

Formelsammlung Wärme- und Stoffübertragung

Version 6 ab WS 2014

vom 15. September 2014

1. Kennzahlen

Kennzahlen – Strömungsmechanik

$$\text{Gr}_L = \frac{\beta g \rho^2 |T_W - T_\infty| L^3}{\eta^2} \quad (\text{Grashof-Zahl})$$

$$\text{Re}_L = \frac{\rho u L}{\eta} \quad (\text{Reynolds-Zahl})$$

Kennzahlen – Wärmeübertragung

$$\text{Bi}_L = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (\text{Biot-Zahl})$$

$$\text{Fo} = \frac{at}{L^2} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{Fourier-Zahl})$$

$$\text{Nu}_L = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (\text{Nusselt-Zahl})$$

$$\text{Pr} = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (\text{Prandtl-Zahl})$$

$$\text{St}_L = \frac{\text{Nu}}{\text{Re}_L \text{Pr}} \quad (\text{Stanton-Zahl})$$

Kennzahlen – Stoffübertragung

$$\text{Le} = \frac{\lambda}{\rho D c_p} = \frac{a}{D} \quad (\text{Lewis-Zahl})$$

$$\text{Sc} = \frac{\eta}{\rho D} \quad (\text{Schmidt-Zahl})$$

$$\text{Sh}_L = \frac{gL}{\rho D} \quad (\text{Sherwood-Zahl})$$

2. Wärmestrahlung

$$\dot{q}_{\lambda s}'' = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp [c_2 / (\lambda T)] - 1} \quad (\text{Plancksches Verteilungsgesetz})$$

$$\dot{q}_s'' = \int_{\lambda=0}^{\infty} \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda = \sigma T^4 \quad (\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz})$$

$$\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m K} \quad (\text{Wiensches Verschiebungsgesetz})$$

mit den Konstanten

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (\text{Stefan-Boltzmann-Konstante})$$

$$c_1 = 3,741 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^2$$

$$c_2 = 1,439 \cdot 10^{-2} \text{ m K}$$

λT in $\mu\text{m K}$	1000,0	1250,0	1500,0	1750,0	2000,0	2500,0
$F(\lambda)$	0,00031	0,00308	0,01283	0,03363	0,06663	0,16115
λT in $\mu\text{m K}$	3000,0	3500,0	4000,0	5000,0	6000,0	8000,0
$F(\lambda)$	0,27322	0,38250	0,48085	0,63315	0,73715	0,85556

Verteilung der Schwarzkörperstrahlung mit $F(\lambda) = \int_0^\lambda \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda / \sigma T^4$

Eigenschaften strahlender Körper

- wellenlängenabhängig

$$\left. \begin{aligned} \rho(\lambda) &\equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\rho}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} \\ \alpha(\lambda) &\equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\alpha}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} \\ \tau(\lambda) &\equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\tau}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} \end{aligned} \right\} \text{ mit } \rho(\lambda) + \alpha(\lambda) + \tau(\lambda) = 1$$

hier: $\dot{q}_{\lambda o}''$ auftreffende spektrale Wärmestromdichte

$$\varepsilon(\lambda) \equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\varepsilon}''}{\dot{q}_{\lambda s}''}$$

$$\alpha(\lambda) = \varepsilon(\lambda) \quad (\text{Kirchhoffsches Gesetz})$$

- gemittelt

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \frac{\dot{q}_{\varepsilon}''}{\dot{q}_s''} \equiv \frac{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda\varepsilon}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda} & \alpha &\equiv \frac{\dot{q}_{\alpha}''}{\dot{q}_o''} \equiv \frac{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda\alpha}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda} \\ \rho &\equiv \frac{\dot{q}_{\rho}''}{\dot{q}_o''} \equiv \frac{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda\rho}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda} & \tau &\equiv \frac{\dot{q}_{\tau}''}{\dot{q}_o''} \equiv \frac{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda\tau}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda} \end{aligned}$$

- Sonderfälle

Strahlungseigenschaften wellenlängenunabhängig:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \varepsilon \quad (\text{grauer Körper})$$

$$\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \varepsilon = 1 \quad (\text{schwarzer Körper})$$

Strahlungseigenschaften wellenlängenabhängig:

$$\rho(\lambda) + \alpha(\lambda) = 1 \quad (\text{strahlungsundurchlässiger Festkörper})$$

$$\alpha(\lambda) + \tau(\lambda) = 1 \quad (\text{Gas})$$

Strahlungsaustausch

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = \dot{Q}_i \Phi_{ij} \quad (\text{Strahlungswärmestrom})$$

$$\dot{Q}_i = \dot{q}_i'' A_i = \dot{Q}_{i,s} \varepsilon_i + \underbrace{\sum_j \dot{Q}_{j \rightarrow i} \rho_i}_{\text{Reflexion}} + \underbrace{\sum_k \dot{Q}_{k \rightarrow i} \tau_i}_{\text{Transmission}} \quad (\text{Flächenhelligkeit})$$

$$\text{mit } \dot{Q}_{i,s} = \dot{q}_{i,s}'' A_i \quad (\text{Schwarzkörperstrahlung})$$

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos \varphi_i \cos \varphi_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (\text{Einstrahlzahl})$$

$$A_i \Phi_{ij} = A_j \Phi_{ji} \quad (\text{Reziprozitätsbeziehung})$$

$$\sum_j \Phi_{ij} = 1 \quad (\text{Summenbeziehung})$$

$$\dot{Q}_{i,\text{netto}} = \dot{Q}_i - \sum_j \dot{Q}_{j \rightarrow i} \quad (\text{Nettostrahlungswärmestrom})$$

$$\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} \quad (\text{Strahlungswärmeaustausch})$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} &= A_1 \Phi_{12} \sigma [(T_1)^4 - (T_2)^4] \\ &= A_2 \Phi_{21} \sigma [(T_1)^4 - (T_2)^4] \end{aligned} \quad (\text{zwischen zwei Schwarzkörpern})$$

$$\dot{q}_{1 \rightleftharpoons 2}'' = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{zwischen zwei grauen Platten})$$

- Platten eben, parallel und unendlich groß

$$\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = \frac{A_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{zwischen zwei grauen Körpern})$$

- Körper 2 umschließt Körper 1 ($A_2 > A_1$)
- Körper 1 konvex ($\Phi_{11} = 0$)

Einstrahlzahlen einfacher Geometrien

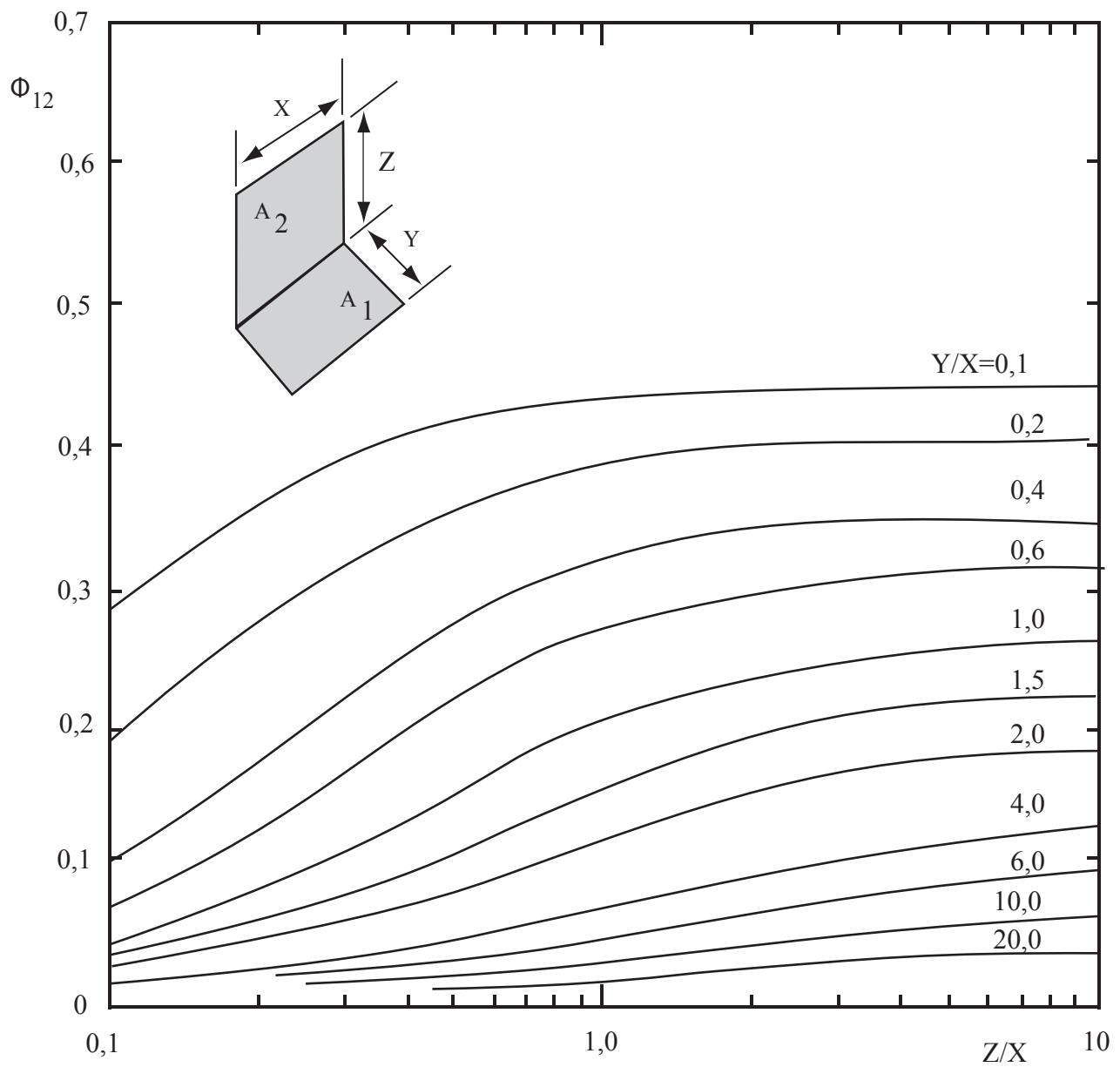


Diagramm 1: Einstrahlzahlen zwischen senkrechten Platten

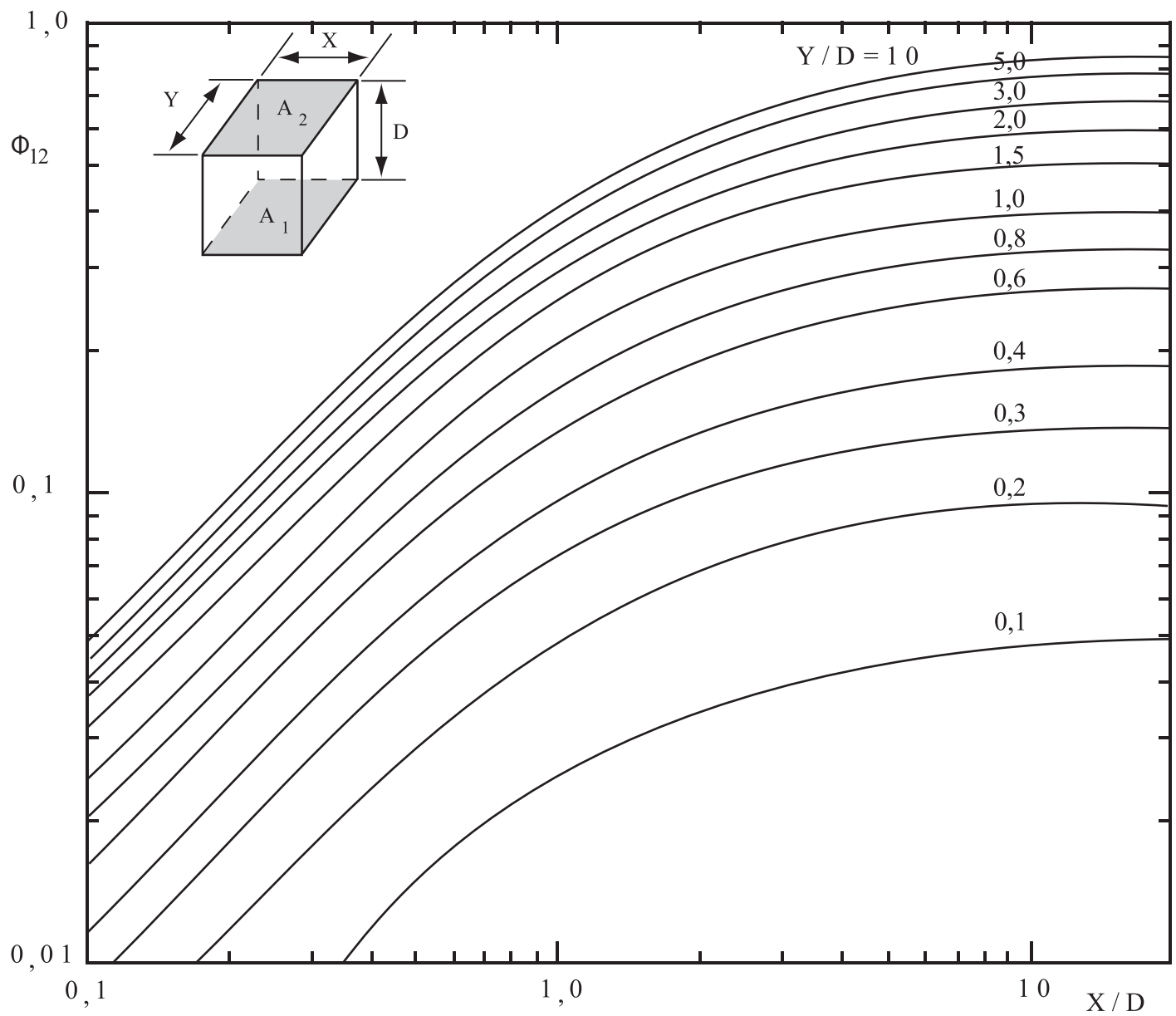


Diagramm 2: Einstrahlzahlen zwischen parallelen Platten

3. Wärmeleitung

$$\dot{q}'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{Fouriersches Gesetz})$$

Wärmetransportgleichung

- Karthesische Koordinaten

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \dot{\Phi}'''$$

- Zylinderkoordinaten

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \dot{\Phi}'''$$

- Kugelkoordinaten

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right) \right] + \dot{\Phi}'''$$

Stationäre Wärmeleitung in Wänden ohne Wärmequellen

$$W = \frac{T_A - T_B}{\dot{Q}} \quad \text{mit} \quad W = \sum_i W_i \quad (\text{Wärmewiderstand})$$

