Day 74 Gradient Descent 數學式介紹

Gradient Descent數學式

陳宇春
出題教練

本日知識點目標

- 了解 Gradient Descent 的數學定義與程式樣貌

Gradient梯度

- 在微積分裡面，對多元函數的參數求 ∂ 偏導數，把求得的各個參數的偏導數以向量的形式寫出來，就是梯度。
- 比如函數 f(x), 對 x 求偏導數，求得的梯度向量就是 (∂f/∂x)，簡稱 grad f(x) 或者 ▽f (x)

$$Function(x)=ydata=b+w*xdata$$

最常用的優化算法 -梯度下降

- 目的：沿著目標函數梯度下降的方向搜索極小值（也可以沿著梯度上升的方向搜索極大值
- 要計算 Gradient Descent，考慮
  - Loss = 實際 ydata – 預測 ydata
  - = w* 實際 xdata – w*預測 xdata (bias 為 init value，被消除)
  - Gradient = ▽f (θ) (Gradient = ∂L/∂w)
  - 調整後的權重 = 原權重 – η(Learning rate) * Gradient

So,

$$w \leftarrow w - \eta \; \partial L/\partial w$$

(更新，每走一步更新一次)

梯度下降的算法調優

CUPOY

- Learning rate 選擇，實際上取值取決於數據樣本，如果損失函數在變小，說明取值有效，否則要增大 Learning rate

- 自動更新 Learning rate - 衰減因子 decay
    - 算法參數的初始值選擇。初始值不同，獲得的最小值也有可能不同，因此梯度下降求得的只是局部最小值；當然如果損失函數是凸函數則一定是最優解。

    - 學習率衰減公式¶
        - lr_i = lr_start * 1.0 / (1.0 + decay * i)
        - 其中 lr_i 為第一迭代 i 時的學習率，lr_start 為初始值，decay 為一個介於[0.0, 1.0]的小數。從公式上可看出：
            - decay 越小，學習率衰減地越慢，當 decay = 0時，學習率保持不變
            - decay 越大，學習率衰減地越快，當 decay = 1時，學習率衰減最快

梯度下降的算法調優

- 使用 momentum 是梯度下降法中一種常用的加速技術。

  x ← x – α ∗ dx (x沿負梯度方向下降)

