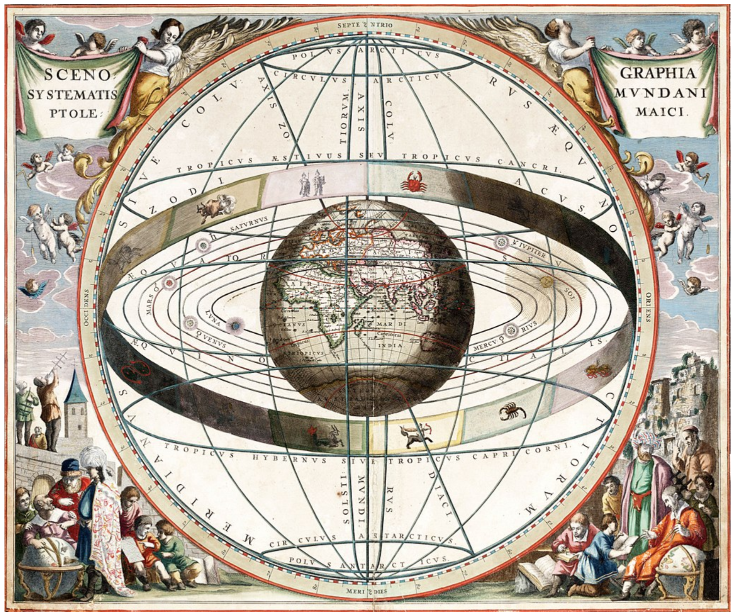


Fisica

UNITN - Lazzerini Thomas, Cappelletti Samuele

Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

Indice

1 Formulario

1.1 Unità di misura

T	=>	10^{12}	G	=>	10^9
M	=>	10^6	k	=>	10^3
m	=>	10^{-3}	μ	=>	10^{-6}
n	=>	10^{-9}	p	=>	10^{-12}

2 Introduzione

2.1 Il metodo sperimentale

Distingue discipline sperimentali da discipline non sperimentali. Si compone di diverse fasi:

1. **formulazione ipotesi**: si fa un'**ipostesi descrittiva** (in **linguaggio matematico**) della porzione di mondo che si vuole analizzare, di conseguenza si decide di **non considerare** altre caratteristiche del mondo che non centrano con l'ipotesi che stiamo formulando;

2. **esperimento**: si va a ricreare una situazione dove l'aspetto che vogliamo analizzare è **sicuramente presente** e **influenzato il meno possibile da fattori esterni**;

3. **esecuzione dell'esperimento**: si verifica l'ipotesi, formulata in modo matematico, confrontando i valori ottenuti con l'esperimento con quelli che si ottengono dalla nostra ipotesi.

In base alla "verifica" dell'ipotesi possiamo fare una differenziazione:

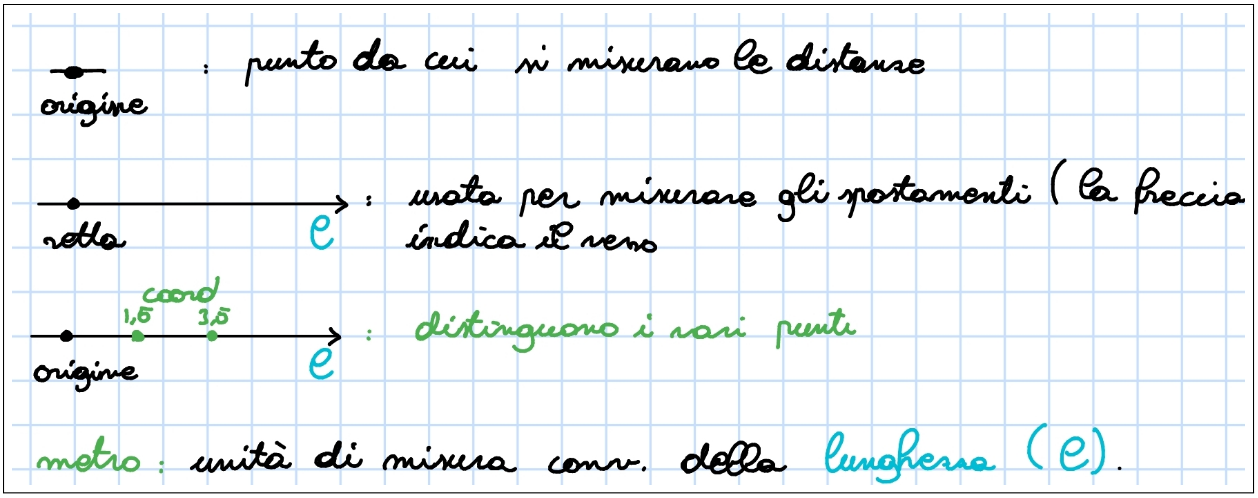
- **teoria**: l'ipotesi **non è ancora verificata**, o è verificata **parzialmente**;
- **legge fisica**: l'ipotesi **è verificata** (in un certo ambito);

3 Cinetica dei punti

Descrive il movimento dei corpi.

3.1 Sistema di riferimento

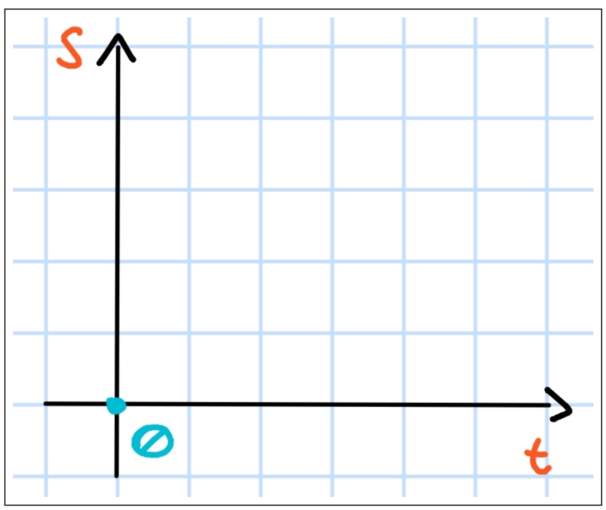
Specifichiamo un sistema di riferimento per il seguente argomento:



Una cosa importante da notare è che un numero singolo può rappresentare solo cose "**mono-dimensionali**" e che, soprattutto, non tutte le unità di misura possono rappresentare qualsiasi cosa (ad es.: l'età dell'universo non si può rappresentare con i metri).

3.2 Diagramma dello spazio

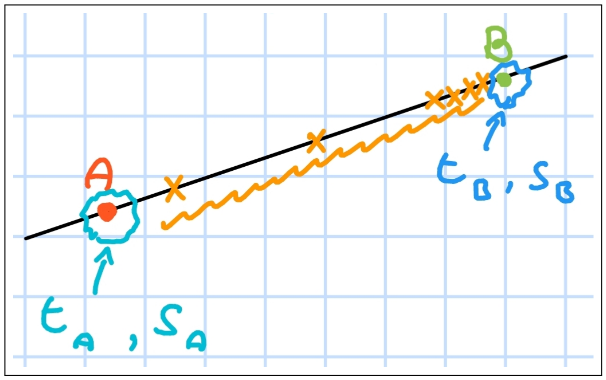
Rappresentiamo lo spostamento nel tempo tramite un "***diagramma dello spazio***":



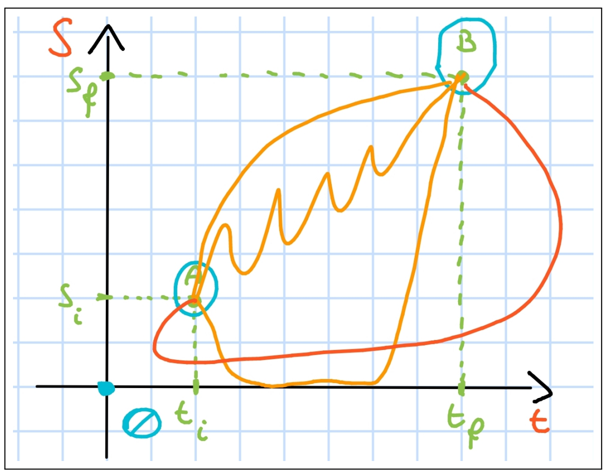
In particolare, in questo diagramma rappresentiamo sull'asse Y lo **spostamento** (s) (rappresentato come **valore uni-dimensionale**) e sull'asse X il **tempo** (t) (anche rappresentato come **valore uni-dimensionale**). *Nota che il diagrmma NON RAPPRESENTA una posizione, ma lo spostamento in relazione al tempo*.

3.3 Caso semplice

Vediamo un semplice caso di utilizzo per capire come usare i diagrammi dello spazio:



Possiamo immaginare di avere un oggetto in movimento su una retta tra i punti A e B, come possiamo rappresentare questo movimento nel diagramma? Come prima cosa posizioniamo i "fenomeni" (***def. qualcosa che appare evidente all'osservazione***), ovvero i **punti A e B**, nota che non è detto che questi punti coincidano con dei "punti particolari" (ad esempio l'origine) nel nostro diagramma. In particolare, a questi punti associamo **un valore sull'asse del tempo (t_i, t_f)** ed **un valore sull'asse dello spazio (s_i, s_f)**. A questo punto esistono **infiniti possibili percorsi** tra il punto A ed il punto B, ad esempio:



Importante notare che ***non tutti questi percorsi, pur avendo senso matematico, hanno senso fisico***! Ad esempio, il percorso in rosso "torna indietro nel tempo"!

3.4 Moto rettilineo uniforme

STUB#################### (In teoria lo fa dopo, controllare)

3.5 Velocità

Possiamo immaginare la velocità (v) come la "***def. variazione dello spazio rapportato al tempo impiegato per percorrerlo***", in particolare la velocità è data dalla formula:

$$v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vediamo un semplice esempio:

$$s_i = 400m,\ s_f = 700m,\ t_i = 7:30 = 450min,\ t_f = 7:40 = 460min$$

$$v = \frac{700m - 400m}{460min - 450min} = \frac{300m}{600s} = 0,5m/s$$

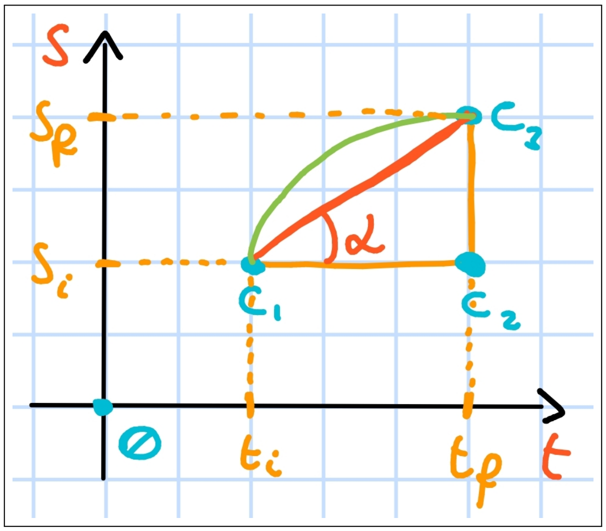
Nota che nella seconda uguaglianza nell'esempio abbiamo **convertito i minuti in secondi**, puoi immaginare che abbiamo posto "$min = (60s)$", quindi abbiamo fatto "$10min = 10 * (60s) = 600s$".

3.5.1 Velocità istantanea

Quella che abbiamo calcolato prima possiamo vederla come "velocità media" di tutto il percorso, la **velocità istantanea** invece possiamo vederla come la ***def. velocità in un punto specifico del percorso***. Immagina quindi di fare la formula:

$$v_{ist} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Nota che quando si usa la lettera "δ" stiamo ad indicare una **piccola** (infinitesima) **variazione**. Ora, se il valore di s viene espresso **in funzione di t**, quindi abbiamo $s(t)$, e la funzione "$s(t)$" è **derivabile**, allora la **velocità istantanea corrisponde alla derivata prima della funzione** $s(t)$, che a sua volta corrisponde a $\frac{ds}{dt}$.



Supponendo che il **moto del nostro punto** venga identificato dalla curva in verde, il rapporto tra la lunghezza dei 2 cateti C_1C_2 (Δt) e C_2C_3 (Δs) rappresenta la **tangente** α, che in questo caso rappresenta la **velocità media**. Ora, se restringiamo l'intervallo di t in modo che tenda a 0 e calcoliamo il valore della derivata in quel punto otterremo la velocità istantanea.

3.5.2 Accelerazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la **velocità in un punto corrisponde al valore della derivata prima** (della funzione che rappresenta il moto del nostro corpo) **in quel punto**, per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che **l'accelerazione corrisponde al rapporto tra la derivata della velocità e la derivata del tempo**, ottenendo quindi la formula $\frac{dv}{dt}$, operativamente dobbiamo fare la **derivata seconda della funzione che rappresenta il moto del nostro punto**.

3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accellerato

Cominciamo col dire che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ricorda che con dv e dt intendiamo le **derivate**. Da questa ricaviamo dv, ovvero:

$$dv = a * dt \;\; => \int_A^B dv = \int_A^B (a * dt) \;\; => v_B - v_A = a(t_B - t_A)$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Ottenuta questa formula, possiamo passare a calcolare lo **spazio in funzione del tempo**, ovvero:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \;\; => \;\; ds = v * dt \;\; => \;\; \int_A^B ds = \int_A^B v * dt \;\; => \;\; s_B - s_A = \int_A^B [v_0 + a(t - t_0)]dt \;\; =>$$
$$=> \;\; s_B - s_A = \left[v_0 * t + a\frac{(t-t_0)^2}{2} \right]_A^B \;\; => \;\; s_B - s_A = v_0 * t_B + a\frac{(t_B - t_0)^2}{2} - v_0 * t_A + a\frac{(t_A - t_0)^2}{2}$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Terminiamo dicendo che in questo moto **l'accelerazione è costante**, quindi:

$$\underline{a(t) = a}$$

3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule

Vediamo alcuni esempi:

3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme) Supponiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A (t_0, s_0) ad un punto B (t_1, s_1) tramite un **moto rettilineo uniforme**, abbiamo i seguenti dati:

$t_0 = ?$	$s_0 = 1,5Km$	$v = 36m/s$
$s_1 = 11,5Km$	$t_1 = 0,3h$	

L'obiettivo è trovare i dati mancanti (ovvero t_0). Noi sappiamo che la velocità "v" corrisponde a:

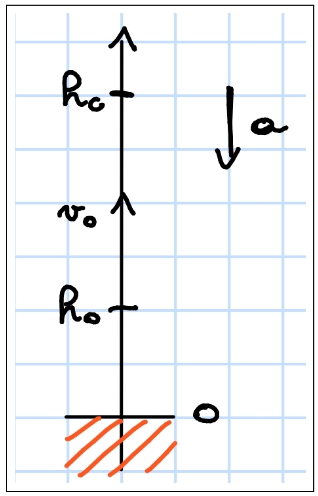
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} => ... => t_0 = t_1 - \frac{s_1 - s_0}{v}$$

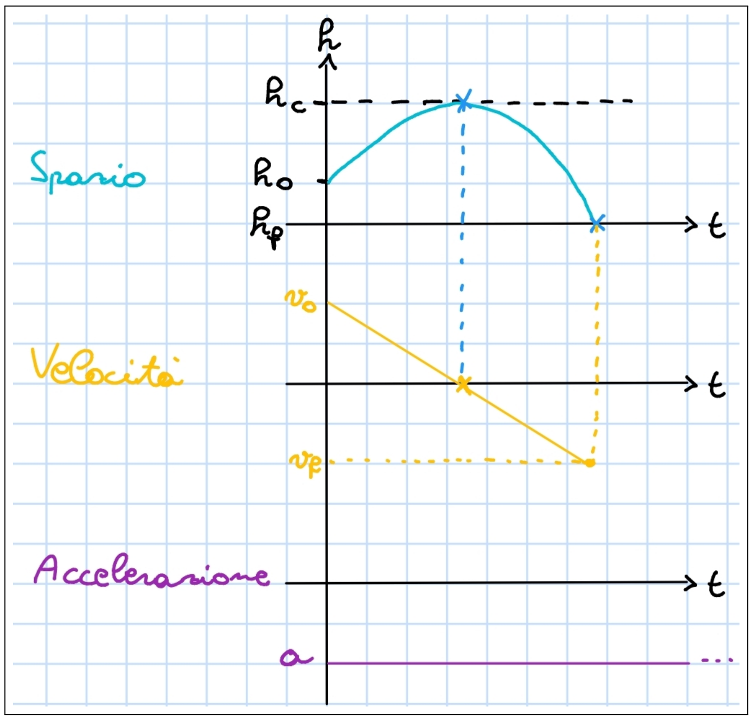
Sostituendo i valori forniti, otteniamo che $t_0 \approx 802,22s$

