $x \in b \subseteq H$. Also $fd(u) \in fd(x) \cap c \neq \emptyset$. Also ist $z = fd(x)$ nicht minimales Element von c . Dies ist ein Widerspruch. \square

Satz 1.3

Sei H eine Geschichte. Jedes Element $a \in H$ ist eine Stufe mit Geschichte $H \cap a$.

a). Da H eine Geschichte ist, gilt $a = acc(H \cap a)$. Wenn $H \cap a$ eine Geschichte ist, dann ist a die zugehörige Stufe. Sei $b \in H \cap a$. Dann $b \subseteq a$, da $c \in b \in H \cap a \Rightarrow c \in acc(H \cap a) = a$ und also $H \cap b = (H \cap a) \cap b$. Da $b \in H$ gilt, dass $b = acc(H \cap b) = acc((H \cap a) \cap b)$. Also ist $H \cap a$ eine Geschichte. \square

Definition 1.11 (Transitive und Erbliche Klassen)

Eine Klasse ist

- *transitiv*, wenn für alle $a \in b \in A$ auch $a \in A$ gilt, also jedes Element von A ist auch Teilmenge von A .
- *erblich*, wenn für alle $a \subset b \in A$ auch $a \in A$ gilt.

Satz 1.4

Sei S eine Stufe mit Geschichte H .

- a) S ist erblich und transitiv.
- b) $S = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$
- c) $H(S) := \{s \in S : s \text{ ist Stufe}\}$ ist eine Geschichte von S .

Beweis. a) Sei $b \in S = \text{acc}(H)$, es ist zu zeigen, dass $a \in b \Rightarrow a \in S$ und $a \subseteq b \Rightarrow a \in S$. Sei $c = \{s \in H : b \in s \vee b \subseteq s\} \subseteq H$. Da $b \in \text{acc}(H)$ ist $c \neq \emptyset$ und daher existiert ein $s \in c$ mit $s \cap c = \emptyset$. Nach Definition von c gilt $b \in s$ oder $b \subseteq s$.

Behauptung: $b \notin s$, da sonst $b \in s = \text{acc}(H \cap s)$, also ex. $z \in H \cap s$ mit $b \subseteq z$ oder $b \in z$. Dann ist aber $z \in c \cap s \neq \emptyset$, also ein Widerspruch. Es muss also $b \subseteq s$ gelten.

- $a \in b \Rightarrow a \in b \subset s = \text{acc}(H \cap s) \subset (H) = S \Rightarrow a \in S$
- $a \subseteq b \Rightarrow a \subseteq b \subseteq s \in H \Rightarrow a \in \text{acc}(H) = S$

b) „ \supseteq “: $a \subseteq s \in S \xRightarrow{a)} a \in S$

„ \subseteq “: Sei $a \in S = \text{acc}(H)$. Es gilt $s \in H$ mit $a \in s$ oder $a \subseteq s$. Nach dem Satz 1.3 ist s eine Stufe mit Geschichte $H \cap s$ und daher erblich und transitiv (nach a)). Wenn $a \in s$, dann $a \subseteq s$. Also $a \subseteq s \in H \subseteq S$ und daher $a \in \{x : x \subseteq s \text{ für ein } s \in S\}$.

c) $\text{acc}(H(S)) = \{x : (\exists s \in H(S)) x \in s \vee x \subseteq s\} = \{x : (\exists s \in S) s \text{ ist Stufe, } x \subseteq s \in\} \stackrel{b)}{=} S$. $H(S)$ ist eine Geschichte. $H(S) \cap s = \{s \in S \cap s : x \text{ Stufe}\} = \{x \in s : x \text{ Stufe}\}$. Dann $\text{acc}(H(S) \cap s) = \{y : (\exists s' \in s) s' \text{ ist Stufe, } y \subseteq s'\} \stackrel{b)}{=} S$ □

Aus diesen Sätzen folgt, dass für die Geschichte H einer Stufe S gilt, dass $H \subset H(S)$. Sei $a \in H$. Es folgt $a \in S = \text{acc}(H)$ und a ist eine Stufe mit Geschichte $H \cap a$, also $a \in H(S)$,

Satz 1.5

Jede nicht-leere Klasse A von Stufen hat ein minimales Element $s_0(A)$.

