



# Fisica

UNITN - Lazzerini Thomas, Cappelletti Samuele

Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Formulario</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Unità di misura . . . . .   | 7         |
| <b>2 Introduzione</b>   | <b>7</b>  |
| 2.1 Il metodo sperimentale . . . . .  | 7         |
| <b>3 Cinetica dei punti</b>   | <b>7</b>  |
| 3.1 Sistema di riferimento . . . . .  | 7         |
| 3.2 Diagramma dello spazio . . . . .  | 8         |
| 3.3 Caso semplice . . . . .   | 8         |
| 3.4 Moto rettilineo uniforme . . . . .  | 9         |
| 3.5 Velocità . . . . .  | 9         |
| 3.5.1 Velocità istantanea . . . . .   | 10        |
| 3.5.2 Accelerazione . . . . .   | 10        |
| 3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accellerato . . . . .                                     | 10        |
| 3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule . . . . .  | 11        |
| 3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme) . . . . .  | 11        |
| 3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accellerato) . . . . .                       | 11        |
| 3.6 Moto armonico . . . . .   | 13        |
| 3.6.1 Esempio di moto armonico . . . . .  | 14        |
| 3.7 I moti piani . . . . .  | 15        |
| 3.7.1 I vettori . . . . .   | 15        |
| 3.7.2 Sistema di riferimento . . . . .  | 15        |
| 3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione . . . . .                                       | 17        |
| 3.7.4 Esempio . . . . .   | 17        |
| 3.8 Il moto parabolico . . . . .  | 19        |
| 3.8.1 Sistema di riferimento . . . . .  | 19        |
| 3.8.2 Rappresentare spazio, gittata $\gamma$ , altezza massima $h_{max}$ e velocità . . . . . | 20        |
| 3.8.2.1 Riassunto . . . . .   | 21        |
| 3.9 Moto circolare uniforme . . . . .   | 21        |
| 3.9.1 Formule principali . . . . .  | 23        |
| <b>4 Dinamica</b>   | <b>23</b> |
| 4.1 Leggi della dinamica . . . . .  | 23        |
| 4.2 Forze impulsive . . . . .   | 24        |
| 4.2.1 Esempio forze impulsive . . . . .   | 24        |
| 4.2.2 Esercizio su forze impulsive . . . . .  | 25        |
| 4.3 Esercizi sulla dinamica . . . . .   | 25        |
| 4.4 Forze fondamentali . . . . .  | 26        |
| 4.5 Forze . . . . .   | 27        |
| 4.5.1 Forza peso . . . . .  | 27        |
| 4.5.1.1 Esempio sensazione del peso . . . . .   | 28        |
| 4.5.2 Forza gravitazionale . . . . .  | 29        |
| 4.5.3 Forza elastica . . . . .  | 29        |
| 4.5.4 Forza di attrito (radente) . . . . .  | 32        |
| 4.5.4.1 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito statico . . . . .                      | 33        |
| 4.6 Piano inclinato . . . . .   | 33        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.6.1    | Sistema di riferimento . . . . .   | 33        |
| 4.6.2    | Esempio . . . . .  | 34        |
| 4.6.2.1  | Versione senza attrito . . . . .   | 35        |
| 4.6.2.2  | Versione con attrito . . . . .   | 36        |
| 4.6.3    | Esempio di calcolo del coefficiente di attrito dinamico . . . . .                          | 37        |
| 4.7      | Pendolo semplice . . . . .   | 37        |
| 4.7.1    | Sistema di riferimento sul peso . . . . .  | 38        |
| 4.7.2    | Sistema di riferimento nella posizione di equilibrio . . . . .                             | 38        |
| 4.7.2.1  | Calcolare spazio, velocità e accelerazione . . . . .                                       | 39        |
| 4.7.2.2  | Le piccole oscillazioni . . . . .  | 40        |
| 4.8      | Esercizio sulla dinamica . . . . .   | 41        |
| 4.8.1    | Studio della dinamica del problema . . . . .   | 43        |
| 4.8.2    | Allungamento massimo . . . . .   | 45        |
| 4.8.3    | Posizione di velocità massima . . . . .  | 45        |
| 4.8.4    | Velocità massima . . . . .   | 45        |
| 4.8.5    | Calcoliamo la T . . . . .  | 45        |
| 4.8.5.1  | Il periodo . . . . .   | 45        |
| 4.8.5.2  | La tensione . . . . .  | 45        |
| <b>5</b> | <b>Meccanica</b> . . . . .   | <b>46</b> |
| 5.1      | Lavoro . . . . .   | 46        |
| 5.2      | Esempi di lavoro . . . . .   | 47        |
| 5.2.1    | Lavoro forza peso . . . . .  | 47        |
| 5.2.2    | Lavoro forza elastica . . . . .  | 48        |
| 5.2.3    | Lavoro forza attrito . . . . .   | 48        |
| 5.3      | Energia cinetica . . . . .   | 49        |
| 5.3.1    | Teorema delle forze vive . . . . .   | 49        |
| 5.4      | Potenza . . . . .  | 49        |
| 5.5      | Forze conservative . . . . .   | 49        |
| 5.5.1    | Energia potenziale . . . . .   | 50        |
| 5.5.2    | Energia meccanica . . . . .  | 50        |
| 5.5.3    | Principio di conservazione dell'energia meccanica . . . . .                                | 50        |
| 5.5.4    | Esercizio forze conservative . . . . .   | 50        |
| 5.6      | Forze non conservative e lavoro . . . . .  | 51        |
| 5.6.1    | Esempio lavoro forze non conservative . . . . .  | 52        |
| 5.6.2    | Esempio energie . . . . .  | 52        |
| 5.7      | Gravità universale . . . . .   | 52        |
| 5.8      | Leggi di Keplero . . . . .   | 54        |
| 5.9      | Sistemi di riferimento non inerziali . . . . .   | 55        |
| 5.9.1    | Convertire una rotazione in vettore . . . . .  | 55        |
| 5.9.2    | Prodotto vettoriale . . . . .  | 55        |
| 5.9.3    | Legge di Poisson . . . . .   | 56        |
| 5.9.4    | Cambiare il sistema di riferimento . . . . .   | 57        |
| 5.9.4.1  | Spazio in un sistema non inerziale . . . . .   | 58        |
| 5.9.4.2  | Velocità in un sistema non inerziale (teorema delle velocità relative) . . . . .           | 58        |
| 5.9.4.3  | Accelerazione in un sistema non inerziale (teorema delle accelerazioni relative) . . . . . | 59        |
| 5.9.4.4  | Riassumendo . . . . .  | 60        |
| 5.10     | Forze apparenti . . . . .  | 60        |
| 5.10.1   | Principio di relatività galileiana . . . . .   | 60        |

|  |           |
|--|-----------|
| 5.10.2 Esempio 1 forze apparenti . . . . .                         | 61        |
| 5.10.3 Esempio 2 forze apparenti . . . . .                         | 61        |
| 5.11 Punto materiale . . . . .                                     | 62        |
| 5.11.1 Esercizio centro di massa . . . . .                         | 63        |
| 5.11.2 Sistema isolato . . . . .                                   | 63        |
| 5.11.3 Principio di conservazione della quantità di moto . . . . . | 63        |
| 5.12 Gli urti . . . . .  | 63        |
| 5.12.1 Conservazione della quantità di moto . . . . .              | 64        |
| 5.12.1.1 Esempio neutrini (oggetti che "esploscono") . . . . .     | 65        |
| 5.12.2 Urto (puramente) anelastico . . . . .                       | 66        |
| 5.12.2.1 Energie cinetiche . . . . .                               | 67        |
| 5.12.2.2 Esercizio urto unelastico . . . . .                       | 67        |
| 5.12.3 Urto elastico . . . . .                                     | 69        |
| 5.12.3.1 Esempio di esercizio . . . . .                            | 69        |
| <b>6 Termodinamica</b>   | <b>73</b> |
| 6.1 Numero di Avogadro . . . . .                                   | 73        |
| 6.2 Sistema termodinamico . . . . .                                | 73        |
| 6.3 Variabili termodinamiche . . . . .                             | 73        |
| 6.4 Equilibrio termodinamico . . . . .                             | 74        |
| 6.5 Trasformazione termodinamica . . . . .                         | 74        |
| 6.6 Temperatura . . . . .  | 74        |
| 6.6.1 Unità di misura temperatura . . . . .                        | 75        |
| 6.6.2 Punto triplo dell' $H_2O$ . . . . .                          | 75        |
| 6.6.3 Termometro . . . . .   | 75        |
| 6.6.4 Contatto termico . . . . .                                   | 75        |
| 6.6.5 Princípio zero della termodinamica . . . . .                 | 76        |
| 6.7 Esperimento di Joule . . . . .                                 | 76        |
| 6.8 Calore . . . . .   | 77        |
| 6.8.1 Esempio di calore . . . . .                                  | 77        |
| 6.9 Princípio di equivalenza calore-lavoro . . . . .               | 78        |
| 6.10 I principio della termodinamica . . . . .                     | 78        |
| 6.11 Tipi di trasformazioni termodinamiche . . . . .               | 78        |
| 6.11.1 Trasformazione ciclica . . . . .                            | 78        |
| 6.11.2 Trasformazione quasi-statica . . . . .                      | 79        |
| 6.11.3 Trasformazione reversibile . . . . .                        | 79        |
| 6.11.3.1 Esempio trasformazione reversibile . . . . .              | 79        |
| 6.11.3.2 Esempio trasformazione non reversibile . . . . .          | 79        |
| 6.11.4 Lentezza . . . . .  | 80        |
| 6.12 Calorimetria . . . . .  | 80        |
| 6.12.1 Calore specifico . . . . .                                  | 81        |
| 6.12.2 Calorimetro . . . . .                                       | 81        |
| 6.12.3 Capacità termica . . . . .                                  | 81        |
| 6.13 Cambi di fase . . . . .                                       | 82        |
| 6.13.1 Calori latenti . . . . .                                    | 83        |
| 6.13.1.1 Esempio . . . . .   | 83        |
| 6.13.1.2 Esempio temperatura di equilibrio . . . . .               | 84        |
| 6.14 Trasferimento di calore . . . . .                             | 84        |
| 6.14.1 Conduzione . . . . .  | 84        |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 6.14.1.1 | La costante di conducibilità . . . . .   | 85  |
| 6.14.2   | Convezione . . . . .   | 85  |
| 6.14.3   | Irraggiamento . . . . .  | 86  |
| 6.14.3.1 | Esercizio con costante solare . . . . .  | 87  |
| 6.14.4   | Contentore adiabatico . . . . .  | 87  |
| 6.15     | Gas ideali . . . . .   | 87  |
| 6.15.1   | Le variabili principali . . . . .  | 88  |
| 6.15.1.1 | Volume . . . . .   | 88  |
| 6.15.1.2 | Pressione . . . . .  | 88  |
| 6.15.1.3 | Temperatura . . . . .  | 90  |
| 6.15.2   | Equazione di stato dei gas ideali (o perfetti) . . . . .                       | 91  |
| 6.15.2.1 | Legge isocora di Gay-Lussac . . . . .  | 91  |
| 6.15.2.2 | Legge isobara di Gay-Lussac . . . . .  | 91  |
| 6.15.2.3 | Legge isoterma di Boyle . . . . .  | 92  |
| 6.15.2.4 | Legge di Avogadro . . . . .  | 92  |
| 6.15.2.5 | Mettiamo tutte le leggi insieme . . . . .                                      | 93  |
| 6.15.2.6 | Esempio . . . . .  | 94  |
| 6.15.3   | Lavoro dei gas . . . . .   | 94  |
| 6.15.4   | Energia interna dei gas . . . . .  | 95  |
| 6.15.4.1 | Esperimento dell'espansione libera del gas . . . . .                           | 95  |
| 6.15.4.2 | Teoria cinetica dei gas . . . . .  | 96  |
| 6.16     | Trasformazioni particolari dei gas ideali . . . . .                            | 100 |
| 6.16.1   | Trasformazione isocora . . . . .   | 101 |
| 6.16.2   | Trasformazione isobara . . . . .   | 102 |
| 6.16.3   | Relazione di Mayer . . . . .   | 102 |
| 6.16.4   | Calore specifico a volume costante . . . . .                                   | 103 |
| 6.16.5   | Calore specifico a pressione costante . . . . .                                | 103 |
| 6.16.6   | Trasformazione isoterma . . . . .  | 104 |
| 6.16.6.1 | Esempio espansione isoterma . . . . .  | 105 |
| 6.16.7   | Trasformazione adiabatica . . . . .  | 105 |
| 6.17     | Trasformazioni cicliche . . . . .  | 107 |
| 6.17.1   | Macchine termiche . . . . .  | 108 |
| 6.17.2   | Macchine frigorifere . . . . .   | 108 |
| 6.18     | Ciclo di Carnot . . . . .  | 108 |
| 6.19     | Secondo principio della termodinamica . . . . .                                | 109 |
| 6.19.1   | Veloce recap sulle macchine . . . . .  | 109 |
| 6.19.1.1 | Macchine termiche . . . . .  | 110 |
| 6.19.1.2 | Macchine frigorifere . . . . .   | 110 |
| 6.19.2   | Dimostrazione dell'uguaglianza delle 2 principi . . . . .                      | 111 |
| 6.19.2.1 | Kelvin => Clausius . . . . .   | 111 |
| 6.19.2.2 | Clausius => Kelvin . . . . .   | 112 |
| 6.20     | Teorema di Carnot . . . . .  | 114 |
| 6.20.1   | Corollario e osservazioni . . . . .  | 117 |
| 6.21     | Teorema di Clausius . . . . .  | 118 |
| 6.22     | Entropia . . . . .   | 120 |
| 6.22.1   | Variazione di entropia $\Delta S$ . . . . .                                    | 121 |
| 6.22.2   | Alcune osservazioni . . . . .  | 121 |
| 6.22.3   | Variazione di entropia per le trasformazioni termodinamiche notevoli . . . . . | 122 |
| 6.22.3.1 | Trasformazione isoterma . . . . .  | 122 |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.22.3.2 | Trasformazione isocora . . . . .  | 123        |
| 6.22.3.3 | Trasformazione isobara . . . . .  | 123        |
| 6.22.3.4 | Trasformazione adiabatica . . . . .   | 123        |
| 6.22.3.5 | Cambi di fase (non necessariamente gas ideali) . . . . .  | 123        |
| 6.22.4   | Diagrammi T-S . . . . .   | 123        |
| 6.22.5   | Teorema dell'entropia (formulazione matematica del secondo principio della termodinamica) . . . . .                               | 123        |
| 6.23     | Esercizi termodinamica . . . . .  | 125        |
| 6.23.1   | Esercizio n.10, esame giugno2021b . . . . .   | 125        |
| 6.23.2   | Entropia esercizio n.10, esame giugno2021b . . . . .  | 126        |
| <b>7</b> | <b>Elettromagnetismo</b>  | <b>126</b> |
| 7.1      | Introduzione all'elettromagnetismo . . . . .  | 126        |
| 7.2      | Forza di Culomb . . . . .   | 127        |
| 7.2.1    | Digressione sugli atomi . . . . .   | 128        |
| 7.3      | Principio di sovrapposizione . . . . .  | 128        |
| 7.4      | Campo elettrico . . . . .   | 129        |
| 7.4.1    | Campo elettrico per campo puntiforme . . . . .  | 130        |
| 7.4.2    | Campo di dipolo . . . . .   | 131        |
| 7.4.3    | Esempio di esercizio con il campo elettrico . . . . .   | 131        |
| 7.5      | Circuitazione e potenziale elettrico . . . . .  | 133        |
| 7.5.1    | Energia potenziale elettrica e potenziale (sono 2 cose relativamente diverse :P) nel caso di cariche puntiformi singole . . . . . | 134        |
| 7.5.2    | Energia potenziale elettrica e potenziale nel caso di cariche puntiformi multiple . . . . .                                       | 136        |
| 7.6      | Teorema di Gauss . . . . .  | 136        |
| 7.6.1    | Concetto di "linee di forza" . . . . .  | 136        |
| 7.6.2    | Concetto di "flusso di $\vec{v}$ " . . . . .  | 137        |
| 7.6.3    | Concetto di "angolo solido" . . . . .   | 138        |
| 7.6.4    | Il teorema vero e proprio . . . . .   | 139        |
| 7.6.4.1  | Cariche puntiformi . . . . .  | 140        |