3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accellerato) Supponiamo di avere un oggetto all'altezza h_0 e di lanciarlo verso l'alto con una velocità v_0 nell'istante t_0 con un'accelerazione a. Dobbiamo trovare l'altezza (h_c) ed il tempo (t_c) di culmine e, supponendo che alla fine l'oggetto raggiunga l'altezza finale "h_f", trovare il tempo finale "t_f". Supponiamo di avere i seguenti dati:

$h_0 = 100m$	$t_0 = 0s$	$v_0 = 5m/s$	$a = -9,8m/s^2$
$t_c = ?$	$h_c = ?$	$t_f = ?$	$h_f = 0m$

Includiamo delle immagini complementari:





Procediamo per punti:

1. Vogliamo trovare il tempo di culmine (t_c), quindi poniamo $v(t) = 0$ e troviamo la t che rende vera l'equazione:

$$v(t) = 0 \;\; => \;\; v_0 + a(t-0) \;\; => \;\; t_c = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5m/s}{-9,8m/s^2} \approx 0,51s$$

2. Vogliamo calcolare l'altezza di culmine (h_c), per farlo usiamo la formula dello spazio:

$$h_c = s(t_c) = s_0 + v_0(t_c - 0) + \frac{1}{2}a(t_c - 0)^2 =$$
$$= 100m + 5m/s * (0,51s) + 1/2(-9,8m/s^2) * (0,51s)^2 \approx 101,28m$$

3. Vogliamo calcolare il tempo "finale" (t_f), per farlo usiamo sempre la formula dello spazio:

$$s(t_f) = h_f = 0 \;\; =>$$
$$=> \;\; s_0 + v_0(t_f - 0) + \frac{1}{2}a(t_f - 0)^2 = 0$$

A questo punto abbiamo una funzione di secondo grado con $x = t_f$, quindi usiamo la formula solita:

$$t_{f\ 1/2} = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{(-\frac{v_0}{a})^2 - 2\frac{s_0}{a}}$$
$$t_f = 0,51s + \sqrt{(0,51s)^2 - 2 * \frac{100m}{-9,8m/s^2}} \approx 5,06s$$

Nota che possiamo subito sostituire il "$\pm$" con un "+" dato che la radice sarà sicuramente più grande di quel $0,51$ che la precede, quindi non avrebbe fisicamente senso fare altrimenti (tempo negativo).

3.6 Moto armonico

Nel moto armonico abbiamo un'**accelerazione oscillante**, nella forma $\underline{a_0 * sin(t)}$. Il problema è che il sin (come tutte le funzioni matematiche) è adimensionale, quindi dobbiamo aggiungere delle componenti aggiuntive per **rendere il tempo "t" adimensionale**, in paricolare abbiamo che:

$$a(t) = a_0 * sin(\omega t + \varphi)$$

dove "ω" rappresenta la **pulsazione** e "φ" la **fase**. Nota che **abbiamo già l'accelerazione**, ovvero $a_0 * sin(t)$, quindi per calcolare velocità e spazio procediamo per **integrazioni successive**, con gli estremi di integrazione che corrispondono al **punto di inizio e di fine** della nostra misurazione.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = v_0 + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} \omega a_0 sin(\omega t + \varphi)d\tau = \\ &= v_0 + \frac{1}{\omega}\Big[-cos(\omega t + \varphi)\Big]_{t_0}^{t} = v_0 - \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= V - \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Nota che il testo in rosso sopra, in quanto costante, viene raccolto in V, passiamo ora a calcolare lo spazio (che corrisponde all'integrazione della velocità):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau = \\ &= s_0 + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= S + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

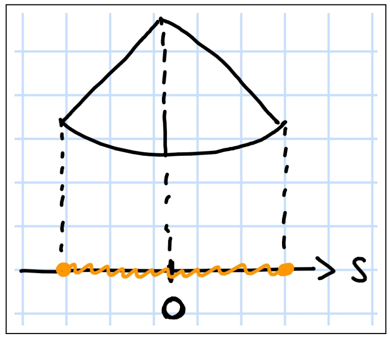
In definitiva, le formule che interessano a noi sono:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 * sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= V - \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t + \varphi) \\ s(t) &= S + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ricorda che le parti in rosso sono costanti (di solito per noi varranno 0), mentre l'accelerazione ci è stata fornita all'intizio, quindi teniamo quella. Vediamo un "esempio":

3.6.1 Esempio di moto armonico

Ipotiziamo di avere una situazione del genere: vogliamo misuare l'andamento dell'ombra di un'altalena (che va solo avanti e indietro) sulla superficie.



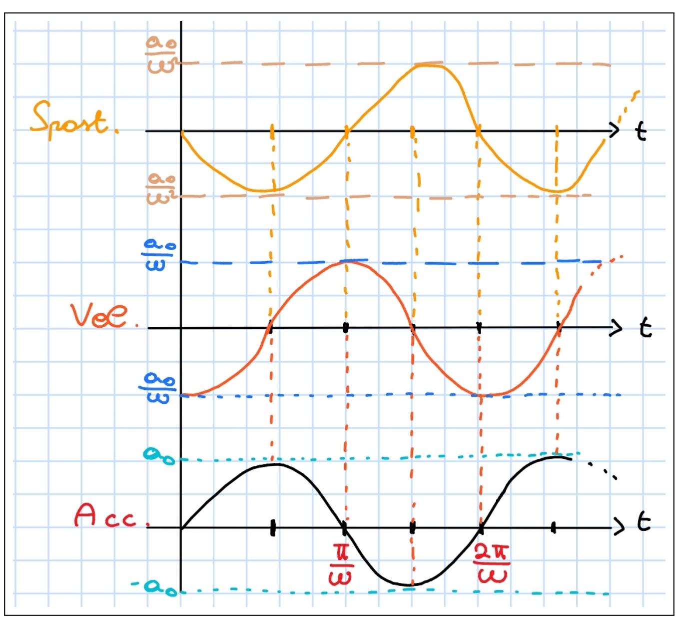
Noi ***assumiamo sempre che φ (ovvero la fase)$= 0$*** e che ***cominciamo da $t_0 = 0$***, quindi le nostre formule diventano:

$$a(t) = a_0 * sin(\omega t)$$
$$v(t) = -\frac{a_0}{\omega} cos(\omega t)$$
$$s(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} sin(\omega t)$$

Prima di passare al grafico dobbiamo calcolare il valore della nostra variabile t, ora noi sappiamo che ωt, dato che $\varphi = 0$, deve rappresentare una rotazione completa (2π):

$$\omega t = 2\pi \quad => \quad t = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

Nota che il nostro T rappresenta il **periodo**. Con queste funzioni/variabili, possiamo passare al calcolo dei grafici temporali:



3.7 I moti piani

Prima di partice con i moti veri e propri, introduciamo velocemente i **vettori**.

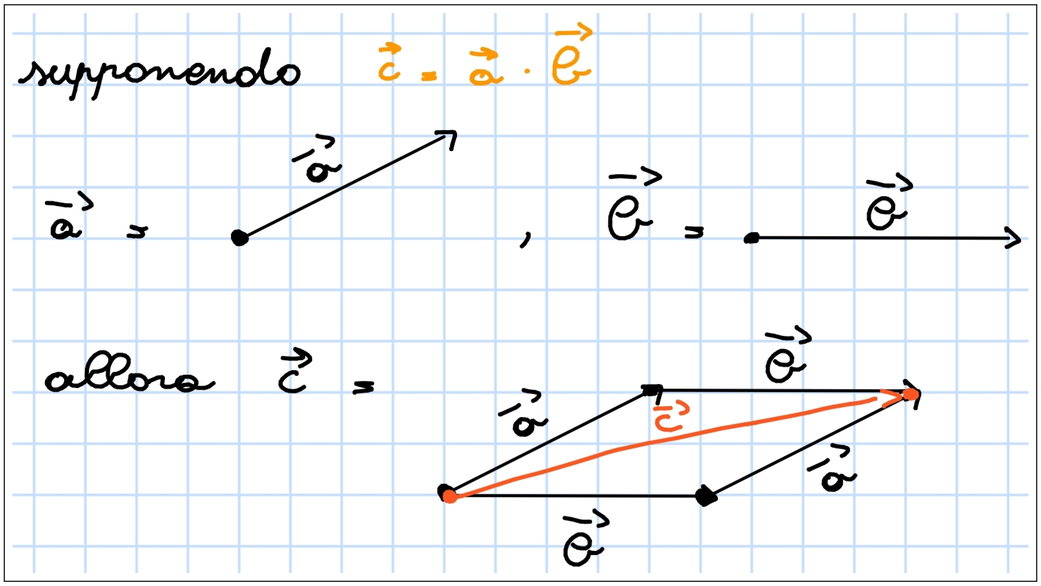
3.7.1 I vettori

Passiamo ora a considerare i **moti con 2 dimensioni**, per questo motivo dobbiamo introdurre i **vettori** composti da:

- punto di inizio;
- verso;
- modulo (la lunghezza del vettore);
- direzione (la retta su cui giace il vettore);

I vettori, si comportano in modi leggermente diversi rispetto ai numeri "normali", in particolare a noi interessa:

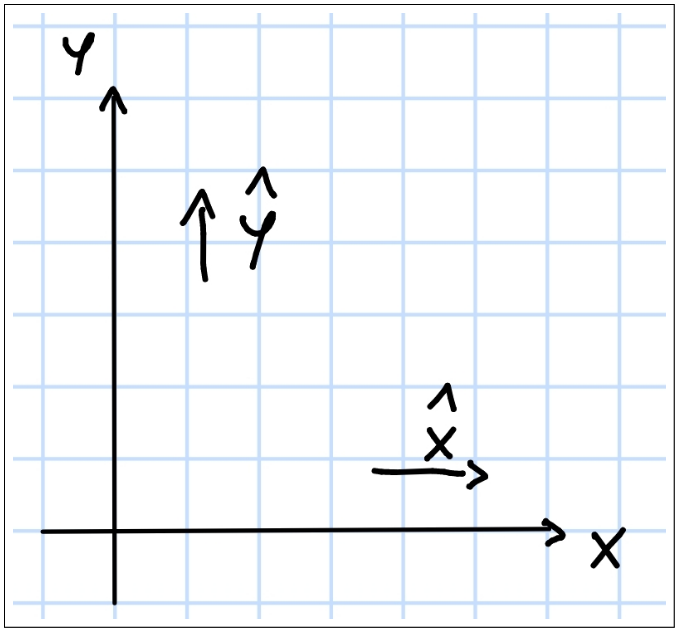
- somma: si fa con la **regola del parallelogramma**, ovvero:



- prodotto per scalare: quando si moltiplica un vettore per uno scalare, semplicemente si va a **moltiplicare il modulo del vettore**, in particolare "$\vec{a} = b * \vec{c} => |\vec{a}| = b * |\vec{c}|$"

3.7.2 Sistema di riferimento

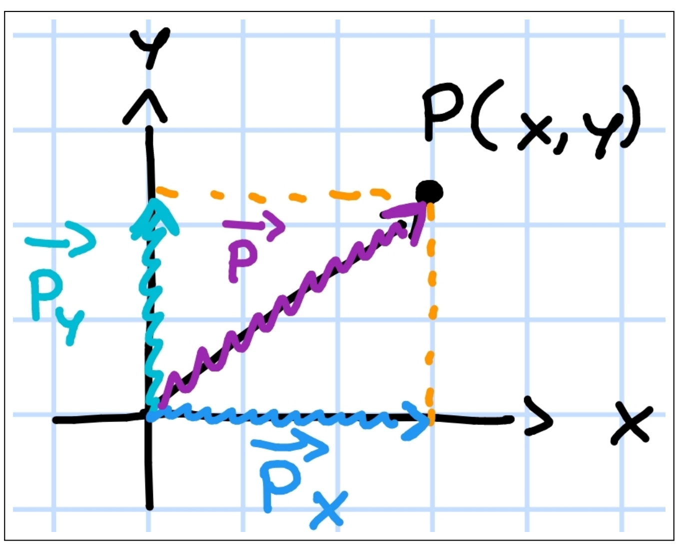
Introduciamo ora il sistema di riferimento per questo moto:



Da questo punto in poi, rappresentiamo il moto sul **piano cartesiano**: rappresenteremo quindi il **movimento "fisico"** del moto in quanto **non più unidimensionale!** Per quanto riguarda gli assi, si usano quelli che vengono definiti **versori** che matematicamente si rappresentano come $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$. In questo modo otteniamo qualcosa di **adimensionale** e che ha **modulo 1 per definizione**.

Quando vogliamo rappresentare un punto, possiamo farlo **attraverso un vettore**, che a sua volta si può rappresentare come la **somma di 2 vettori "unidimensionali"** (uno per ogni asse) che a loro volta si possono rappresentare come **spostamenti sui vari assi moltiplicati per il versore associato**:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}$$



Allo stesso modo possiamo rappresentare velocità ed accelerazione!

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x * \hat{x} + a_y * \hat{y}$$

Ora, possiamo anche rappresentare un vettore sottoforma di "matrice", in questo modo:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Ovvero lo spostamento, ad esempio, è composto dalla somma dello spostamento sull'asse x S_x e di quello sull'asse y S_y

3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione

Partiamo con la velocità: sappiamo che la velocità per il moto unidimensionale è data dalla **derivata dello spostamento**, per quanto riguarda il moto piano non cambia molto: dobbiamo soltanto **derivare una somma di 2 componenti!** Ovvero:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d[S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}]}{dt} = \frac{dS_x}{dt} * \hat{x} + {\color{red} S_x * \frac{d\hat{x}}{dt}} + \frac{dS_y}{dt} * \hat{y} + {\color{red} S_y * \frac{d\hat{y}}{dt}}$$

Quelle 2 parti evidenziate in rosso sono speciali: rappresentano il possibile movimento degli assi. Per il momento, le considereremo **sempre nulle** in quanto i **nostri assi non si muoveranno**! Quindi, in soldoni, otteremmo che la nostra velocità equivale a:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS_x/dt \\ dS_y/dt \end{bmatrix}$$

Nota però che questo ragionamento possiamo farlo **solo se gli assi restano fermi**, altrimenti dovremmo fare delle considerazioni in più. Allo stesso modo, possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione, ottenendo anche qui:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \end{bmatrix}$$