Beweis. Sei $A \subset \{s : s \text{ ist eine Stufe}\}$, so dass kein $s \in s_0(A) \cap A$ existiert. Sei $s \in A$ und $x := s \cap A$. Wenn $x = \emptyset$, dann $s_0(A) = s$. Andernfalls ist $x \subseteq \{t \in s : t \text{ ist eine Stufe}\}$ eine nicht-leere Teilmenge einer Geschichte und hat daher ein minimales Element $m \in x$, so dass gilt $m \cap x = \emptyset$. Setze $s_0(A) = m$, es folgt $s_0(A) \cap A = \emptyset$. Wäre nämlich $t \in s_0(A) \cap A = m \cap A$, da $t \in m \in x \subset s$, also $t \in s$, da m transitiv ist, also $t \in x$. Es würde also ein $t \in m \cap x$ existieren. Widerspruch! □

Satz 1.6

Seien S, T Stufen, welche auch Mengen sind. Dann gilt entweder $S \in T$, $S = T$ oder $T \in S$.

Beweis. Wenn nicht, dann ist die Klasse $A := \{s : s \text{ ist Stufe und es gibt eine Stufe } t \text{ mit } s \notin t, s \neq t \text{ und } t \notin s\}$ nicht leer und enthält ein minimales Element $s_0 = s_0(A)$. Die Klasse $B := \{t : t \text{ ist eine Stufe, so dass } s_0 \notin t, s_0 \neq t \text{ und } t \notin s_0\}$ muss dann ebenfalls ein minimales Element t_0 enthalten. Es gilt $s_0 \notin t_0, s_0 \neq t_0$ und $t_0 \notin s_0$. Sei $s \in s_0$. Dann ist $s \neq t_0$, da sonst $t_0 \in s_0$. Zweitens ist $t_0 \notin s$, da sonst $t_0 \in s \notin s_0$ und damit $t_0 \in s_0$. Wenn auch noch $s \notin t_0$ gelten würde, dann wäre $s \in A$ im Widerspruch zur Minimalität von s_0 . Also muss $s \in t_0$. Aber damit ist gezeigt, dass $s_0 \subseteq t_0$. Analog lässt sich zeigen, dass $t_0 \subseteq s_0$ sein muss. Also $s_0 = t_0$. Widerspruch! □

Aus dieser wichtigen Eigenschaft lassen sich einige Folgerungen feststellen. Seien S, T Stufen aus S .

- a) $S \notin S$
- b) $S \subseteq T \Leftrightarrow S = T$ oder $S \in T$
- c) $S \subseteq$ oder $T \subset S$
- d) $S \subsetneq T \Leftrightarrow S \in T$

Beweis. a) Wäre $S \in S$, wäre $A = \{s : s \text{ ist Stufe}, s \in S\}$ eine nicht-leere Klasse an Stufen, mit minimalem Element s_0 , das heißt $s_0 \cap A = \emptyset$. Aber $s_0 \in A$, wonach $s_0 \in s_0$, was zur Folge hat, dass $s_0 \in s_0 \cap A \neq \emptyset$. Widerspruch!

b) „ \Leftarrow “: Wenn $S = T$, dann ist offensichtlich $S \subseteq T$ und wenn $S \in T$, dann gilt wegen der Transitivität auch $S \subseteq T$.

„ \Rightarrow “: Wenn $S \neq T$ und $S \notin T$, dann muss $T \in S$ gelten, wenn nun aber $S \subseteq T$, dann ist $T \in S \subseteq T$, was ein Widerspruch zu Teil a) ist.

c) Wenn $S \not\subseteq T$, dann muss wegen b) $S \notin T$ und $S \neq T$ gelten. Also ist $T \in S$ und daher auch $T \subseteq S$.

d) $S \subsetneq T \Leftrightarrow S \subseteq T \wedge S \neq T \Rightarrow S \in T$ □

Statt $S \in T$, bzw. $S \subsetneq T$ schreibt man oft $S < T$. Die so erzeugte lineare Ordnung von Stufen bezeichnet man als *kumulative Hierarchie* und ist die durch \in linear geordnete Kollektion aller Stufen.

Das *Kreationsaxiom* besagt, dass zu jeder Menge a eine Menge s existiert, welche eine Stufe ist, mit $a \in s$. Aus diesem folgt, dass es zu jeder Stufe s eine höhere Stufe t mit $s \in t$ gibt, welche ebenfalls eine Stufe ist. Es lässt sich dadurch auch erkennen, dass \mathcal{S} die Vereinigung aller Stufen ist. Wenn wir zudem akzeptieren, dass \emptyset eine Menge ist, also $\mathcal{S} \neq \emptyset$, dann folgt, dass $HF \subset \mathcal{S}$ und, dass \mathcal{S} selbst wieder eine Stufe mit der Geschichte $H(\mathcal{S}) = \{s : s \text{ ist eine Stufe}\}$ ist.