# 1 Formulario

## 1.1 Unità di misura

|     |               |           |       |               |            |
|-----|---------------|-----------|-------|---------------|------------|
| $T$ | $\Rightarrow$ | $10^{12}$ | $G$   | $\Rightarrow$ | $10^9$     |
| $M$ | $\Rightarrow$ | $10^6$    | $k$   | $\Rightarrow$ | $10^3$     |
| $m$ | $\Rightarrow$ | $10^{-3}$ | $\mu$ | $\Rightarrow$ | $10^{-6}$  |
| $n$ | $\Rightarrow$ | $10^{-9}$ | $p$   | $\Rightarrow$ | $10^{-12}$ |

# 2 Introduzione

## 2.1 Il metodo sperimentale

Distingue discipline sperimentali da discipline non sperimentali. Si compone di diverse fasi:

1. **formulazione ipotesi**: si fa un'**ipotesi descrittiva** (in **linguaggio matematico**) della porzione di mondo che si vuole analizzare, di conseguenza si decide di **non considerare** altre caratteristiche del mondo che non centrano con l'ipotesi che stiamo formulando;
2. **esperimento**: si va a ricreare una situazione dove l'aspetto che vogliamo analizzare è **sicuramente presente e influenzato il meno possibile da fattori esterni**;
3. **esecuzione dell'esperimento**: si verifica l'ipotesi, formulata in modo matematico, confrontando i valori ottenuti con l'esperimento con quelli che si ottengono dalla nostra ipotesi.

In base alla "verifica" dell'ipotesi possiamo fare una differenziazione:

- **teoria**: l'ipotesi **non è ancora verificata**, o è verificata **parzialmente**;
- **legge fisica**: l'ipotesi **è verificata** (in un certo ambito);

# 3 Cinetica dei punti

Describe il movimento dei corpi.

## 3.1 Sistema di riferimento

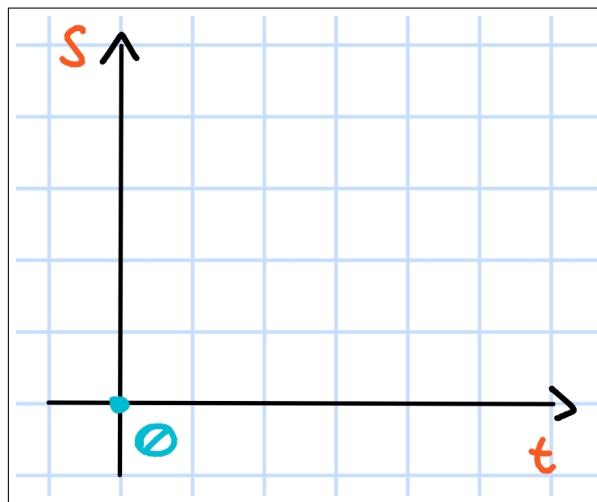
Specifichiamo un sistema di riferimento per il seguente argomento:

- origine** : punto da cui si misurano le distanze
- retta** → : usata per misurare gli spostamenti (la freccia indica il verso)
- origine**      **e**      **coord**      **1,5**      **3,5** → : distinguono i vari punti
- metro** : unità di misura conv. della lunghezza (e).

Una cosa importante da notare è che un numero singolo può rappresentare solo cose "mono-dimensionali" e che, soprattutto, non tutte le unità di misura possono rappresentare qualsiasi cosa (ad es.: l'età dell'universo non si può rappresentare con i metri).

### 3.2 Diagramma dello spazio

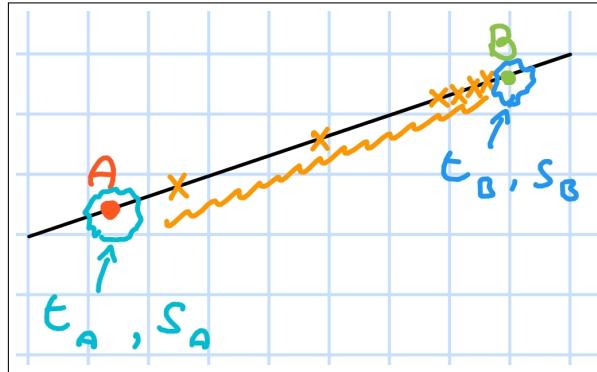
Rappresentiamo lo spostamento nel tempo tramite un "*diagramma dello spazio*":



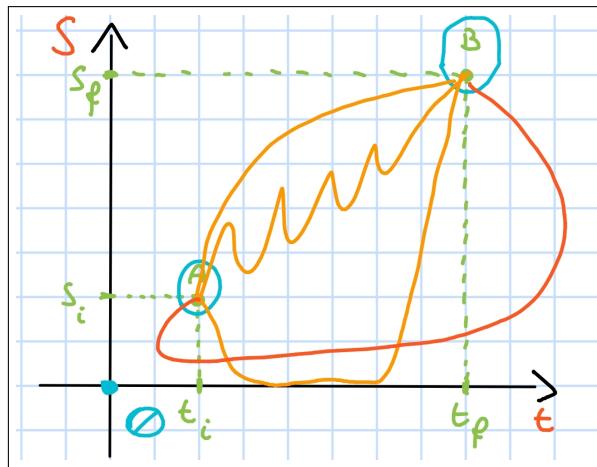
In particolare, in questo diagramma rappresentiamo sull'asse Y lo **spostamento** (s) (rappresentato come **valore uni-dimensionale**) e sull'asse X il **tempo** (t) (anche rappresentato come **valore uni-dimensionale**). **Nota che il diagramma NON RAPPRESENTA una posizione, ma lo spostamento in relazione al tempo.**

### 3.3 Caso semplice

Vediamo un semplice caso di utilizzo per capire come usare i diagrammi dello spazio:



Possiamo immaginare di avere un oggetto in movimento su una retta tra i punti A e B, come possiamo rappresentare questo movimento nel diagramma? Come prima cosa posizioniamo i "fenomeni" (*def. qualcosa che appare evidente all'osservazione*), ovvero i **punti A e B**, nota che non è detto che questi punti coincidano con dei "punti particolari" (ad esempio l'origine) nel nostro diagramma. In particolare, a questi punti associamo **un valore sull'asse del tempo** ( $t_i, t_f$ ) ed **un valore sull'asse dello spazio** ( $s_i, s_f$ ). A questo punto esistono **infiniti possibili percorsi** tra il punto A ed il punto B, ad esempio:



Importante notare che ***non tutti questi percorsi, pur avendo senso matematico, hanno senso fisico!*** Ad esempio, il percorso in rosso "torna indietro nel tempo"!

### 3.4 Moto rettilineo uniforme

STUB##### (In teoria lo fa dopo, controllare)

### 3.5 Velocità

Possiamo immaginare la velocità ( $v$ ) come la "*def. variazione dello spazio rapportato al tempo impiegato per percorrerlo*", in particolare la velocità è data dalla formula:

$$v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vediamo un semplice esempio:

$$s_i = 400m, s_f = 700m, t_i = 7 : 30 = 450min, t_f = 7 : 40 = 460min$$

$$v = \frac{700m - 400m}{460min - 450min} = \frac{300m}{600s} = 0,5m/s$$

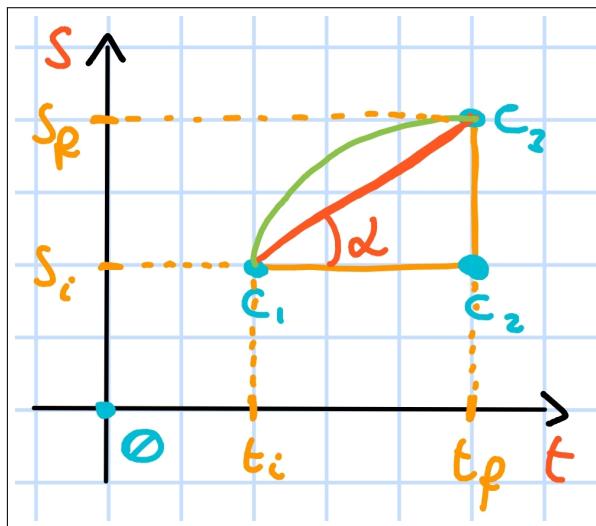
Nota che nella seconda uguaglianza nell'esempio abbiamo **convertito i minuti in secondi**, puoi immaginare che abbiamo posto " $min = (60s)$ ", quindi abbiamo fatto " $10min = 10 * (60s) = 600s$ ".

### 3.5.1 Velocità istantanea

Quella che abbiamo calcolato prima possiamo vederla come "velocità media" di tutto il percorso, la **velocità istantanea** invece possiamo vederla come la *def. velocità in un punto specifico del percorso*. Immagina quindi di fare la formula:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Nota che quando si usa la lettera " $\delta$ " stiamo ad indicare una **piccola** (infinitesima) **variazione**. Ora, se il valore di  $s$  viene espresso **in funzione di  $t$** , quindi abbiamo  $s(t)$ , e la funzione " $s(t)$ " è **derivabile**, allora la **velocità istantanea corrisponde alla derivata prima della funzione  $s(t)$** , che a sua volta corrisponde a  $\frac{ds}{dt}$ .



Supponendo che il **moto del nostro punto** venga identificato dalla curva in verde, il rapporto tra la lunghezza dei 2 cateti  $C_1C_2$  ( $\Delta t$ ) e  $C_2C_3$  ( $\Delta s$ ) rappresenta la **tangente  $\alpha$** , che in questo caso rappresenta la **velocità media**. Ora, se restringiamo l'intervallo di  $t$  in modo che tenda a 0 e calcoliamo il valore della derivata in quel punto otterremo la **velocità istantanea**.

### 3.5.2 Accelerazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la **velocità in un punto corrisponde al valore della derivata prima** (della funzione che rappresenta il moto del nostro corpo) **in quel punto**, per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che **l'accelerazione corrisponde al rapporto tra la derivata della velocità e la derivata del tempo**, ottenendo quindi la formula  $\frac{dv}{dt}$ , operativamente dobbiamo fare la **derivata seconda della funzione che rappresenta il moto del nostro punto**.