3.7.4 Esempio

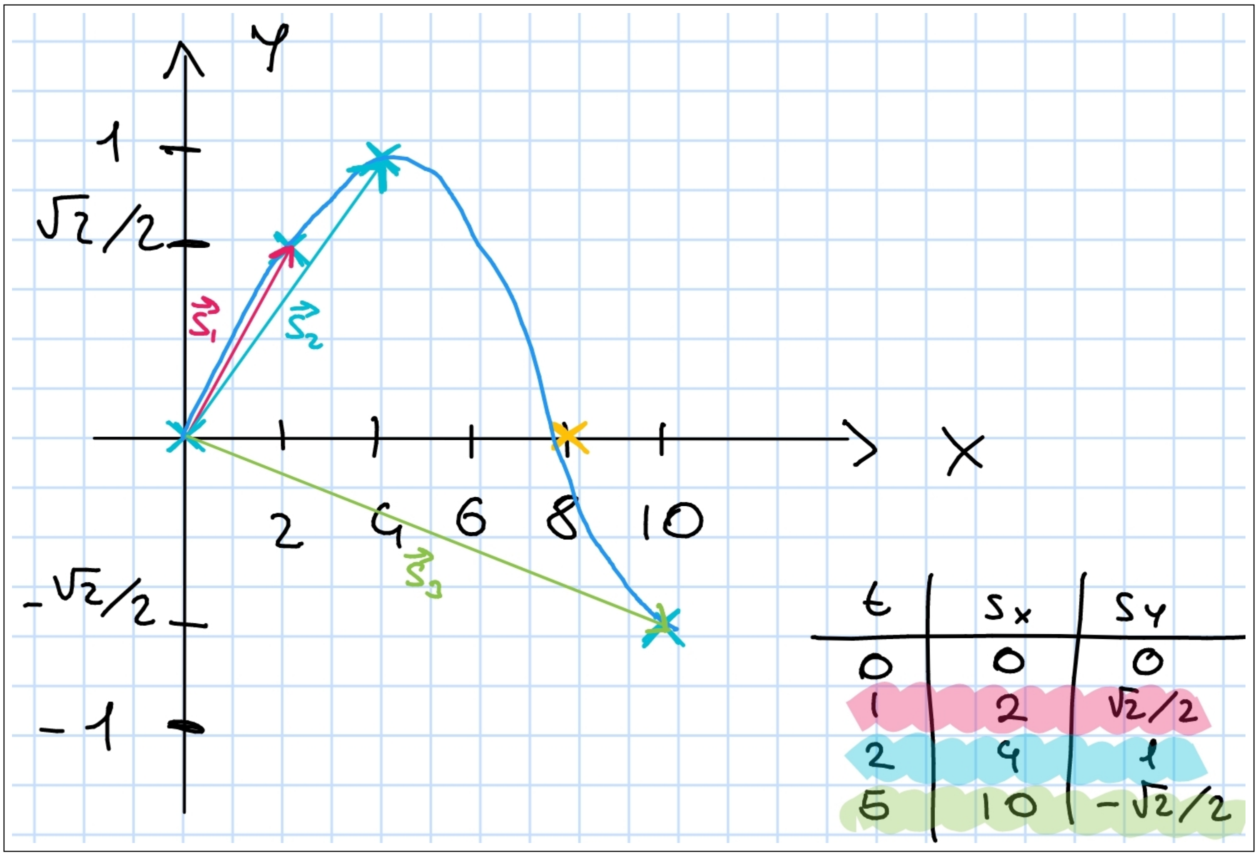
Vediamo un esempio, dobbiamo calcolare velocità e accelerazione sapendo che:

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m/s \\ 1m * sin(\pi/4\ Hz) \end{bmatrix}$$

Nota che $Hz = s^{-1}$, la prima cosa da fare ora è **rappresentare qalche punto**, possiamo farlo in una tabella:

t	S_x	S_y
0	0	0
1	2	$\sqrt{2}/2$
2	4	1
5	10	$-\sqrt{2}/2$

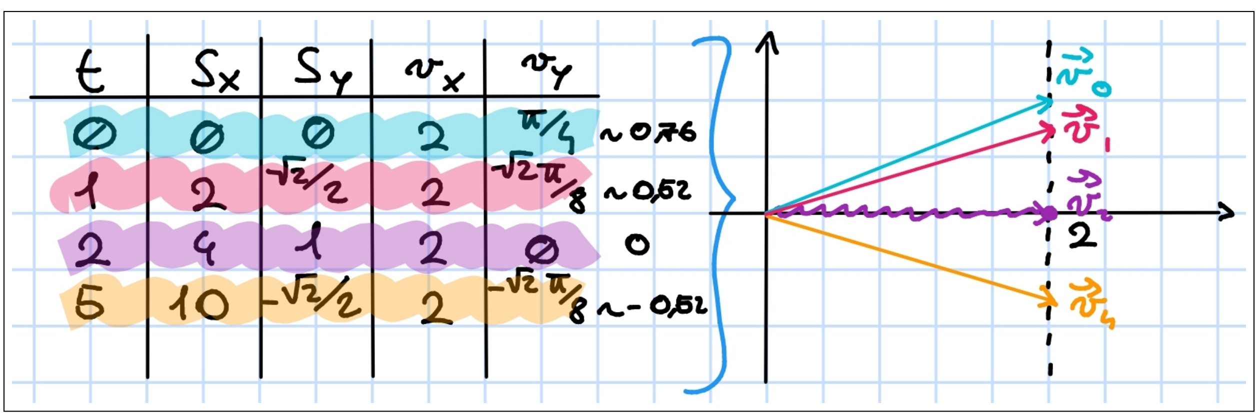
Rappresentiamo ora questi punti sul piano cartesiano (aggiungendo anche i vettori che rappresentano i punti), ricorda inoltre che il piano ora **rappresenta la traiettoria e <u>NON</u> più lo spazio/tempo**:



Ora **calcoliamo la velocità**, per farlo ci basta **derivare per t**:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4}cos(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Rifacciamo la tabella e rappresentiamo il tutto sul grafico:



Terminiamo con l'accelerazione, che corrisponde semplicemente alla **derivata della velocità**, otterremo quindi:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Ricapitolando i risultati ottenuti, abbiamo che:

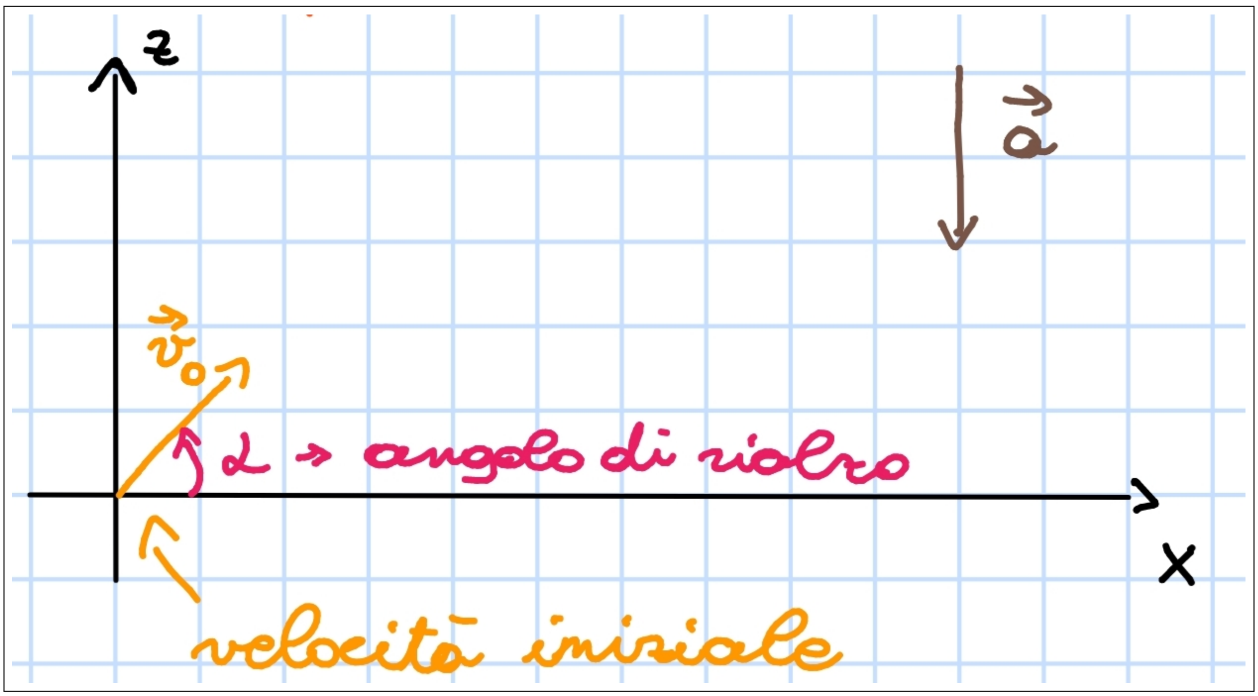
$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$
$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4}cos(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$
$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

3.8 Il moto parabolico

Iniziamo introducendo il sistema di riferimento che andremo ad utilizzare.

3.8.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito un grafico:



Avremmo quindi un oggetto che parte da **un punto iniziale**, che per convenzione supponiamo **(0, 0)**, con una **certa velocità iniziale $\vec{v}_0$** ed un certo **angolo di rialzo α**. Inoltre sarà presente una **certa accelerazione "$\vec{a} = -g$" che punterà verso il basso** (suppungo che $-g$ indichi l'accelerazione gravitazionale terrestre). In questa sezione assumiam questa convenzione:

$$|\vec{v}_0| = v_0$$

Quindi possiamo riscrivere il vettore della velocità in questo modo:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 * cos(\alpha) \\ v_0 * sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

3.8.2 Rappresentare spazio, gittata γ, altezza massima h_{max} e velocità

Ora, come facciamo a rappresentare i grafici di spazio e velocità? Nota che l'accelerazione non serve, in quanto ci viene fornita in questo caso. Per quanto riguarda lo spazio, possiamo "spezzare" il problema in 2:

- spazio percorso in "larghezza" (x): lo trattiamo come un semprece problema di **moto rettilineo uniforme**, infatti l'accelerazione va solo verso il basso, non avanti o indietro;
- spazio percorso in "altezza" (z): in questo caso lo consideriamo un problema di **moto uniformemente accelerato**, infatti abbiamo un'accelerazione costante che preme verso il basso.

Quindi otterremo le formule:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0 cos(\alpha)t = \underline{v_0 * cos(\alpha)t}$$
$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z}{2}t^2 = \underline{v_0 * sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2}$$

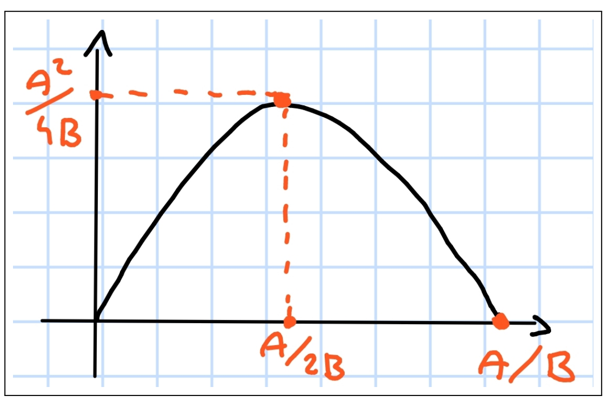
In definitiva, abbiamo che lo spazio corrisponde al vettore:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * cos(\alpha)t \\ v_0 * sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Ora proviamo a mettere insieme le 2 formule in modo da ottenere una funzione da poter rappresentare facilmente sul grafico:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$
$$z = v_{0z} * t - \frac{g}{2} * t^2 => \frac{v_{0z}}{v_{0x}} * x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right) * x^2 => Ax - Bx^2$$

Abbiamo ottenuto l'**equazione di una parabola!** In particolare, avremmo queste proporzioni:



Ora che abbiamo un grafico disegnato, ci risulta particolarmente semplice trovare altra 2 componenti importanti:

- **gittata** γ: ovvero la massima distanza percorsa in orizzontale. Possiamo ottenerla tramite la formula:

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{v_0}{v_{0x}} * \frac{2v_{0x}^2}{g} = \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}}{g} = \frac{v_0^2}{g} * 2 * sin(\alpha) * cos(\alpha) = \underline{\frac{v_0^2}{g} * sin(2\alpha)}$$

- **altezza massima** h_{max}: ovvero l'altezza di culmine della nostra parabola. Guardando il grafico possiamo vedere che corrisponde a:

$$h_{max} = \frac{A^2}{4B} = \frac{A}{4} * \frac{A}{B} = \frac{v_0z}{4v_{0x}} * \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}^2}{v_{0x}g} = \frac{v_0z}{4} * \frac{2 * v_{0z}}{g} = \frac{2v_{0z}^2}{4g} = \frac{1}{2} * \frac{v_{0z}^2}{g} = \underline{\frac{v_0^2 * sin^2(\alpha)}{2g}}$$

Terminiamo velocemente con la velocità che, ricordiamo, è la **derivata dello spazio percorso**:

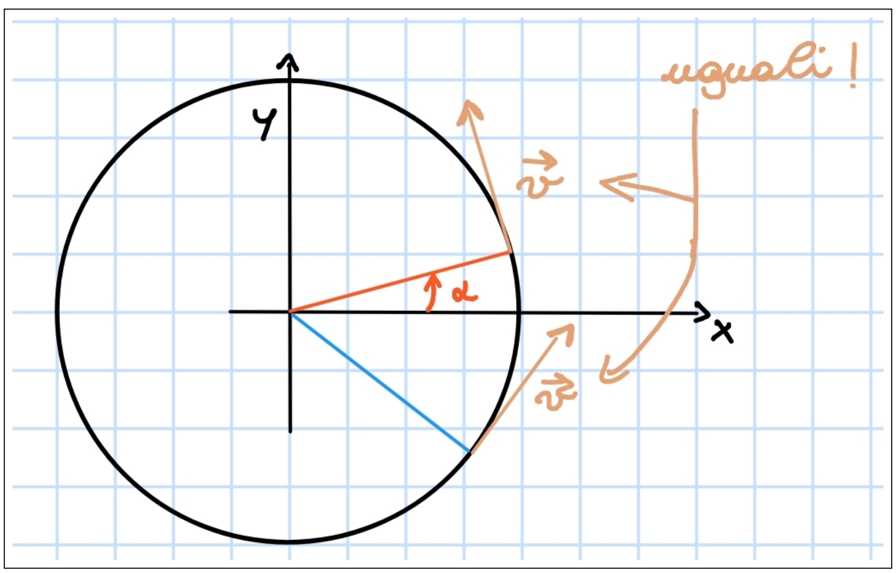
$$v_x(t) = \frac{d(v_0 * cos(\alpha)t)}{dt} = v_0cos(\alpha) = v_{0x}$$
$$v_z(t) = \frac{dS_z}{dt} = v_0 * sin(\alpha) - gt = v_{0z} - gt$$

3.8.2.1 Riassunto

Ricapitolando tutte le formule che abbiamo visto:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * cos(\alpha)t \\ v_0 * sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$
$$\gamma = \frac{v_0^2}{g} * sin(2\alpha)$$
$$h_{max} = \frac{v_0^2 * sin^2(\alpha)}{2g}$$
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - gt \end{bmatrix}$$

3.9 Moto circolare uniforme



Nel moto circolare uniforme la velocità è **costante**, infatti in tutti i punti la velocità **non** cambia lunghezza, cambia solo la sua direzione. La velocità in un punto, inoltre, è **sempre tangente** alla traiettoria in quel punto. Si hanno le seguenti formule:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t \qquad r(t) = R$$

dove R è il raggio della circonferenza e ω è la velocità angolare, definita come $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con T periodo. La **frequenza** è definita come $f = \frac{1}{T}$ e la **velocità** come:

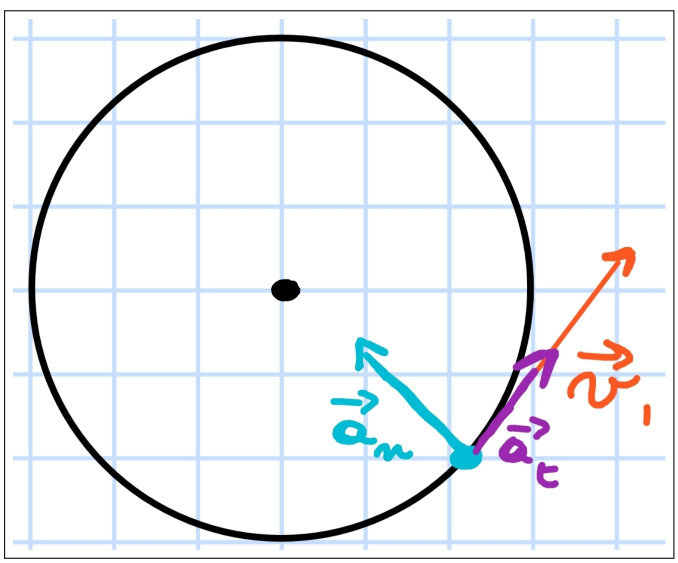
$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Osservando la formula qui sopra, possiamo notare che a meno che il raggio R non cambi, la velocità sarà costante, nel caso in cui cambia, invece, cambierà anche la velocità. Ora, ponendo l'origine del piano cartesiano come il centro della circonferenza, calcoliamo lo **spazio**, la **velocità** e l'**accelerazione** in funzione del tempo come segue:

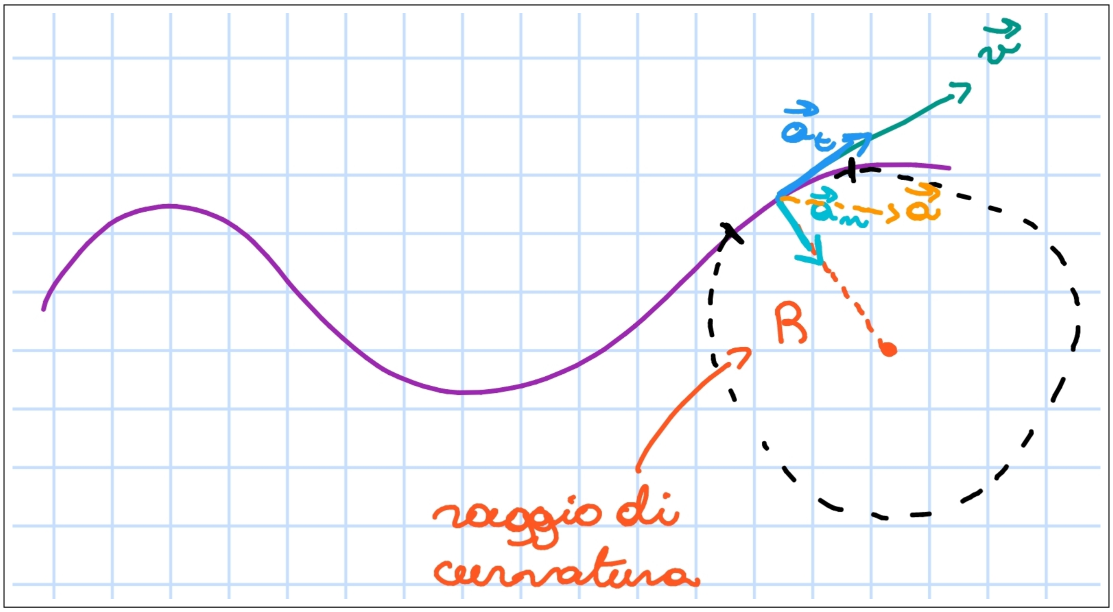
$$\vec{s}(t) = \begin{cases} x(t) = Rcos(\alpha(t)) \\ \\ y(t) = Rsin(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -R\frac{d\alpha}{dt}sin(\alpha(t)) = -\omega Rsin(\alpha(t)) \\ \\ v_y(t) = R\frac{d\alpha}{dt}cos(\alpha(t)) = \omega Rcos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 Rcos(\alpha(t)) \\ \\ a_y(t) = -\omega^2 Rsin(\alpha(t)) \end{cases}$$



Ora l'accelerazione si divide in due componenti, $\vec{a_t}$ (**accelerazione tangente**) e $\vec{a_n}$ (**accelerazione normale o centripeta**). La prima è parallela alla tangente nel punto e modifica il **modulo della velocità**, mentre la seconda è ortogonale alla tangente nel punto e modifica la **traiettoria(direzione)**. Dato un qualsiasi **moto piano**, se prendo una piccola parte di questo, allora può essere immaginato come un arco di circonferenza. Più il tratto è **grande** e più l'arco di circonferenza sembrerà **rettilineo**, più il tratto è **piccolo** e più l'arco di circonferenza sembrerà **curvo** e avrò corrispondentemente una circonferenza **grande** e una **piccola**.



In questo caso avrò quindi che le due componenti dell'accelerazione varranno:

$$|\vec{a_n}| = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a_t}| = \vec{a}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{a}\hat{v}$$

dove $\hat{v}$ è il **versore velocità**.

4 Dinamica

4.1 Leggi della dinamica

La **dinamica** si occupa dello studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause(**forze**), ovvero delle circostanze che lo determinano e lo modificano nel **tempo** e nello **spazio** del suo sistema di riferimento. Wikipedia Le leggi della dinamica sono 3 e sono le seguenti:

1. **Legge di Inerzia (I legge)**: un corpo rimane nel suo stato di quiete finchè non intervengono agenti esterni a modificarne questo stato. Questa legge vale sono in sistemi di riferimento inerziali;

2. **Legge di Newton (II legge)**: Viene definita la **quantità di moto** come $\vec{p} = m\vec{v}$, ovvero massa per velocità. Successivamente viene definita la forza ($\vec{F}$) come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove m è la **massa inerziale**, ovvero la capacità di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto, questa mette in relazione la velocità alla forza.
Nel caso in cui la massa non varia, allora la forza può essere definita come $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.
L'unità di misura della **forza** è il Newton (N) definito come $\frac{kg \cdot m}{s^2}$.

3. **Principio di azione e reazione (III legge)**: Quando il corpo 1 esercita una forza $\vec{F}$ sul corpo 2, quest'ultimo esercita sul corpo 1 una forza $-\vec{F}$, uguale e opposta.

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Osserviamo che la **prima legge** potrebbe sembrare un caso particolare della **seconda legge**, con $\vec{F} = \vec{0}$, ma in realtà non è così, infatti la seconda e la terza legge sono valide solo all'interno di sistemi di riferimento inerziali, che sono definiti dalla prima legge.

4.2 Forze impulsive

L'**impulso** $\vec{P}$ è definito come la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}$ in un Δt piccolo, ovvero:

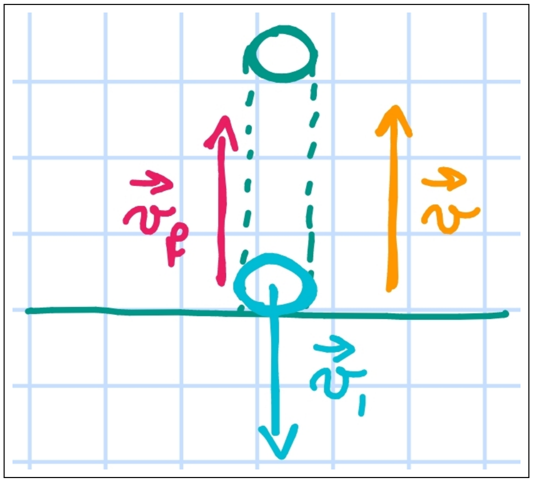
$$\vec{P} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt$$

E la **forza impulsiva** come:

$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

4.2.1 Esempio forze impulsive

Supponiamo di avere un pavimento ed una palla che viene lasciata in aria. Questa palla cadrà verso il pavimento fino a raggiungerlo, rimbalzare su esso e tornare in su (assumiamo che la velocità con cui torna in su sia la stessa con cui cade, quindi non agiscono fattori esterni come attriti, ecc.).



Se ho un vettore velocità $\vec{v}$, allora ho che:

$$\begin{aligned}\vec{p_i} &= m\vec{v_i} = -m\vec{v}\\ \vec{p_f} &= m\vec{v_f} = m\vec{v}\\ \Delta\vec{p} &= \vec{p_f} - \vec{p_i} = 2m\vec{v}\end{aligned}$$

4.2.2 Esercizio su forze impulsive

Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover calcolare $\vec{F}_{imp}$ (forza impulsiva):

$$m = 98g \qquad v = 10.2\frac{m}{s} \qquad \Delta t = 100ms$$

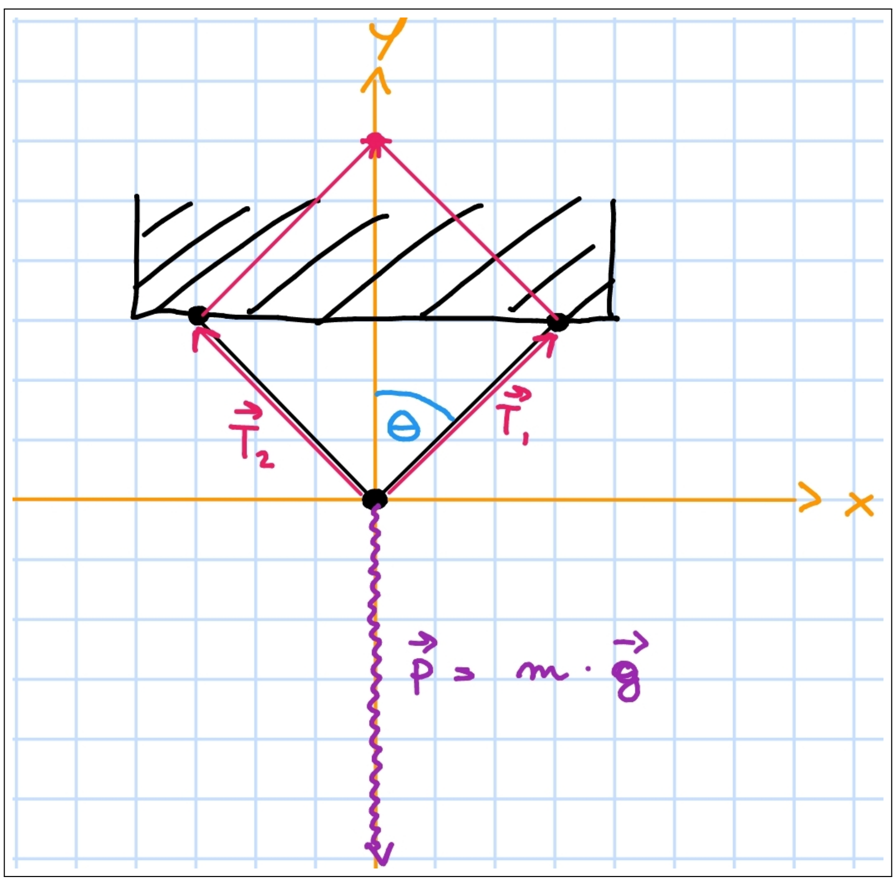
Procediamo ora quindi con calcolare $\Delta\vec{p}$ usando la formula appena calcolata sopra e una volta ottenuto il valore calcoliamo la $\vec{F}_{imp}$:

$$\Delta\vec{p} = 2m\vec{v} = 2 \cdot 10.2\frac{m}{s} \cdot 0.098kg = 0.99\frac{kg \cdot m}{s}$$
$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0.99\frac{kg \cdot m}{s}}{0.1s} = 9.99\frac{kg \cdot m}{s^2} = 9.99N$$

4.3 Esercizi sulla dinamica

Supponiamo di avere un oggetto appeso a due fili, che sono appesi al tetto, alla stessa distanza dall'oggetto e vogliamo trovare $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ tensioni dei fili, avendo i seguenti dati:

$$m = 100g \qquad \theta = 60°$$



Notiamo che l'oggetto resta fermo, quindi oltre a $\vec{p}$ (**forza peso**), su esso agiscono altre forze la cui somma è uguale e opposta a $\vec{p}$. Abbiamo quindi che la **risultante delle forze** $\vec{R} = \vec{0}$.

Ora possiamo notare che $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$ e abbiamo le seguenti forze:

$$\vec{p} = -mg\hat{y}$$
$$\vec{T_1} = T_x\hat{x} + T_y\hat{x} = Tsin\theta\hat{x} + Tcos\theta\hat{y}$$
$$\vec{T_2} = -T_x\hat{x} + T_y\hat{y} = -Tsin\theta\hat{x} + Tcos\theta\hat{y}$$

Ora ci ricordiamo che $\vec{R} = \vec{0}$ quindi:

$$\vec{R} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} => \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} =>$$
$$=> \begin{cases} R_x = 0 = Tsin\theta - Tsin\theta \\ R_y = 0 = -mg + Tcos\theta + Tcos\theta = -mg + 2Tcos\theta \end{cases}$$

La prima equazione del sistema vale zero, ora dalla seconda ricaviamo T:

$$mg = 2Tcos\theta => T = \frac{mg}{2Tcos\theta} = \frac{0.1kg \cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0.98N$$

4.4 Forze fondamentali

Le forze fondamentali sono le seguenti (scritte in ordine di intensità, dalla più debole alla più intensa):

- **Forza gravitazionale**: descrive l'interazione tra le masse gravitazionali. È una forza onnipresente, non esiste quindi nessuna componente di materia che ha massa, che non la risente;
- **Forza debole**: è la forza responsabile dell'interazione per cui i nuclei cambiano di natura (e.g. decadimento dei nuclei);
- **Forza elettromagnetica**: deriva dall'unificazione di forza elettrica e forza magnetica. È la forza responsabile della trazione della ripulsione di cariche ed è alla base delle forze che aggregano la materia;
- **Forza forte/nucleare**: è la forza responsabile della stabilità dei nuclei. Inizialmente si è definita come **forza nucleare**, ovvero che descrive un'interazione nucleare, tra protoni e neutroni, tra neutroni e neutroni e tra protoni e protoni. Poi è stato scoperto che i protoni e i neutroni non sono particelle fondamentali ma sono fatti di quark, e l'interazione è sentita dai quark, quindi è stata definita **forza forte**.

La forza elettromagnetica e la forza debole unificate formano la **forza elettrodebole**. Osserviamo che il quadro precedente, ovvero l'ordine di intensità, è **attuale**, era diverso nel passato e lo sarà anche nel futuro.

Quando due corpi/sistemi fisici interagiscono tra loro per una delle forze fondamentali, lo fanno perchè hanno una sensibilità a quel tipo di forza, che è detta **carica** ed è rappresentata dalla lettera q. Per la forza gravitazionale per esempio, un corpo/sistema fisico subisce una trazione gravitazionale se ha una **massa** (**carica gravitazionale**, q_G), ovvero la misura dell'inclinazione del corpo ad interagire con questa gravitazione. Per la forza elettromagnetica è uguale, se due oggetti sono neutri, non c'è trazione ne repulsione. E la stessa cosa vale per forza debole e forza forte.

Quella che chiamiamo carica in senso comune, in realtà è la **carica elettrica** (q_E).

4.5 Forze

4.5.1 Forza peso

La **forza peso** è descritta come segue, dato $\vec{g} = -g\hat{z}$:

$$\vec{F_p} = -cost \cdot \vec{g}$$

Ora applico la seconda legge della dinamica [pag.20] e ottengo:

$$\vec{F_p} = -cost \cdot \vec{g} = -m_G \cdot \vec{g}$$

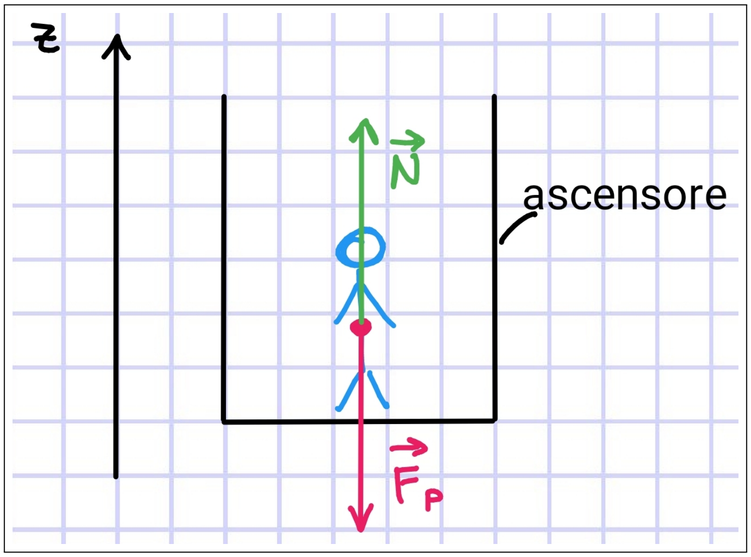
dove m_G è la **massa gravitazionale**.

Ora calcolo le forze esterne ($\vec{F}_{EXT}$):

$$\vec{F}_{EXT} = m_i \cdot \vec{a}$$

dove m_i è la **massa inerziale**, e posso assumere che $\vec{a} = \vec{g}$, e quindi di conseguenza, $m_i = m_G$.
Osserviamo che m_i e m_G sono uguali dal punto di vista quantitativo, ma non dal punto di vista concettuale. Infatti il primo è la capacità del corpo di opporsi al movimento, mentre il secondo è la carica dell'interazione gravitazionale che il corpo ha.

4.5.1.1 Esempio sensazione del peso Supponiamo di avere un'ascensore che ha 100 piani. La sensazione che si ha è di essere più "pesanti" quando l'ascensore parte per salire e più "leggeri" quando si ferma in alto.



Ora studiamo in particolare alcuni casi interessanti per vedere le differenze che ci sono:

- <u>**CASO INTERMEDIO**</u> (e.g. da piano 25 a piano 75):
  Supponiamo che l'ascensore sia ben isolata dall'ambiente, quindi che non ci siano vibrazioni, rumori, indicatore del piano, ecc., allora non si ha la percezione se ci si sta muovendo o se si è fermi. In questo

caso abbiamo:

$$\vec{v} = cost$$
$$\vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{R} = \vec{0}$$
$$|\vec{F_p}| = |\vec{N}| = N_0$$

- **<u>CASO PARTENZA IN SALITA</u>**:
Se siamo fermi in un piano inferiore al piano 100 e premiamo un piano più alto di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di più. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} = a\hat{z}$$
$$\vec{g} = -g\hat{z}$$
$$\vec{R} \neq \vec{0}$$
$$\vec{F_p} + \vec{N} = m\vec{a} => -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} => -mg + N = ma => N = ma + mg = N_0 + ma$$

con $ma > 0$.