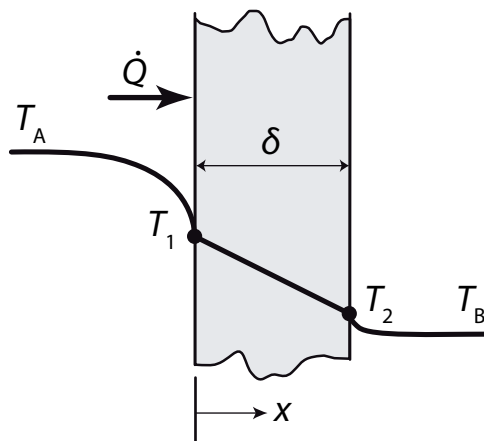
- Ebene Wand

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{mit RB} \quad \begin{aligned} T(x=0) &= T_1 \\ T(x=\delta) &= T_2 \end{aligned}$$

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\delta} x \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\delta} \quad (\text{Wärmestrom})$$

$$W = \frac{\delta}{\lambda A} \quad (\text{Wärmewiderstand})$$



- Ebene Wand aus n Schichten

$$\dot{Q} = \lambda_1 \frac{A}{\delta_1} (T_1 - T_2) = \lambda_2 \frac{A}{\delta_2} (T_2 - T_3) = \dots = \lambda_n \frac{A}{\delta_n} (T_n - T_{n+1})$$

$$\dot{Q} = \frac{A}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} (T_1 - T_{n+1}) \quad (\text{ohne konv. Wärmeübergang})$$

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha_A} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_B}} (T_A - T_B) \quad (\text{mit konv. Wärmeübergang})$$

- Rohrwand

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{mit RB} \quad \begin{aligned} T(r = r_1) &= T_1 \\ T(r = r_2) &= T_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= T_1 + \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \\ &= T_2 + \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \end{aligned} \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

$$\dot{Q} = 2\pi\lambda L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{Wärmestrom})$$

$$W = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{mit } r_2 > r_1 \quad (\text{Wärmewiderstand})$$

- Rohrwand aus n Schichten

$$\dot{Q} = 2\pi r L \left(-\lambda_i \frac{dT}{dr} \right) = \text{konst.}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\frac{1}{2\pi L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad (\text{ohne konv. Wärmeübergang})$$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\alpha_A r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{\alpha_B r_{n+1}}} (T_A - T_B) \quad (\text{mit konv. Wärmeübergang})$$

Rippen

$$\theta = T - T_u \quad (\text{Übertemperatur})$$

$$\eta_R = \frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\dot{Q}_R}{A_0 \alpha \theta_F} = \frac{\text{übertragene Wärme}}{\text{max. übertragbare Wärme}} \quad (\text{Rippenwirkungsgrad})$$

hier: A_0 wärmeübertragende Fläche

θ_F Fußtemperatur

Stabrippen und ebene Rippen

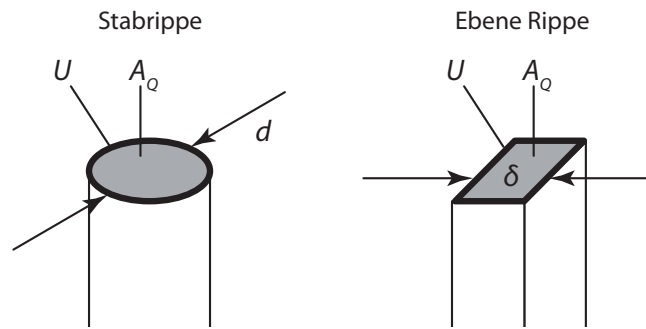
$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \underbrace{\frac{\alpha U}{\lambda A_Q}}_{=m^2} \theta = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \text{RB1:} & \theta(x=0) = \theta_F \\ \text{RB2:} & \text{verschieden, s.u.} \end{array} \quad (\text{Rippen-DGL})$$

$$\theta(x) = A \cosh(mx) + B \sinh(mx) \quad (\text{Lösungsansatz})$$

$$\dots = C \exp(mx) + D \exp(-mx)$$

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_Q}} = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda d}} \quad (\text{Stabrippe})$$

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_Q}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}} \quad (\text{ebene Rippe})$$



Randbedingung 2:

- Rippen mit adiabatem Rippenkopf:

$$\text{RB2:} \quad -\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\theta = \theta_F \frac{\cosh [m (L - x)]}{\cosh [mL]} \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

$$\dot{Q} = \lambda A_Q m \theta_F \tanh (mL) \quad (\text{übertragener Wärmestrom})$$

$$\eta = \frac{\tanh (mL)}{mL} \quad (\text{Rippenwirkungsgrad})$$

- Rippen mit Umgebungstemperatur am Rippenkopf (lange Rippen):

$$\text{RB2:} \quad \theta(x = L) = 0$$

- Rippen mit Wärmeübergang am Rippenkopf:

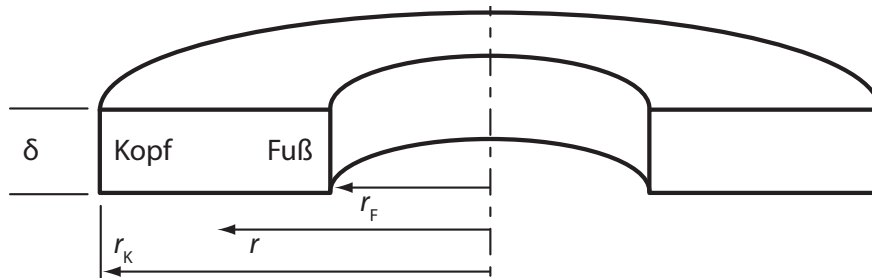
$$\text{RB2:} \quad -\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = \alpha \theta(x = L)$$

Kreisrippen mit adiabatem Rippenkopf*

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) - \frac{2\alpha}{\lambda \delta} \theta = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \text{RB1:} & \theta(r = r_F) = \theta_F \\ \text{RB2:} & -\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{r=r_K} = 0 \end{array} \quad (\text{Besselsche DGL})$$

$$\theta(r) = A I_0(mr) + B K_0(mr) \quad (\text{Lösungsansatz})$$

$$\text{mit } m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}}$$



$$\theta(r) = \theta_F \frac{I_0(mr) K_1(mr_K) + I_1(mr_K) K_0(mr)}{I_0(mr_F) K_1(mr_K) + I_1(mr_K) K_0(mr_F)} \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

$$\dot{Q} = 2\pi r_F \lambda \delta m \theta_F \dots \quad (\text{übertragener Wärmestrom})$$

$$\dots \frac{I_1(mr_K) K_1(mr_F) - I_1(mr_F) K_1(mr_K)}{I_0(mr_F) K_1(mr_K) + I_1(mr_K) K_0(mr_F)}$$

$$\eta_R = \frac{2}{mr_F \left[\left(\frac{r_K}{r_F} \right)^2 - 1 \right]} \dots \quad (\text{Rippenwirkungsgrad})$$

$$\dots \frac{I_1(mr_K) K_1(mr_F) - I_1(mr_F) K_1(mr_K)}{I_0(mr_F) K_1(mr_K) + I_1(mr_K) K_0(mr_F)}$$

$$\approx \frac{\tanh(mr_F \phi)}{mr_F \phi} \quad \text{mit} \quad \phi = \left(\frac{r_K}{r_F} - 1 \right) \left(1 + 0,35 \ln \frac{r_K}{r_F} \right)$$

Ausgewertete Bessel-Funktionen I_0 , I_1 , K_0 und $K_1 \rightarrow$ Tabelle 9

Eindimensionale instationäre Wärmeleitung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{DGL})$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad \theta^* = \frac{T - T_0}{T_u - T_0}$$

- Halbunendliche Platte, Wärmeübergangswiderstand vernachlässigbar:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha L}{\lambda} \gg 1$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ 0 < x < \infty \end{array} \right\} \quad T = T_0 \quad \theta^* = 0 \quad (\text{AB})$$

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \quad T = T_u \quad \theta^* = 1 \quad (\text{RB1})$$

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad T = T_0 \quad \theta^* = 0 \quad (\text{RB2})$$

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_u - T_0} = 1 - \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \text{Fo}}} \right) \quad \text{mit} \quad \text{Fo} = \frac{at}{x^2} \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

$$\dot{q}''|_{x=0} = \sqrt{\frac{\lambda c \rho}{\pi t}} (T_u - T_0) \quad (\text{Wärmestromdichte})$$

$$\delta(t) \approx 3,6 \sqrt{at} \quad (\text{Eindringtiefe})$$

- Halbunendliche Platte, Wärmeübergangswiderstand **nicht** vernachlässigbar:

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \quad \alpha (T_u - T(x=0)) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (\text{RB1})$$

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_u - T_0} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{Fo}}} \right) \cdots \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

$$\cdots - [\exp(\operatorname{Bi}_x + \operatorname{Fo} \operatorname{Bi}_x^2)] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{Fo}}} + \sqrt{\operatorname{Fo}} \operatorname{Bi}_x \right) \right]$$

$$\text{mit } \operatorname{Bi}_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$$

$$\operatorname{Fo} = \frac{a t}{x^2}$$

- Halbunendliche Platte, periodisch veränderliche Oberflächentemperatur: *

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \quad T(x=0) = T_m + (T_{\max} - T_m) \cos(2\pi t/\tau) \quad (\text{RB1})$$

$$\theta^* = \frac{T - T_m}{T_{\max} - T_m} = \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi x^2}{a\tau}} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t - \sqrt{\frac{\pi x^2}{a\tau}} \right) \quad (\text{Temperaturverlauf})$$

Eindimensionale instationäre Wärmeleitung in einfachen Körpern

$$\frac{T_m - T_u}{T_0 - T_u} \quad (\text{dimensionslose Temperatur in der Körpermitte})$$

$$\frac{T - T_u}{T_m - T_u} \quad (\text{dimensionslose Temperatur an der Stelle } x \text{ o. } r)$$

$$\frac{Q}{Q_0} \quad \text{mit} \quad Q_0 = m c (T_0 - T_u) \quad (\text{dimensionsloser Wärmeverlust})$$