Definition 1.12 (Nachfolgerstufe)

Eine Stufe T ist die *Nachfolgerstufe* zur Stufe S , wenn $S \in T$ und keine Stufe T' existiert, mit $S \in T' \in T$.

Definition 1.13 (Limesstufe)

Eine Stufe $S \neq \emptyset$ ist eine *Limesstufe*, wenn sie keine Nachfolgerstufe ist.

Definition 1.14

Für jede Klasse A ist $S(A)$ die kleinste Stufe mit $A \subseteq S$. Dies ist wohldefiniert, da jede nicht-leere Klasse von Stufen ein minimales Element besitzt. Es gilt $S(s) = s$ für jede Stufe s .

Es gilt, dass HF_{n+1} die Nachfolgerstufe von HF_n ist.

Aus dem *Aussonderungsaxiom* lassen sich weitere praktische Eigenschaften folgern. Sei a eine Menge. Es lassen sich nun Elemente aussondern, so dass man die Mengen $\{a\}$, $acc(a)$ und $\bigcup a := \{b : b \in x \text{ für ein } x \in a\}$ bilden kann.

Für eine Stufe s mit $a \in s \in \mathcal{S}$ gilt:

- $\{a\} = \{x \in s : x = a\}$
- $\{acc(a)\} = \{x \in s : (\exists b \in a) x \in b \vee x \subseteq b\}$
- $\bigcup a = \{b \in s : (\exists x \in a) b \in x\}$

Sei nun A eine Klasse. Dann ist $S(A)$ die kleinste Stufe, so dass $A \subseteq S(A)$. Es lässt sich daraus auch leicht erkennen, dass für jede Stufe s gilt $S(s) = s$.

Lemma 1.2: Wenn $a \in b$, dann $S(a) \in S(b)$.

Beweis. Da $a \in b \subseteq S(b) = acc(H(S(b)))$ ex. $s \in S(b)$ mit $a \in s$ (und durch die Transitivität $a \subseteq s$), also ist $S(a) \subseteq s$ und daher $S(a) \subseteq s \in S(b)$ und da $S(b)$ erblich ist, folgt $S(a) \in S(b)$. □

Lemma 1.3: \mathcal{S} ist die einzige Stufe, welche eine echte Klasse ist.

Beweis. Sei S eine Stufe, $S \neq \mathcal{S}$. Also ex. $a \in \mathcal{S} \setminus S$. Es folgt, dass $S(a) \notin S$, da sonst $a \subseteq S(a) \in S$ und daher $a \in S$. Für Stufen $T \supseteq S(a)$ gilt daher $T \notin H(S) = \{s \in \mathcal{S} : s \text{ ist Stufe}\}$. Also $H(S) \subseteq \{T : T \text{ ist Stufe}, T \in S(a)\}$. Da $S(a)$ und $H(S(a))$ mengen sind, ist auch $H(S)$ eine Menge und damit auch $S = \text{acc}(H(S))$. \square

Daraus lässt sich folgern, dass die folgenden Aussagen für eine Klasse A äquivalent sind:

1. A ist eine echte Klasse.
2. $S(A)$ ist eine echte Klasse.
3. $S(A) = \mathcal{S}$.

Beweis. $3. \Rightarrow 1.$: Wenn A eine Menge ist, ist auch $S(A)$ eine Menge. Nach Kontraposition gilt die Folgerung.

$1. \Rightarrow 2.$: Wenn $S(A)$ eine Menge ist, ist auch $A = A \cap S(A)$ eine Menge. Nach Kontraposition gilt die Folgerung.

$2. \Rightarrow 3.$: Dies wurde in Lemma 1.3 bewiesen. \square

Satz 1.7

Für jede Menge a gilt $a \notin a$.

Beweis. Es gelte $a \in a$. Dann $a \in a \subseteq S(a)$. $S(a) = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S(a)\}$, also existiert $s \in S(a)$ mit $a \subseteq s$. $S(a)$ ist aber die minimale Stufe, die a als Teilmenge enthält. Widerspruch! \square

Durch diesen Satz ist die Fundiertheit der Mengenlehre bewiesen.