- **<u>CASO PARTENZA IN DISCESA</u>**:
Se siamo fermi in un piano superiore al piano 0 e premiamo un piano più basso di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di meno. Questo caso è uguale a quello della **partenza in salita** solo che c'è una decelerazione. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} < 0$$
$$\vec{F_p} + \vec{N} = m\vec{a} => -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} => -mg + N = ma => N = ma + mg = N_0 + ma$$

con $ma < 0$.

- **<u>CASO PARTICOLARE</u>**:
Nel caso in cui si tagli in cavo dell'ascensore, sarà in caduta libera. Non si percepisce nessun effetto di reazione vincolare da parte del suolo/pavimento dell'ascensore. In caduta libera non si percepisce il peso. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} < 0$$
$$|\vec{a}| = |\vec{g}|$$
$$N = N_0 + ma = mg - mg = 0$$

4.5.2 Forza gravitazionale

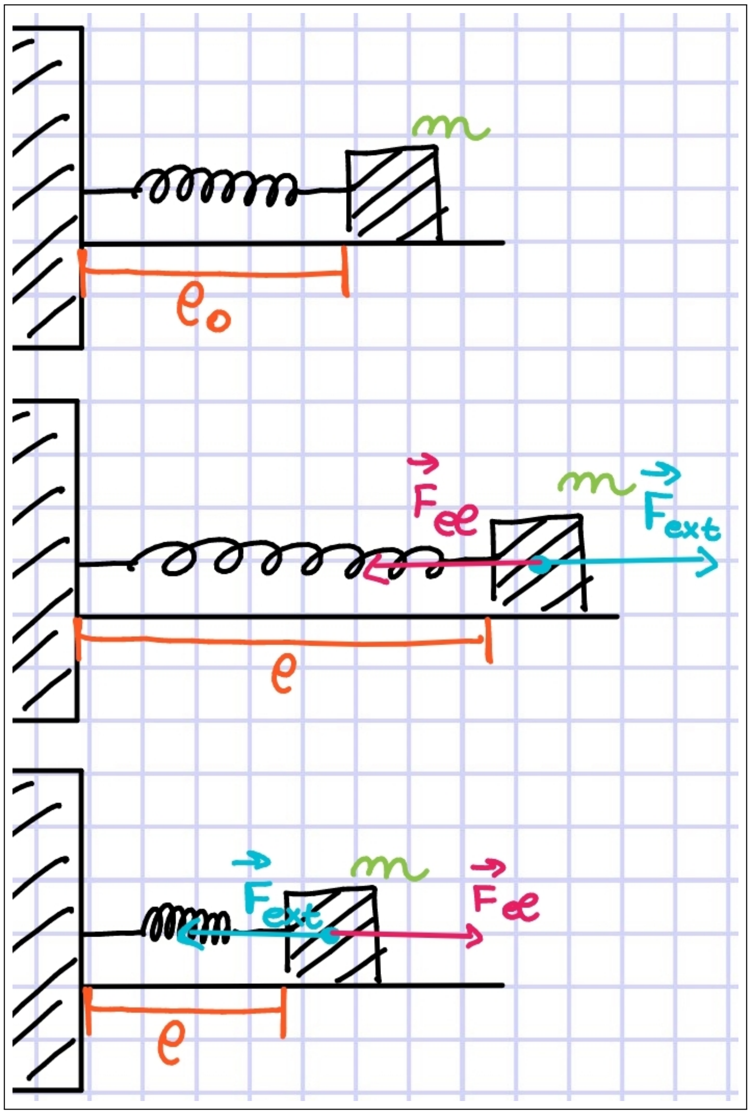
la **forza gravitazionale** ci dice che c'è un'attrazione con una certa costante di proporzionalità G, e l'intensità dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due masse e direttamente proporzionale al prodotto delle due masse, ovvero come descritto nella seguente formula:

$$\vec{F_G} = \frac{m_g M}{r^2}\hat{r}$$

Assumendo ora che $M = M_E$ e $r = r_E$, ovvero consideriamo massa e raggio della Terra, allora $\vec{F_G}$ è una costante uguale a $\vec{g}$.

4.5.3 Forza elastica

Supponiamo di avere una molla vincolata ad un supporto non movibile e fermo e all'altra estremità della molla attaccata una massa m. Assumiamo che non ci siano attriti.
Quando ci allontaniamo dalla **lunghezza di riposo**, l_0, della molla, quest'ultima si allunga o accorcia tramite una **sollecitazione esterna**.



Supponendo ora di avere una forza $\vec{F_{ext}}$ che agisce sulla massa, per far si che la massa rimanga ferma, vorrà dire che sulla massa agisce un'altra forza uguale e opposta esercitata dalla molla chiamata **forza elastica** $\vec{F_{el}}$.
Osserviamo che se la molla si allunga, allora $\vec{F_{ext}}$ e $\vec{F_{el}}$ avranno un verso, se invece la molla si accorcia, avranno verso opposto.
Osserviamo che la forza elastica è sempre opposta a $\Delta\vec{l} = \vec{l} - \vec{l_0}$, quindi se il verso di $\Delta\vec{l}$ è positivo, allora il verso di $\vec{F_{el}}$ è negativo, e viceversa.
La $\vec{F_{el}}$ e $\Delta\vec{l}$ sono proporzionali, infatti la formula della $\vec{F_{el}}$ è la seguente:

$$\vec{F_{el}} = -K(\vec{l} - \vec{l_0}) = -K\Delta\vec{l}$$

Dove K è detta **costante elastica** e la sua unità di misura è quindi $\frac{N}{m}$ (Newton/metro).
Osservando la formula precedente si può facilmente notare che la costante elastica è indipendente dalla

massa del corpo, infatti indica solo la durezza della molla.
Le **forze di richiamo**, non solo la forza elastica, sono proporzionali allo spostamento, ovvero quando il corpo si allontana dal suo equilibrio viene richiamato verso di esso tramite una forza di richiamo che è sempre direttamente proporzionale allo spostamento, cioè a quanto il corpo si allontana dall'equilibrio.
Ora consideriamo la massa m e abbiamo:

$$F = -K \cdot x$$

ovvero la forza è inversamente proporzionale allo spostamento.
Ora considerando la seconda legge della dinamica [pag.20], sostituiamo la definizione di forza e otteniamo:

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2} => \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ora definiamo $\omega^2 = \frac{K}{m}$ e otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

da cui ci ricaviamo $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ come segue:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$$
$$v(t) = A\omega cos(\omega t + \varphi)$$
$$a(t) = -A\omega^2 sin(\omega t + \varphi)$$

Per dimostrare come abbiamo ricavato $x(t)$, osserviamo la sua derivata seconda, ovvero $a(t)$, e notiamo che togliendo $-\omega^2$ abbiamo esattamente $x(t)$ quindi sostituendo quella con x, otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x => \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ovvero l'ipotesi iniziale.
Osserviamo ora quindi che se applico una forza esterna sulla molla e poi la lascio andare, essa si muove in moto armonico intorno al punto di riposo. Questo moto dato che compare sin nella formula sarà periodico, e il periodo è il seguente:

$$\omega t + \varphi = \omega(t + T) + \varphi + 2k\pi => \omega t = \omega t + \omega T + 2k\pi$$
$$=> \omega T = 2k\pi => T = \frac{2k\pi}{\omega}$$

Osserviamo ora che se fisso i valori di $x(t)$ e $v(t)$, riesco a ricavare φ e A. Quindi se per esempio fisso:

$$v(0) = v_M$$
$$x(0) = 0$$

dove v_M è la velocità massima, mi ricavo:

$$A\omega cos(\varphi) = v_M$$
$$Asin(\varphi) = 0$$

e da qui mi ricavo:

$$A\omega = v_M => A = \frac{v_M}{\omega}$$
$$\varphi = 0$$

e quindi ottengo:

$$x(t) = \frac{v_M}{\omega} sin(\omega t)$$
$$v(t) = v_M cos(\omega t)$$

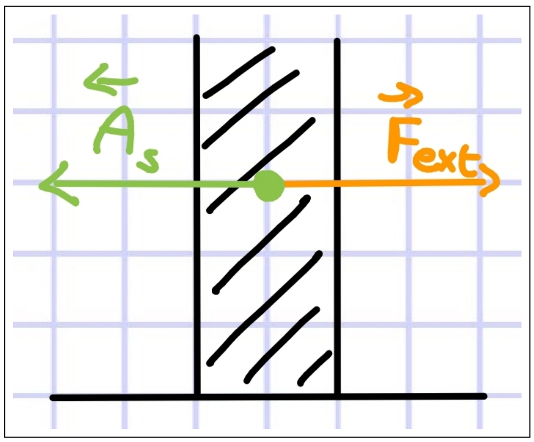
4.5.4 Forza di attrito (radente)

Iniziamo col dire che esistono molti tipi diversi di attrito, noi però ci concentriamo sul'**attrito radente**, ovvero quello che si ottiene con **2 superfici a contatto**. In genere, l'attrito si comporta in 2 modi diversi, facciamo un esempio con una sedia sul pavimento:

- **attrito statico**: se applichiamo una certa forza $\vec{F}_{ext}$ alla sedia e quella **resta ferma** abbiamo una forza di **attrito statico ($\vec{A}_s$) che bilancia** la forza che applichiamo noi. In particolare:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{F}_{ext} = F_{ext} * \hat{x} \\ &\vec{A}_s = -|\vec{A}_s| * \hat{x} = -|F_{ext}| * \hat{x} \end{aligned}\right\} \vec{A}_s = -|\vec{F}_{ext}| * \hat{x}\#\#\#NONSICUROSUHAT!!!$$

  Da quest'ultimo pezzo possiamo capire che l'attrito, finché resta statico, è una **uguale ed opposta** alla forza che applichiamo noi sulla sedia, quindi quest'ultima resta ferma!



  L'attrito statico esiste fino ad un certo punto, identificato con la **soglia** "$\vec{A}_{s,max}$", che possiamo calcolare con la formula:

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext}$$

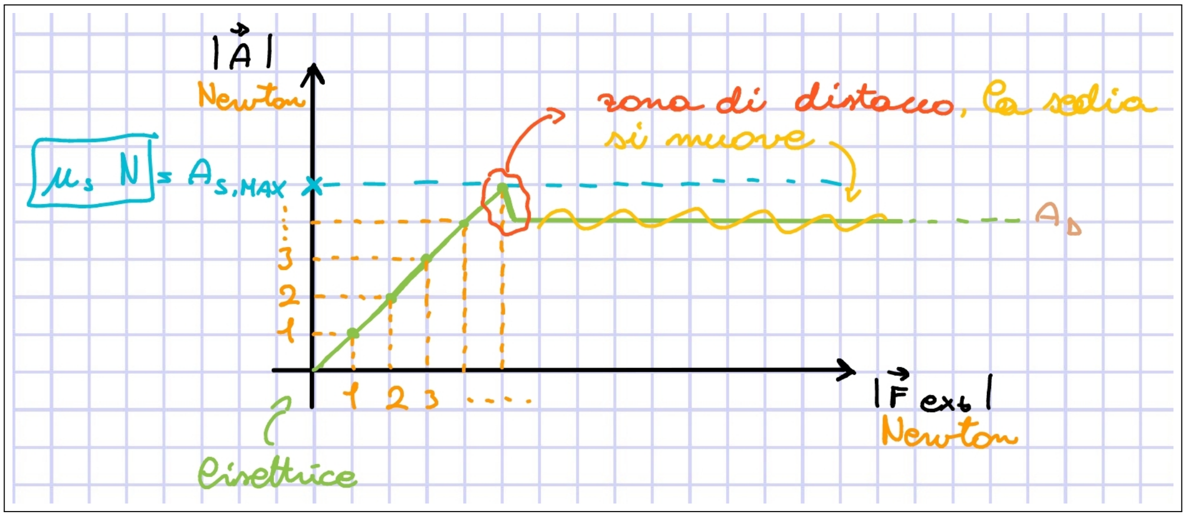
  In particolare μ_s rappresenta il **coefficiente di attrito statico** (dipende dalle 2 superfici a contatto), $\vec{N}$ è la **forza vincolate** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto** (in questo caso il "moto" è rappresentato dalla forza esterna che applichiamo noi alla sedia). Una volta che la forza esterna supera questa soglia, subentra l'**attrito dinamico**;

- **attrito dinamico**: ad un certo punto, la forza che applichiamo noi sarà tale da **muovere** la sedia, a questo punto entriamo un una fase di **attrito dinamico**. Possiamo calcolarlo con la formula:

$$\vec{A}_D = -\mu_D * |\vec{N}| * \hat{v}$$

  Anche qui μ_D rappresenta il **coefficiente di attrito dinamico** (dipende dalle 2 superfici a contatto), $\vec{N}$ è la **forza vincolate** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto**.

Ora, all'intersezione tra attrito statico e dinamico succede una cosa particolare: la forza dell'attrito **diminuisce**. Vediamo un grafico:



Il distacco tra $A_{s,max}$ e A_D dipende dal distacco tra μ_s e μ_D

4.5.4.1 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito statico Vediamo un esempio per il calcolo del coefficiente di attrito statico, supponiamo di avere una sedia con **massa** m_s e un'**attrito statico massimo** $A_{s,max}$ calcolato usando una molla con **allungamento** Δx e **coefficiente elastico** K, quanto vale il **coefficiente di attrito statico**?

$$m_s = 6Kg \qquad |A_{s,max}| = \begin{cases} \Delta x = 6cm \\ K = 1,2N/m \end{cases} \qquad \mu_s = ?$$

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext} ===> \mu_s = \frac{|\vec{A}_{s,max}|}{|\vec{N}|} = \frac{K * \Delta x}{m_s * g} = \frac{7,2 * 10^{-2} N}{5,9 * 10^{1} N} = 1,2 * 10^{-3}$$

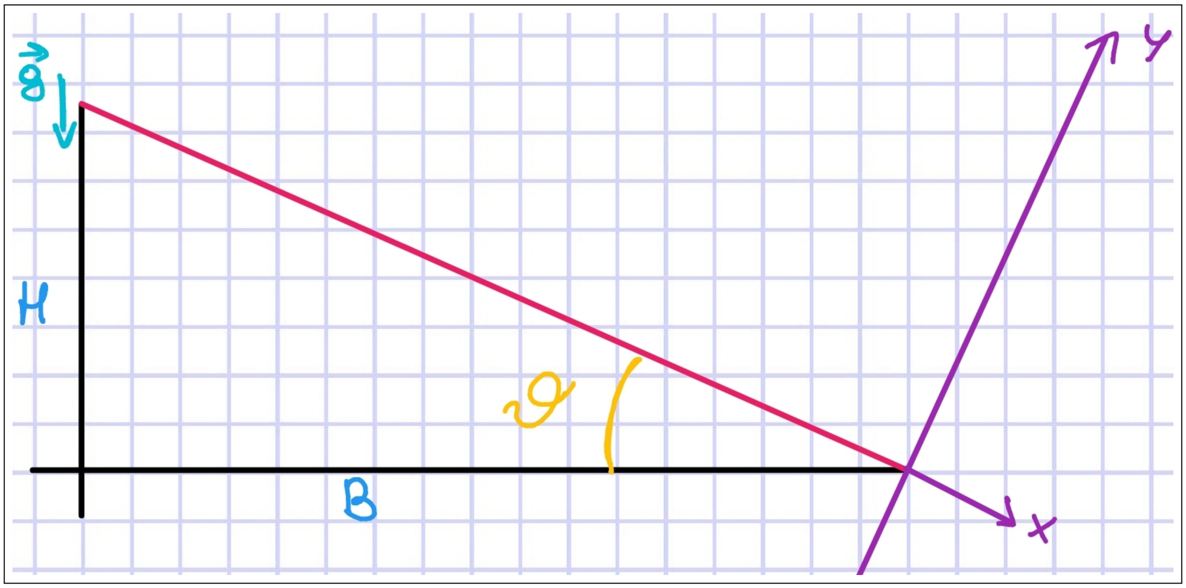
Nota che g corrisponde all'accelerazione di gravità terrestre $(9,8m/s^2)$ o di qualsiasi altro pianeta su cui facciamo le misurazioni.