Bestimmung des instationären Temperaturverlaufs und Wärmestroms

→ Diagramme 3 – 11

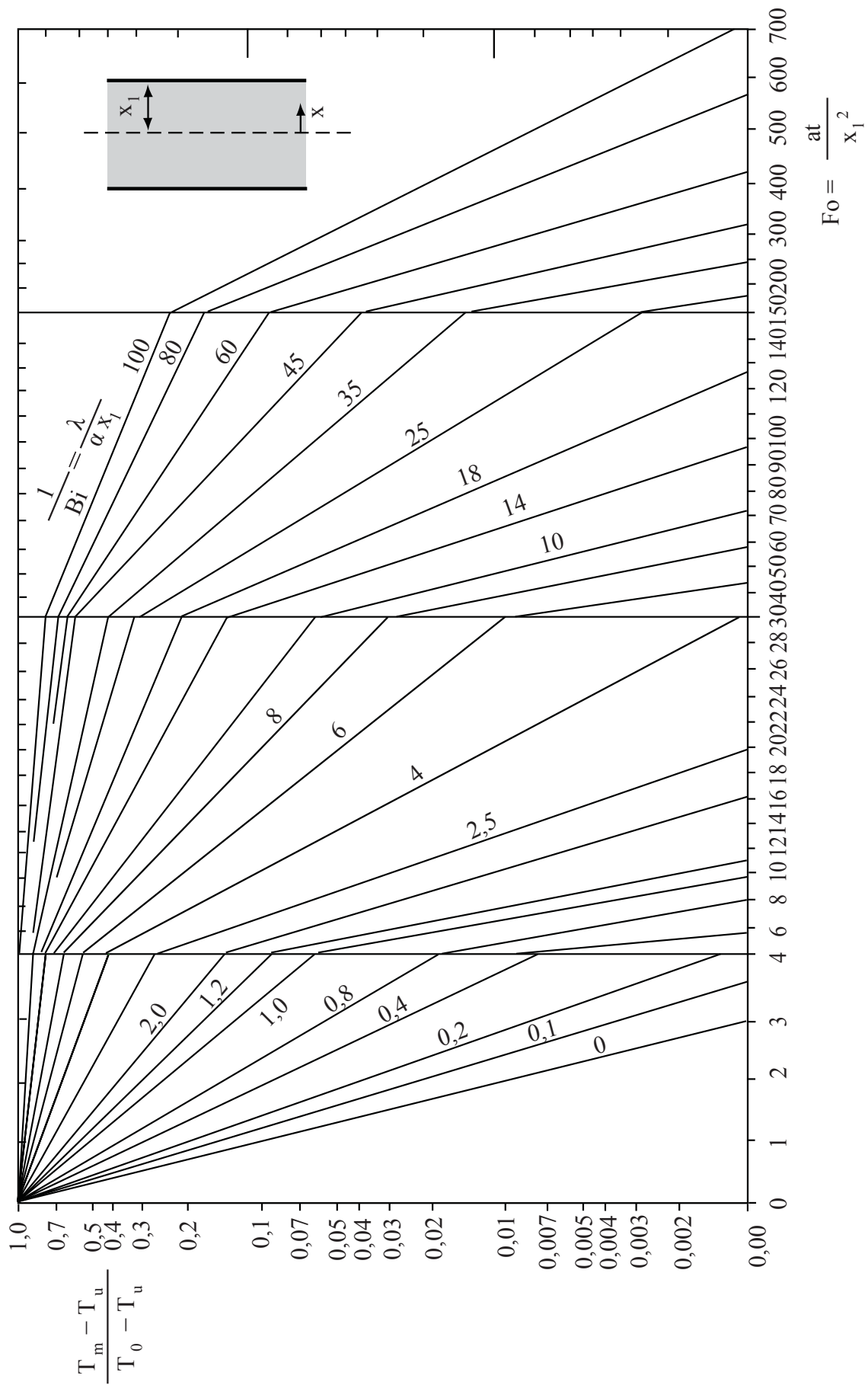


Diagramm 3: Temperatur in der Mitte einer Platte der Dicke $2x_1$

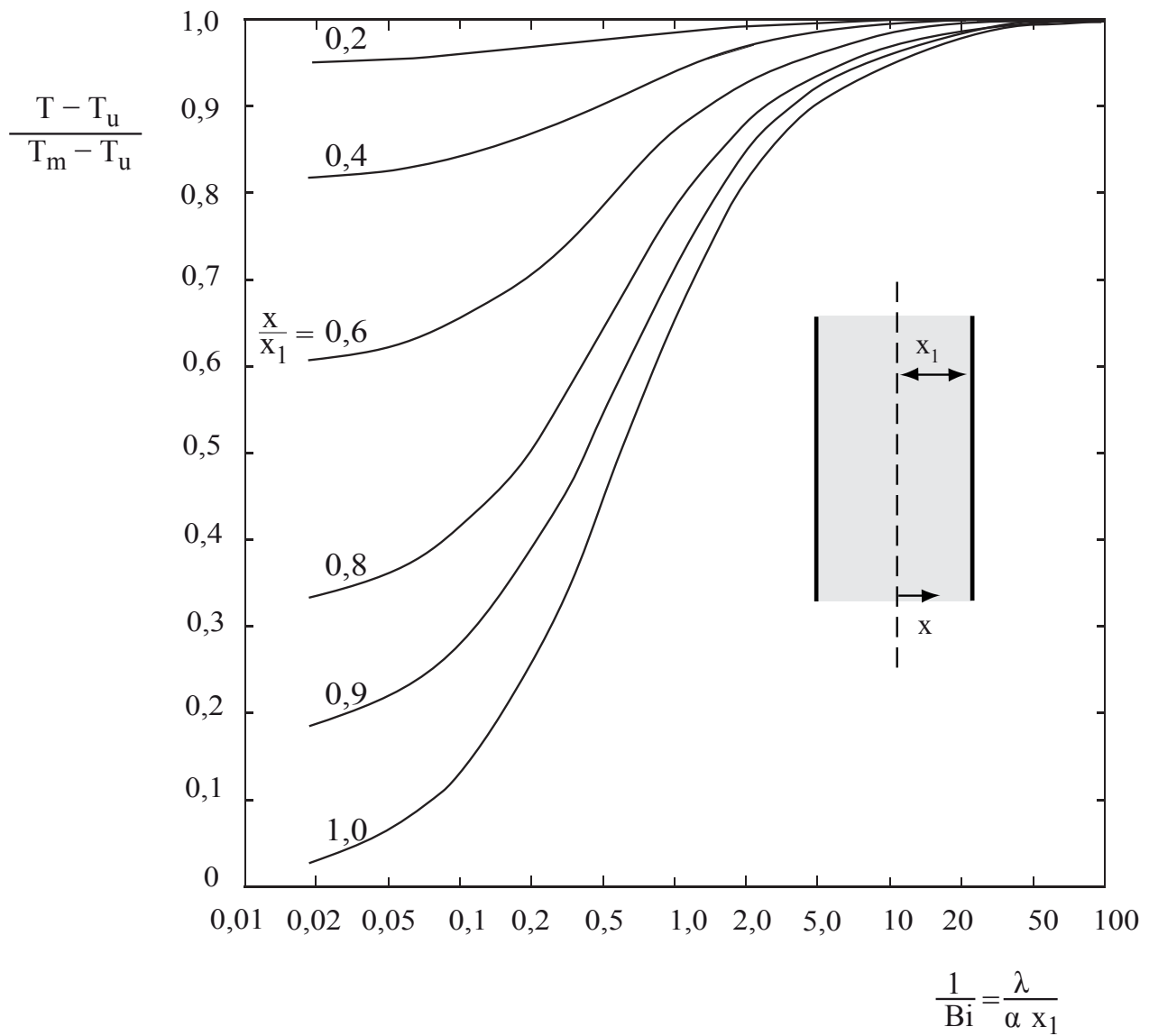


Diagramm 4: Temperaturverteilung in einer Platte (gültig für $Fo > 0,2$)

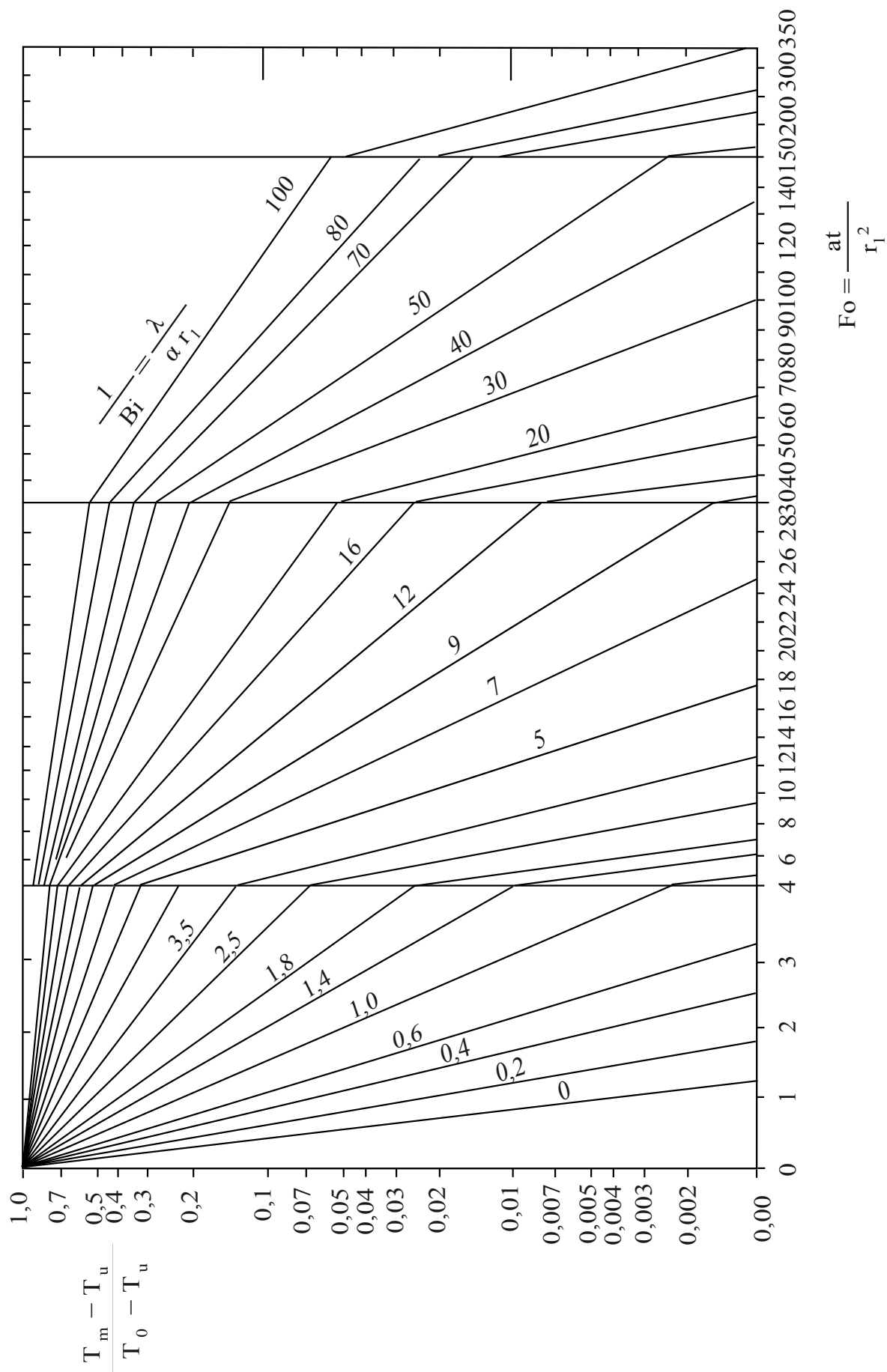


Diagramm 5: Temperatur auf der Achse eines Zylinders mit dem Radius r_1

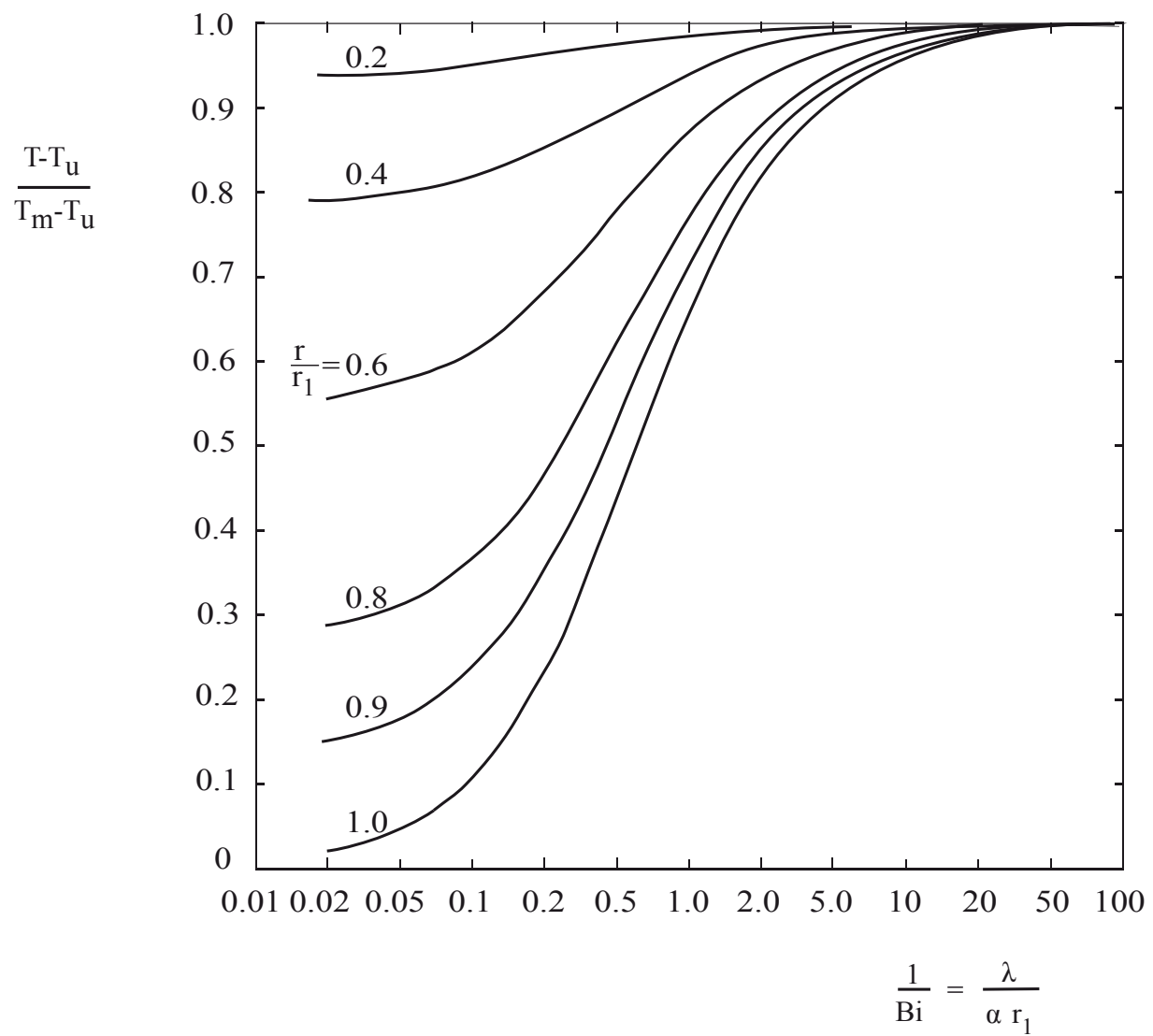
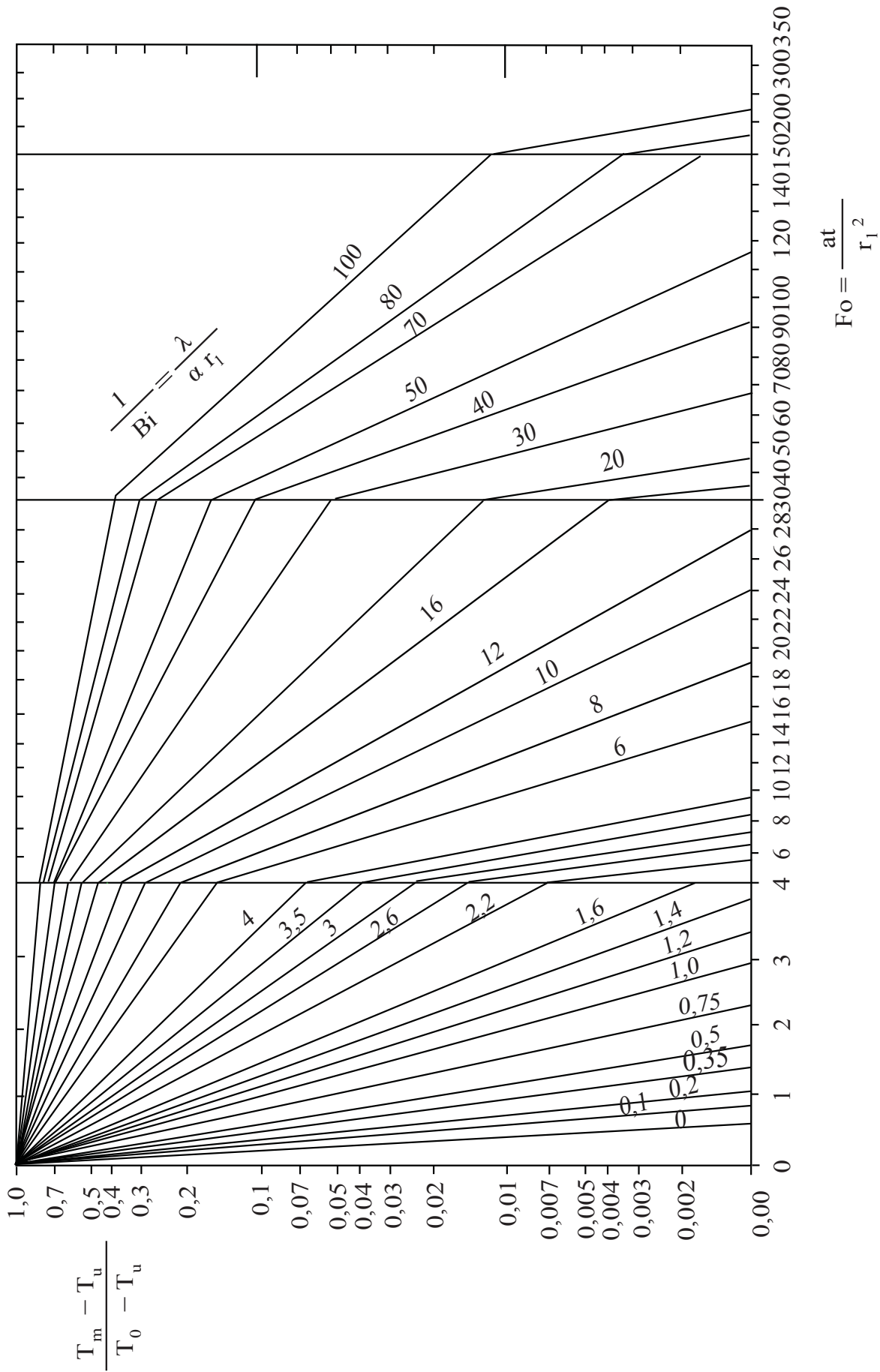