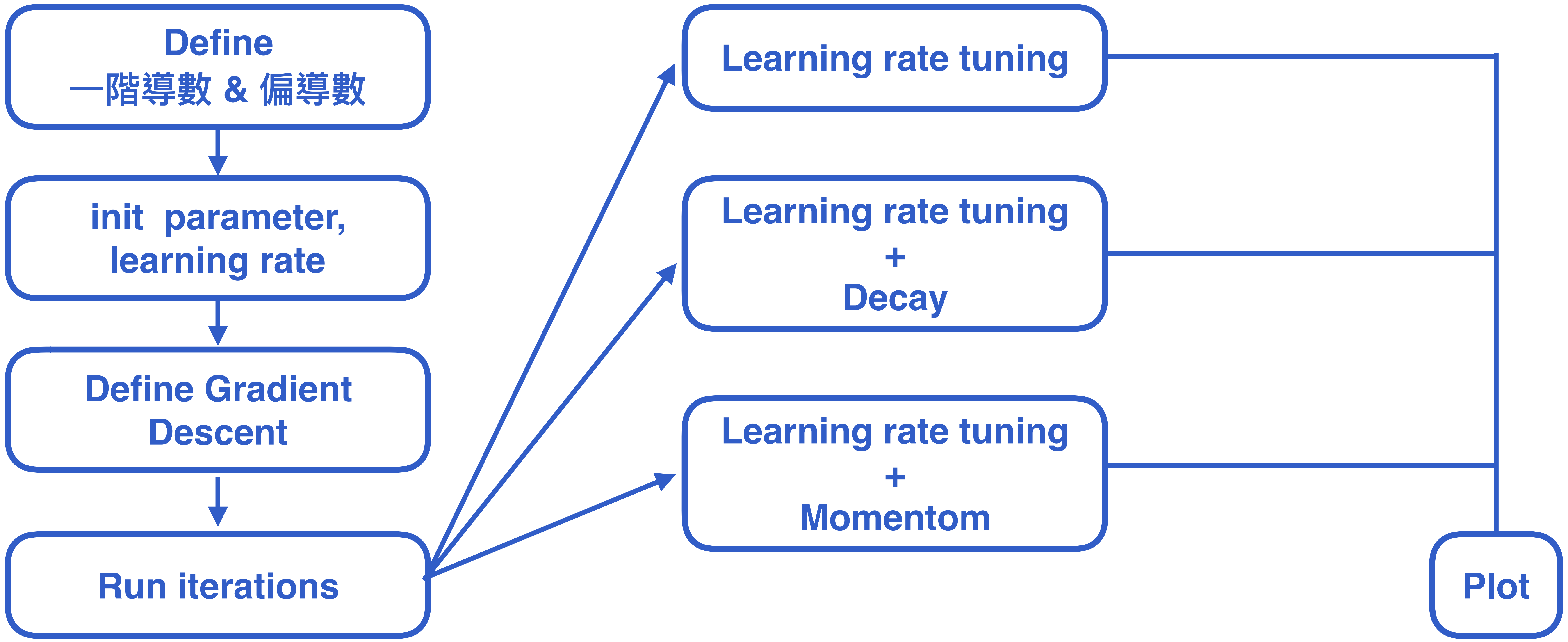
  v = ß ∗ v – a ∗ d x

  x ← x + v

- 其中 ß 即 momentum 係數，通俗的理解上面式子就是，如果上一次的 momentum（即ß）與這一次的負梯度方向是相同的，那這次下降的幅度就會加大，所以這樣做能夠達到加速收斂的過程