4.6 Piano inclinato

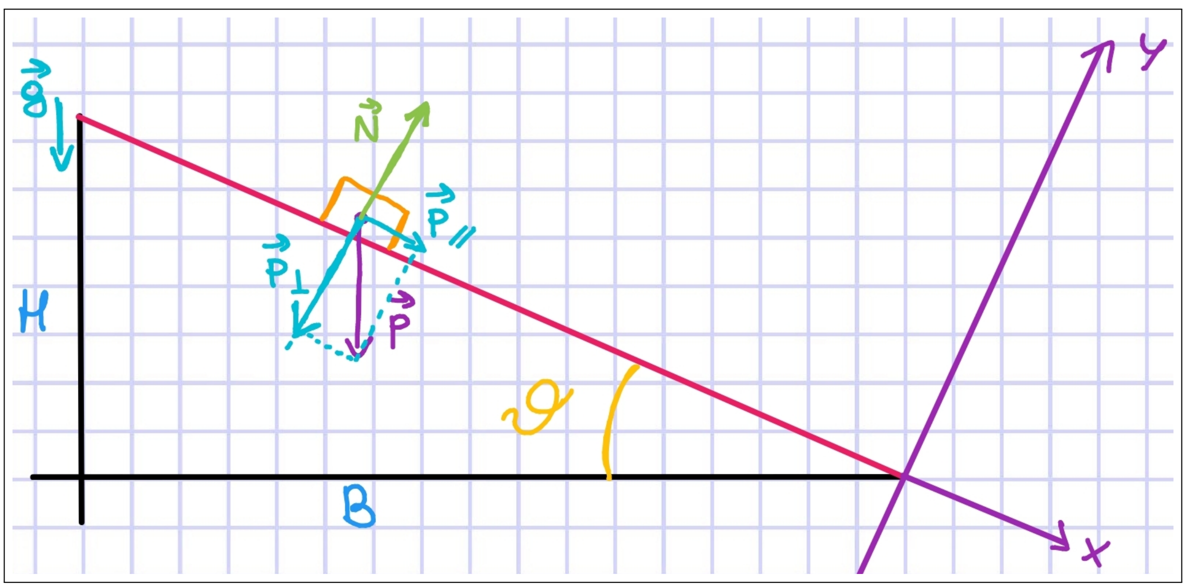
Introduciamo ora il concetto di **piano inclinato rispetto alla verticale** (con verticale intendiamo l'asse su cui giace la gravità).

4.6.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito il sistema di riferimento:



Come asse x usiamo la **retta su cui giace il piano inclinato** mentre l'asse y è rappresentato dalla **normale all'asse x**. Nota inoltre che $\frac{H}{B} = tan(\theta)$. Ora posizioniamo sul piano inclinato un qualche oggetto: questo avrà una **forza peso** con verso che giace sulla retta parallela alla verticale. Possiamo scomporre questa forza come proiezione sugli assi che abbiamo stabilito prima, in particolare $\vec{P}_{\parallel}$ per l'asse x e $\vec{P}_{\perp}$ per l'asse y. A questo punto, ora che abbiamo comoda la forza $\vec{P}_{\perp}$ possiamo anche stabilire la **forza vincolante** $\vec{N}$ che il piano oppone a questo oggetto (ricorda che la forza vincolante **può solo essere ortogonale al piano**). Vediamo un grafico:

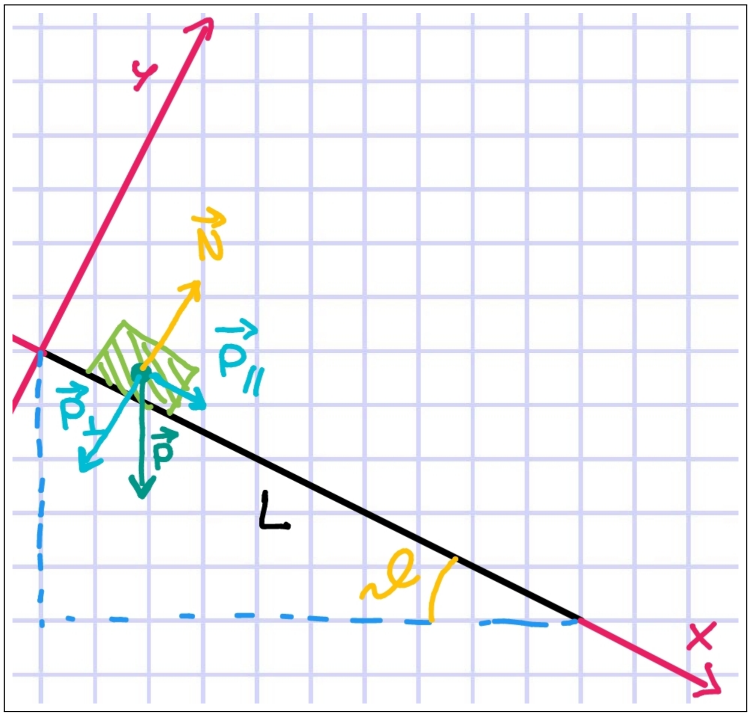


L'obiettivo ora è calcolare le **risultanti delle forze** per gli assi x e y (con risultanti intendiamo la somma di tutte le forze "parallele" ad un certo asse), in particolare:

$$\vec{F}_{ext} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} = m * g * sin(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P}_{\perp} + \vec{N} = m * g * cos(\theta) - N = 0 \end{cases}$$

4.6.2 Esempio

Vediamo ora un esempio: abbiamo un bambino di **massa** m e uno scivolo di **lunghezza** L e con **inclinazione** θ. Quanto **tempo** impiega il bambino a scivolare sullo scivolo? Faremo 2 versioni di questo problema, la prima utilizzando un normale **moto uniformemente accelerato** e la seconda **introducendo anche l'attrito**. Vediamo una rappresentazione grafica del problema:



4.6.2.1 Versione senza attrito

Se proviamo a risolvere il problema senza considerare l'attrito, ci troviamo in presenza di un "semplice" **moto uniformemente accelerato**. Come prima cosa, **analizziamo le forze in campo** e calcoliamo le forze risultanti parallele agli assi. Iniziamo col dire che quella sull'asse y (che ricordo essere inclinato!) non ci interessa, infatti abbiamo la forza vincolante che bilancia, concentriamoci quindi solo sulla forza sull'asse x. Ricordiamo, per la *seconda legge della dinamica* [pag. 20]che:

$$\vec{F}_x = m * a_x$$

A questo punto a noi interessa trovare l'accelerazione a_x, quindi rigiriamo un po' questa formula ed "**espandiamo**" la nostra $\vec{F}_x$ utilizzando le formule viste prima [pag. 30]:

$$\vec{F}_x = m * a_x => a_x = \frac{\vec{F}_x}{m} = \frac{m * g * sin(\theta)}{m} = g * sin(\theta)$$

Ora che abbiamo l'accelerazione, possiamo recuperare le formule viste per il moto uniformemente accelerato [pag. 8]. In questo caso ci interessa la formula dello **spazio percorso** (dato che sappiamo che il nostro scivolo è lungo L), ovvero:

$$L = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

A questa formula possiamo fare delle semplificazioni, in particolare togliere il I ($s_0 = 0$) e il II ($v_0 = 0$) termine, ottenendo:

$$L = \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

Che sostituendo l'accelerazione e, per comodità, il tempo diventa:

$$L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

A noi interessa calcolare Δt, quindi ci rigiriamo la formula in questo modo:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * sin(\theta)}}$$

Introduciamo ora un po' di numeri, supponendo:

$$m = 20Kg \qquad \theta = 30° \qquad L = 4m \qquad \Delta t = ?$$

Otteniamo il tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * sin(\theta)}} = \sqrt{\frac{2 * 4m}{9,8m/s^2 * sin(30°)}} = \sqrt{\frac{8s^2}{9,8 * 1/2}} \approx 1,27s$$

4.6.2.2 Versione con attrito

Se aggiungiamo l'attrito, dobbiamo modificare un po' le nostre formule in modo da considerare l'attrito statico e dinamico:

- **attrito statico**:

$$\begin{cases} R_x = m * g * sin(\theta_{max}) - A_{s,max} & => m * g * sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 \\ R_y = m * g * cos(\theta_{max}) - N & => N = m * g * cos(\theta_{max}) = 0 \end{cases}$$

  Da qui otteniamo che

$$\begin{aligned} m * g * sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 \qquad & => m * g * sin(\theta_{max}) - \mu_s * m * g * cos(\theta_{max}) = 0 \\ & => m * g * [sin(\theta_{max}) - \mu_s * cos(\theta_{max})] = 0 \end{aligned}$$

  Ora, dato che sappiamo che $m*g$ non è nullo, possiamo dedurre che sia la seconda parte ad annullarsi, quindi:

$$\begin{aligned} sin(\theta_{max}) - \mu_s * cos(\theta_{max}) = 0 \qquad & => \mu_s * cos(\theta_{max}) = sin(\theta_{max}) \\ & => \mu_s = \frac{sin(\theta_{max})}{cos(\theta_{max})} \\ & => \mu_s = tan(\theta_{max}) \end{aligned}$$

  Nota che con "θ_{max}" indica l'angolo massimo oltre al quale il nostro oggetto sul piano inclinato inizia a muoversi, superando la soglia di attrito statico, senza l'applicazione di forze esterne;

- **attrito dinamico**: in questo caso, la componente che ci interessa trovare è l'accelerazione sull'asse x (a_x). Partiamo quindi da quello che conosciamo e cerchiamo di rigirarlo un po' per ottenere l'accelerazione:

$$\begin{cases} R_x = m * g * sin(\theta) - A_d & => m * g * sin(\theta) - \mu_d * N = m * a_x \\ R_y = m * g * cos(\theta) - N = 0 & => N = m * g * cos(\theta) \end{cases}$$

  Da qui otteniamo che:

$$\begin{aligned} m * g * sin(\theta) - \mu_d * m * g * cos(\theta) = m * a_x \qquad & => g * sin(\theta) - \mu_d * g * cos(\theta) = a_x \\ & => a_x = g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta)) \end{aligned}$$

4.6.3 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito dinamico

Supponiamo di avere lo stesso identico esercizio di prima, però ora **entra in gioco anche l'attrito**. Supponendo che l'oggetto impieghi Δt_{att} secondi a percorrere tutto il piano, a quanto corrisponde il coefficiente di attrito dinamico?
Iniziamo con **l'equazione dello spazio per il moto uniformemente accelerato** e la rigiriamo un po':

$$s = s_0 + v_0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \qquad => L = 0 + 0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

$$=> L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

$$=> L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

Ora, sappiamo che, in un contesto di moto con attrito dinamico, $\vec{R}_x = \vec{P}_\parallel - \vec{A}_D = m * a_x$, utilizzando i calcoli visti prima otteniamo che l'accelerazione vale:

$$a = g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta))$$

Mettiamo tutti insieme e otteniamo:

$$L = \frac{1}{2} * g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta)) * (\Delta t)^2$$

La modifichiamo per ottenere il valore di μ_d:

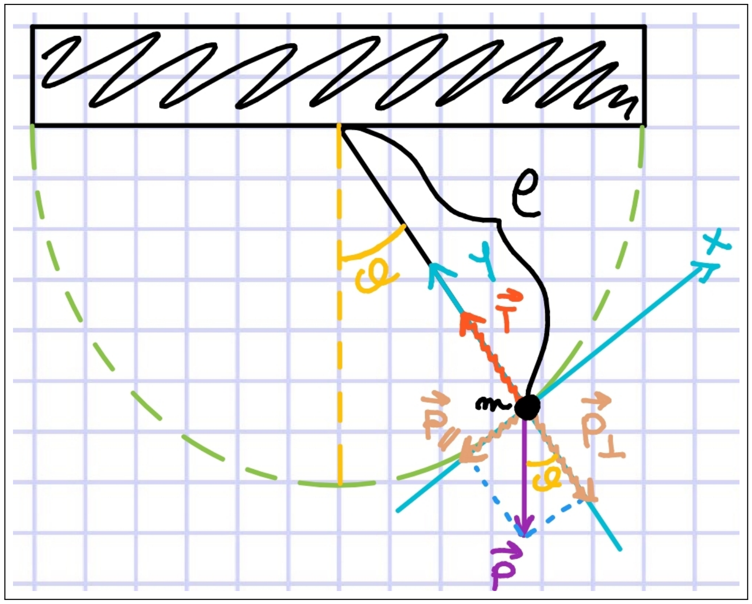
$$L = \frac{1}{2} * g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta)) * (\Delta t)^2 \qquad \mu_d = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} - \frac{2L}{g * \Delta t^2 * cos(\theta)}$$

Ora ci basta semplicemente inserire i valori (li puoi ritrovare all'esercizio prima, [pag. 32]) ed otteniamo il nostro risultato $\mu_d \approx 0,28$.

4.7 Pendolo semplice

Introduciamo il pendolo, ovvero una **massa** agganciata ad un punto di ancoraggio tramite una **fune inestensibile**. Supponiamo che **non ci sia alcun attrito**, quindi il nostro pendolo continuerà ad oscillare tramite un **moto perpetuo**. Cominciamo introducendo i 2 sistemi di riferimento: il primo ci serivirà per specificare delle cose nel secondo.

4.7.1 Sistema di riferimento sul peso



Nota che questo sistema di riferiemento **si muove assieme al peso**, in particolare abbiamo che l'asse y che è **normale alla traiettoria** e l'asse x che è **tangente alla traiettoria**. Iniziamo analizzando le forze in gioco. In questo caso abbiamo solo la **forza peso** che può essere scomposta in questo modo:

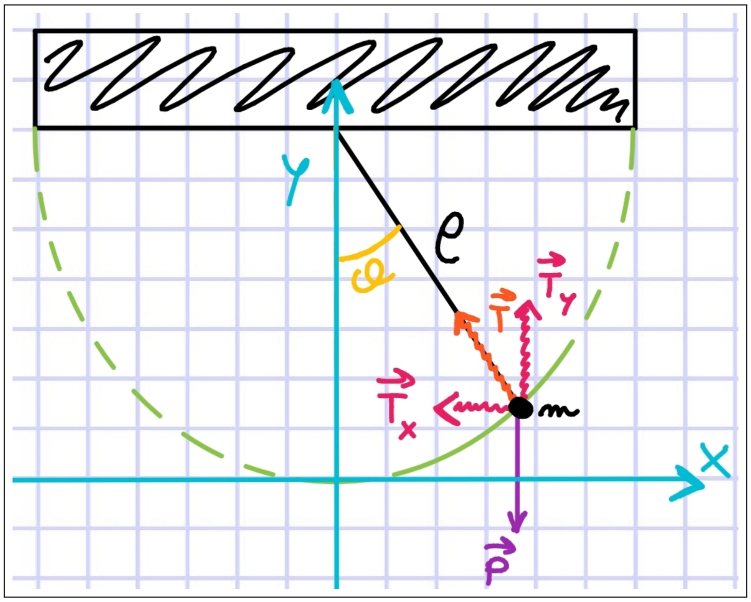
$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_{\parallel} & = -m * g * sin(\theta) \\ \vec{P}_{\perp} & = m * g * cos(\theta) \end{cases}$$

Inoltre, dato che consideriamo **il cavo inestensibile**, abbiamo una **forza di tensione** ($\vec{T}$) uguale e opposta a $\vec{P}_bot$ che la bilancia. A questo punto possiamo analizzare **le risultanti**:

$$\vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} = -m * g * sin(\theta)$$
$$\vec{R}_y = \vec{P}_{\perp} + \vec{T} = m * g * cos(\theta) - T = 0$$

4.7.2 Sistema di riferimento nella posizione di equilibrio

Ora, cambiamo sistema di riferimento e utilizziamo quello "cartesiano" con centro nella posizione di equilibri del nostro pendolo:



Con questo nuovo riferimento, possiamo trovare facilmente la poszione (x, y) del nostro peso:

$$x(t) = R * sin[\theta(t)]$$
$$y(t) = R - R * cos[\theta(t)]$$

Supponendo che R sia la lunghezza del nostro cavo. Nota anche che le coordinate dipendono dal tempo, infatti **sarà l'angolo θ a variare col tempo**. Il problema è **in che modo**? Ci torneremo in seguito. Questo sistema di riferimento ci permette inoltre di scomporre le nostre 2 forze (peso e tensione) in questo modo:

$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_x = 0 \\ \vec{P}_y = -m * g \end{cases} \qquad \vec{T} = \begin{cases} \vec{T}_x = -T sin(\theta) = -m * g * cos(\theta) sin(\theta) \\ \vec{T}_y = T cos(\theta) = m * g * cos(\theta) * cos(\theta) \end{cases}$$

Nella scomposizione della tensione possiamo usare la formula che abbiamo trovato prima, ovvero "$m * g * cos(\theta) - T = 0$" (prima dobbiamo rigirarla un po'). Con queste "nuove" scomposizioni, possiamo calcolare le forze risultanti sugli assi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{T}_x = -m * g * sin(\theta) * cos(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P} + \vec{T}_y = -m * g + m * g * cos^2(\theta) = -m * g * (1 - cos^2(\theta)) = -m * g * sin^2(\theta) \end{cases}$$

A questo punto, per la **II legge della dinamica**, sappiamo per definizione che $R = m * a$, quindi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = m * a_x = -m * g * sin(\theta) * cos(\theta) & => a_x = -g * sin(\theta) * cos(\theta) \\ \vec{R}_y = m * a_y = -m * g * sin^2(\theta) & => a_y = -g * sin^2(\theta) \end{cases}$$

4.7.2.1 Calcolare spazio, velocità e accelerazione

Con le operazioni precedenti abbiamo scoperto che;

$$\begin{cases} a_x = -g * sin(\theta) * cos(\theta) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = -g * sin^2(\theta) = \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = R * sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * cos[\theta(t)] \end{cases}$$

Il nostro problema è "$\theta(t)$", **come varia θ in funzione del tempo?** Noi però abbiamo il valore dell'accelerazione e sappiamo che **la derivata seconda ($\frac{d^2x}{dt^2}/\frac{d^2y}{dt^2}$) dello spostamento corrisponde all'accelerazione!** Quindi deriviamo la funzione dello spostamento, ricordando però che noi **non conosciamo la derivata di** $\theta(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = R * sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * cos[\theta(t)] \end{cases} \quad => \begin{cases} x^{(1)}(t) = R * cos(\theta) * \theta^{(1)} \\ y^{(1)}(t) = R * sin(\theta) * \theta^{(1)} \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x^{(2)}(t) = R * [-sin(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + cos(\theta) * \theta^{(2)}] \\ y^{(2)}(t) = R * [cos(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + sin(\theta) * \theta^{(2)}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -g * sin(\theta) * cos(\theta) = R * [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -g * sin^2(\theta) = R * [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -g * sin(\theta) * cos(\theta) = l * [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -g * sin^2(\theta) = l * [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -\frac{g}{l} * sin(\theta) * cos(\theta) = [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\frac{g}{l} * sin^2(\theta) = [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

Adesso, prendiamo il "$\frac{g}{l}$" e lo chiamiamo "ω^2", perche? Perchè SI, lo vuole Iuppa. Di conseguenza le nostre formule diventano:

$$\begin{cases} x \to -\omega^2 * sin(\theta) * cos(\theta) = [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\omega^2 * sin^2(\theta) = [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

4.7.2.2 Le piccole oscillazioni

Il problema con questa formula è che **è un casino calcolarsi seni e coseni**, quindi noi possiamo **ragionare in termini di piccole oscillazioni**, in modo da approssimare seni e coseni con **Taylor**!

$$sin(\theta) \approx \theta \qquad cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$tg(\theta) \approx \theta \qquad (1+\theta)^\alpha \approx +\alpha\theta$$

$$e^{\alpha\theta} \approx 1 + \alpha\theta \qquad \sqrt{1+\theta} \approx 1 + \frac{\theta}{2}$$

Nota che le parti in rosso, dato che consideriamo solo θ piccoli, le possiamo togliere!

Con "piccole oscillazioni" intendiamo $\theta << 1$, ovvero "θ molto minore di 1" (inteso come radianti, in gradi possiamo immaginare che θ non superi i 4 gradi circa). Ora, considerando solo queste piccole oscillazioni, possiamo approssimare le formule in questo modo:

$$\begin{cases} x \to -\omega^2 * sin(\theta) * cos(\theta) = [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\omega^2 * sin^2(\theta) = [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \quad => \begin{cases} x \to -\omega^2 * \theta * 1 = [1 * \theta^{(2)} - \theta * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\omega^2 * \theta^2 = [\theta * \theta^{(2)} + 1 * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} \\ y \to -\omega^2 * \theta^2 = \theta^{(1)2} \end{cases}$$

Nota che le parti in rosso, in quanto **moltiplicate per** $\theta << 1$ diventano trascurabili, quindi le togliamo

Prendiamo in considerazione solo la formula per la x, abbiamo quindi che:

$$-\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 * \theta = 0$$

Ovvero **l'equazione del moto armonico**! Da qui possiamo dire quindi che:

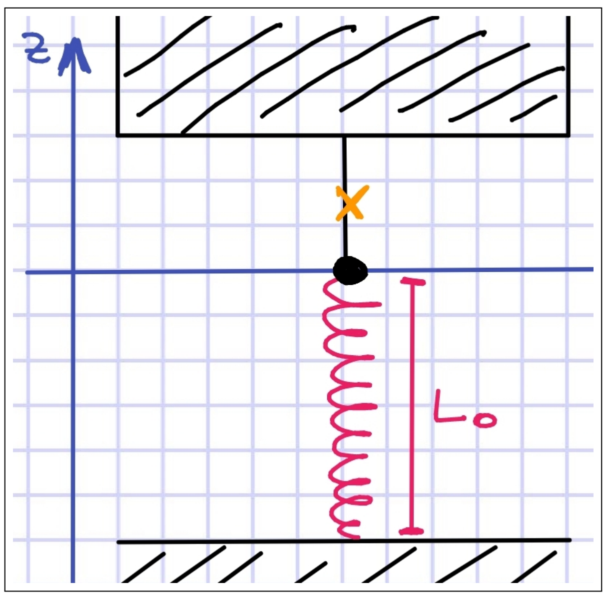
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad => \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$4 \qquad => T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$$

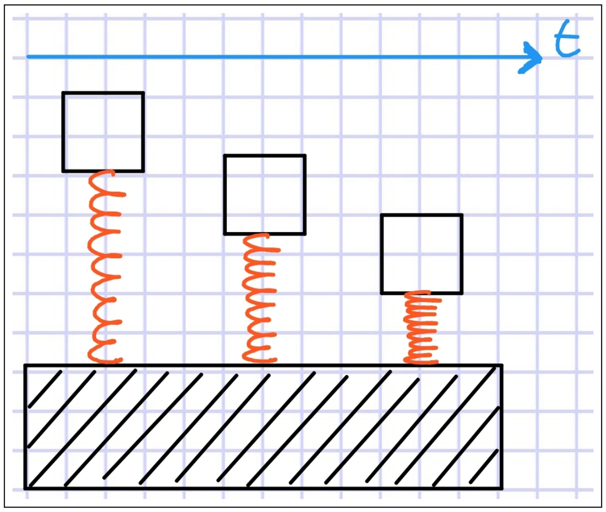
Ricorda che T in questo caso corrisponde al **periodo** e non alla forza di tensione.

4.8 Esercizio sulla dinamica

Vediamo ora un esercizio riassuntivo sulla dinamica, che cerca di raggruppare tutto quello che abbiamo visto. Supponiamo di essere in questa situazione:



Abbiamo un **peso di massa m** attaccato ad un **filo inestensibile di massa trascurabile** che poggia su una **molla in posizione di riposo con coefficiente elastico k**. Ad un certo punto, il cavo **viene tagliato**, quindi il peso verrà **sostenuto interamente dalla molla**, che **inizierà a comprimersi ed allungarsi** (come si comporta una molla normale)



Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover trovare i seguenti valori:

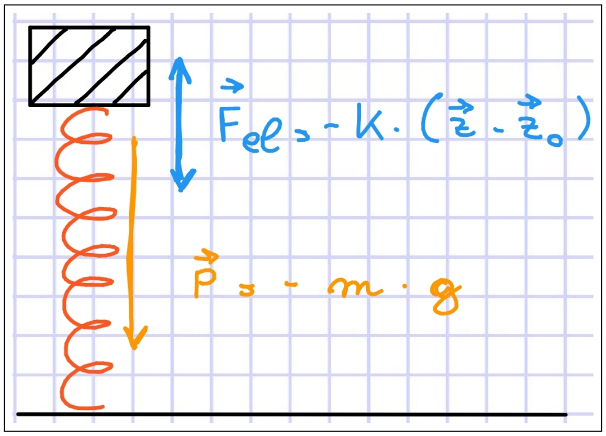
$$k = 70N/m \qquad m = 0,5Kg \qquad T = ?$$
$$\Delta l_{max} = ? \qquad z_{vMax} = ? \qquad v_{max} = ?$$

Con:

- T periodo;
- Δl_{max} accorciamento massimo;
- z_{vMax} z dove la velocità è massima;
- v_{max} velocità massima;

Allora, come prima cosa **visualizziamo quali forze agiscono nel sistema**, in particolare abbiamo:

- la **forza peso** $\vec{P} = -m * g$;
- la **forza elastica** $\vec{F_{el}} = -k * (\vec{z} - \vec{z_0})$. La parte tra parentesi viene chiamata "**forza di richiamo**" e **dipende dal sistema di riferimento che adottiamo** (in particolare la z_0, che indica la **posizione di riposo** della nostra molla, nel nostro caso [in base al sistema di riferimento che abbiamo adottato] vale 0).



4.8.1 Studio della dinamica del problema

Iniziamo considerando le varie risultanti delle forze che agiscono sul nostro asse z (semplicemente agiscono solo forze verticali, quindi ignoriamo l'asse orizzontale). Iniziamo considerando le 2 forze che abbiamo già visto prima:

$$\begin{cases} \vec{P} = -m * g * \hat{z} \\ \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - \vec{z}_0) = \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - 0) = \vec{F}_{el} = -k * z * \hat{z} \end{cases}$$

Nota che i **versori** $\hat{z}$ servono solo per descrivere la direzione della forza, poi li possiamo togliere per semplicità. Ora, avremmo che la risultante di queste forze corrisponde alla loro somma:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{R}_{el} = -m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} = m * \vec{a} \ (per\ definizione)$$

A questo punto noi sappiamo però che l'accelerazione corrisponde alla **derivata seconda dello spazio**, quindi possiamo scrivere:

$$-m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} = m * \frac{d^2z}{dt^2} * \hat{z} \qquad => -g - \frac{k}{m} * z = \frac{d^2z}{dt^2}$$
$$=> \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g$$

La formula in rosso sappiamo che è **l'equazione armonica**! In questo caso ponimao $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ottenendo:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 * z = -g$$

Ci sono un po' di "problemi" però, rispetto all'equazione "classica" non abbiamo $= 0$ ma $= -g$, quello viene definito **membro forzante** e semplicemente **sfasa la nostra posizione di equilibrio**, in questo caso la sposta verso il basso. Per definizione del moto armonico [pag.10] che possiamo indicare lo spostamento nel tempo in questo modo:

$$z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) + w(t)$$

In questo caso dobbiamo aggiungere questa parte in rosso perché dobbiamo **compensare in qualche modo quell' "=-g"**. Ora, per calcolare velocità ed accelerazione (quest'ultima è quella che ci interessa) ci basta semplicemente derivare la formula trovata prima:

$$z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) + w(t) \qquad => \frac{dz}{dt} = A\omega * cos(\omega t + \varphi) + \frac{dw}{dt}$$
$$=> \frac{d^2z}{dt^2} = -A\omega^2 * sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2}$$

Questa è la formula che ci interessa! Infatti ora possiamo sostituirla all'interno dell'equazione iniziale, ovvero:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g \qquad => -A\omega^2 * sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(A * sin(\omega t + \varphi) + w(t)) = -g$$

Bene, abbiamo la formula matematica che descrive la dinamica del nostro sistema. Ora dobbiamo fissare un po' di valori che non conosciamo al momento, in particolare φ, ω e $w(t)$, come facciamo? Studiamo la nostra formula, che ricordiamo essere in **funzione del tempo**, in alcuni punti (possibilmente comodi). Cominciamo considerando $t = 0$:

$$-A\omega^2 * sin(\omega * 0 + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(A * sin(\omega * 0 + \varphi) + w(0)) = -g \qquad => \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) = -g$$

Ci siamo semplificati i seni, ora dobbiamo soltanto trovare il valore della nostra $w(0)$: per toglierci la derivata (che è abbastanza scomoda) possiamo supporre che w sia **costante in funzione del tempo**, quindi otterremo:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) = -g \qquad => 0 + \omega^2 * w = -g$$

$$=> w = -\frac{g}{\omega^2}$$

Ecco fatto, ora possiamo tornare un po' di equazioni prima e **sostituire il valore che abbiamo trovato di w**:

$$z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) + w(t) \qquad => z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega^2}$$

Ora ci manca solo da trovare il valore di A e di φ, per trovarli possiamo usare il fatto che **sia lo spazio che la velocità in t=0 valgono 0**! Vediamo:

$$\begin{cases} z(t) = A * sin(\omega * 0 + \varphi) + -\frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * cos(\omega * 0 + \varphi) = 0 \end{cases} \qquad => \begin{cases} z(t) = A * sin(\varphi) + -\frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

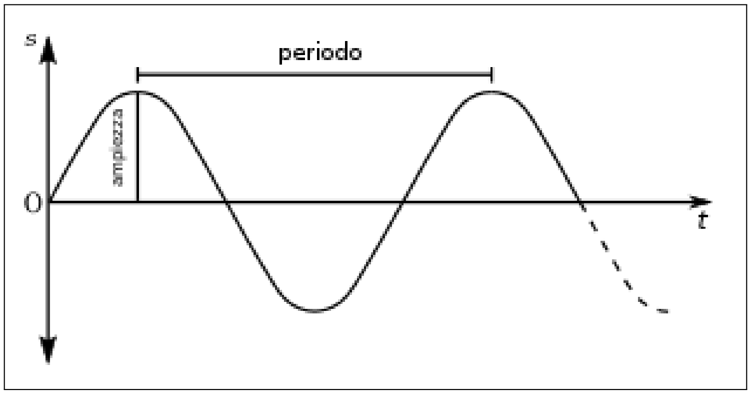
$$=> \begin{cases} A = \frac{g}{\omega^2} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi arriviamo alla fine con questa formula che descrive il nostro moto:

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} * sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2}$$

Come la interpretiamo? Sostanzialmente come un normalissimo **moto armonico**, con:

- $a = \frac{g}{\omega^2}$ →ampiezza, il valore massimo (o minimo) della curva;
- $\omega = \frac{2\pi}{T} => T = \frac{2\pi}{\omega}$ →periodo, misurato in secondi;
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ →fase, indica da che punto parte il grafico, nel caso di questo esercizio l'abbiamo tolta trasformando il *sin* in *cos*;



Ora che abbiamo questa formula, abbiamo tutto! Possiamo facilmente calcolare tutti i punti richiesti dal problema, vediamo come.

4.8.2 Allungamento massimo

Come possiamo vedere dall'immagine precedente, l'ampiezza è la distanza massima dal punto di equilibrio, quindi ci basta prendere **2 volte l'ampiezza** (nota che il "-" è dovuto al sistema di riferimento adottato):

$$\Delta l_{max} = -2\frac{g}{\omega^2} = -2 * \frac{m * g}{K} \approx -14cm$$

4.8.3 Posizione di velocità massima

All'istante 0, anche la velocità vale 0. Successivamente la velocità inizierà ad aumentare finché non raggiungerà il massimo. Per capire dove si trova il massimo possiamo **studiare la derivata associata e vedere dove questa vale 0**, quindi:

$$\frac{dz}{dt} = v(t) = -\frac{g}{\omega^2} * \omega * sin(\omega t) + 0 \qquad => \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\omega^2} * \omega^2 * cos(\omega t)$$
$$=> \frac{dv}{dt} = -g * cos(\omega t)$$

Quando questa equazione vale 0? Dobbiamo **annullare il coseno**, quindi porre $\omega t = \frac{\pi}{2} => t = \frac{\pi}{2\omega}$. In che posizione ci troviamo con $t = \frac{\pi}{2\omega}$? Vediamo:

$$z(\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{g}{\omega^2} * cos(\omega * \frac{\pi}{2\omega}) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * 0 - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{g}{\omega^2}$$

Come si può facilmente notare, abbiamo la velocità nella **posizione di equilibrio della molla**! Potevamo anche arrivarci osservando il disegno, infatti nel punto di equilibrio il peso **smette di prendere velocità ed inizia a rallentare in seguito alla forza elastica**! Calcoliamo il numero:

$$z_{vMax} = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{g * m}{k} \approx -7cm$$

4.8.4 Velocità massima

Prima abbiamo scoperto che la velocità massima si ottiene nella z_{eq}, che si raggiunge in $t = \frac{\pi}{2 * \omega^2}$

$$v(\frac{\pi}{2 * \omega^2}) = -\frac{g}{\omega} * sin(\omega \frac{\pi}{2 * \omega^2}) = -\frac{g}{\omega} * 1 = -\frac{g}{\omega} = -g * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx -0,84m/s$$

Di nuovo, il "-" della velocità è sempre dovuto al sitema di riferimento che abbiamo adottato.