Diagramm 6: Temperaturverteilung in einem Zylinder (gültig für $Fo > 0,2$)

Diagramm 7: Temperatur im Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r_1

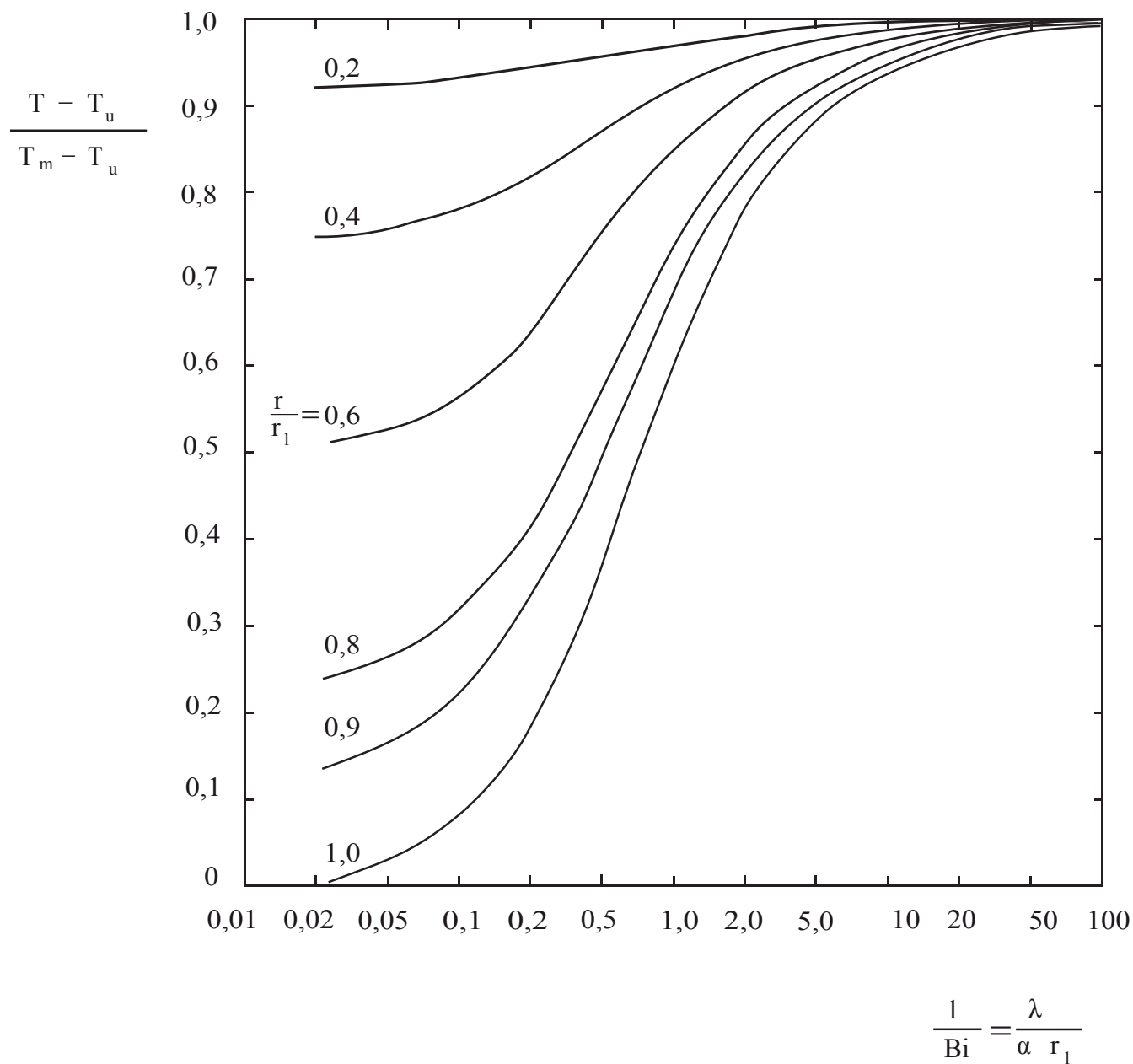


Diagramm 8: Temperaturverteilung in einer Kugel (gültig für $Fo > 0,2$)

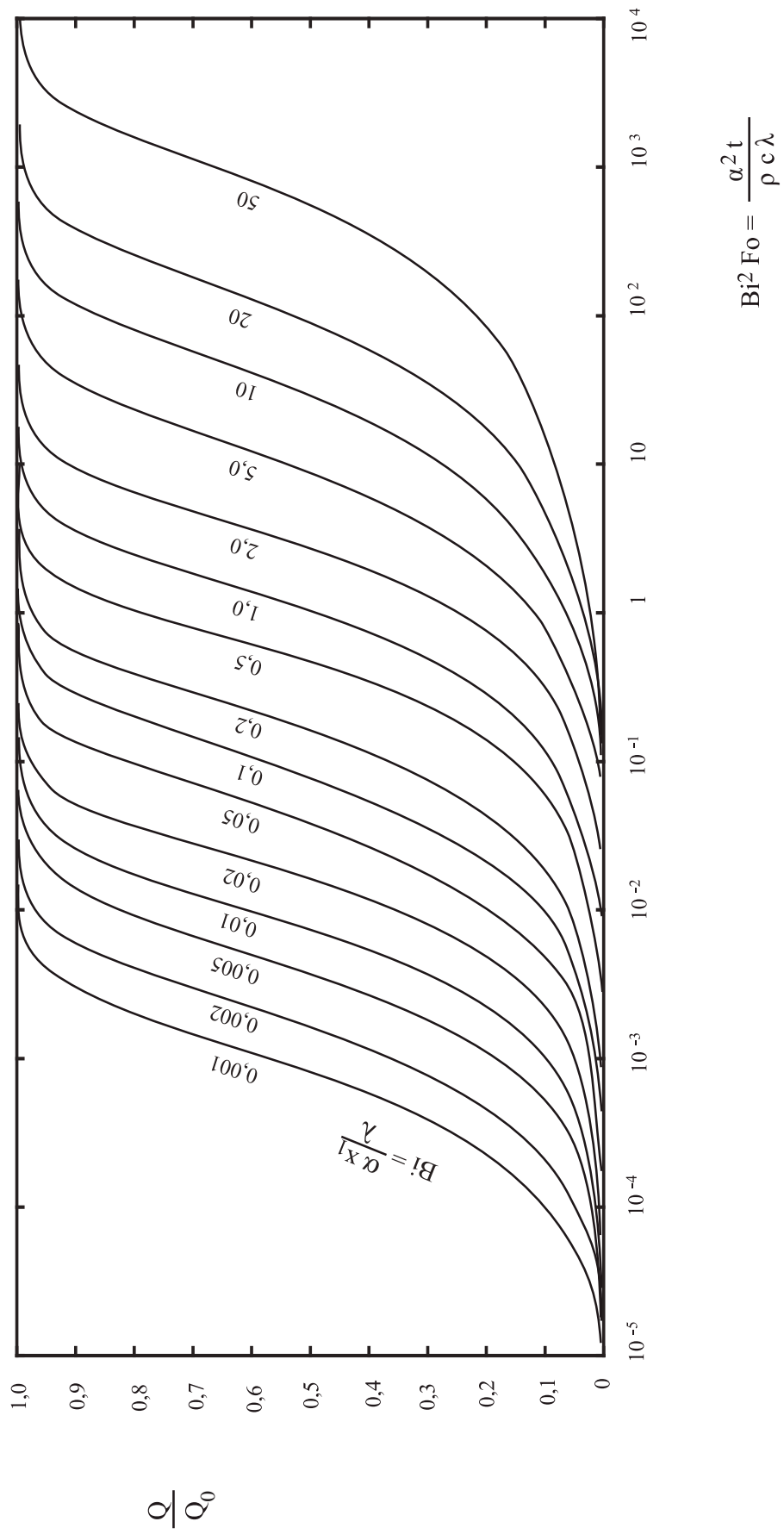


Diagramm 9: Wärmeverlust einer Platte

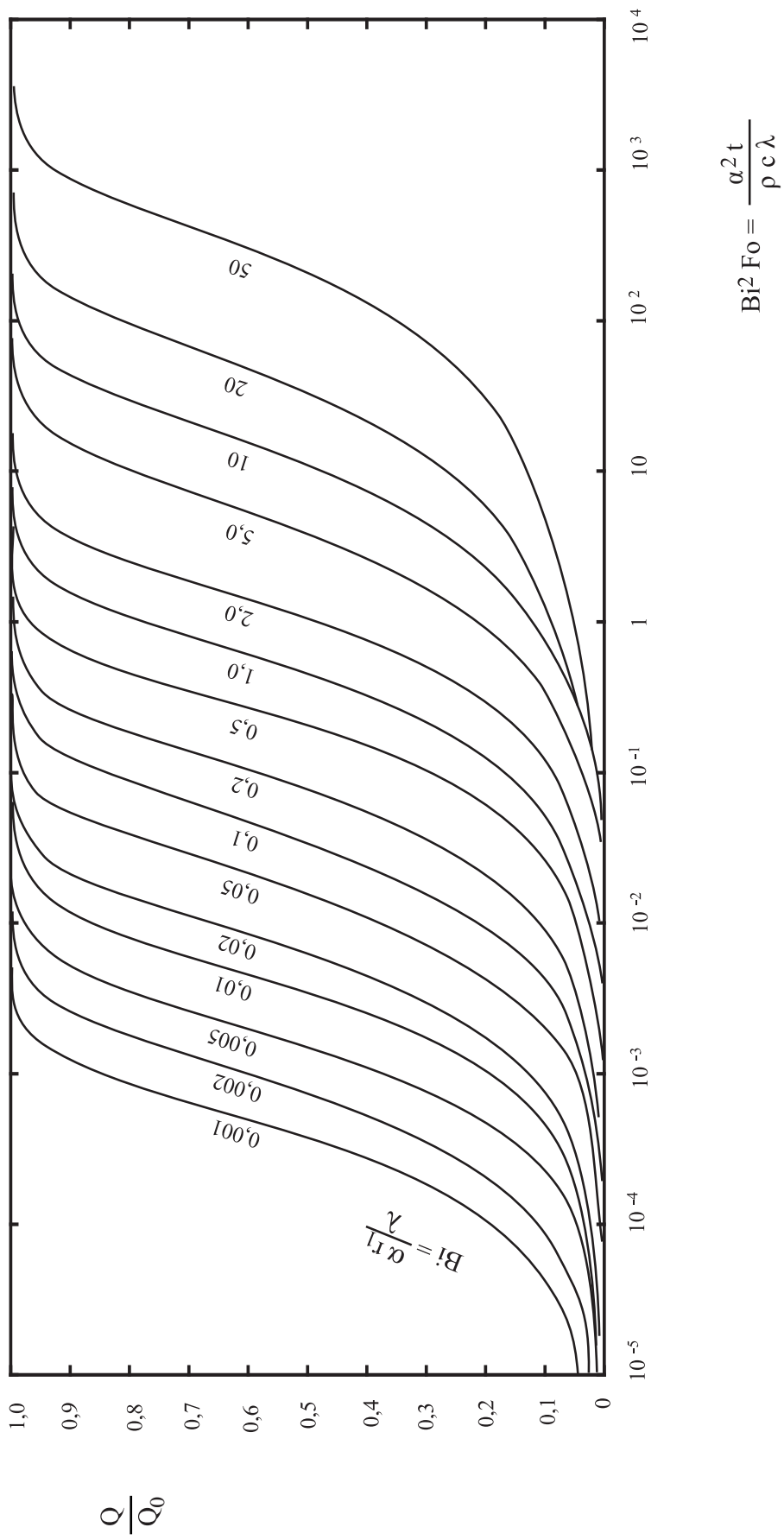


Diagramm 10: Wärmeverlust eines Zylinders

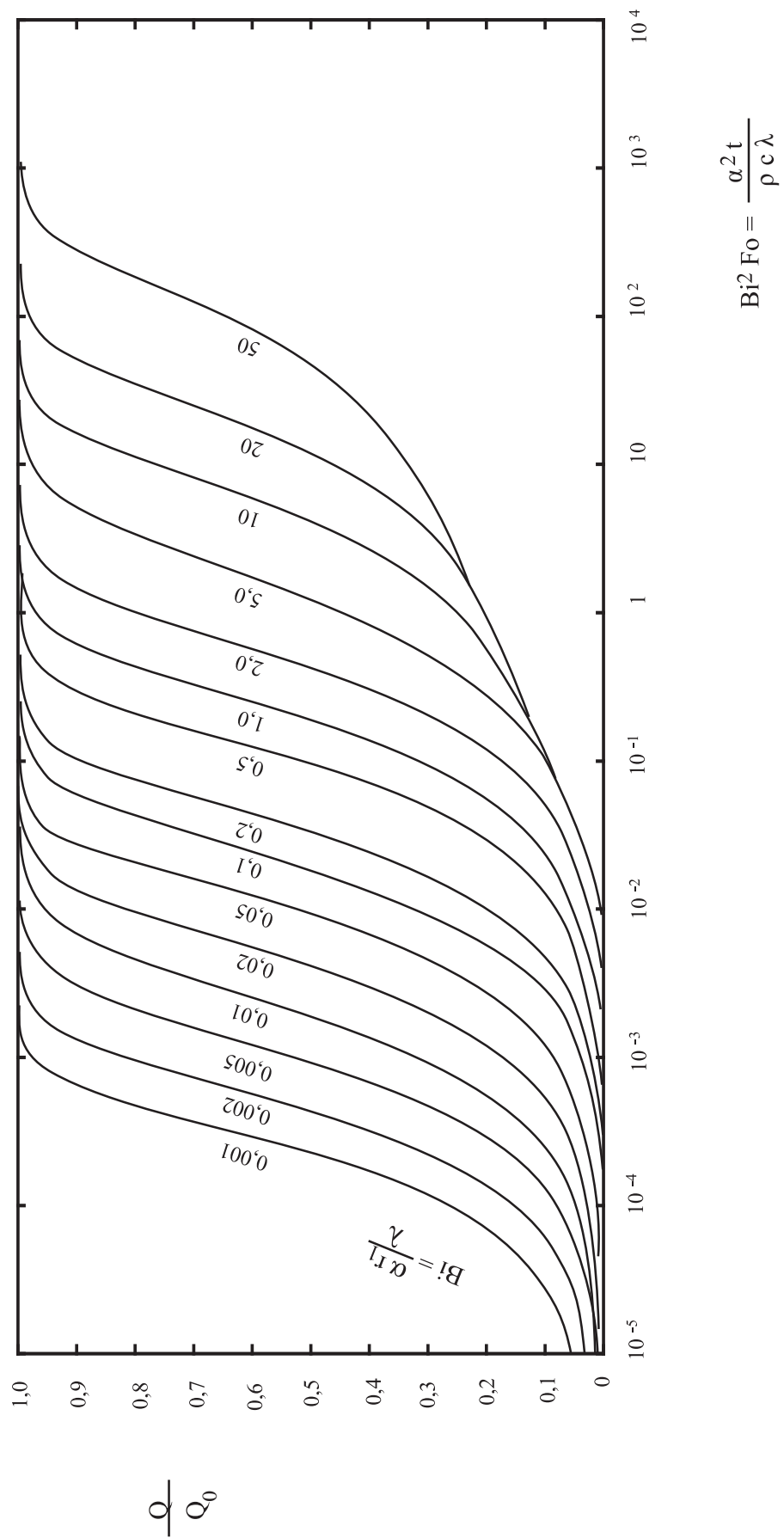


Diagramm 11: Wärmeverlust einer Kugel

4. Konvektion

$$\begin{aligned} \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w c_p \frac{\partial T}{\partial z} &= \dots & (\text{Energiegleichung}) \\ \dots &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' \end{aligned}$$