Satz 1.8

Jede nicht-leere Klasse enthält ein minimales Element.

Beweis. Sei A eine nicht-leere Klasse. $B = \{S(b) : b \in A\}$ ist die nicht-leere Klasse der Stufen in A und hat ein minimales Element $s_0 = S(b_0)$. D.h. $S(b_0) \cap B = \emptyset$. Behauptung: b_0 ist das minimale Element von A . Andernfalls ex. $b_1 \in b_0 \cap A$. Da $b_1 \in b_0$ ist auch $S(b_1) \in S(b_0)$. Da $b_1 \in A$ folgt $S(b_1) \in B$. Also $S(b_1) \in S(b_0) \cap B \neq \emptyset$. Widerspruch! \square

Lemma 1.4: Sei $S \in \mathcal{S}$ eine Stufe. Die Nachfolgerstufe von S ist $\mathcal{P}(S)$, wobei \mathcal{P} die Potenzfunktion ist.

Beweis. Es gibt eine minimale Stufe T mit $S \in T$. Nun ist zu zeigen, dass $\mathcal{P}(S) = T$.

Aus $a \subseteq S \in T$ folgt wegen der Erbllichkeit von T auch $a \in T$. Also $\mathcal{P}(S) \subseteq T$. Sei $s \in T$ eine Stufe. $S \notin s$, da T die Nachfolgerstufe von S ist. Also gilt $S = s$ oder $s \in S$ und $s \subseteq S$. Für alle Stufen s gilt $s \in T \Leftrightarrow s \subseteq S$. Nun gilt $T = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in T\} = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \subseteq S\} = \{x : x \subseteq S\} = \mathcal{P}(S)$ \square

Satz 1.9

Sei $S \neq \emptyset$ eine Stufe. Nun sind äquivalent:

1. S ist eine Limesstufe.
2. $S = \bigcup H(S)$.
3. Für alle $a \in S$ ex. eine Stufe $t \in S$ mit $a \in t$.
4. Wenn $a \in S$, dann $\mathcal{P}(a) \in S$.

5. Wenn $a \in S$, dann $\{a\} \in S$.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Es gilt $S = \{x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$ und $H(S) = \{s \in S : s \text{ ist eine Stufe}\}$. Wenn S eine Limesstufe ist, dann gilt für alle $s \in S$ auch $\mathcal{P}(s) \in S$. $\bigcup H(S) = \{x : x \in s \text{ für ein } s \in H(S)\} = \{x : x \in s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$ und da S eine Limesstufe gilt, dass dies gleich zu $\{s : s \in \mathcal{P}(s) \text{ für eine Stufe } s \in S\} = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\} = S$ ist.

2. \Rightarrow 1.: Sei $S = \mathcal{P}(\emptyset)$ für eine Vorgängerstufe T mit $H(S) = H(T) \cup \{T\}$. $\bigcup H(S) = \{x : x \in s \in S, s \text{ ist Stufe}\} = \{x : x \in T\} = T \neq S$. Widerspruch!

1. \Rightarrow 3.: Da $S = \{s : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$ folgt für $a \in S$, dass eine Stufe s existiert mit $a \subseteq s$, also $a \in \mathcal{P}(\emptyset) \in S$.

3. \Rightarrow 4.: Für $a \in S$ ex. eine Stufe $t \in T$ mit $a \in t$. Sei nun $x \in \mathcal{P}(a)$. Aus $x \subseteq a \in t$ folgt $x \in t$, das heißt $\mathcal{P}(a) \in S = \{x : x \subseteq s \text{ für eine Stufe } s \in S\}$.

4. \Rightarrow 5.: Wenn $a \in S$, dann $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(a) \in S$. Da S erblich ist, ist $\{a\} \in S$.

5. \Rightarrow 1.: Wenn S keine Limesstufe ist, also $S = \mathcal{P}(T)$, dann $T \in S$ und nach 5. $\{T\} \in S$. Da $S = \mathcal{P}(T)$ ist $\{T\} \subseteq T$, also $T \in T$. Widerspruch! \square

Definition 1.15 (*cut einer Klasse*)

Der *cut* einer Klasse A ist die Menge $\text{cut}(A) := \{x \in A : S(x) \subseteq S(y) \text{ für alle } y \in A\}$. In Worten enthält $\text{cut}(A)$ also die Menge von A mit minimaler Stufe. Es gilt $\text{cut}(\emptyset) = \emptyset$ und $\text{cut}(\{a\}) = \{a\}$. Für $a \in A$ ist $\text{cut}(A) \subseteq S(a)$.