前述流程 / python程式 對照

前述流程



前述流程 / python程式 對照

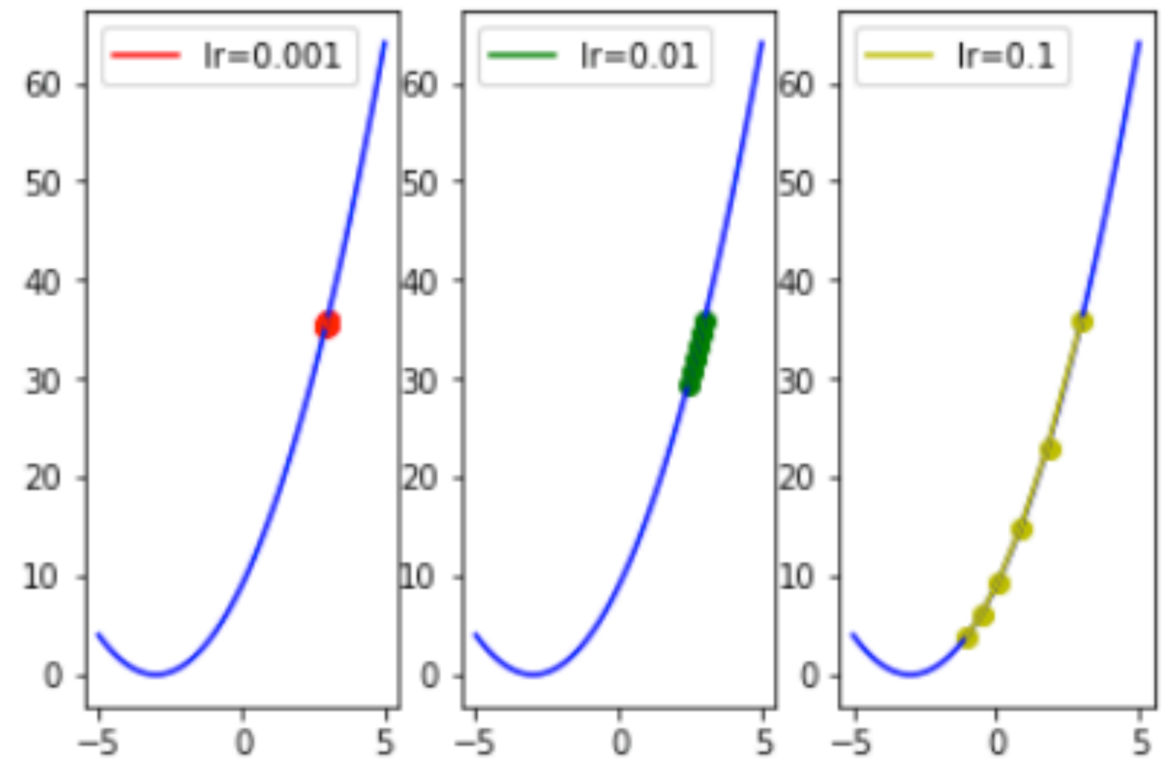
CUPOY

python 程式 (請參閱今日範例)

```
line_x = np.linspace(-5, 5, 100)
line_y = func(line_x)
plt.figure('Gradient Desent: Learning Rate')

w_init = 3
epochs = 5
x = w_init
lr = [0.001, 0.01, 0.1]

color = ['r', 'g', 'y']
size = np.ones(epochs+1) * 10
size[-1] = 70
for i in range(len(lr)):
    x = GD(w_init, dfunc, epochs, lr=lr[i])
    plt.subplot(1, 3, i+1)
    plt.plot(line_x, line_y, c='b')
    plt.plot(x, func(x), c=color[i], label='lr={}'.format(lr[i]))
    plt.scatter(x, func(x), c=color[i])
    plt.legend()
plt.show()
```



前述流程 / python程式 對照

python 程式 (請參閱今日範例)

學習率衰減公式

lr_i = lr_start * 1.0 / (1.0 + decay * i)

其中lr_i為第一迭代i時的學習率，lr_start為原始學習率，decay為一個介於[0.0, 1.0]的小數。從公式上可看出：

decay越小，學習率衰減地越慢，當decay = 0時，學習率保持不變。 decay越大，學習率衰減地越快，當decay = 1時，學習率衰減最快

```python
def GD_decay(w_init, df, epochs, lr, decay):
    xs = np.zeros(epochs+1)
    x = w_init
    xs[0] = x
    v = 0
    for i in range(epochs):
        dx = df(x)
        # 學習率衰減
        lr_i = lr * 1.0 / (1.0 + decay * i)
        # v表示x要改变的幅度
        v = - dx * lr_i
        x += v
        xs[i+1] = x
    return xs
```

前述流程 / python程式 對照

CUPOY

python 程式 (請參閱今日範例)

Momentum (動量)

如何用"動量"來解決:

(1)學習率較小時，收斂到極值的速度較慢。

(2)學習率較大時，容易在搜索過程中發生震盪。

當使用動量時，則把每次w的更新量v考慮為本次的梯度下降量 (-dx*lr), 與上次w的更新量v乘上一個介於[0, 1]的因子momentum的和

w ← x − α ∗ dw (x沿負梯度方向下降)

v = ß ∗ v − α ∗ d w

w ← w + v

(ß 即momentum係數，通俗的理解上面式子就是，如果上一次的momentum（即ß）與這一次的負梯度方向是相同的，那這次下降的幅度就會加大，所以這樣做能夠達到加速收斂的過程

如果上一次的momentum（即ß）與這一次的負梯度方向是相反的，那這次下降的幅度就會縮減，所以這樣做能夠達到減速收斂的過程

```
]: line_x = np.linspace(-5, 5, 100)
   line_y = func(line_x)
   plt.figure('Gradient Desent: Decay')

   x_start = -1
   epochs = 10

   lr = [0.1, 0.3, 0.9, 0.99]
   decay = [0.0, 0.01, 0.5, 0.9]

   color = ['k', 'r', 'g', 'y']
```

重要知識點複習：梯度下降法（Gradient descent）

CUPOY

- Gradient descent 是一個一階最佳化算法，通常也稱為最速下降法。
- 要使用梯度下降法找到一個函數的局部極小值，必須向函數上當前點對應梯度（或者是近似梯度）的反方向的規定步長距離點進行疊代搜索。
    - avoid local minima
        - Item-1：在訓練神經網絡的時候，通常在訓練剛開始的時候使用較大的 learning rate，隨著訓練的進行，我們會慢慢的減小 learning rate
            - 學習率較小時，收斂到極值的速度較慢。
            - 學習率較大時，容易在搜索過程中發生震盪
        - Item-2：隨著 iteration 改變 Learning
            - 衰減越大，學習率衰減地越快。 衰減確實能夠對震盪起到減緩的作用

重要知識點複習：

- avoid local minima
  - Item-3：momentum
    - 如果上一次的 momentum 與這一次的負梯度方向是相同的，那這次下降的幅度就會加大，所以這樣做能夠達到加速收斂的過程
    - 如果上一次的 momentum 與這一次的負梯度方向是相反的，那這次下降的幅度就會縮減，所以這樣做能夠達到減速收斂的過程

解題時間

It’s Your Turn

請跳出PDF至官網Sample Code＆作業
開始解題