Konvektiver Wärmeübergang

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \dot{q}_w'' = \alpha (T_w - T_{fl}) \quad (\text{konvektive Wärmestromdichte})$$

$$W = \frac{1}{\alpha A} \quad (\text{Wärmewiderstand})$$

$$\alpha = \frac{- \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right)_{\text{Fluid, w}}}{T_w - T_{fl}} \quad (\text{Wärmeübergangskoeffizient})$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx \quad (\text{mittl. Wärmeübergangskoeffizient})$$

Grenzschichtgleichungen (Näherungen mit linearem Geschwindigkeitsprofil)

$$\frac{\delta_u}{x} \approx \sqrt{\frac{12 \eta}{\rho u_{\infty} x}} = \sqrt{\frac{12}{\text{Re}_x}} \quad (\text{Dicke Geschwindigkeitsgrenzschicht})$$

$$\frac{\delta_T}{\delta_u} \approx \left(\frac{\lambda}{\eta c_p} \right)^{1/3} = \frac{1}{\text{Pr}^{1/3}} \quad (\text{Dicke Temperaturgrenzschicht})$$

5. Wärmeübergangsgesetze

$$\Delta T_{\ln} = (T_w - T_{fl})_m = \frac{\Delta T_E - \Delta T_A}{\ln \frac{\Delta T_E}{\Delta T_A}} \quad (\text{logarithmische Temperaturdifferenz})$$

$$\dot{Q}_m = \bar{\alpha} A (T_w - T_{fl})_m \quad (\text{mittlerer Wärmestrom})$$

Erzwungene Konvektion umströmter Körper

$$Nu_x = f(Re_x, Pr, \dots) \quad (\text{Nusselt-Korrelation})$$

$$T_{St} = \frac{T_w + T_\infty}{2} \quad (\text{Temperatur zur Stoffwertermittlung})$$

- **Ebene Platte – laminare Grenzschicht, isotherme Oberfläche (1)**

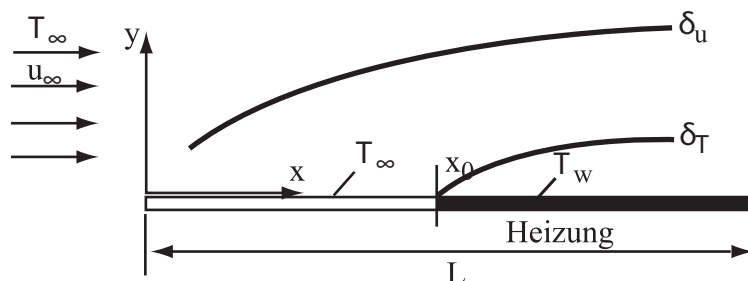
$$(0,6 < Pr < 10 \text{ und } Re_x < Re_{x, \text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5)$$

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (\text{WÜK.1})$$

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (\text{WÜK.2})$$

- **Ebene Platte – laminare Grenzschicht, isotherme Oberfläche (2)**

Beheizung oder Kühlung ab Stelle $x = x_0$



$$(0,6 < Pr < 10 \text{ und } Re_x < Re_{x, \text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5)$$

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \quad (\text{WÜK.3})$$

$$\begin{aligned}\overline{\text{Nu}}_L &= \frac{L}{L - x_0} \frac{1}{\lambda_{x_0}} \int_{x_0}^L \alpha(x) dx = \dots \\ &\dots = 0,664 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \frac{\left[1 - \left(\frac{x_0}{L}\right)^{3/4}\right]^{2/3}}{\left[1 - \frac{x_0}{L}\right]}\end{aligned}\quad (\text{WÜK.4})$$

- **Ebene Platte – turbulente Grenzschicht, isotherme Oberfläche**

($\text{Re}_{L,\text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5$ und $5 \cdot 10^5 < \text{Re} < 10^7$)

$$\text{Nu}_x = 0,0296 \text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{0,43} \quad (\text{WÜK.5})$$

$$\overline{\text{Nu}}_L \approx 0,036 \text{Pr}^{0,43} (\text{Re}_L^{0,8} - 9400) \quad (\text{WÜK.6})$$

- **Längs angeströmter Zylinder**

Wenn der Körperdurchmesser deutlich größer als die Grenzschichtdicke ist, kann ein längsangeströmter Zylinder wie eine ebene Oberfläche behandelt werden.

- **Quer angeströmter Zylinder**

$$\overline{\text{Nu}}_d = C \text{Re}_d^m \text{Pr}^{0,4} \quad (\text{WÜK.7})$$

Re_d	C	m
0,4 – 4	0,989	0,330
4 – 40	0,911	0,385
40 – 4000	0,683	0,466
4000 – 40000	0,193	0,618
40000 – 400000	0,0266	0,805

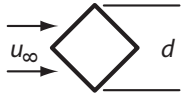
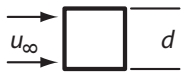
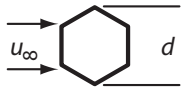

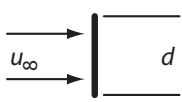
Alternativ zu WÜK.7 kann WÜK.8 verwendet werden:

$$\overline{\text{Nu}}_d = \left[0,40 \text{Re}_d^{1/2} + 0,06 \text{Re}_d^{2/3}\right] \text{Pr}^{0,4} \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_w}\right)^{1/4} \quad (\text{WÜK.8})$$

hier: $T_{\text{St}} = T_\infty$

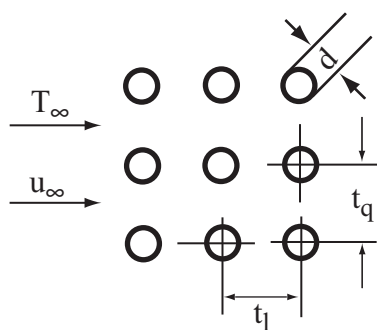
- Mittlerer Wärmeübergang bei nicht-kreisförmigen Zylindern**

$$\overline{Nu}_d = C Re_d^m Pr^{0,4} \quad (\text{WÜK.9})$$

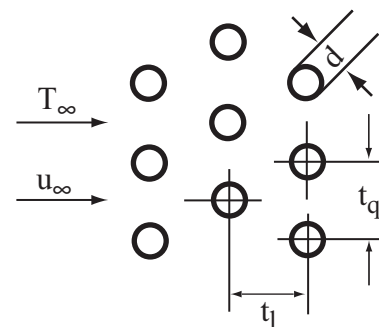
Geometrie	Re_d	C	m
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,246	0,588
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,102	0,675
	$5 \cdot 10^3 - 1,95 \cdot 10^4$	0,160	0,638
	$1,95 \cdot 10^4 - 10^5$	0,0385	0,782
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,153	0,638
	$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$	0,228	0,731