Satz 1.10

Eine Stufe ist eine Limesstufe, genau dann, wenn $\text{cut}(a) \in S$ für alle $a \subseteq S$.

Beweis. \Rightarrow : Für $a = \emptyset$ ist $\text{cut}(a) = \emptyset \in S$. Sei $x \in a \subseteq S$. Dann ex. ein $s \in S$ mit $x \in s$ und $x \subseteq s$, also $\text{cut}(a) \subseteq s \in S$.

\Leftarrow : Sei $S = \emptyset$. Dann $\emptyset \subseteq S$, aber $\text{cut}(\emptyset) = \emptyset \notin S$. Sei $S = \mathcal{P}(T)$ eine Nachfolgerstufe. Dann ist $T \in S$, also $\{T\} \subseteq S$, aber $\text{cut}(\{T\}) = \{T\} \notin S$. Also muss S eine Limesstufe sein. \square

Nun wurden die ersten vier der sechs Axiome des Axiomensystems ZFC betrachtet. Das Aussonderungs-, Extensionalitäts-, Kurations- und Unendlichkeitsaxiom.

Mit den ersten dreien ist es noch möglich, dass $S = \emptyset$ oder $S = HF$ gilt. Durch das Unendlichkeitsaxiom, welches die Existenz einer Limesstufe fordert ist dies nicht mehr möglich. Benutzt man diese vier Axiome lässt sich also aussagen, dass $S \neq \emptyset$, die Mengen HF_n für beliebige n existieren und HF eine Menge ist.

Der bisherige Aufbau von S sieht also wie folgt aus: $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_\omega \subset S_{\omega+1} \subset S_{\omega+2} \subset \dots$. Wobei S_ω die kleinste Limesstufe ist. Weiter gilt dann auch, dass $S_{\omega+n+1} = \mathcal{P}(S_{\omega+n})$.

Nun stellt sich aber die Frage, wie es weiter geht. Ist $S_{\omega+\omega} := \{x : x \in S_{\omega+n} \text{ für ein } n\}$ eine Menge? Seien nun also (S, \in) und (S', \in) zwei Modelle der vier Axiome mit den Stufen $(S_\alpha)_{\alpha < \kappa}$, $(S'_\alpha)_{\alpha < \lambda}$. Es lässt sich einsehen, dass $\kappa, \lambda \geq \omega + \omega$ gilt und, dass $S_n = S'_n = HF_n$ für endliche n gelten muss.

1.3 Relationen und Funktionen

Sei (a, b) ein geordnetes Paar. Es ist bekannt, dass wenn $(a, b) = (a', b')$ gilt, auch $a = a'$ und $b = b'$ gelten muss.

Definition 1.16

Seien a, b Mengen. Nun wird das geordnete Paar $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ definiert. Für Klassen A, B gilt $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Lemma 1.5: Wenn $\{a, b\} = \{a, c\}$ gilt, muss $b = c$ folgen.

Beweis. $b \in \{a, b\} = \{a, c\}$. Also $b = a$ oder $b = c$. Wenn $b \neq c$, dann $b = a$ und $c \in \{a, c\} = \{a, b\} = \{a\}$. Also $c = a = b$. Widerspruch! \square

Lemma 1.6: Wenn $(a, b) = (c, d)$ muss $a = c$ und $b = d$ folgen.

Beweis. $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, das heißt $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c, d\}$. In beiden Fällen gilt aber $a = c$ und $\{a\} = \{c\}$. Nach Lemma 1.5 gilt wegen $\{a, b\} = \{c, d\}$ und $a = c$ auch $b = d$. \square

Weiter lässt sich $\langle A, B \rangle := (\{[0] \times A\}) \cup (\{[1]\} \times B)$ definieren.

Für Mengen a_0, \dots, a_n sei $() := \emptyset$, $(a_0) = a_0$ und $(a_0, \text{dots}, a_n) := ((a_0, \dots, a_{n-1}), a_n)$. Weiter ist $A^0 := \{()\}$, $A^1 := A$, $A^{n+1} := A^n \times A$.

Nun ist eine n -stellige Relation eine Klasse $R \subseteq \mathcal{S}^n$. Wenn $R \subseteq A^n$ für eine Klasse A ist, dann sagen wir zu R , dass sie eine n -stellige Relation über A ist.