### 3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Cominciamo col dire che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ricorda che con  $dv$  e  $dt$  intendiamo le **derivate**. Da questa ricaviamo  $dv$ , ovvero:

$$dv = a * dt \Rightarrow \int_A^B dv = \int_A^B (a * dt) \Rightarrow v_B - v_A = a(t_B - t_A)$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Ottenuta questa formula, possiamo passare a calcolare lo **spazio in funzione del tempo**, ovvero:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{ds}{dt} &\Rightarrow ds = v * dt \Rightarrow \int_A^B ds = \int_A^B v * dt \Rightarrow s_B - s_A = \int_A^B [v_0 + a(t - t_0)] dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_B - s_A = \left[ v_0 * t + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \right]_A^B \Rightarrow s_B - s_A = v_0 * t_B + a \frac{(t_B - t_0)^2}{2} - v_0 * t_A + a \frac{(t_A - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Terminiamo dicendo che in questo moto **l'accelerazione è costante**, quindi:

$$\underline{a(t) = a}$$

### 3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule

Vediamo alcuni esempi:

**3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme)** Supponiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A ( $t_0, s_0$ ) ad un punto B ( $t_1, s_1$ ) tramite un **moto rettilineo uniforme**, abbiamo i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} t_0 = ? & s_0 = 1,5Km & v = 36m/s \\ s_1 = 11,5Km & t_1 = 0,3h & \end{array}$$

L'obiettivo è trovare i dati mancanti (ovvero  $t_0$ ). Noi sappiamo che la velocità "v" corrisponde a:

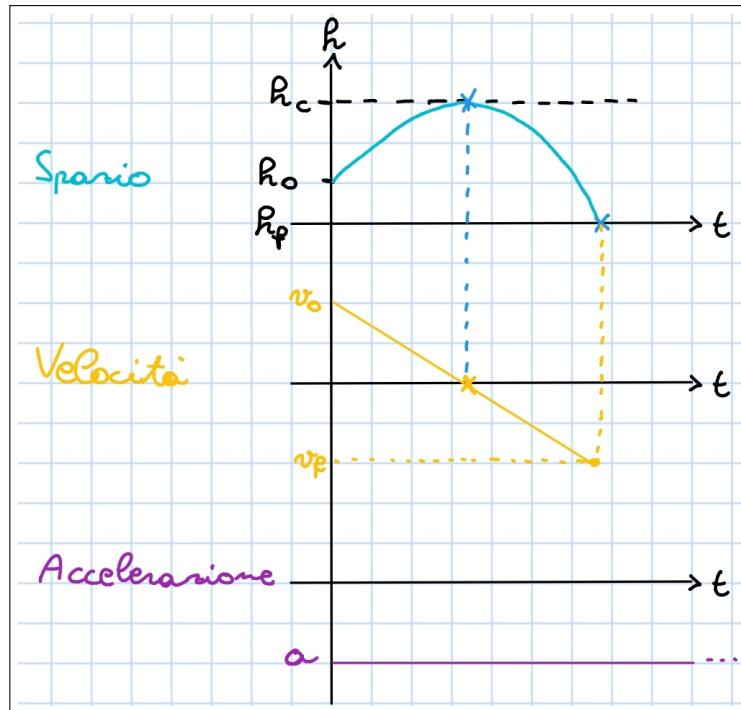
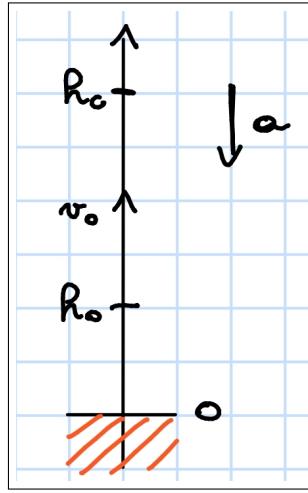
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow \dots \Rightarrow t_0 = t_1 - \frac{s_1 - s_0}{v}$$

Sostituendo i valori forniti, otteniamo che  $t_0 \approx 802,22s$

**3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accelerato)** Supponiamo di avere un oggetto all'altezza  $h_0$  e di lanciarlo verso l'alto con una velocità  $v_0$  nell'istante  $t_0$  con un'accelerazione  $a$ . Dobbiamo trovare l'altezza ( $h_c$ ) ed il tempo ( $t_c$ ) di culmine e, supponendo che alla fine l'oggetto raggiunga l'altezza finale " $h_f$ ", trovare il tempo finale " $t_f$ ". Supponiamo di avere i seguenti dati:

$$\begin{array}{llll} h_0 = 100m & t_0 = 0s & v_0 = 5m/s & a = -9,8m/s^2 \\ t_c = ? & h_c = ? & t_f = ? & h_f = 0m \end{array}$$

Includiamo delle immagini complementari:



Procediamo per punti:

1. Vogliamo trovare il tempo di culmine ( $t_c$ ), quindi poniamo  $v(t) = 0$  e troviamo la  $t$  che rende vera l'equazione:

$$v(t) = 0 \Rightarrow v_0 + a(t - 0) \Rightarrow t_c = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5m/s}{-9,8m/s^2} \approx 0,51s$$

2. Vogliamo calcolare l'altezza di culmine ( $h_c$ ), per farlo usiamo la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} h_c &= s(t_c) = s_0 + v_0(t_c - 0) + \frac{1}{2}a(t_c - 0)^2 = \\ &= 100m + 5m/s * (0,51s) + 1/2(-9,8m/s^2) * (0,51s)^2 \approx 101,28m \end{aligned}$$

3. Vogliamo calcolare il tempo "finale" ( $t_f$ ), per farlo usiamo sempre la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= h_f = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_0 + v_0(t_f - 0) + \frac{1}{2}a(t_f - 0)^2 = 0 \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo una funzione di secondo grado con  $x = t_f$ , quindi usiamo la formula solita:

$$t_f = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 - 2 \frac{s_0}{a}}$$

$$t_f = 0,51s + \sqrt{(0,51s)^2 - 2 * \frac{100m}{-9,8m/s^2}} \approx 5,06s$$

Nota che possiamo subito sostituire il " $\pm$ " con un "+" dato che la radice sarà sicuramente più grande di quel 0,51 che la precede, quindi non avrebbe fisicamente senso fare altrimenti (tempo negativo).

### 3.6 Moto armonico

Nel moto armonico abbiamo un'**accelerazione oscillante**, nella forma  $a_0 * \sin(t)$ . Il problema è che il  $\sin$  (come tutte le funzioni matematiche) è adimensionale, quindi dobbiamo aggiungere delle componenti aggiuntive per **rendere il tempo "t" adimensionale**, in particolare abbiamo che:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t + \varphi)$$

dove " $\omega$ " rappresenta la **pulsazione** e " $\varphi$ " la **fase**. Nota che **abbiamo già l'accelerazione**, ovvero  $a_0 * \sin(t)$ , quindi per calcolare velocità e spazio procediamo per **integrazioni successive**, con gli estremi di integrazione che corrispondono al **punto di inizio e di fine** della nostra misurazione.

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = v_0 + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \omega a_0 \sin(\omega t + \varphi) d\tau =$$

$$= v_0 + \frac{1}{\omega} \left[ -\cos(\omega t + \varphi) \right]_{t_0}^t = \textcolor{red}{v_0} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t_0 + \varphi) =$$

$$= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

Nota che il **testo in rosso sopra**, in quanto costante, viene raccolto in  $V$ , passiamo ora a calcolare lo spazio (che corrisponde all'integrazione della velocità):

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau =$$

$$= \textcolor{red}{s_0} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_0 + \varphi) =$$

$$= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

In definitiva, le formule che interessano a noi sono:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t + \varphi)$$

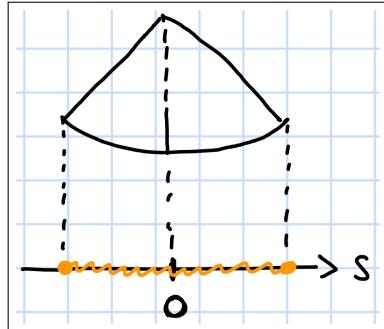
$$v(t) = \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

Ricorda che **le parti in rosso** sono costanti (di solito per noi varranno 0), mentre l'accelerazione ci è stata fornita all'intizio, quindi teniamo quella. Vediamo un "esempio":

### 3.6.1 Esempio di moto armonico

Ipotiziamo di avere una situazione del genere: vogliamo misuare l'andamento dell'ombra di un'altalena (che va solo avanti e indietro) sulla superficie.



Noi **assumiamo sempre che  $\varphi$  (ovvero la fase) = 0** e che **cominciamo da  $t_0 = 0$** , quindi le nostre formule diventano:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t)$$

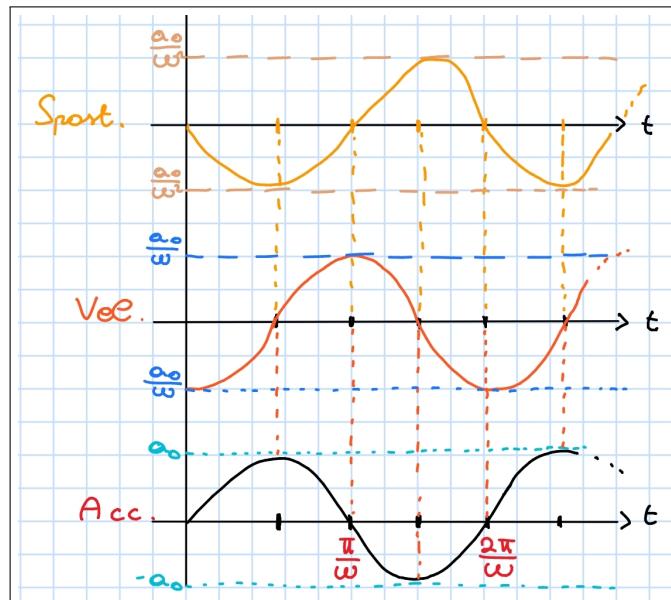
$$v(t) = -\frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$s(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

Prima di passare al grafico dobbiamo calcolare il valore della nostra variabile  $t$ , ora noi sappiamo che  $\omega t$ , dato che  $\varphi = 0$ , deve rappresentare una rotazione completa ( $2\pi$ ):

$$\omega t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

Nota che il nostro  $T$  rappresenta il **periodo**. Con queste funzioni/variabili, possiamo passare al calcolo dei grafici temporali:



## 3.7 I moti piani

Prima di partire con i moti veri e propri, introduciamo velocemente i **vettori**.

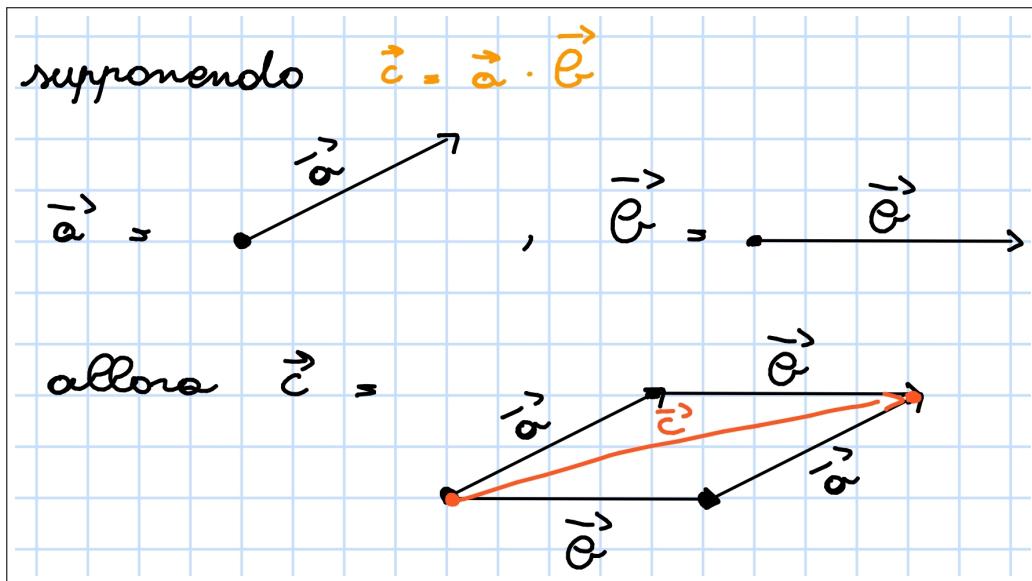
### 3.7.1 I vettori

Passiamo ora a considerare i **moti con 2 dimensioni**, per questo motivo dobbiamo introdurre i **vettori** composti da:

- punto di inizio;
- verso;
- modulo (la lunghezza del vettore);
- direzione (la retta su cui giace il vettore);

I vettori, si comportano in modi leggermente diversi rispetto ai numeri "normali", in particolare a noi interessa:

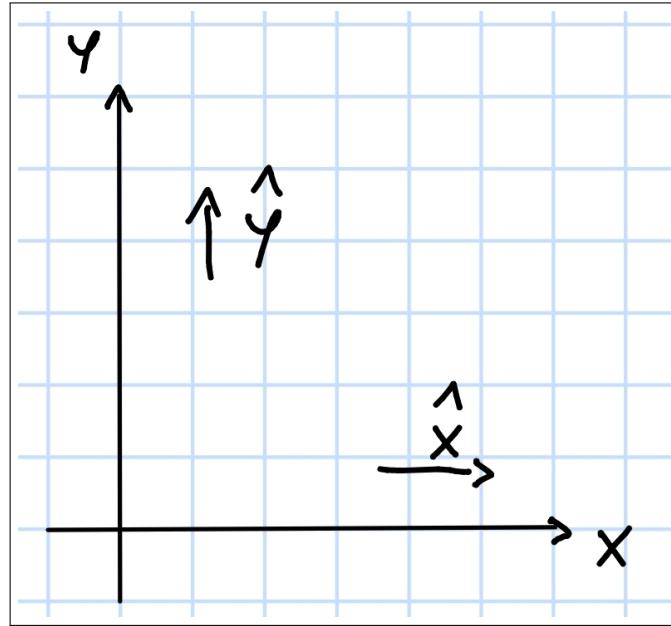
- somma: si fa con la **regola del parallelogramma**, ovvero:



- prodotto per scalare: quando si moltiplica un vettore per uno scalare, semplicemente si va a **moltiplicare il modulo del vettore**, in particolare " $\vec{a} = b * \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = b * |\vec{c}|$ "

### 3.7.2 Sistema di riferimento

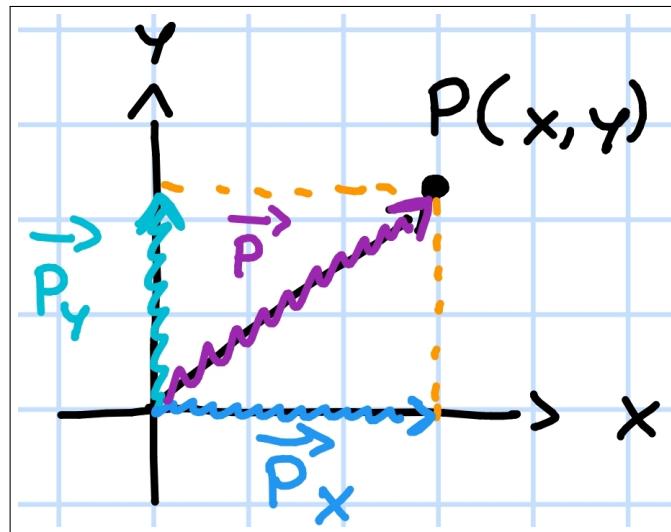
Introduciamo ora il sistema di riferimento per questo moto:



Da questo punto in poi, rappresentiamo il moto sul **piano cartesiano**: rappresenteremo quindi il **movimento "fisico"** del moto in quanto **non più unidimensionale!** Per quanto riguarda gli assi, si usano quelli che vengono definiti **versori** che matematicamente si rappresentano come  $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$ . In questo modo otteniamo qualcosa di **adimensionale** e che ha **modulo 1 per definizione**.

Quando vogliamo rappresentare un punto, possiamo farlo **attraverso un vettore**, che a sua volta si può rappresentare come la **somma di 2 vettori "unidimensionali"** (uno per ogni asse) che a loro volta si possono rappresentare come **spostamenti sui vari assi moltiplicati per il versore associato**:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}$$



Allo stesso modo possiamo rappresentare velocità ed accelerazione!