- Quer angeströmtes Glattrohrbündel**

$$\overline{Nu}_d = 0,287 Re_d^{0,6} Pr^{0,36} f_e \quad (\text{WÜK.10})$$



fluchtende Anordnung



versetzte Anordnung

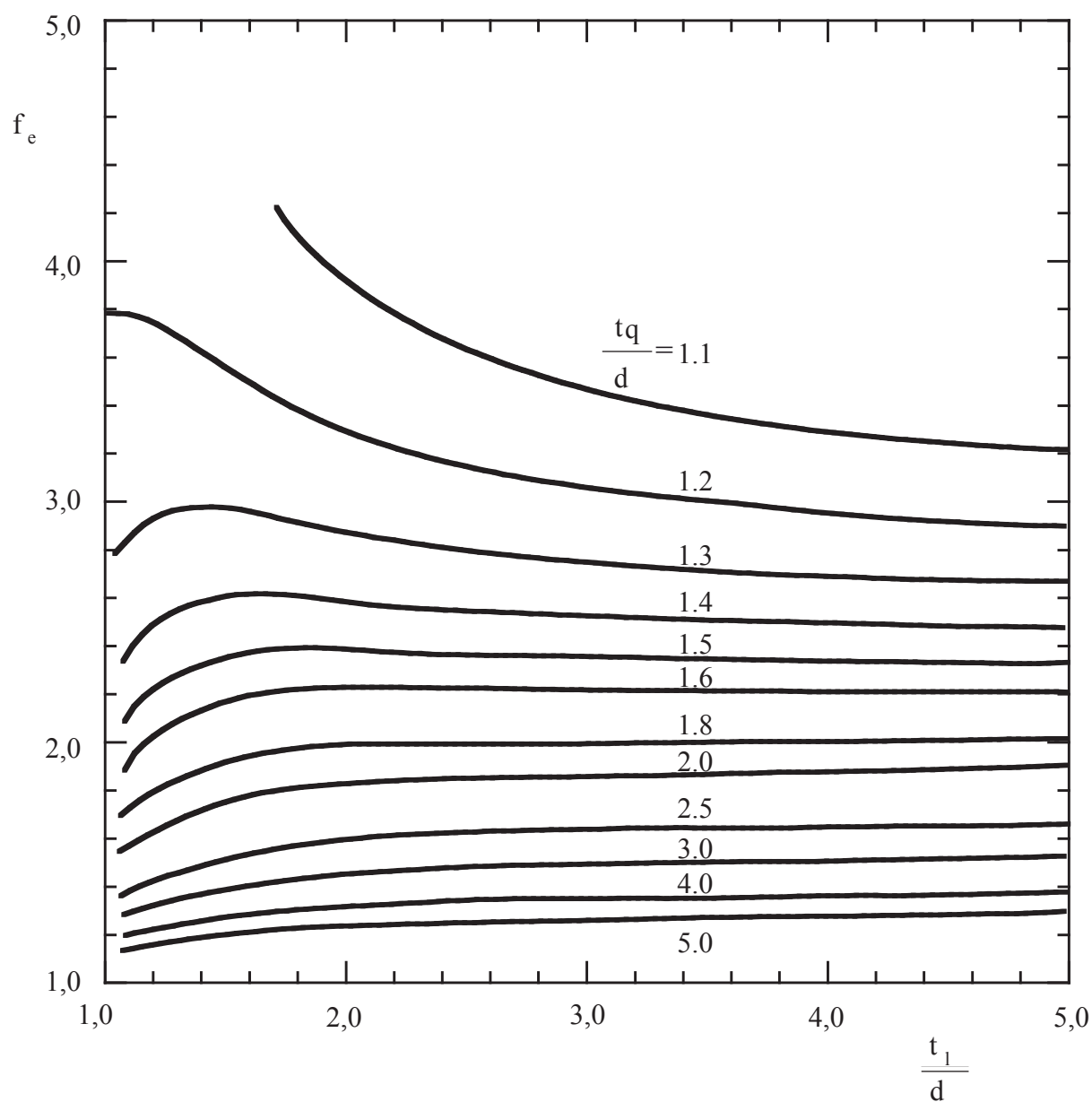


Diagramm 12: Anordnungsfaktoren f_e für fluchtende Anordnung

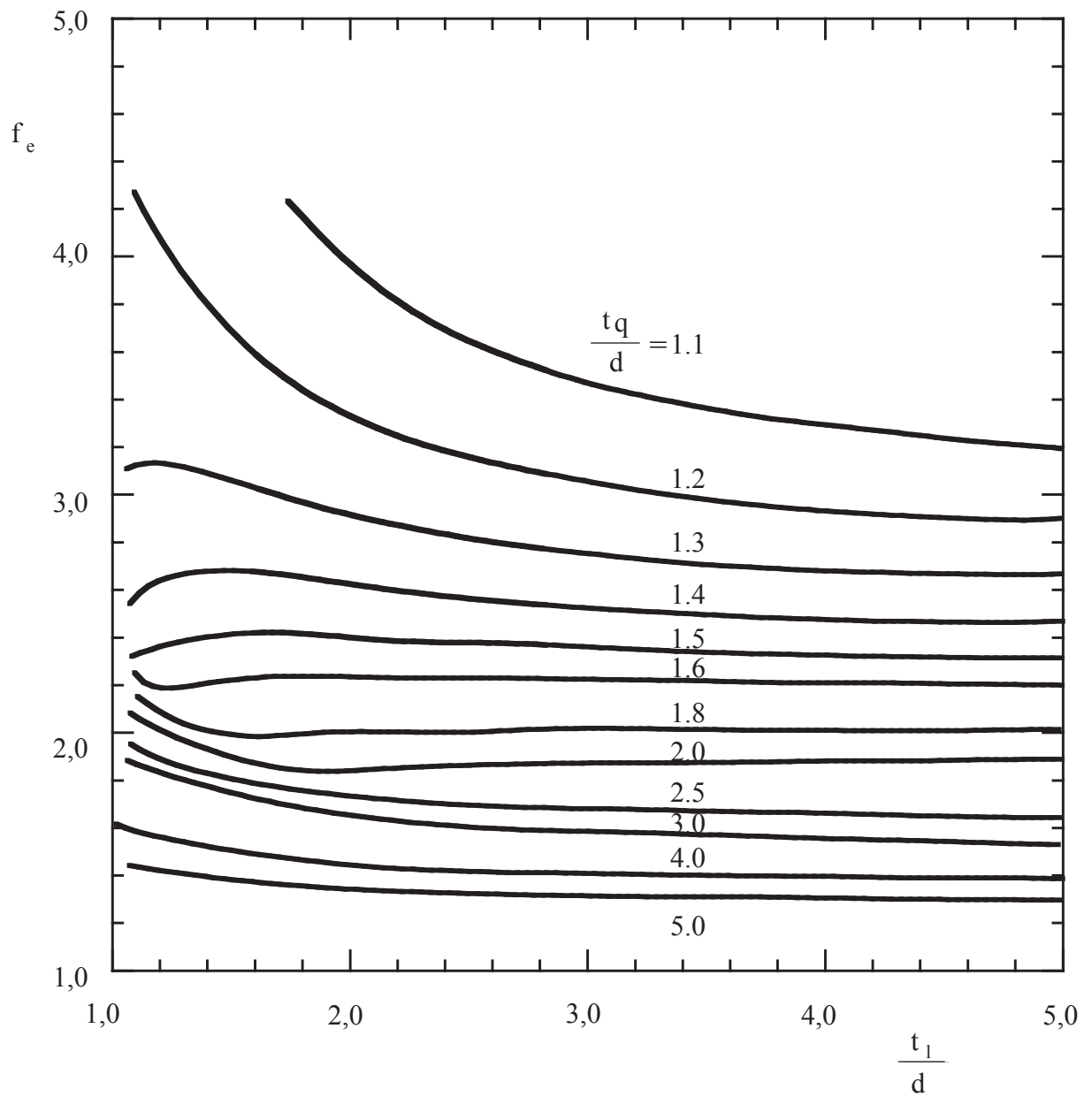


Diagramm 13: Anordnungsfaktoren f_e für versetzte Anordnung

- **Umströmte Kugel**

$$(0,7 < Pr < 380 \text{ und } 3,5 < Re_d < 8 \cdot 10^4, T_{St} = T_\infty)$$

$$\overline{Nu}_d = 2 + \left(0,4 Re_d^{1/2} + 0,06 Re_d^{2/3} \right) Pr^{0,4} \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_w} \right)^{1/4} \quad (\text{WÜK.11})$$

hier: $T_{St} = T_\infty$

Erzwungene Konvektion durchströmter Körper

$$Nu_x = f(Re_x, Pr, \dots) \quad (\text{Nusselt-Korrelation})$$

$$T_{St} = \frac{T_{fl,A} + T_{fl,E}}{2} \quad (\text{Temperatur zur Stoffwertermittlung})$$

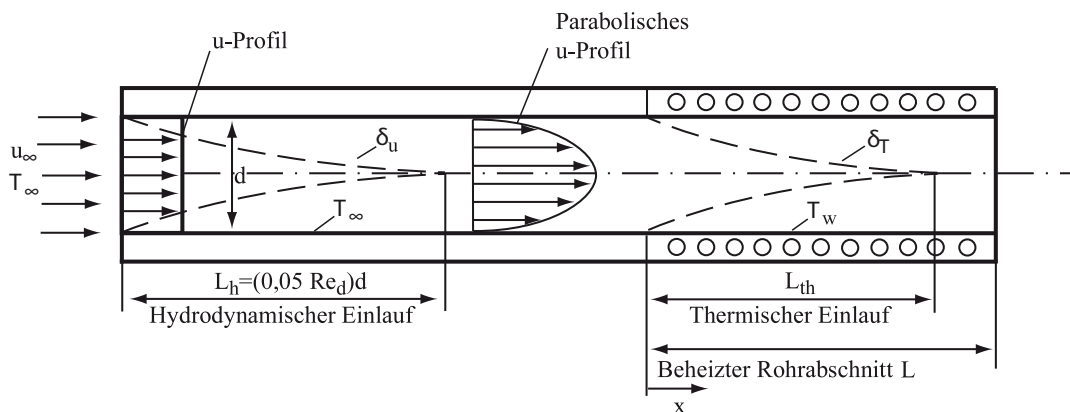
$$d_h = 4 \frac{A_Q}{U} \quad (\text{Hydraulischer Durchmesser})$$

hier: A_Q durchströmter Querschnitt

U benetzter Umfang

- **Laminare Rohrströmung – isotherme Oberfläche (1)**

Hydrodynamisch ausgebildete Strömung bei Beginn des wärmeübertragenden Rohrabschnitts ($Re_{d,krit} \approx 2300$)



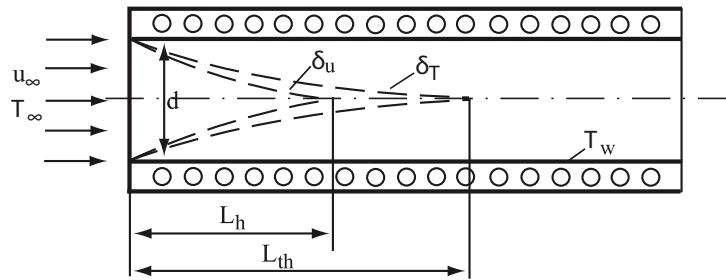
$$\overline{Nu}_d = \left(3,66 + \frac{0,19 \left(Re_d Pr \frac{d}{L} \right)^{0,8}}{1 + 0,117 \left(Re_d Pr \frac{d}{L} \right)^{0,467}} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.12})$$

$$\frac{L_{th}}{d} \approx 0,05 Re_d Pr \quad (\text{thermische Einlauflänge})$$

Nach Erreichen der thermischen Einlauflänge ist $\overline{Nu}_\infty = 3,66$ konstant.

- **Laminare Rohrströmung – isotherme Oberfläche (2)**

Gleichzeitiger hydrodynamischer und thermischer Anlauf ($Re_{d, \text{krit}} \approx 2300$)



$$\overline{Nu}_d = \left(3,66 + \frac{0,0677 (Re_d Pr \frac{d}{L})^{1,33}}{1 + 0,1 Pr (Re_d \frac{d}{L})^{0,83}} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.13})$$

$$\frac{L_{th}}{d} \approx 0,05 Re_d Pr \quad (\text{thermische Einlaufstrecke})$$

Nach Erreichen der thermischen Einlaufstrecke ist $\overline{Nu}_\infty = 3,66$ konstant.

- **Laminare Rohrströmung – aufgeprägte Wärmestromdichte**

Wird anstelle der Wandtemperatur die Wärmestromdichte an der Wand konstant gehalten, ergeben sich etwa 20% höhere Wärmeübergangskoeffizienten.

- **Turbulente Rohrströmung – isotherme Oberfläche**

Gleichzeitiger hydrodynamischer und thermischer Anlauf

($Re_{d, \text{krit}} \approx 2300$, $0,6 < Pr < 500$, $L/d > 1$ und $Re_d > 2300$)

$$\overline{Nu}_d = 0,0235 (Re_d^{0,8} - 230) (1,8 Pr^{0,3} - 0,8) \left(1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.14})$$

Vereinfachtes Nusselt-Gesetz für die turbulente Rohrströmung

($Re_{d, \text{krit}} \approx 2300$, $3000 < Re_d < 10^5$ und $L/d > 40$)

$$\overline{Nu}_d = 0,027 Re_d^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.15})$$

- **Turbulente Rohrströmung – aufgeprägte Wärmestromdichte**

Die Wärmeübergangskoeffizienten bei aufgeprägtem Wärmestrom sind mit denen bei aufgeprägter Wandtemperatur vergleichbar.

Natürliche Konvektion

$$\text{Nu}_x = f(\text{Gr}_x, \text{Pr}, \dots) \quad (\text{Nusselt-Korrelation})$$

$$T_{\text{St}} = \frac{T_w + T_\infty}{2} \quad (\text{Temperatur zur Stoffwertermittlung})$$

$$\beta = \frac{1}{T_\infty} \quad (\text{Ausdehnungskoeffizient Idealgas})$$

- Vertikale Platte – laminare Grenzschicht, isotherme Oberfläche**

$$\text{Nu}_x = 0,508 \left(\frac{\text{Pr}}{0,952 + \text{Pr}} \right)^{1/4} (\text{Gr}_x \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{WÜK.16})$$

$$\overline{\text{Nu}}_L = C (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{WÜK.17})$$

$$\text{für } \text{Gr}_L \text{Pr} < \text{Gr}_{L,\text{krit}} \text{Pr} = 4 \cdot 10^9$$

Pr	0,003	0,01	0,03	0,72	1	2	10	100	1000	∞
C	0,182	0,242	0,305	0,516	0,535	0,568	0,620	0,653	0,665	0,670

- Vertikale Platte – laminare Grenzschicht, aufgeprägte Wärmestromdichte**

$$\text{Nu}_x = 0,60 (\text{Gr}_x^* \text{Pr})^{1/5} \quad (\text{WÜK.18})$$

$$\text{für } 10^5 < \text{Gr}_x^* < 10^{11}$$

$$\text{mit } \text{Gr}_x^* = \text{Gr}_x \text{Nu}_x = \frac{\rho^2 g \beta \dot{q}_w'' x^4}{\lambda \eta^2}$$

- Vertikale Platte – turbulente Grenzschicht, isotherme Oberfläche**

$$\overline{\text{Nu}}_L = 0,13 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/3} \quad (\text{WÜK.19})$$

$$\text{für } 10^9 < (\text{Gr}_L \text{Pr}) < 10^{12}$$

- Vertikaler Zylinder – laminare und turbulente Grenzschicht**

Für Durchmesser-Längen-Verhältnisse von $d/L > 35 \text{Gr}_L^{-1/4}$ gelten die für die vertikale Platte angegebenen Beziehungen.

- **Horizontaler Zylinder – isotherme Oberfläche**

$$\text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_d = 0,53 (\text{Gr}_d \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{WÜK.20})$$

$$\text{für } 10^4 < \text{Gr}_d \text{Pr} < 10^9$$

$$\text{turbulent:} \quad \overline{\text{Nu}}_d = 0,13 (\text{Gr}_d \text{Pr})^{1/3} \quad (\text{WÜK.21})$$

$$\text{für } 10^9 < \text{Gr}_d \text{Pr} < 10^{12}$$

- **Horizontale Platte – isotherme Oberfläche**

Plattenoberseite mit $T_W > T_\infty$ / Plattenunterseite mit $T_W < T_\infty$

$$\text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_L = 0,54 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{WÜK.22a})$$

$$\text{für } 2 \cdot 10^4 < \text{Gr}_L \text{Pr} < 8 \cdot 10^6$$

$$\text{turbulent:} \quad \overline{\text{Nu}}_L = 0,15 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/3} \quad (\text{WÜK.23a})$$

$$\text{für } 8 \cdot 10^6 < \text{Gr}_L \text{Pr} < 10^{11}$$

Plattenoberseite mit $T_W < T_\infty$ / Plattenunterseite mit $T_W > T_\infty$

$$\text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_L = 0,27 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{WÜK.24a})$$

$$\text{für } 10^5 < \text{Gr}_L \text{Pr} < 10^{11}$$

- **Horizontale Platte – aufgeprägte Wärmestromdichte**

Plattenoberseite mit $T_W > T_\infty$ / Plattenunterseite mit $T_W < T_\infty$

$$\text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_L = 0,13 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/3} \quad (\text{WÜK.22b})$$

$$\text{für } \text{Gr}_L \text{Pr} < 2 \cdot 10^8$$

$$\text{turbulent:} \quad \overline{\text{Nu}}_L = 0,16 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/3} \quad (\text{WÜK.23b})$$

$$\text{für } 2 \cdot 10^8 < \text{Gr}_L \text{Pr} < 10^{11}$$

Plattenoberseite mit $T_W < T_\infty$ / Plattenunterseite mit $T_W > T_\infty$

$$\begin{aligned} \text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_L &= 0,58 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{1/5} & (\text{WÜK.24b}) \\ \text{für} \quad 10^6 &< \text{Gr}_L \text{Pr} < 10^{11} \end{aligned}$$

- **Fluidschichten zwischen isothermen, vertikalen Wänden**

Höhen-Abstand-Verhältnis $3,1 < H/s < 42,2$

$$\text{reine Wärmeleitung:} \quad \overline{\text{Nu}}_s = 1 \quad \text{für} \quad \text{Gr}_s < 2 \cdot 10^3$$

$$\begin{aligned} \text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_s &= 0,20 (H/s)^{-1/9} (\text{Gr}_s \text{Pr})^{1/4} & (\text{WÜK.25}) \\ \text{für} \quad 2 \cdot 10^3 &< \text{Gr}_s < 2 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{turbulent:} \quad \overline{\text{Nu}}_s &= 0,071 (H/s)^{-1/9} (\text{Gr}_s \text{Pr})^{1/3} & (\text{WÜK.26}) \\ \text{für} \quad 2 \cdot 10^5 &< \text{Gr}_s < 10^7 \end{aligned}$$

- **Fluidschichten zwischen isothermen, horizontalen Wänden**

$$\text{reine Wärmeleitung:} \quad \overline{\text{Nu}}_s = 1 \quad \text{für} \quad \text{Gr}_s < 2 \cdot 10^3$$

$$\begin{aligned} \text{laminar:} \quad \overline{\text{Nu}}_s &= 0,21 (\text{Gr}_s \text{Pr})^{1/4} & (\text{WÜK.27}) \\ \text{für} \quad 2 \cdot 10^3 &< \text{Gr}_s < 3,2 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{turbulent:} \quad \overline{\text{Nu}}_s &= 0,075 (\text{Gr}_s \text{Pr})^{1/3} & (\text{WÜK.28}) \\ \text{für} \quad 3,2 \cdot 10^5 &< \text{Gr}_s < 10^7 \end{aligned}$$

Bei Heizung von oben gilt stets die Beziehung für reine Wärmeleitung.