4.8.5 Calcoliamo la T

C'è un problema: nella lezione Iuppa considera T come **il periodo** mentre nel video di Youtube la considera come **forza di tensione del cavo iniziale**. Calcoliamo entrambe.

4.8.5.1 Il periodo

Nulla di complesso, noi sappiamo che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad => T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$=> T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,52s$$

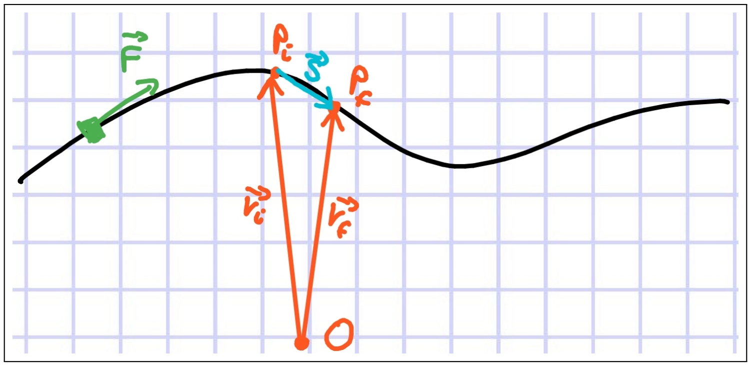
4.8.5.2 La tensione

Ancora, niente di particolare. Sappiamo semplicemente che la **tensione è uguale ed opposta alla forza peso**, quindi:

$$\vec{T} = -\vec{P} \qquad => \vec{T} = -m * g \approx 4,9N$$

5 Meccanica

5.1 Lavoro



Supponiamo che ci sia un corpo che si muove lungo una traiettoria. Ora prendiamo un punto d'origine del sistema di riferimento e descriviamo il movimento del corpo con dei raggi vettore dall'origine. Ora consideriamo un punto iniziale p_i ed uno finale p_f molto vicini tra loro e quindi otteniamo uno spostamento infinitesimale, $d\vec{s} = \vec{r_f} - \vec{r_i}$.
Sul corpo inoltre agisce una forza $\vec{F}$ che è quella che lo fa spostare. Osserviamo ora che a seconda del valore di questa forza, potrebbe variare la velocità dell'oggetto. Se $d\vec{s} \perp \vec{F}$, allora il corpo non rallenta, quindi se l'angolo è $90_\circ$, l'effetto sarà minimo, mentre se l'angolo è $0_\circ$ l'effetto sarà massimo e infine se l'angolo è $180_\circ$ l'effetto sarà massimo ma in senso opposto.
In conclusione quindi l'effetto che la forza ha sul corpo è descritta dal coseno ed è definito come **lavoro infinitesimo**, in formula:

$$dW = |\vec{F}||d\vec{s}|cos\alpha_{F,ds}$$

Se il lavoro infinitesimo è positivo, allora il corpo accellera, se è negativo invece, il corpo rallenta. L'iterazione quindi tra il corpo e l'agente esterno, ovvero quello che applica la forza, è definita come energia. In questo caso,l'agente esterno perde energia.

Osserviamo ora che:

$$|\vec{v}||\vec{w}|cos(\alpha_{v,w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

dove "$\cdot$" rappresenta il prodotto scalare tra due vettori. Spesso questo viene detto $v_T w$, ovvero la componente di v tangente a w, quindi:

$$|\vec{v}|cos(\alpha_{v,w}) = v_T$$
$$|\vec{w}|cos(\alpha_{v,w}) = w_T$$

Ora usiamo quindi questa osservazione e otteniamo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che l'unità di misura del lavoro è il Joule, $J = 1Nm$. Una caloria sono, $1cal = 4.18J$
. Ora calcoliamo il **lavoro medio** come segue:

$$\overline{W} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

Osserviamo che il lavoro è una quantità scalare, dato che il prodotto scalare prende due vettori e li trasforma in uno scalare.

Facciamo ora un'esempio molto semplice:

$$|\vec{F}| = 10N|\Delta\vec{s}| = 100m$$

Ora in base all'angolo $\alpha_{F,ds}$ abbiamo dei diversi valori di lavoro:

$\alpha_{F,ds}$	W
0	$1000J$
π	$-1000J$
$\pi/2$	$0J$
$\pi/4$	$707J$

Ora consideriamo tutti gli spostamenti infinitesimi e supponiamo che ogni spostamento infinitesimo abbia un valore di forza diversa (ovviamente la forza è esercitata sempre dallo stesso agente esterno, ma in istanti diversi). Abbiamo quindi per ogni spostamento infinitesimale un lavoro infinitesimale diverso. Rappresentiamo questa cosa come segue:

$$d\vec{s_1}, d\vec{s_2}, d\vec{s_3}, ..., d\vec{s_n}$$
$$\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, ..., \vec{F_n}$$
$$dW_1, dW_2, dW_3, ..., dW_n$$

Il **lavoro** quindi sarà la somma di tutti questi lavori infinitesimi:

$$W_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} dW_i$$

però considerando che la n tende a infinito, $n \to \infty$, otteniamo:

$$W_{i\to f} = \int_i^n dW_i = \int_i^n \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che la $\vec{F}$ si può tirare fuori dall'integrale solo se non varia per nessun spostamento infinitesimale.

Ora consideriamo il lavoro $W > 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[0, \pi/2]$, ovvero in cui la forza sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro motore**.
Se invece il lavoro $W < 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[\pi/2, \pi]$, ovvero in cui la forza non sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro resistente**.

5.2 Esempi di lavoro

5.2.1 Lavoro forza peso

Data l'equazione della forza peso:

$$\vec{F_p} = -mh\hat{h}$$

abbiamo lavoro infinitesimo:

$$dW = \vec{F_p} \cdot d\vec{h} = -mh\hat{h} \cdot dh\hat{h} = -mgdh$$

Osserviamo che $\hat{h} \cdot \hat{h} = 1$. Ora quindi sommando tutti questi lavori infinitesimi otteniamo il lavoro W_p:

$$W_p = \int_i^f dW = \int_i^f -mgdh = -mg(h_f - h_i) = -mg\Delta h$$

Osserviamo ora che se $\Delta h > 0$, ovvero $h_f > h_i$, avremo $W_p < 0$, quindi lavoro resistente, mentre se $\Delta h < 0$, ovvero $h_f < h_i$, avremo $W_p > 0$, quindi lavoro motore.
Questo era il caso di spostamento verticale, se invece lo spostamento non è verticale il lavoro è comunque lo stesso.
Osserviamo ora che $\vec{F}$ e $d\vec{s}$ non dipendono dal sistema di riferimento, se però consideriamo la forma $\vec{F_p} = -mg\hat{h}$, questa dipende dal sistema di riferimento dato che c'è $\hat{h}$.
Osserviamo inoltre che il lavoro della forza peso dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

Facciamo ora un'esercizio molto semplice:

$$m = 100kg$$
$$\Delta h = 1000m$$
$$W_p = -9.8\frac{m}{s^2} \cdot 100kg \cdot 1000m = -9.8 \cdot 10^5 kg\frac{m^2}{s^2} = -9.8 \cdot 10^5 J = -9.8 \cdot 10^2 KJ$$

5.2.2 Lavoro forza elastica

Data l'equazione della forza elastica:

$$\vec{F_{el}} = -K\vec{x}$$

abbiamo lavoro:

$$W_{el} = \int_i^f F_{el}dx = \int_i^f -Kxdx = -\frac{K}{2}({x_f}^2 - {x_i}^2)$$

Osserviamo ora che se ${x_f}^2 > {x_i}^2$, avremo $W_{el} < 0$, infatti allungo la molla che si oppone, mentre se ${x_f}^2 < {x_i}^2$, avremo $W_{el} > 0$, infatti accorcio la molla che aiuta.
Osserviamo inoltre che il lavoro della forza elastica dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

5.2.3 Lavoro forza attrito

Data l'equazione della forza d'attrito:

$$\vec{F_{att}} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

abbiamo lavoro:

$$W_{att} = \int_i^f F_{att}dx = F_{att}\int_i^f dx = -\mu_d mg \int_i^f dx = -\mu_d mgL$$

dove L è la lunghezza dello spostamento $(x_f - x_i)$.
Osserviamo che l'attrito si oppone sempre al movimento, quindi non vale quello che valeva per il lavoro della forza peso e della forza elastica, ovvero che a seconda del punto finale e del punto iniziale il lavoro poteva essere positivo o negativo.

5.3 Energia cinetica

Consideriamo ora il lavoro infinitesimo,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = md\vec{v}\frac{d\vec{s}}{dt} = md\vec{v} \cdot \vec{v}$$

e quindi,

$$dW = d[\frac{1}{2}mv^2]$$

L'**energia cinetica** è la seguente quantità:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi ho che:

$$dW = d[E_k]$$

5.3.1 Teorema delle forze vive

Il **Teorema delle forze vive** afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto. In formula:

$$E_{k,f} = W_{i \to f} + E_{k,i} => W_{i \to f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

Osserviamo ora che se $v_i = 0$ e $v_f = 0$, allora per come è formulata E_k, vorrà dire che $E_{k,i} = 0$ e $E_{k,f} = 0$ e quindi $W_{i \to f} = 0$.

5.4 Potenza

La **potenza** è definita come:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt, $W = 1\frac{J}{s}$.

5.5 Forze conservative

Una **forza conservativa** è una forza per cui il lavoro dipende solamente dal punto iniziale, p_i, e dal punto finale, p_f.
Se vado quindi da p_i a p_f seguendo due percorsi diversi il lavoro sarà lo stesso.
Se invece vado da p_f a p_i, il lavoro sarà sempre uguale ma avrà segno opposto, indipendentemente dal percorso. Questo è descritto come segue,

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

ovvero l'integrale chiuso.

5.5.1 Energia potenziale

L'**energia potenziale** di un corpo è l'energia che esso possiede a causa della sua posizione o del suo orientamento rispetto ad un campo di forze ed è denotata con U.

5.5.2 Energia meccanica

L'**energia meccanica** è la somma di energia cinetica ed energia potenziale ovvero,

$$E = E_k + U$$

5.5.3 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo il caso 1-DIM,

$$\int_{p_i}^{p_f} F dx = U(p_f) - U(p_i) = W_{p_i \to p_f}$$

Ora per il teorema delle forze vive ho che,

$$W_{p_i \to p_f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

e quindi, usando una notazione semplificata, ovvero per esempio invece che $U(p_f)$ uso U_f, ottengo che,

$$U_f - U_i = E_{k,f} - E_{k,i} => U_f - E_{k,f} = U_i - E_{k,i} => E_f = E_i$$

ovvero l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale, e quindi

$$\Delta E = 0$$

ovvero la variazione di energia meccanica è 0, quindi nel caso in cui si hanno solo forze conservative, l'energia meccanica non varia, si conserva.
Se ora consideriamo,

$$-(U(p_f) - U(p_i)) = W_{p_i \to p_f}$$

ed deriviamo, otteniamo che,

$$F = -\frac{dU}{ds}$$

Nel caso a più dimensioni invece, per esempio consideriamo 3-DIM, abbiamo che,

$$F = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z})$$

5.5.4 Esercizio forze conservative

Consideriamo ora l'esercizio fatto in passato [pag.37].
Tutte le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica e risolverlo in modo molto più semplice.
Ora abbiamo quindi che le forze che agiscono sul sistema sono,

$$\vec{F_p} = -mg\hat{z}\vec{F_e}l = -k(z - z_i)\hat{z}$$

e considerando la conservazione dell'energia meccanica abbiamo che,

$$E_k + U = cost => E_k + U_p + U_{el} = cost$$

Calcoliamo ora quindi le energie potenziali,

$$U_p = -W_p = mg(z - z_0)$$
$$U_{el} = \frac{k}{2}(z^2 - z_0^2)$$

e quindi ora sostituisco nella formula precedente e ottengo,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{k}{2}z^2 = cost$$

Ora considerando il sistema di riferimento scelto, nel punto iniziale abbiamo $v_i = 0$ e $z = 0$ e quindi, la formula precedente è $= 0$.
Considerando il punto z_{max}, ho sempre che $v = 0$, e ottengo che,

$$mgz_{max} + \frac{k}{2}{z_{max}}^2 = 0 => z_{max}(\frac{k}{2}z_{max} + mg) = 0$$

Le due soluzioni sono quindi $z_{max} = 0$, che non viene considerata, e

$$z_{max} = -\frac{2mg}{k} = \Delta z_{max}$$

Ora osserviamo che $z_{v_{max}}$ è z_{eq}, ovvero la z nel punto di equilibrio, e quindi,

$$z_{v_{max}} = z_{eq} = \frac{z_{max}}{2} = -\frac{mg}{k}$$

Per calcolare la v_{max} ora, consideriamo sempre il fatto che essa è in z_{eq} e quindi,

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgz_{eq} + \frac{k}{2}z_{eq}^2 = 0 \qquad => \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{(mg)^2}{2K} = 0$$
$$=> \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{2K} = 0$$
$$=> \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{(mg)^2}{2K}$$
$$=> v_{max}^2 = \frac{mg^2}{K}$$
$$=> v_{max} = \sqrt{\frac{mg^2}{K}}$$

5.6 Forze non conservative e lavoro

Consideriamo ora il fatto in cui sul sistema agiscono anche forze non conservative e ne calcoliamo il lavoro.
Abbiamo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{R}_{nc}$$
$$W_{TOT} = \int_i^f \vec{R}d\vec{s} = \int_i^f \vec{R}_c d\vec{s} + \int_i^f \vec{R}_{nc}d\vec{s} = W_c + W_{nc}$$

Ora però sappiamo che,

$$W_{TOT} = \Delta E_k => W_c + W_{nc} = \Delta E_k => W_{nc} = \Delta E_k - W_c$$

ma ora ci ricordiamo che $W_c = -\Delta U$ e quindi,

$$W_{nc} = \Delta E_k + \Delta U => W_{nc} = \Delta E$$

Quindi se sul sistema agiscono delle forze non conservative, il lavoro di queste sarà uguale alla variazione di energia meccanica.
Osserviamo ora quindi che se $W_{nc} < 0$, vuol dire che $E_f - E_i < 0$ e quindi $E_f < E_i$. Allo stesso modo, se $W_{nc} > 0$, vuol dire che $E_f - E_i > 0$ e quindi $E_f > E_i$, e inoltre $E_f = E_i + W_{nc}$.

5.6.1 Esempio lavoro forze non conservative

Supponiamo che un corpo di massa m scali una montagna di altezza h_{max} partendo da $h_0 = 0$. Ora non considerando gli attriti, abbiamo solo la forza peso che agisce sulla massa. Calcoliamo quindi,

$$\begin{aligned}
&\Delta U_p = mgh_{max} + mg0 = mgh_{max} \\
&\Delta E_k = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{1}{2}m{v_i}^2 = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}m0^2 = 0 \\
&\Delta E = mgh_{max} = W_{nc}
\end{aligned}$$

L'energia cinetica è = 0 dato che sia la velocità iniziale che quella finale sono = 0 e quindi l'energia meccanica sarà uguale all'energia potenziale, quest'ultima è uguale all'energia potenziale finale dato che, essendo l'altezza iniziale = 0, anche l'energia potenziale iniziale = 0.