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x * \hat{x} + a_y * \hat{y}$$

Ora, possiamo anche rappresentare un vettore sottoforma di "matrice", in questo modo:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Ovvero lo spostamento, ad esempio, è composto dalla somma dello spostamento sull'asse x  $S_x$  e di quello sull'asse y  $S_y$

### 3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione

Partiamo con la velocità: sappiamo che la velocità per il moto unidimensionale è data dalla **derivata dello spostamento**, per quanto riguarda il moto piano non cambia molto: dobbiamo soltanto **derivare una somma di 2 componenti!** Ovvvero:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d[S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}]}{dt} = \frac{dS_x}{dt} * \hat{x} + S_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{dS_y}{dt} * \hat{y} + S_y * \frac{d\hat{y}}{dt}$$

Quelle 2 parti evidenziate in **rosso** sono speciali: rappresentano il possibile movimento degli assi. Per il momento, le considereremo **sempre nulle** in quanto i **nostri assi non si muoveranno!** Quindi, in soldoni, otteremmo che la nostra velocità equivale a:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS_x/dt \\ dS_y/dt \end{bmatrix}$$

Nota però che questo ragionamento possiamo farlo **solo se gli assi restano fermi**, altrimenti dovremmo fare delle considerazioni in più. Allo stesso modo, possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione, ottenendo anche qui:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \end{bmatrix}$$

### 3.7.4 Esempio

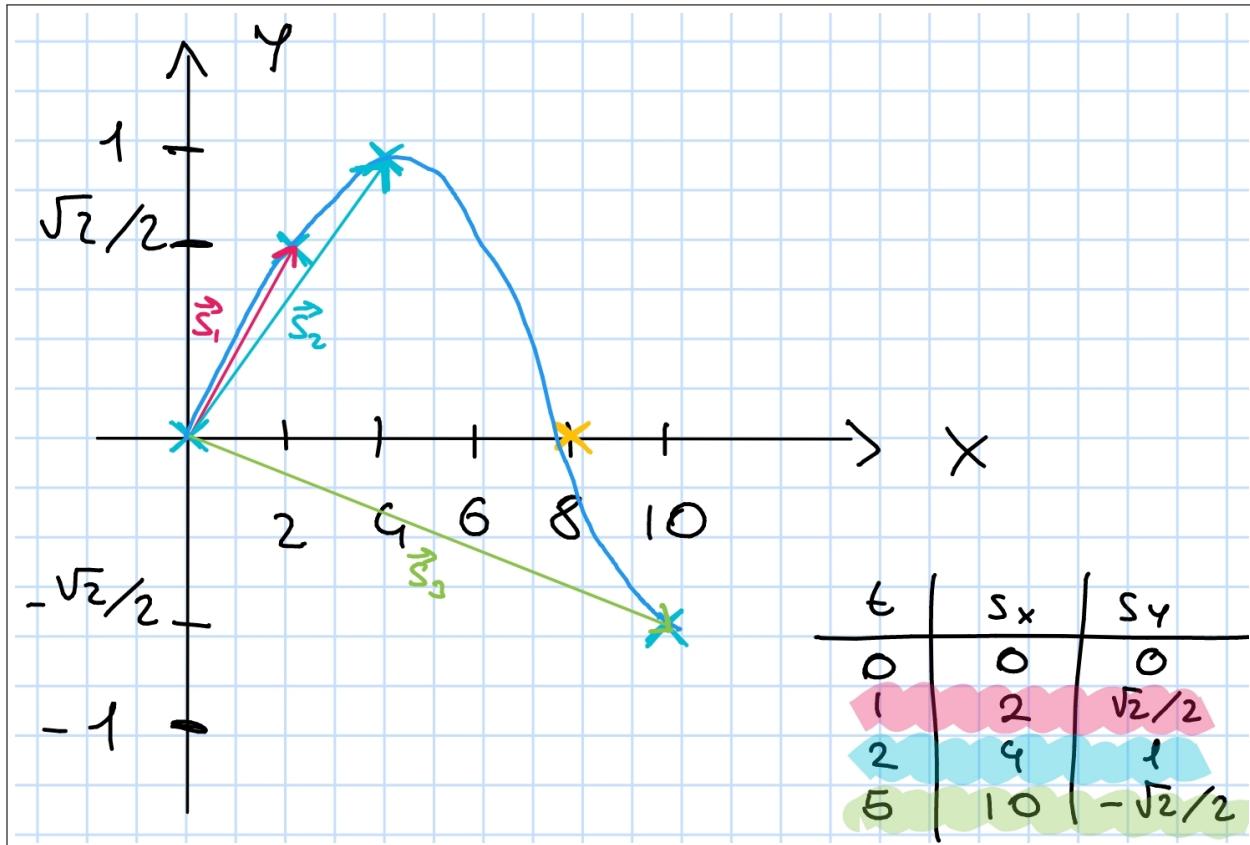
Vediamo un esempio, dobbiamo calcolare velocità e accelerazione sapendo che:

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m/s \\ 1m * \sin(\pi/4 Hz) \end{bmatrix}$$

Nota che  $Hz = s^{-1}$ , la prima cosa da fare ora è **rappresentare qualche punto**, possiamo farlo in una tabella:

| $t$ | $S_x$ | $S_y$         |
|-----|-------|---------------|
| 0   | 0     | 0             |
| 1   | 2     | $\sqrt{2}/2$  |
| 2   | 4     | 1             |
| 5   | 10    | $-\sqrt{2}/2$ |

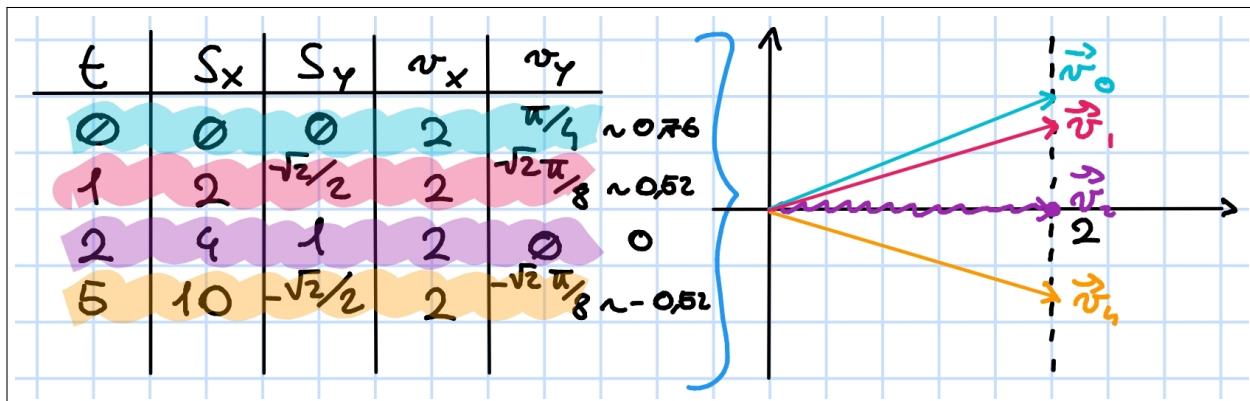
Rappresentiamo ora questi punti sul piano cartesiano (aggiungendo anche i vettori che rappresentano i punti), ricorda inoltre che il piano ora **rappresenta la traiettoria e NON più lo spazio/tempo**:



Ora calcoliamo la velocità, per farlo ci basta derivare per  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4} \cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Rifacciamo la tabella e rappresentiamo il tutto sul grafico:



Terminiamo con l'accelerazione, che corrisponde semplicemente alla **derivata della velocità**, otterremo quindi:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\frac{\pi}{4})^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Ricapitolando i risultati ottenuti,abbiamo che:

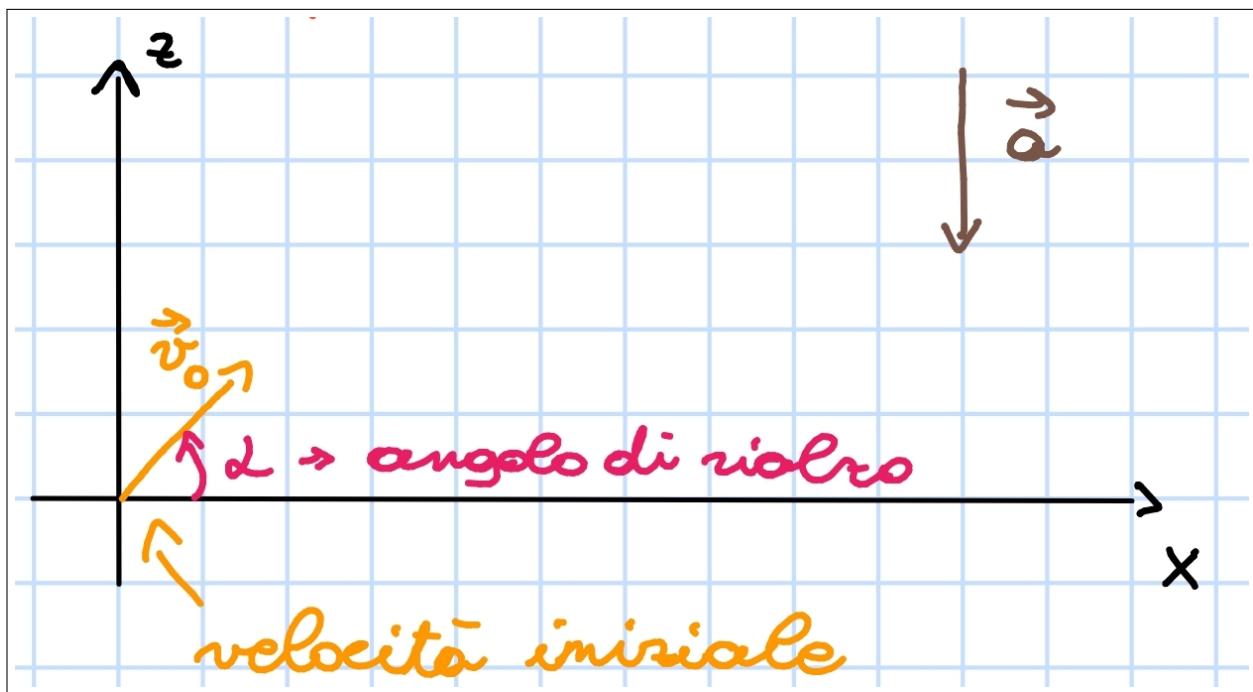
$$\begin{aligned}\vec{S}(t) &= \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4} \cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 3.8 Il moto parabolico

Iniziamo introducendo il sistema di riferimento che andremo ad utilizzare.

### 3.8.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito un grafico:



Avremmo quindi un oggetto che parte da **un punto iniziale**, che per convenzione supponiamo **(0, 0)**, con una **certa velocità iniziale**  $\vec{v}_0$  ed un certo **angolo di rialzo**  $\alpha$ . Inoltre sarà presente una **certa accelerazione "a" = -g** che punterà verso il basso (suppongo che  $-g$  indichi l'accelerazione gravitazionale terrestre). In questa sezione assumiam questa convenzione:

$$|\vec{v}_0| = v_0$$

Quindi possiamo riscrivere il vettore della velocità in questo modo:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha) \\ v_0 * \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

### 3.8.2 Rappresentare spazio, gittata $\gamma$ , altezza massima $h_{max}$ e velocità

Ora, come facciamo a rappresentare i grafici di spazio e velocità? Nota che l'accelerazione non serve, in quanto ci viene fornita in questo caso. Per quanto riguarda lo spazio, possiamo "spezzare" il problema in 2:

- spazio percorso in "larghezza" (x): lo trattiamo come un semplice problema di **moto rettilineo uniforme**, infatti l'accelerazione va solo verso il basso, non avanti o indietro;
- spazio percorso in "altezza" (z): in questo caso lo consideriamo un problema di **moto uniformemente accelerato**, infatti abbiamo un'accelerazione costante che preme verso il basso.

Quindi otterremo le formule:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0 \cos(\alpha)t = \underline{v_0 * \cos(\alpha)t}$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z}{2}t^2 = v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

In definitiva, abbiamo che lo spazio corrisponde al vettore:

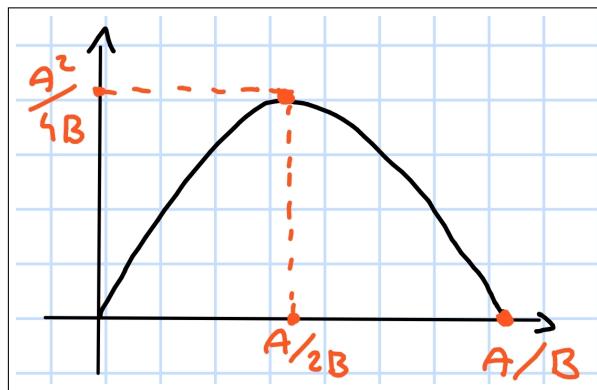
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha)t \\ v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Ora proviamo a mettere insieme le 2 formule in modo da ottenere una funzione da poter rappresentare facilmente sul grafico:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$z = v_{0z} * t - \frac{g}{2} * t^2 \Rightarrow \frac{v_{0z}}{v_{0x}} * x - \left( \frac{g}{2v_{0x}^2} \right) * x^2 \Rightarrow Ax - Bx^2$$

Abbiamo ottenuto l'**equazione di una parabola!** In particolare, avremmo queste proporzioni:



Ora che abbiamo un grafico disegnato, ci risulta particolarmente semplice trovare altre 2 componenti importanti:

- **gittata  $\gamma$** : ovvero la massima distanza percorsa in orizzontale. Possiamo ottenerla tramite la formula:

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{v_0}{v_{0x}} * \frac{2v_{0x}^2}{g} = \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}}{g} = \frac{v_0^2}{g} * 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) = \underline{\frac{v_0^2}{g} * \sin(2\alpha)}$$