7. Stoffübertragung

$$j'' = -\rho D \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{Ficksches Gesetz})$$

$$\xi_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{ges}}} \quad (\text{Massenanteil})$$

$$\sum j_i'' = 0 \quad (\text{Summe aller Diffusionströme})$$

$$\sum \xi_i = 1 \quad (\text{Summe aller Massenanteile})$$

Transportgleichung

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \dots \\ \dots &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \dot{m}''' \end{aligned}$$

Stoffübergang an einer Oberfläche

$$\frac{\dot{m}}{A} = \dot{m}'' = g (\xi_0 - \xi_\infty) \quad (\text{konvektive Massenstromdichte})$$

$$\text{Sh}_x = f(\text{Re}_x, \text{Sc}, \dots) \quad (\text{Stoffübergangsgesetze})$$

$$\text{vgl.: } \text{Nu}_x = f(\text{Re}_x, \text{Pr}, \dots) \quad (\text{Wärmeübergangsgesetze})$$

Stoffübergang an einer halbdurchlässigen Oberfläche (z.B. Verdunstung)

$$\dot{m}'' = g \frac{\xi_0 - \xi_\infty}{1 - \xi_0} \quad (\text{Massenstromdichte mit Stefanstrom})$$

Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung

$$\left. \begin{aligned} \text{Sh}_x &= C \text{Re}_x^m \text{Sc}^n \\ \text{Nu}_x &= C \text{Re}_x^m \text{Pr}^n \end{aligned} \right\} \frac{\text{Sh}_x}{\text{Nu}_x} = \left(\frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} \right)^n$$

$$\text{Le} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{\lambda}{\rho D c_p} \quad (\text{Lewis-Zahl})$$

$$\text{Le} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{g}{\alpha/c_p} = 1 \quad (\text{Lewissches Gesetz})$$

Wärmeübertragung		Stoffübertragung	
Temperatur	T	Massenanteil	ξ
Wärmestromdichte	\dot{q}''	Massenstromdichte	\dot{j}''
Vol. Wärmekapazität	ρc_p	Dichte	ρ
Wärmeleitfähigkeit	λ		ρD
Temperaturleitfähigkeit	$a = \lambda/(\rho c_p)$	Diffusionskoeffizient	D
konvektiver Wärme- und Stofftransport			
Wärmeübergangskoeff.	α	Stoffübergangskoeff.	g
Nusselt-Zahl	$\text{Nu}_x = \alpha x/\lambda$	Sherwood-Zahl	$\text{Sh}_x = g x/(\rho D)$
Prandtl-Zahl	$\text{Pr} = \eta c_p/\lambda$	Schmidt-Zahl	$\text{Sc} = \eta/(\rho D)$

Anhang A – Stoffwerte

Tabelle 1: Metalle bei 20°C

	ρ	c	λ	a
	10 ³ kg/m ³	kJ/kg K	W/m K	10 ⁻⁶ m ² /s
Aluminium	2,70	0,888	237	98,80
Blei	11,34	0,129	35	23,90
Chrom	6,92	0,440	91	29,90
Eisen	7,86	0,452	81	22,80
Gold	19,26	0,129	316	127,20
Kupfer	8,93	0,382	399	117,00
Magnesium	1,74	1,020	156	87,90
Mangan	7,42	0,473	21	6,00
Molybdän	10,20	0,251	138	53,90
Natrium	9,71	1,220	133	11,20
Nickel	8,85	0,448	91	23,00
Platin	21,37	0,133	71	25,00
Silber	10,50	0,235	427	173,00
Titan	4,50	0,522	22	9,40
Wolfram	19,00	0,134	173	67,90
Zink	7,10	0,387	121	44,00
Zinn, weiß	7,29	0,225	67	40,80
Bronze	8,80	0,377	62	18,70
Gusseisen	7,80	0,540	42... 50	10... 12
Kohlenstoffstahl (<0,4% C)	7,85	0,465	42... 50	12... 15
Cr-Ni-Stahl (X12CrNi 18,8)	7,80	0,500	15	3,80

Tabelle 2: Nichtmetallische Festkörper bei 20°C

	ρ	c	λ	a
	10 ³ kg/m ³	kJ/kg K	W/m K	10 ⁻⁶ m ² /s
Acrylglas (Plexiglas)	1,18	1,44	0,184	0,108
Asphalt	2,12	0,92	0,7	0,36
Beton	2,1	0,88	1	0,54
Eis (0°C)	0,917	2,04	2,25	1,203
Erdreich, grobkiesig	2,04	1,84	0,52	0,14
Sandboden, trocken	1,65	0,8	0,27	0,2
Sandboden, feucht	1,75	1	0,58	0,33
Tonboden	1,45	0,88	1,28	1
Glas,				
Fensterglas	2,48	0,7	0,87	0,5
Spiegelglas	2,7	0,8	0,76	0,35
Quarzglas	2,21	0,73	1,4	0,87
Glaswolle	1,2	0,66	0,046	0,58
Gips	1	1,09	0,51	0,47
Granit	2,75	0,89	2,9	1,18
Korkplatten	0,19	1,88	0,041	0,115
Marmor	2,6	0,8	2,8	1,35
Mörtel	1,9	0,8	0,93	0,61
Papier	0,7	1,2	0,12	0,14
Polyethylen	0,92	2,3	0,35	0,17
Polytetrafluoräthylen	2,2	1,04	0,23	0,1
PVC	1,38	0,96	0,15	0,11
Porzellan (95°C)	2,4	1,08	1,03	0,4
Steinkohle	1,35	1,26	0,26	0,15
Tannenholz (radial)	0,415	2,72	0,14	0,12
Verputz	1,69	0,8	0,79	0,58
Ziegelstein	1,6... 1,8	0,84	0,38... 0,52	0,28... 0,34

Tabelle 3: Flüssigkeiten bei 1 bar

	T	ρ	c	λ	ν	a	Pr
	°C	10^3 kg/m^3	kJ/kg K	W/m K	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	1
Stickstoff	-190	0,861	1,988	0,161	0,321	0,0939	3,42
Wasser	0	0,9998	4,218	0,561	1,793	0,133	13,48
	20	0,9982	4,181	0,598	1,004	0,1434	7,001
	40	0,9922	4,177	0,631	0,658	0,1521	4,3280
	60	0,9832	4,184	0,654	0,475	0,1591	2,983
	80	0,9718	4,197	0,67	0,365	0,1643	2,221
	99,63	0,9586	4,216	0,679	0,295	0,168	1,757
wässrige Lösung							
21% NaCl	-10	1,187	3,312	0,528	4,02	0,136	29,5
Benzol	20	0,879	1,738	0,154	0,74	0,101	7,33
Methanol	20	0,792	2,495	0,22	0,737	0,111	6,57
Heizöl	20	0,819	2	0,116	1,82	0,0709	25,7
	100	0,766	2,38	0,104	0,711	0,0572	12,4
Quecksilber	20	13,55	0,139	9,3	0,115	4,9	0,023

Tabelle 4: Gase bei 1 bar

	T	ρ	c	λ	ν	a	Pr
	°C	kg/m^3	kJ/kg K	10^{-3} W/m K	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	1
Luft	-200	5,106	1,186	6,886	0,979	1,137	0,8606
	-100	2,019	1,011	16,2	5,829	7,851	0,7423
	0	1,275	1,006	24,18	13,52	18,83	0,7179
	20	1,188	1,007	25,69	15,35	21,47	0,7148
	40	1,112	1,007	27,16	17,26	24,24	0,7122
	80	0,9859	1,01	30,01	21,35	30,14	0,7083
	100	0,9329	1,012	31,39	23,51	33,26	0,707
	200	0,7356	1,026	37,95	35,47	50,3	0,7051
	400	0,517	1,069	49,96	64,51	90,38	0,7137
	600	0,3986	1,116	61,14	99,63	137,5	0,7247
	800	0,3243	1,155	71,54	140,2	191	0,7342
	1000	0,2734	1,185	80,77	185,9	249,2	0,7458
Wasserdampf	100	0,5896	2,042	25,08	20,81	20,83	0,999
	200	0,4604	1,975	33,28	35,14	36,6	0,96
	400	0,3223	2,07	54,76	75,86	82,07	0,9243
	600	0,2483	2,203	79,89	131,4	146,1	0,8993
	800	0,2019	2,343	107,3	199,9	226,8	0,8816
	1000	0,1702	2,478	163,3	280	323,2	0,8665
Wasserstoff	0	0,0886	14,24	176	95	139	0,68
	50	0,0748	14,36	202	126	188	0,67
	100	0,0649	14,44	229	159	244	0,65
Kohlendioxid	0	1,95	0,829	14,3	7,1	8,86	0,8
	50	1,648	0,875	17,8	9,8	12,3	0,8
	100	1,428	0,925	21,3	12,4	16,1	0,8
Helium	27	0,1625	5,193	155,7	122,6	184,5	0,655

Tabelle 5: Diffusionskoeffizienten von Gasgemischen

	T	D
	K	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
Luft – CO ₂	276	0,144
	317	0,179
Luft – C ₂ H ₅ OH	313	0,147
Luft – He	276	0,632
Luft – H ₂ O	313	0,292
CO ₂ – H ₂ O	307	0,201
He – H ₂ O	352	1,136
H ₂ – H ₂ O	307	0,927
CH ₄ – H ₂ O	352	0,361

Tabelle 6: Diffusionskoeffizienten von wässrigen Lösungen

	T	D
	K	$10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
CH ₄ – H ₂ O	275	0,85
	333	3,55
CO ₂ – H ₂ O	298	2
CH ₃ OH – H ₂ O	288	1,26
C ₂ H ₅ OH – H ₂ O	288	1
O ₂ – H ₂ O	298	2,4
N ₂ – H ₂ O	298	2,6
H ₂ – H ₂ O	298	6,3

Tabelle 7: Emissionsgrade von Festkörpern (Gesamtemmissionsgrad ε , Flächennormal ε_n)

Oberfläche	T K	ε_n	ε	Oberfläche	T K	ε_n	ε
Metalle				Zink, rein poliert	500		0,045
Aluminium, walzblank	443	0,039	0,049		600		0,055
... poliert	373	0,095		verzinktes Eisenblech			
... stark oxidiert	366	0,2		... blank	301	0,228	
	777	0,31		... grau oxidiert	297	0,276	
Aluminiumoxid	550	0,63		Zinn, nicht oxidiert	298		0,043
	1100	0,26			373	0,05	
	1089	0,052		Nichtmetalle			
Chrom, poliert	423	423	423	Asbest, Pappe	296	0,96	
				... Papier	311	0,93	
Gold, hochglanzpoliert	500	0,018			644	0,94	
	900	900		Beton, rau	273 – 366		0,94
Kupfer, poliert	293	0,03		Dachpappe	294	0,91	
... leicht angelaufen	293	0,037		Gips	293	0,8 – 0,9	
... schwarz oxidiert	293	0,78		Glas	293	0,94	
... oxidiert	403	0,76		Quarzglas (7 mm dick)	555	0,93	
Inconel, gewalzt	1089		0,69		1111	0,47	
... sandgestrahlt	1089		0,79	Gummi	293	0,92	
Eisen und Stahl,				Holz,			
... hochglanzpoliert	450	0,052		Eiche, gehobelt	273 – 366		0,9
... poliert	700	0,144		... Buche	343	0,94	0,91
	1300	0,377		Keramik, feuerfest			
... geschmirgelt	293	0,242		weißes Al_2O_3	366		0,9
Gusseisen, poliert	473	0,21		Kohlenstoff,			
Stahlguss, poliert	1044	0,52		nicht oxidiert	298		0,81
	1311	0,56			773		0,79
Eisenblech				... Fasern	533		0,95
... stark verrostet	292	0,685		... graphitisch	373		0,76
... Walzhaut	294	0,657		Korund, Schmirgel rau	353	0,85	0,84
Gusseisen,				Lacke, Farben:			
... oxidiert bei 866 K	472	0,64		Ölfarbe schwarz	366		0,92
	872	0,78		... grün	366		0,95
Stahl,				... rot	366		0,97
... oxidiert bei 866 K	472	0,79		... weiß	373		0,94
	872	0,79		Lack, weiß	373	0,925	
Messing, nicht oxidiert	298	0,035		... matt schwarz	353		0,97
	373	0,035		Bakelitlack	353	0,935	
... oxidiert	473	0,61		Menniganstrich	373	0,93	
	873	0,59		Heizkörper (VDI-74)	373	0,925	
	1673	0,17		Emaillie, weiß auf Eisen	292	0,897	
Nickel, nicht oxidiert	298	0,045		Marmor			
	373	0,06		hellgrau poliert	273 – 366		0,9
	873	0,478		Papier	273		0,92
... oxidiert	473	0,37			366		0,94
Platin	422	0,022		Porzellan, weiß	295		0,924
	1089	0,123		Ton, glasiert	298		0,9
Quecksilber,				... matt	298		0,93
... nicht oxidiert	298	0,1		Wasser	273	0,95	
	373	0,12			373	0,96	
Silber, poliert	311	0,022		Eis, glatt mit Wasser	273	0,966	0,92
	644	0,031		... rauer Reifbelag	273	0,985	
Wolfram	298		0,024	Ziegelstein rot	273 – 366		0,93
	1273		0,15				
	1773		0,23				

Anhang B – Mathematische Formelsammlung

Fehlerfunktionen (error function)

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=0}^{\xi=\eta} \exp(-\xi^2) d\xi$$

$$\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=\eta}^{\xi=\infty} \exp(-\xi^2) d\xi$$

Wichtige Eigenschaften

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad \operatorname{erf}(-\eta) = -\operatorname{erf}(\eta) \quad \frac{d}{d\eta} [\operatorname{erf}(\eta)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2)$$

Tabelle 8: Auswertung
der Fehlerfunktion

η	$\operatorname{erf}(\eta)$	$\operatorname{erfc}(\eta)$	$2/\sqrt{\pi} \exp(-\eta^2)$
0	0	1	1,128
0,05	0,056	0,944	1,126
0,1	0,112	0,888	1,117
0,15	0,168	0,832	1,103
0,2	0,223	0,777	1,084
0,25	0,276	0,724	1,060
0,3	0,329	0,671	1,031
0,35	0,379	0,621	0,998
0,4	0,428	0,572	0,962
0,45	0,475	0,525	0,922
0,5	0,520	0,480	0,879
0,55	0,563	0,437	0,834
0,6	0,604	0,396	0,787
0,65	0,642	0,378	0,740
0,7	0,678	0,322	0,691
0,75	0,711	0,289	0,643
0,8	0,742	0,258	0,595
0,85	0,771	0,229	0,548
0,9	0,797	0,203	0,502
0,95	0,821	0,179	0,458
1	0,843	0,157	0,415
1,1	0,880	0,120	0,337
1,2	0,910	0,090	0,267
1,3	0,934	0,066	0,208
1,4	0,952	0,048	0,159
1,5	0,966	0,034	0,119
1,6	0,976	0,024	0,087
1,7	0,984	0,016	0,063
1,8	0,989	0,011	0,044
1,9	0,993	0,007	0,030
2	0,995	0,005	0,021

Bessel-Funktionen *

Tabelle 9: Auswertung der
Bessel-Funktionen 1. und 2. Art

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$2/\pi \cdot K_0(x)$	$2/\pi \cdot K_1(x)$
0	1	0	∞	∞
0,2	1,0100	0,1005	1,1160	3,0410
0,4	1,0404	0,2040	0,7095	1,3910
0,6	1,0920	0,3137	0,4950	0,8294
0,8	1,1665	0,4329	0,3599	0,5486
1	1,2661	0,5652	0,2680	0,3832
1,2	1,3937	0,7147	0,2028	0,2768
1,4	1,5534	0,8861	0,1551	0,2043
1,6	1,7500	1,0848	0,1197	0,1532
1,8	1,9896	1,3172	$0,9290 \cdot 10^{-1}$	0,1163
2	2,2796	1,5906	0,7251	$0,8904 \cdot 10^{-1}$
2,2	2,6291	1,9141	0,5683	0,6869
2,4	3,0493	2,2981	0,4470	0,5330
2,6	3,5533	2,7554	0,3527	0,4156
2,8	4,1573	3,3011	0,2790	0,3254
3	4,8808	3,9534	0,2212	0,2556
3,2	5,7472	4,7343	0,1757	0,2014
3,4	6,7848	5,6701	0,1398	0,1592
3,6	8,0277	6,7028	0,1114	0,1261
3,8	9,5169	8,1404	$0,8891 \cdot 10^{-2}$	$0,9999 \cdot 10^{-2}$
4	11,302	9,7595	0,7105	0,7947
4,2	13,443	11,706	0,5684	0,6327
4,4	16,010	14,046	0,4551	0,5044
4,6	19,093	16,863	0,3648	0,4027
4,8	22,794	20,253	0,2927	0,3218
5	27,240	24,336	0,2350	0,2575
5,2	32,584	29,254	0,1888	0,2062
5,4	39,009	35,182	0,1518	0,1653
5,6	46,738	42,328	0,1221	0,1326
5,8	56,038	50,946	$0,9832 \cdot 10^{-3}$	0,1064
6	67,234	61,342	0,7920	$0,8556 \cdot 10^{-3}$
6,2	80,718	73,886	0,6382	0,6879
6,4	96,962	89,026	0,5146	0,5534
6,6	116,54	107,31	0,4151	0,4455
6,8	140,14	129,38	0,3350	0,3588
7	168,59	156,04	0,2704	0,2891
7,2	202,92	188,25	0,2184	0,2331
7,4	244,34	227,18	0,1764	0,1880
7,6	294,33	274,22	0,1426	0,1517
7,8	354,69	331,10	0,1153	0,1424
8	427,56	399,87	$0,9325 \cdot 10^{-4}$	$0,9891 \cdot 10^{-4}$
8,2	515,59	483,05	0,7543	0,7991
8,4	621,94	583,66	0,6104	0,6458
8,6	750,46	705,38	0,4941	0,5220
8,8	905,80	852,66	0,4000	0,4221
9	1.093,0	1.030,90	0,3239	0,3415
9,2	1.320,7	1.246,70	0,2624	0,2763
9,4	1.595,3	1.507,90	0,2126	0,2236
9,6	1.927,5	1.824,10	0,1722	0,1810
9,8	2.329,4	2.207,10	0,1396	0,1465
10	2.815,7	2.671,00	0,1131	0,1187

Spezielle Funktionen

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x) = 2 \cosh^2(x) - 1$$

$$\operatorname{artgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{mit} \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \text{mit} \quad (|x| \geq 1)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\eta^2) d\eta \quad \text{mit} \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\exp(\ln(x)) = x$$

$$\lg(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Reihen

- Arithmetische Reihe

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$$

- Geometrische Reihe

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} aq^{\nu} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{unendliche Reihe:} \quad s = \sum_{\nu=0}^{\infty} aq^{\nu} = a \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

- Taylor-Reihe

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

- Potenzreihen spezieller Funktionen

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} x^{\nu} \quad \text{mit} \quad \binom{m}{\nu} = \frac{m!}{\nu!(m-\nu)!}$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{x^{\nu}}{\nu}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{2\nu!}$$

Differentialrechnung

- Produktregel

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = [f \cdot g]' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

- Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{f}{g} \right]' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

- Kettenregel

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = [f(g(x))]' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

- Totales Differential einer Funktion $z = f(x,y)$

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

- Ableitung einer zusammengesetzten Funktion mehrerer Veränderlicher, d.h. $z = f(x,y)$ mit $x(t)$ und $y(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ableitungen elementarer Funktionen

Funktion	$\xrightarrow{d/dx(\dots)}$	Ableitung
x^n		$n x^{n-1}$
$\exp(x)$		$\exp(x)$
$\ln(x)$		$\frac{1}{x}$
a^x		$a^x \ln(a)$
$\sin(x)$		$\cos(x)$
$\cos(x)$		$-\sin(x)$
$\tan(x)$		$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$		$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$

Funktion	$\xrightarrow{d/dx(\dots)}$	Ableitung
$\sinh(x)$		$\cosh(x)$
$\cosh(x)$		$\sinh(x)$
$\tanh(x)$		$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\coth(x)$		$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$
$\lg(x)$		$\frac{1}{\ln(10)} \frac{1}{x}$

Unbestimmte Ausdrücke

Regeln von Bernoulli de l'Hospital

- Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ mit $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$$

- Unbestimmte Ausdrücke der Form $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}\right)'}$$

Integralrechnung

- Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{mit der Stammfunktion} \quad F(x)$$

- Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Differentiation eines Integrals nach der oberen Grenze

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt &= f(x) \\ \frac{d}{dx} \int_a^x f(x,t)dt &= \int_a^x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x,t)\end{aligned}$$

Integrationsregeln

- Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

- Substitutionsregel

$$\int f(x)dx \quad \text{Substitution von} \quad x = g(t) \quad \rightarrow \quad t = h(x)$$

– unbestimmte Integration

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt + C$$

– bestimmte Integration

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Integrale elementarer Funktionen

Integrand \rightarrow Stammfunktion

$$f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x)dx$$

$$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x|$$

$$\sin(x) \rightarrow -\cos(x)$$

$$\cos(x) \rightarrow \sin(x)$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} \rightarrow -\cotan(x)$$

$$\tan(x) \rightarrow -\ln|\cos(x)|$$

$$\cot(x) \rightarrow \ln|\sin(x)|$$

$$\frac{1}{a^2 + x^2} \rightarrow \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{a^2 - x^2} \rightarrow \frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \frac{x}{a}$$

$$(|x| < a) \rightarrow = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} \rightarrow -\frac{1}{a} \operatorname{arcoth} \frac{x}{a}$$

$$(|x| > a) \rightarrow = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$\frac{1}{a^4 - x^4} \rightarrow \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \dots$$

$$+ \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a}$$

Integrand \rightarrow Stammfunktion

$$f(x) \rightarrow F(x) = \int f(x)dx$$

$$\exp(x) \rightarrow \exp(x)$$

$$a^x \rightarrow \frac{a^x}{\ln(a)}$$

$$\sinh(x) \rightarrow \cosh(x)$$

$$\cosh(x) \rightarrow \sinh(x)$$

$$\frac{1}{\sinh^2(x)} \rightarrow -\operatorname{ctanh}(x)$$

$$\tanh(x) \rightarrow \ln|\cosh(x)|$$

$$\coth(x) \rightarrow \ln|\sinh(x)|$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \rightarrow \operatorname{arsinh} \frac{x}{a}$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \rightarrow \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \rightarrow \operatorname{arcosh} \frac{x}{a}$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} \rightarrow \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \dots$$

$$\pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

Integrale jeweils plus Integrationskonstante C

Integrationsmethoden

- gebrochen rationale Funktionen

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx \quad \text{mit den Polynomen } Q(x), P(x) \quad \rightarrow \quad \text{Partialbruchzerlegung}$$

- irrationale Funktionen

$R(\dots)$ = rationale Funktion von (\dots)

$$\int R(\sinh(x), \cosh(x)) dx \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1-t^2} dt$$

$$\int R(\sinh(x)) \cdot \cosh(x) dx \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad t = \sinh(x)$$

$$\int R(\cosh(x)) \cdot \sinh(x) dx \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad t = \cosh(x)$$

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right] dx \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right) dx \quad \text{mit } ac - b^2 \neq 0$$

$$ac - b^2 > 0, a > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad \sinh(t) = \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$$

$$ac - b^2 < 0, a > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad \cosh(t) = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$$

$$ac - b^2 < 0, a < 0 \quad \rightarrow \quad \text{Substitution} \quad \sinh(t) = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$$

- trigonometrische Funktionen

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx \rightarrow \text{Substitution} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\int R(\sin(x)) \cdot \cos(x) dx \rightarrow \text{Substitution} \quad t = \sin(x)$$

$$\int R(\cos(x)) \cdot \sin(x) dx \rightarrow \text{Substitution} \quad t = \cos(x)$$

- andere transzendente Funktionen

$$\int R(\exp(x)) dx \rightarrow \text{Substitution} \quad t = \exp(x)$$

$$\int R(\ln(x)) dx \rightarrow \text{Substitution} \quad t = \ln x$$

$$\dots \rightarrow \text{partielle Integration}$$

Anwendung ein- bzw. mehrfacher partieller Integration bei Integralen folgender Form:

$$\int \exp(ax) \sin(bx) dx^* \qquad \int P(x) \exp(ax)$$

$$\int \exp(ax) \cos(bx) dx^* \qquad \int P(x) \ln(bx)$$

$$\int \exp(ax) \sinh(bx) dx^* \qquad \int P(x) \sin(bx)$$

$$\int \exp(ax) \cosh(bx) dx^* \qquad \int P(x) \cos(bx)$$

$$\int P(x) \sinh(bx)$$

$$\int P(x) \cosh(bx)$$

*) Die wiederholte Anwendung der partiellen Integration führt wieder auf das ursprüngliche Integral: Auflösen einer algebraischen Gleichung

Differentialgleichungen

Die Ordnung einer Differentialgleichung ist die höchste darin auftretende Ableitung. Wird neben den Bedingungen der DGL auch noch ein bestimmter Ausgangszustand (Anfangswerte) bestimmt, so spricht man von einem Anfangswertproblem.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

- Separable Typen

$$\text{Typ: } y' = f(x) \cdot g(y) \quad \rightarrow \quad \text{Lösung: } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

$$\text{Typ: } y' = f(ax + by + c) \quad \rightarrow \quad \text{Substitution: } z = ax + by + c$$

$$\dots \rightarrow \text{separable DGL: } z' = a + b f(z)$$

- Lineare DGL

Die abhängige Variable y und ihre Ableitungen treten nur in der ersten Potenz auf. Koeffizienten $f(x)$ nicht konstant, inhomogen falls $g(x) \neq 0$

$$\text{Typ: } y' + y f(x) = g(x)$$

$$\rightarrow \text{Lösung: } y = \exp\left(-\int f(x) dx\right) \left(C + \int g(x) \exp\left(\int f(x) dx\right) dx\right)$$

- Bernoullische DGL

$$\text{Typ: } y' + y f(x) = g(x) y^n \quad \rightarrow \quad \text{Substitution: } z = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n) y^{-n} y'$$

$$\dots \rightarrow \text{lineare DGL: } z' + (1-n)f(x)z \dots$$

$$\dots = (1-n)g(x)$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung größer als Eins lassen sich immer auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Hat eine gewöhnliche Differentialgleichung in y_1 die Ordnung n , so führt man dazu die folgenden Hilfsfunktionen ein:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_3 \\&\vdots \\y_{n-1}' &= y_n \\y_n' &= f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)\end{aligned}$$

Dadurch erhält man ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, die wie oben gelöst werden können.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\text{Typ: } y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad \rightarrow \quad \text{Lösung: } y = y_H + y_P$$

Homogene Lösung

Ansatz $y_H = \exp(\mu x)$, Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms, das für die homogene Lösung ermittelt worden ist:

$$\mu^2 + a_1 \mu + a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

Fallunterscheidung Nullstellen:

- $\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \mu_1 \neq \mu_2$ (zwei reelle Nullst.)

$$\text{Ansatz: } y_H = C_1 \exp(\mu_1 x) + C_2 \exp(\mu_2 x)$$

$$a_1 = 0, a_0 < 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{1/2} = \pm \sqrt{-a_0}, \quad \mu = \sqrt{-a_0}$$

$$\text{Ansatz: } y_H = C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \cosh(\mu x)$$

- $\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{1/2} = -\frac{a_1}{2}$ (eine doppelte Nullst.)

$$\text{Ansatz: } y_H = \exp\left(-\frac{a_1}{2} x\right) (C_1 + C_2 x)$$

- $\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) < 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm i \sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}$ (konj. komplexe Nullst.)

$$\text{Ansatz: } y_H = \exp\left(-\frac{a_1}{2} x\right) \cdots$$

$$\cdots \left(C_1 \sin\left(x \sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}\right) + C_2 \cos\left(x \sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}\right) \right)$$

$$a_1 = 0, a_0 > 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{1/2} = \pm i \sqrt{a_0}, \quad \mu = \sqrt{a_0}$$

$$\text{Ansatz: } y_H = C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x)$$

Partikuläre Lösung – Spezielle Form des Störglieds

$$f(x) = \exp(kx) (P_n(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x))$$

Ansatz in Form des Störglieds:

$$y_P = \exp(kx) (M_n(x) \cos(\omega x) + N_n(x) \sin(\omega x)) \cdot x^m$$

- Für $\omega \neq 0$ müssen immer beide Polynome M_n und N_n in den Lösungsansatz aufgenommen werden, für $\omega = 0$ entfällt N_n .
- Die Polynome M_n und N_n müssen immer vollständig in den Lösungsansatz aufgenommen werden, d.h. kein Koeffizient ist als Null anzunehmen.

Fallunterscheidung für m auf Grundlage der Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\mu_1 = \mu_2 \stackrel{!}{=} k \quad \rightarrow \quad m = 2$$

$$\mu_{1/2} \stackrel{!}{=} k \pm i\omega \quad \rightarrow \quad m = 1$$

$$\text{ansonsten:} \quad \mu_{1/2} \neq k \pm i\omega \quad \rightarrow \quad m = 0$$

Einsetzen des Störglieds $f(x)$ und der Ansatzfunktion y_P in die Differentialgleichung. Die Koeffizienten der Polynome $M_n(x)$ und $N_n(x)$ werden durch Koeffizientenvergleich ermittelt.

Partikuläre Lösung – Allgemein

Lösung des Faltungsintegrals

$$y_P(x) = \int_0^x y_{H,0}(x - \xi) \cdot f(\xi) d\xi$$

Hier ist $y_{H,0}$ eine spezielle homogene Lösung mit den Anfangs-/Randbedingungen $y_H(0) = 1$ und $y'_H(0) = 1$.