- **altezza massima**  $h_{max}$ : ovvero l'altezza di culmine della nostra parabola. Guardando il grafico possiamo vedere che corrisponde a:

$$h_{max} = \frac{A^2}{4B} = \frac{A}{4} * \frac{A}{B} = \frac{v_0 z}{4v_{0x}} * \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}^2}{v_{0x} g} = \frac{v_0 z}{4} * \frac{2 * v_{0z}}{g} = \frac{2v_{0z}^2}{4g} = \frac{1}{2} * \frac{v_{0z}^2}{g} = \frac{v_0^2 * \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Terminiamo velocemente con la velocità che, ricordiamo, è la **derivata dello spazio percorso**:

$$v_x(t) = \frac{d(v_0 * \cos(\alpha)t)}{dt} = v_0 \cos(\alpha) = v_{0x}$$

$$v_z(t) = \frac{dS_z}{dt} = v_0 * \sin(\alpha) - gt = v_{0z} - gt$$

### 3.8.2.1 Riassunto

Ricapitolando tutte le formule che abbiamo visto:

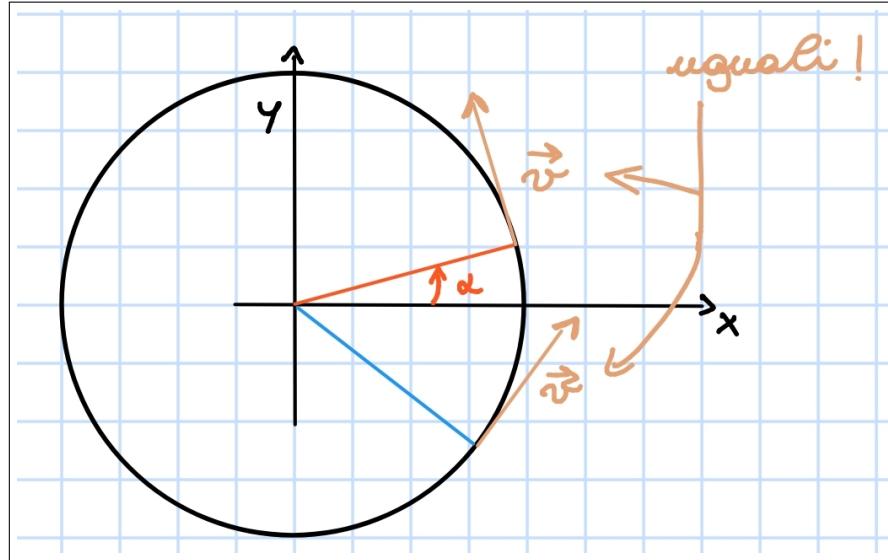
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha)t \\ v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{v_0^2}{g} * \sin(2\alpha)$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 * \sin^2(\alpha)}{2g}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - gt \end{bmatrix}$$

## 3.9 Moto circolare uniforme



Nel moto circolare uniforme la velocità è **costante**, infatti in tutti i punti la velocità **non** cambia lunghezza, cambia solo la sua direzione. La velocità in un punto, inoltre, è **sempre tangente** alla traiettoria in quel punto. Si hanno le seguenti formule:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$$

$$r(t) = R$$

dove  $R$  è il raggio della circonferenza e  $\omega$  è la velocità angolare, definita come  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  con  $T$  periodo. La **frequenza** è definita come  $f = \frac{1}{T}$  e la **velocità** come:

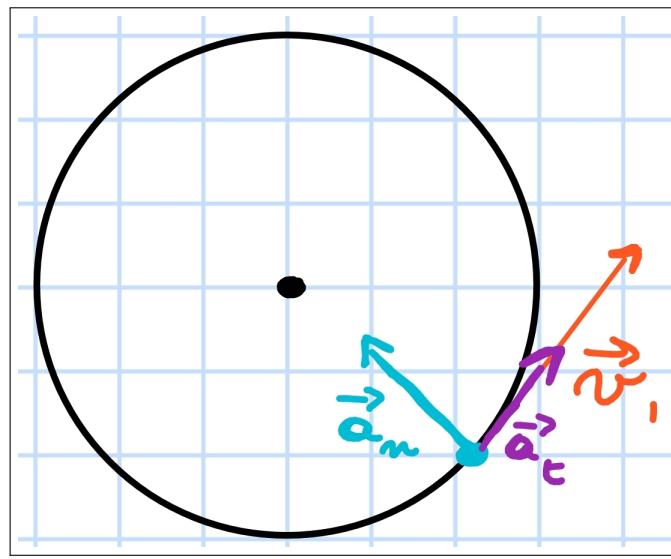
$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Osservando la formula qui sopra, possiamo notare che a meno che il raggio  $R$  non cambi, la velocità sarà costante, nel caso in cui cambia, invece, cambierà anche la velocità. Ora, ponendo l'origine del piano cartesiano come il centro della circonferenza, calcoliamo lo **spazio**, la **velocità** e l'**accelerazione** in funzione del tempo come segue:

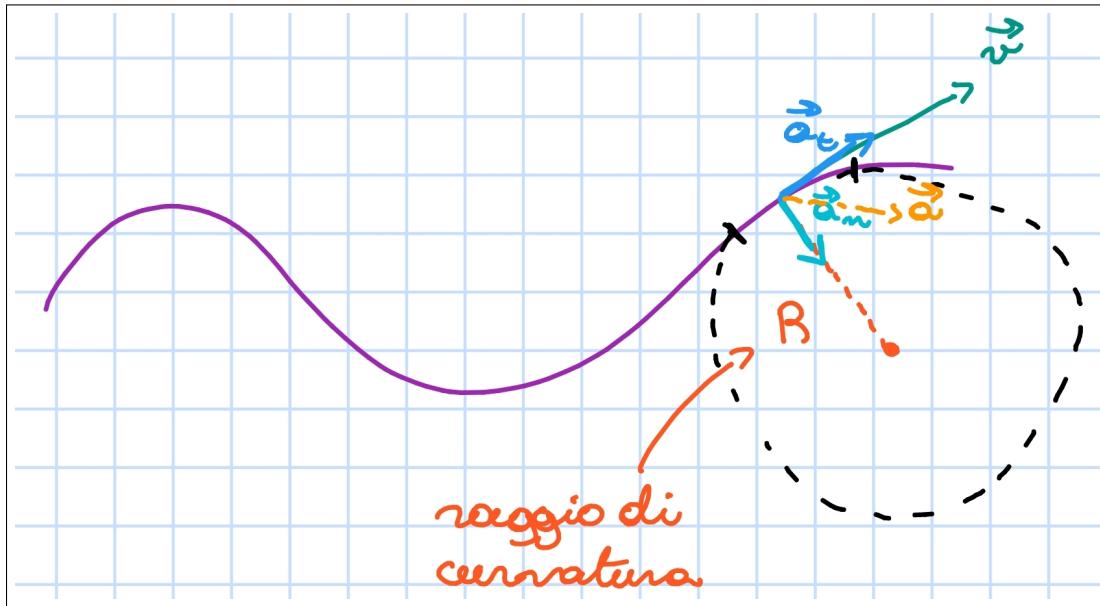
$$\vec{s}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos(\alpha(t)) \\ y(t) = R\sin(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -R \frac{d\alpha}{dt} \sin(\alpha(t)) = -\omega R \sin(\alpha(t)) \\ v_y(t) = R \frac{d\alpha}{dt} \cos(\alpha(t)) = \omega R \cos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\alpha(t)) \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\alpha(t)) \end{cases}$$



Ora l'accelerazione si divide in due componenti,  $\vec{a}_t$  (**accelerazione tangente**) e  $\vec{a}_n$  (**accelerazione normale o centripeta**). La prima è parallela alla tangente nel punto e modifica il **modulo della velocità**, mentre la seconda è ortogonale alla tangente nel punto e modifica la **traiettoria(direzione)**. Dato un qualsiasi **moto piano**, se prendo una piccola parte di questo, allora può essere immaginato come un arco di circonferenza. Più il tratto è **grande** e più l'arco di circonferenza sembrerà **rettilineo**, più il tratto è **piccolo** e più l'arco di circonferenza sembrerà **curvo** e avrà corrispondentemente una circonferenza **grande** e una **piccola**.



In questo caso avrò quindi che le due componenti dell'accelerazione varranno:

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a}_t| = \vec{a} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{a} \hat{v}$$

dove  $\hat{v}$  è il **versore velocità**.

### 3.9.1 Formule principali

Ricapitoliamo le formule principali:

- velocità angolare  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  (variazione dell'angolo nell'unità di tempo), oppure anche  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  (2π, la circonferenza, fratto T, il tempo per percorrerla);
- velocità  $v = \omega * R$ ;
- accelerazione centripeda (quella che tira verso il centro per far mancare il moto circolare)  $a_c = \omega^2 * R$ , oppure anche  $a_c = \frac{v^2}{R}$ ;

## 4 Dinamica

### 4.1 Leggi della dinamica

La **dinamica** si occupa dello studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause(**forze**), ovvero delle circostanze che lo determinano e lo modificano nel **tempo** e nello **spazio** del suo sistema di riferimento. Wikipedia Le leggi della dinamica sono 3 e sono le seguenti:

1. **Legge di Inerzia (I legge)**: un corpo rimane nel suo stato di quiete finché non intervengono agenti esterni a modificarne questo stato. Questa legge vale solo in sistemi di riferimento inerziali;

2. **Legge di Newton (II legge):** Viene definita la **quantità di moto** come  $\vec{p} = m\vec{v}$ , ovvero massa per velocità. Successivamente viene definita la forza ( $\vec{F}$ ) come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove  $m$  è la **massa inerziale**, ovvero la capacità di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto, questa mette in relazione la velocità alla forza.

Nel caso in cui la massa non varia, allora la forza può essere definita come  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . Questo perché  $dm = 0$  (la massa non cambia) e  $\frac{d\vec{v}}{dt} \triangleq \vec{a}$

L'unità di misura della **forza** è il Newton ( $N$ ) definito come  $\frac{kg \cdot m}{s^2}$ .

3. **Principio di azione e reazione (III legge):** Quando il corpo 1 esercita una forza  $\vec{F}$  sul corpo 2, quest'ultimo esercita sul corpo 1 una forza  $-\vec{F}$ , uguale e opposta.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Osserviamo che la **prima legge** potrebbe sembrare un caso particolare della **seconda legge**, con  $\vec{F} = \vec{0}$ , ma in realtà non è così, infatti la seconda e la terza legge sono valide solo all'interno di sistemi di riferimento inerziali, che sono definiti dalla prima legge.

## 4.2 Forze impulsive

L'**impulso**  $\vec{P}$  è definito come la variazione di quantità di moto  $\Delta\vec{p}$  in un  $\Delta t$  piccolo, ovvero:

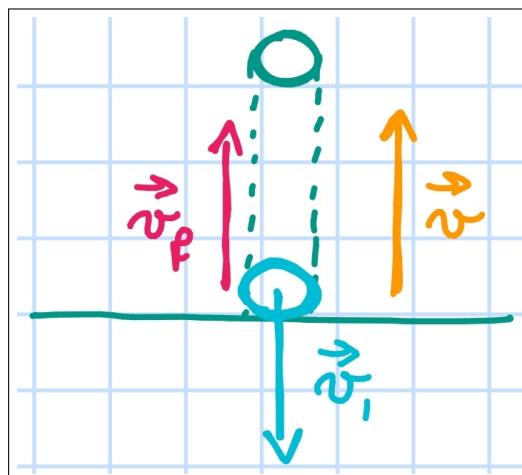
$$\vec{P} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

E la **forza impulsiva** come:

$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

### 4.2.1 Esempio forze impulsive

Supponiamo di avere un pavimento ed una palla che viene lasciata in aria. Questa palla cadrà verso il pavimento fino a raggiungerlo, rimbalzare su esso e tornare in su (assumiamo che la velocità con cui torna in su sia la stessa con cui cade, quindi non agiscono fattori esterni come attriti, ecc.).



Se ho un vettore velocità  $\vec{v}$ , allora ho che:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= m\vec{v}_i = -m\vec{v} \\ \vec{p}_f &= m\vec{v}_f = m\vec{v} \\ \Delta\vec{p} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m\vec{v}\end{aligned}$$

#### 4.2.2 Esercizio su forze impulsive

Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover calcolare  $\vec{F}_{imp}$  (forza impulsiva):

$$m = 98g \quad v = 10.2 \frac{m}{s} \quad \Delta t = 100ms$$

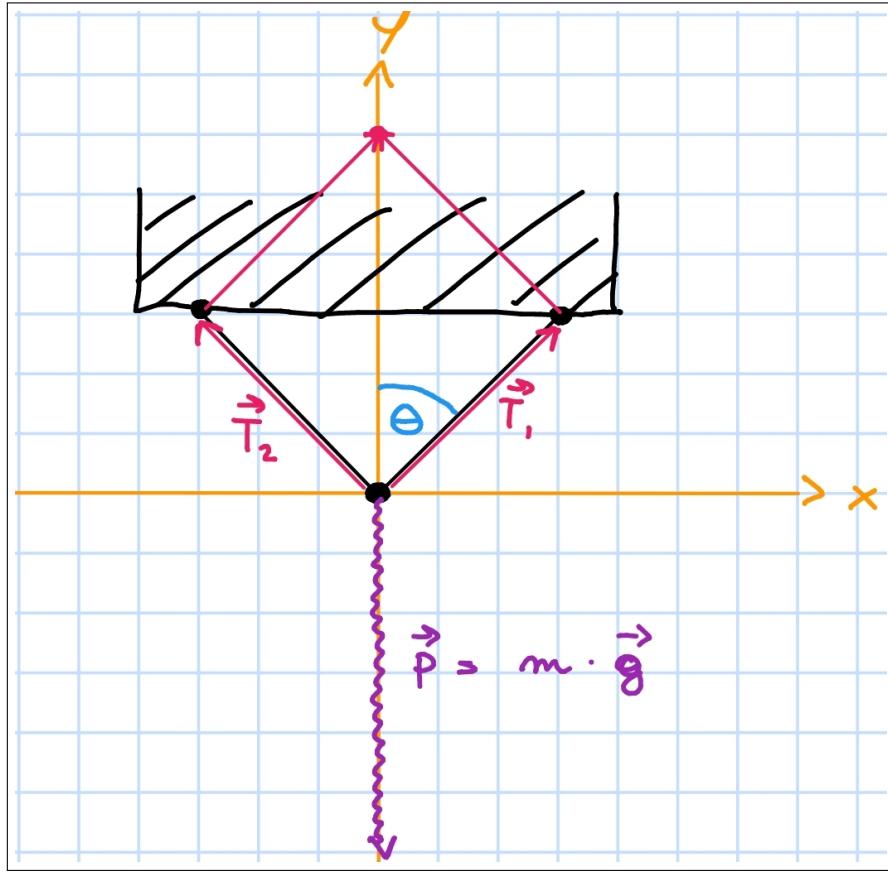
Procediamo ora quindi con calcolare  $\Delta\vec{p}$  usando la formula appena calcolata sopra e una volta ottenuto il valore calcoliamo la  $\vec{F}_{imp}$ :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p} &= 2m\vec{v} = 2 \cdot 10.2 \frac{m}{s} \cdot 0.098kg = 0.99 \frac{kg \cdot m}{s} \\ \vec{F}_{imp} &= \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0.99 \frac{kg \cdot m}{s}}{0.1s} = 9.99 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 9.99N\end{aligned}$$

#### 4.3 Esercizi sulla dinamica

Supponiamo di avere un oggetto appeso a due fili, che sono appesi al tetto, alla stessa distanza dall'oggetto e vogliamo trovare  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  tensioni dei fili, avendo i seguenti dati:

$$m = 100g \quad \theta = 60^\circ$$



Notiamo che l'oggetto resta fermo, quindi oltre a  $\vec{p}$  (**forza peso**), su esso agiscono altre forze la cui somma è uguale e opposta a  $\vec{p}$ . Abbiamo quindi che la **risultante delle forze**  $\vec{R} = \vec{0}$ .  
Ora possiamo notare che  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$  e abbiamo le seguenti forze:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -mg\hat{y} \\ \vec{T}_1 &= T_x\hat{x} + T_y\hat{x} = T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y} \\ \vec{T}_2 &= -T_x\hat{x} + T_y\hat{y} = -T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y}\end{aligned}$$

Ora ci ricordiamo che  $\vec{R} = \vec{0}$  quindi:

$$\begin{aligned}\vec{R} = \vec{0} &= \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 = T\sin\theta - T\sin\theta \\ R_y = 0 = -mg + T\cos\theta + T\cos\theta = -mg + 2T\cos\theta \end{cases}\end{aligned}$$

La prima equazione del sistema vale zero, ora dalla seconda ricaviamo  $T$ :

$$mg = 2T\cos\theta \Rightarrow T = \frac{mg}{2\cos\theta} = \frac{0.1kg \cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0.98N$$

## 4.4 Forze fondamentali

Le forze fondamentali sono le seguenti (scritte in ordine di intensità, dalla più debole alla più intensa):

- **Forza gravitazionale:** descrive l'interazione tra le masse gravitazionali. È una forza onnipresente, non esiste quindi nessuna componente di materia che ha massa, che non la risente;

- **Forza debole:** è la forza responsabile dell'interazione per cui i nuclei cambiano di natura (e.g. decadimento dei nuclei);
- **Forza elettromagnetica:** deriva dall'unificazione di forza elettrica e forza magnetica. È la forza responsabile della trazione della ripulsione di cariche ed è alla base delle forze che aggregano la materia;
- **Forza forte/nucleare:** è la forza responsabile della stabilità dei nuclei. Inizialmente si è definita come **forza nucleare**, ovvero che descrive un'interazione nucleare, tra protoni e neutroni, tra neutroni e neutroni e tra protoni e protoni. Poi è stato scoperto che i protoni e i neutroni non sono particelle fondamentali ma sono fatti di quark, e l'interazione è sentita dai quark, quindi è stata definita **forza forte**.

La forza elettromagnetica e la forza debole unificate formano la **forza elettrodebole**. Osserviamo che il quadro precedente, ovvero l'ordine di intensità, è **attuale**, era diverso nel passato e lo sarà anche nel futuro.

Quando due corpi/sistemi fisici interagiscono tra loro per una delle forze fondamentali, lo fanno perché hanno una sensibilità a quel tipo di forza, che è detta **carica** ed è rappresentata dalla lettera  $q$ . Per la forza gravitazionale per esempio, un corpo/sistema fisico subisce una trazione gravitazionale se ha una **massa** (**carica gravitazionale**,  $q_G$ ), ovvero la misura dell'inclinazione del corpo ad interagire con questa gravitazione. Per la forza elettromagnetica è uguale, se due oggetti sono neutri, non c'è trazione né repulsione. E la stessa cosa vale per forza debole e forza forte.

Quella che chiamiamo carica in senso comune, in realtà è la **carica elettrica** ( $q_E$ ).

## 4.5 Forze

### 4.5.1 Forza peso

La **forza peso** è descritta come segue, dato  $\vec{g} = -g\hat{z}$ :

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g}$$

Ora applico la seconda legge della dinamica [pag.24] e ottengo:

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g} = -m_G \cdot \vec{g}$$

dove  $m_G$  è la **massa gravitazionale**.

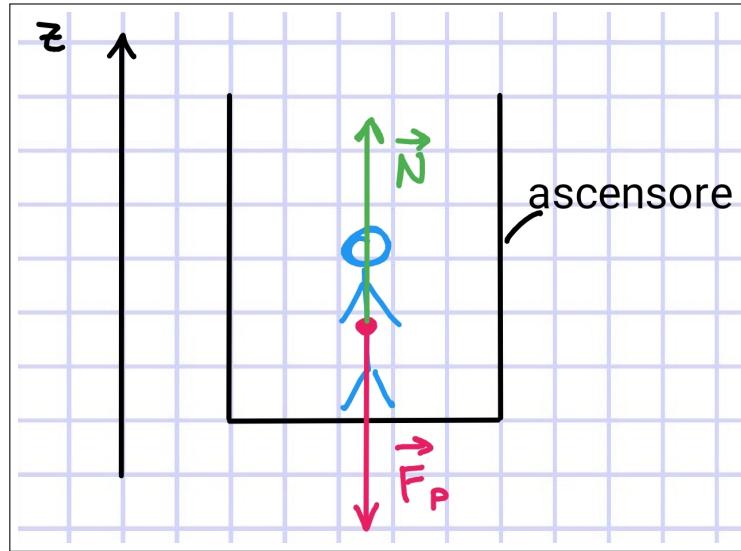
Ora calcolo le forze esterne ( $\vec{F}_{EXT}$ ):

$$\vec{F}_{EXT} = m_i \cdot \vec{a}$$

dove  $m_i$  è la **massa inerziale**, e posso assumere che  $\vec{a} = \vec{g}$ , e quindi di conseguenza,  $m_i = m_G$ .

Osserviamo che  $m_i$  e  $m_G$  sono uguali dal punto di vista quantitativo, ma non dal punto di vista concettuale. Infatti il primo è la capacità del corpo di opporsi al movimento, mentre il secondo è la carica dell'interazione gravitazionale che il corpo ha.

**4.5.1.1 Esempio sensazione del peso** Supponiamo di avere un'ascensore che ha 100 piani. La sensazione che si ha è di essere più "pesanti" quando l'ascensore parte per salire e più "leggeri" quando si ferma in alto.



Ora studiamo in particolare alcuni casi interessanti per vedere le differenze che ci sono:

- **CASO INTERMEDI** (e.g. da piano 25 a piano 75):

Supponiamo che l'ascensore sia ben isolata dall'ambiente, quindi che non ci siano vibrazioni, rumori, indicatore del piano, ecc., allora non si ha la percezione se ci si sta muovendo o se si è fermi. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \text{cost} \\ \vec{a} &= \vec{0} \\ \vec{R} &= \vec{0} \\ |\vec{F}_p| &= |\vec{N}| = N_0\end{aligned}$$

- **CASO PARTENZA IN SALITA:**

Se siamo fermi in un piano inferiore al piano 100 e premiamo un piano più alto di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di più. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a\hat{z} \\ \vec{g} &= -g\hat{z} \\ \vec{R} &\neq \vec{0} \\ \vec{F}_p + \vec{N} &= m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} \Rightarrow -mg + N = ma \Rightarrow N = ma + mg = N_0 + ma\end{aligned}$$

con  $ma > 0$ .

- **CASO PARTENZA IN DISCESA:**

Se siamo fermi in un piano superiore al piano 0 e premiamo un piano più basso di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di meno. Questo caso è uguale a quello della **partenza in salita** solo che c'è una decelerazione. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &< 0 \\ \vec{F}_p + \vec{N} &= m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} \Rightarrow -mg + N = ma \Rightarrow N = ma + mg = N_0 + ma\end{aligned}$$

con  $ma < 0$ .

- **CASO PARTICOLARE:**

Nel caso in cui si tagli in cavo dell'ascensore, sarà in caduta libera. Non si percepisce nessun effetto di reazione vincolare da parte del suolo/pavimento dell'ascensore. In caduta libera non si percepisce il peso. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &< 0 \\ |\vec{a}| &= |\vec{g}| \\ N &= N_0 + ma = mg - mg = 0\end{aligned}$$

#### 4.5.2 Forza gravitazionale

la **forza gravitazionale** ci dice che c'è un'attrazione con una certa costante di proporzionalità  $G$ , e l'intensità dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due masse e direttamente proporzionale al prodotto delle due masse, ovvero come descritto nella seguente formula:

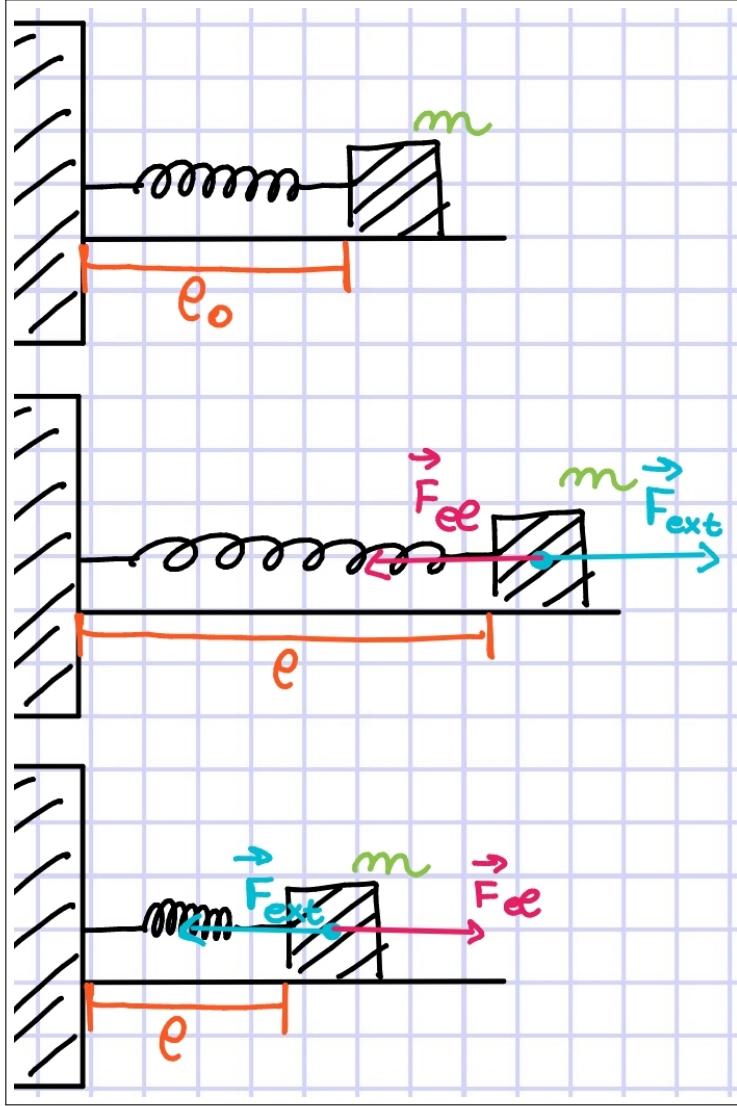
$$\vec{F}_G = \frac{m_g M}{r^2} \hat{r}$$

Assumendo ora che  $M = M_E$  e  $r = r_E$ , ovvero consideriamo massa e raggio della Terra, allora  $\vec{F}_G$  è una costante uguale a  $\vec{g}$ .

#### 4.5.3 Forza elastica

Supponiamo di avere una molla vincolata ad un supporto non movibile e fermo e all'altra estremità della molla attaccata una massa  $m$ . Assumiamo che non ci siano attriti.

Quando ci allontaniamo dalla **lunghezza di riposo**,  $l_0$ , della molla, quest'ultima si allunga o accorcia tramite una **sollecitazione esterna**.



Supponendo ora di avere una forza  $\vec{F}_{ext}$  che agisce sulla massa, per far sì che la massa rimanga ferma, vorrà dire che sulla massa agisce un'altra forza uguale e opposta esercitata dalla molla chiamata **forza elastica**  $\vec{F}_{el}$ .

Osserviamo che se la molla si allunga, allora  $\vec{F}_{ext}$  e  $\vec{F}_{el}$  avranno un verso, se invece la molla si accorcia, avranno verso opposto.

Osserviamo che la forza elastica è sempre opposta a  $\Delta\vec{l} = \vec{l} - \vec{l}_0$ , quindi se il verso di  $\Delta\vec{l}$  è positivo, allora il verso di  $\vec{F}_{el}$  è negativo, e viceversa.

La  $\vec{F}_{el}$  e  $\Delta\vec{l}$  sono proporzionali, infatti la formula della  $\vec{F}_{el}$  è la seguente:

$$\vec{F}_{el} = -K(\vec{l} - \vec{l}_0) = -K\Delta\vec{l}$$

Dove  $K$  è detta **costante elastica** e la sua unità di misura è quindi  $\frac{N}{m}$  (Newton/metro).

Osservando la formula precedente si può facilmente notare che la costante elastica è indipendente dalla massa del corpo, infatti indica solo la durezza della molla.

Le **forze di richiamo**, non solo la forza elastica, sono proporzionali allo spostamento, ovvero quando il corpo si allontana dal suo equilibrio viene richiamato verso di esso tramite una forza di richiamo che è sempre direttamente proporzionale allo spostamento, cioè a quanto il corpo si allontana dall'equilibrio.

Ora consideriamo la massa  $m$  e abbiamo:

$$F = -K \cdot x$$

ovvero la forza è inversamente proporzionale allo spostamento.

Ora considerando la seconda legge della dinamica [pag.24], sostituiamo la definizione di forza e otteniamo:

$$-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ora definiamo  $\omega^2 = \frac{K}{m}$  e otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

da cui ci ricaviamo  $x(t)$ ,  $v(t)$  e  $a(t)$  come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= A\omega\cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Per dimostrare come abbiamo ricavato  $x(t)$ , osserviamo la sua derivata seconda, ovvero  $a(t)$ , e notiamo che togliendo  $-\omega^2$  abbiamo esattamente  $x(t)$  quindi sostituendo quella con  $x$ , otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Ovvero l'ipotesi iniziale.

Osserviamo ora quindi che se applico una forza esterna sulla molla e poi la lascio andare, essa si muove in moto armonico intorno al punto di riposo. Questo moto dato che compare  $\sin$  nella formula sarà periodico, e il periodo è il seguente:

$$\begin{aligned} \omega t + \varphi &= \omega(t + T) + \varphi + 2k\pi \Rightarrow \omega t = \omega t + \omega T + 2k\pi \\ \Rightarrow \omega T &= 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che se fisso i valori di  $x(t)$  e  $v(t)$ , riesco a ricavare  $\varphi$  e  $A$ . Quindi se per esempio fisso:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_M \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove  $v_M$  è la velocità massima, mi ricavo:

$$\begin{aligned} A\omega\cos(\varphi) &= v_M \\ Asin(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

e da qui mi ricavo:

$$\begin{aligned} A\omega &= v_M \Rightarrow A = \frac{v_M}{\omega} \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

e quindi ottengo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_M}{\omega}\sin(\omega t) \\ v(t) &= v_M\cos(\omega t) \end{aligned}$$

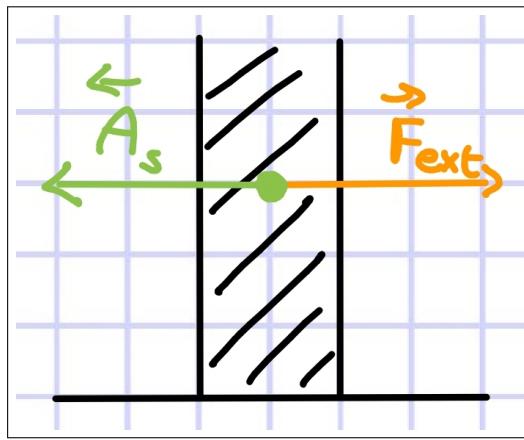
#### 4.5.4 Forza di attrito (radente)

Iniziamo col dire che esistono molti tipi diversi di attrito, noi però ci concentriamo sul'**attrito radente**, ovvero quello che si ottiene con **2 superfici a contatto**. In genere, l'attrito si comporta in 2 modi diversi, facciamo un esempio con una sedia sul pavimento:

- **attrito statico**: se applichiamo una certa forza  $\vec{F}_{ext}$  alla sedia e quella **resta ferma** abbiamo una forza di **attrito statico** ( $\vec{A}_s$ ) **che bilancia** la forza che applichiamo noi. In particolare:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_{ext} * \hat{x} \\ \vec{A}_s = -|\vec{A}_s| * \hat{x} = -|F_{ext}| * \hat{x} \end{array} \right\} \vec{A}_s = -|\vec{F}_{ext}| * \hat{x} \text{## NON SICURO SU HAT!!!}$$

Da quest'ultimo pezzo possiamo capire che l'attrito, finché resta statico, è una **uguale ed opposta** alla forza che applichiamo noi sulla sedia, quindi quest'ultima resta ferma!



L'attrito statico esiste fino ad un certo punto, identificato con la **soglia** " $\vec{A}_{s,max}$ ", che possiamo calcolare con la formula:

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext}$$

In particolare  $\mu_s$  rappresenta il **coefficiente di attrito statico** (dipende dalle 2 superfici a contatto),  $\vec{N}$  è la **forza vincolante** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto** (in questo caso il "moto" è rappresentato dalla forza esterna che applichiamo noi alla sedia). Una volta che la forza esterna supera questa soglia, subentra l'**attrito dinamico**;

- **attrito dinamico**: ad un certo punto, la forza che applichiamo noi sarà tale da **muovere** la sedia, a questo punto entriamo in una fase di **attrito dinamico**. Possiamo calcolarlo con la formula:

$$\vec{A}_D = -\mu_D * |\vec{N}| * \hat{v}$$

Anche qui  $\mu_D$  rappresenta il **coefficiente di attrito dinamico** (dipende dalle 2 superfici a contatto),  $\vec{N}$  è la **forza vincolante** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto**.

Ora, all'intersezione tra attrito statico e dinamico succede una cosa particolare: la forza dell'attrito **diminuisce**. Vediamo un grafico:



Il distacco tra  $A_{s,max}$  e  $A_D$  dipende dal distacco tra  $\mu_s$  e  $\mu_D$

**4.5.4.1 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito statico** Vediamo un esempio per il calcolo del coefficiente di attrito statico, supponiamo di avere una sedia con **massa**  $m_s$  e un'**attrito statico massimo**  $A_{s,max}$  calcolato usando una molla con **allungamento**  $\Delta x$  e **coefficiente elastico**  $K$ , quanto vale il **coefficiente di attrito statico**?

$$m_s = 6Kg \quad |A_{s,max}| = \begin{cases} \Delta x = 6cm \\ K = 1,2N/m \end{cases} \quad \mu_s = ?$$

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext} \implies \mu_s = \frac{|\vec{A}_{s,max}|}{|\vec{N}|} = \frac{K * \Delta x}{m_s * g} = \frac{7,2 * 10^{-2}N}{5,9 * 10^1N} = 1,2 * 10^{-3}$$

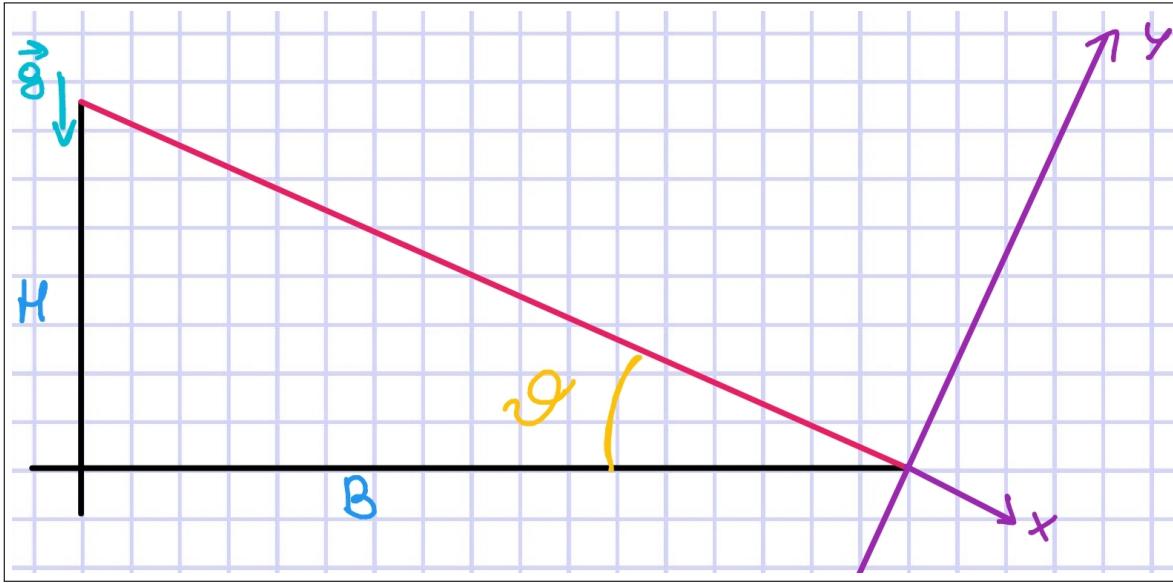
Nota che  $g$  corrisponde all'accelerazione di gravità terrestre ( $9,8m/s^2$ ) o di qualsiasi altro pianeta su cui facciamo le misurazioni.

## 4.6 Piano inclinato

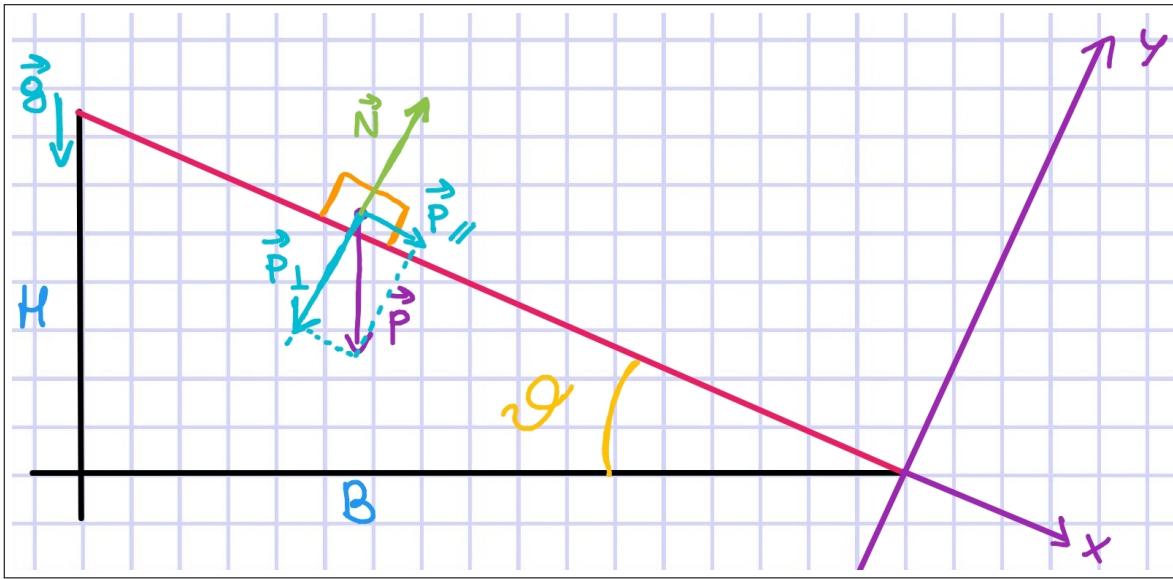
Introduciamo ora il concetto di **piano inclinato rispetto alla verticale** (con verticale intendiamo l'asse su cui giace la gravità).

### 4.6.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito il sistema di riferimento:



Come asse x usiamo la **retta su cui giace il piano inclinato** mentre l'asse y è rappresentato dalla **normale all'asse x**. Nota inoltre che  $\frac{H}{B} = \tan(\theta)$ . Ora posizioniamo sul piano inclinato un qualche oggetto: questo avrà una **forza peso** con verso che giace sulla retta parallela alla verticale. Possiamo scomporre questa forza come proiezione sugli assi che abbiamo stabilito prima, in particolare  $\vec{P}_{\parallel}$  per l'asse x e  $\vec{P}_{\perp}$  per l'asse y. A questo punto, ora che abbiamo comoda la forza  $\vec{P}_{\perp}$  possiamo anche stabilire la **forza vincolante**  $\vec{N}$  che il piano oppone a questo oggetto (ricorda che la forza vincolante **può solo essere ortogonale al piano**). Vediamo un grafico:



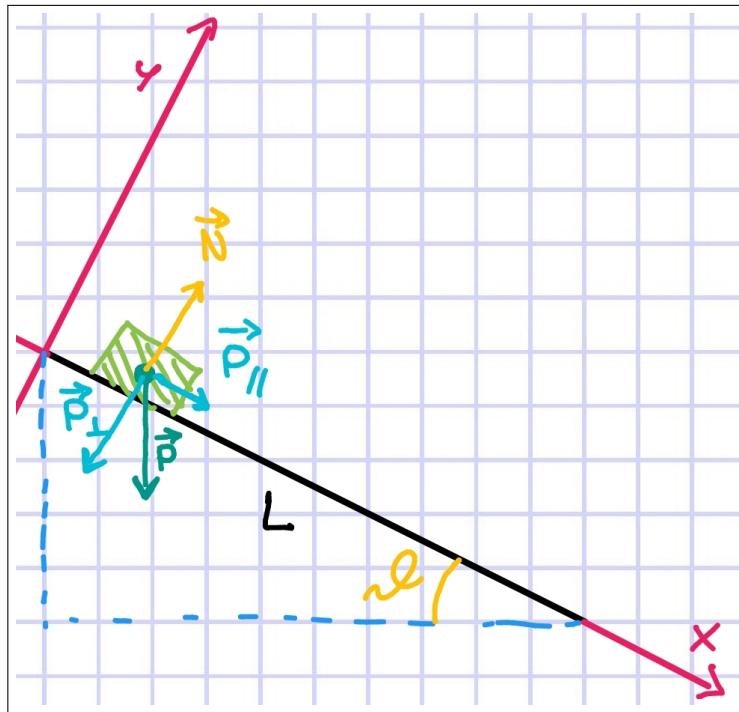
L'obiettivo ora è calcolare le **risultanti delle forze** per gli assi x e y (con risultanti intendiamo la somma di tutte le forze "parallele" ad un certo asse), in particolare:

$$\vec{F}_{ext} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} = m * g * \sin(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P}_{\perp} + \vec{N} = m * g * \cos(\theta) - N = 0 \end{cases}$$

#### 4.6.2 Esempio

Vediamo ora un esempio: abbiamo un bambino di **massa**  $m$  e uno scivolo di **lunghezza**  $L$  e con **inclinazione**  $\theta$ . Quanto **tempo** impiega il bambino a scivolare sullo scivolo? Faremo 2 versioni di questo problema,

la prima utilizzando un normale **moto uniformemente accelerato** e la seconda **introducendo anche l'attrito**. Vediamo una rappresentazione grafica del problema:



**4.6.2.1 Versione senza attrito** Se proviamo a risolvere il problema senza considerare l'attrito, ci troviamo in presenza di un "semplice" **moto uniformemente accelerato**. Come prima cosa, **analizziamo le forze in campo** e calcoliamo le forze risultanti parallele agli assi. Iniziamo col dire che quella sull'asse y (che ricordo essere inclinato!) non ci interessa, infatti abbiamo la forza vincolante che bilancia, concentriamoci quindi solo sulla forza sull'asse x. Ricordiamo, per la *seconda legge della dinamica* [pag. 24] che:

$$\vec{F}_x = m * a_x$$

A questo punto a noi interessa trovare l'accelerazione  $a_x$ , quindi rigiriamo un po' questa formula ed "**espandiamo**" la nostra  $\vec{F}_x$  utilizzando le formule viste prima [pag. 34]:

$$\vec{F}_x = m * a_x \Rightarrow a_x = \frac{\vec{F}_x}{m} = \frac{m * g * \sin(\theta)}{m} = g * \sin(\theta)$$

Ora che abbiamo l'accelerazione, possiamo recuperare le formule viste per il moto uniformemente accelerato [pag. 11]. In questo caso ci interessa la formula dello **spazio percorso** (dato che sappiamo che il nostro scivolo è lungo  $L$ ), ovvero:

$$L = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

A questa formula possiamo fare delle semplificazioni, in particolare togliere il I ( $s_0 = 0$ ) e il II ( $v_0 = 0$ ) termine, ottenendo:

$$L = \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

Che sostituendo l'accelerazione e, per comodità, il tempo diventa:

$$L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

A noi interessa calcolare  $\Delta t$ , quindi ci rigiriamo la formula in questo modo:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * \sin(\theta)}}$$

Introduciamo ora un po' di numeri, supponendo:

$$m = 20Kg \quad \theta = 30^\circ \quad L = 4m \quad \Delta t = ?$$

Otteniamo il tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * \sin(\theta)}} = \sqrt{\frac{2 * 4m}{9,8m/s^2 * \sin(30^\circ)}} = \sqrt{\frac{8s^2}{9,8 * 1/2}} \approx 1,27s$$

**4.6.2.2 Versione con attrito** Se aggiungiamo l'attrito, dobbiamo modificare un po' le nostre formule in modo da considerare l'attrito statico e dinamico:

- **attrito statico:**

$$\begin{cases} R_x = m * g * \sin(\theta_{max}) - A_{s,max} & \Rightarrow m * g * \sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 \\ R_y = m * g * \cos(\theta_{max}) - N & \Rightarrow N = m * g * \cos(\theta_{max}) = 0 \end{cases}$$

Da qui otteniamo che

$$\begin{aligned} m * g * \sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 &\Rightarrow m * g * \sin(\theta_{max}) - \mu_s * m * g * \cos(\theta_{max}) = 0 \\ &\Rightarrow m * g * [\sin(\theta_{max}) - \mu_s * \cos(\theta_{max})] = 0 \end{aligned}$$

Ora, dato che sappiamo che  $m * g$  non è nullo, possiamo dedurre che sia la seconda parte ad annullarsi, quindi:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{max}) - \mu_s * \cos(\theta_{max}) = 0 &\Rightarrow \mu_s * \cos(\theta_{max}) = \sin(\theta_{max}) \\ &\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin(\theta_{max})}{\cos(\theta_{max})} \\ &\Rightarrow \mu_s = \tan(\theta_{max}) \end{aligned}$$

Nota che con " $\theta_{max}$ " indica l'angolo massimo oltre al quale il nostro oggetto sul piano inclinato inizia a muoversi, superando la soglia di attrito statico, senza l'applicazione di forze esterne;

- **attrito dinamico:** in questo caso, la componente che ci interessa trovare è l'accelerazione sull'asse x ( $a_x$ ). Partiamo quindi da quello che conosciamo e cerchiamo di rigirarlo un po' per ottenere l'accelerazione:

$$\begin{cases} R_x = m * g * \sin(\theta) - A_d & \Rightarrow m * g * \sin(\theta) - \mu_d * N = m * a_x \\ R_y = m * g * \cos(\theta) - N = 0 & \Rightarrow N = m * g * \cos(\theta) \end{cases}$$

Da qui otteniamo che:

$$\begin{aligned} m * g * \sin(\theta) - \mu_d * m * g * \cos(\theta) = m * a_x &\Rightarrow g * \sin(\theta) - \mu_d * g * \cos(\theta) = a_x \\ &\Rightarrow a_x = g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta)) \end{aligned}$$

#### 4.6.3 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito dinamico

Supponiamo di avere lo stesso identico esercizio di prima, però ora **entra in gioco anche l'attrito**. Supponendo che l'oggetto impieghi  $\Delta t_{att}$  secondi a percorrere tutto il piano, a quanto corrisponde il coefficiente di attrito dinamico?

Iniziamo con **l'equazione dello spazio per il moto uniformemente accelerato** e la rigiriamo un po':

$$\begin{aligned} s = s_0 + v_0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \\ => L = 0 + 0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \\ => L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \\ => L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che, in un contesto di moto con attrito dinamico,  $\vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} - \vec{A}_D = m * a_x$ , utilizzando i calcoli visti prima otteniamo che l'accelerazione vale:

$$a = g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta))$$

Mettiamo tutti insieme e otteniamo:

$$L = \frac{1}{2} * g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta)) * (\Delta t)^2$$

La modifichiamo per ottenere il valore di  $\mu_d$ :

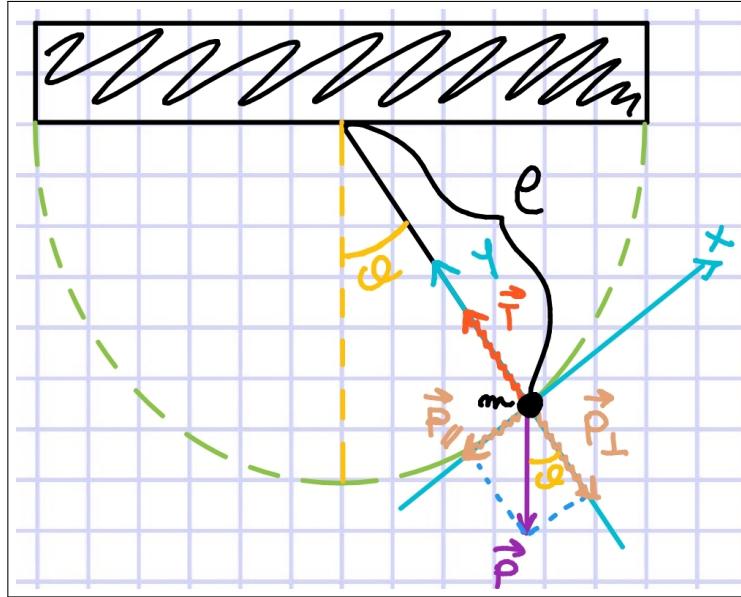
$$L = \frac{1}{2} * g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta)) * (\Delta t)^2 \quad \mu_d = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{2L}{g * \Delta t^2 * \cos(\theta)}$$

Ora ci basta semplicemente inserire i valori (li puoi ritrovare all'esercizio prima, [pag. 36]) ed otteniamo il nostro risultato  $\mu_d \approx 0,28$ .

#### 4.7 Pendolo semplice

Introduciamo il pendolo, ovvero una **massa** agganciata ad un punto di ancoraggio tramite una **fune inestensibile**. Supponiamo che **non ci sia alcun attrito**, quindi il nostro pendolo continuerà ad oscillare tramite un **moto perpetuo**. Cominciamo introducendo i 2 sistemi di riferimento: il primo ci servirà per specificare delle cose nel secondo.

#### 4.7.1 Sistema di riferimento sul peso



Nota che questo sistema di riferimento **si muove assieme al peso**, in particolare abbiamo che l'asse y che è **normale alla traiettoria** e l'asse x che è **tangente alla traiettoria**. Iniziamo analizzando le forze in gioco. In questo caso abbiamo solo la **forza peso** che può essere scomposta in questo modo:

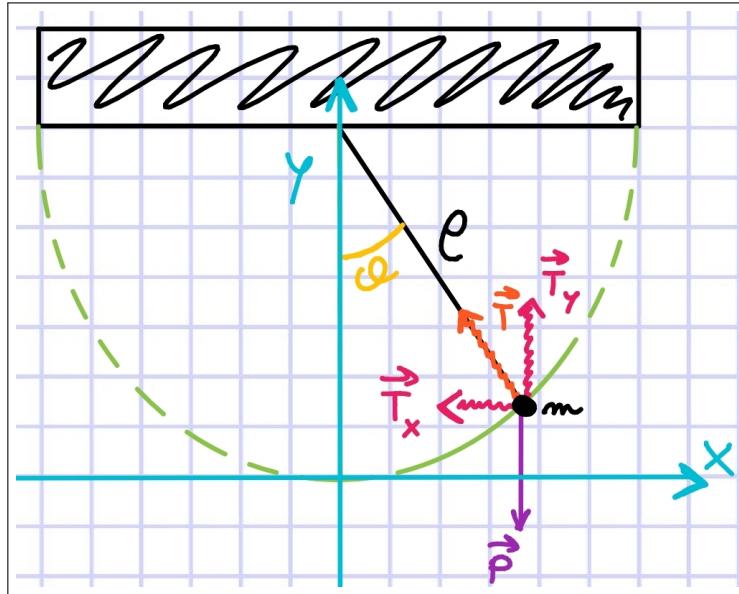
$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_{\parallel} & = -m * g * \sin(\theta) \\ \vec{P}_{\perp} & = m * g * \cos(\theta) \end{cases}$$

Inoltre, dato che consideriamo **il cavo inestensibile**, abbiamo una **forza di tensione** ( $\vec{T}$ ) uguale e opposta a  $\vec{P}_{bot}$  che la bilancia. A questo punto possiamo analizzare **le risultanti**:

$$\begin{aligned} \vec{R}_x &= \vec{P}_{\parallel} = -m * g * \sin(\theta) \\ \vec{R}_y &= \vec{P}_{\perp} + \vec{T} = m * g * \cos(\theta) - T = 0 \end{aligned}$$

#### 4.7.2 Sistema di riferimento nella posizione di equilibrio

Ora, cambiamo sistema di riferimento e utilizziamo quello "cartesiano" con centro nella posizione di equilibrio del nostro pendolo:



Con questo nuovo riferimento, possiamo trovare facilmente la posizione ( $x, y$ ) del nostro peso:

$$x(t) = R * \sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * \cos[\theta(t)]$$

Supponendo che  $R$  sia la lunghezza del nostro cavo. Nota anche che le coordinate dipendono dal tempo, infatti **sarà l'angolo  $\theta$  a variare col tempo**. Il problema è **in che modo?** Ci torneremo in seguito. Questo sistema di riferimento ci permette inoltre di scomporre le nostre 2 forze (peso e tensione) in questo modo:

$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_x = 0 \\ \vec{P}_y = -m * g \end{cases} \quad \vec{T} = \begin{cases} \vec{T}_x = -T \sin(\theta) = -m * g * \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \vec{T}_y = T \cos(\theta) = m * g * \cos(\theta) * \cos(\theta) \end{cases}$$

Nella scomposizione della tensione possiamo usare la formula che abbiamo trovato prima, ovvero " $m * g * \cos(\theta) - T = 0$ " (prima dobbiamo rigirarla un po'). Con queste "nuove" scomposizioni, possiamo calcolare le forze risultanti sugli assi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{T}_x = -m * g * \sin(\theta) * \cos(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P} + \vec{T}_y = -m * g + m * g * \cos^2(\theta) = -m * g * (1 - \cos^2(\theta)) = -m * g * \sin^2(\theta) \end{cases}$$

A questo punto, per la **II legge della dinamica**, sappiamo per definizione che  $R = m * a$ , quindi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = m * a_x = -m * g * \sin(\theta) * \cos(\theta) \Rightarrow a_x = -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) \\ \vec{R}_y = m * a_y = -m * g * \sin^2(\theta) \Rightarrow a_y = -g * \sin^2(\theta) \end{cases}$$

**4.7.2.1 Calcolare spazio, velocità e accelerazione** Con le operazioni precedenti abbiamo scoperto che;

$$\begin{cases} a_x = -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = -g * \sin^2(\theta) = \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = R * \sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * \cos[\theta(t)] \end{cases}$$

Il nostro problema è " $\theta(t)$ ", come varia  $\theta$  in funzione del tempo? Noi però abbiamo il valore dell'accelerazione e sappiamo che la derivata seconda ( $\frac{d^2x}{dt^2} / \frac{d^2y}{dt^2}$ ) dello spostamento corrisponde all'accelerazione! Quindi deriviamo la funzione dello spostamento, ricordando però che noi non conosciamo la derivata di  $\theta(t)$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = R * \sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * \cos[\theta(t)] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^{(1)}(t) = R * \cos(\theta) * \theta^{(1)} \\ y^{(1)}(t) = R * \sin(\theta) * \theta^{(1)} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^{(2)}(t) = R * [-\sin(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + \cos(\theta) * \theta^{(2)}] \\ y^{(2)}(t) = R * [\cos(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + \sin(\theta) * \theta^{(2)}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) = R * [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -g * \sin^2(\theta) = R * [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) = l * [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -g * \sin^2(\theta) = l * [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\frac{g}{l} * \sin(\theta) * \cos(\theta) = [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\frac{g}{l} * \sin^2(\theta) = [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \end{aligned}$$

Adesso, prendiamo il " $\frac{g}{l}$ " e lo chiamiamo " $\omega^2$ ", perche? Perchè SI, lo vuole Iuppa. Di conseguenza le nostre formule diventano:

$$\begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \sin(\theta) * \cos(\theta) = [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\omega^2 * \sin^2(\theta) = [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

**4.7.2.2 Le piccole oscillazioni** Il problema con questa formula è che è un casino calolarsi seni e coseni, quindi noi possiamo ragionare in termini di piccole oscillazioni, in modo da approssimare seni e coseni con Taylor!

|   |  |
|---|--|
| $\sin(\theta) \approx \theta$               | $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$    |
| $\tan(\theta) \approx \theta$               | $(1 + \theta)^\alpha \approx +\alpha\theta$      |
| $e^{\alpha\theta} \approx 1 + \alpha\theta$ | $\sqrt{1 + \theta} \approx 1 + \frac{\theta}{2}$ |

Nota che le parti in rosso, dato che consideriamo solo  $\theta$  piccoli, le possiamo togliere!

Con "piccole oscillazioni" intendiamo  $\theta \ll 1$ , ovvero " $\theta$  molto minore di 1" (inteso come radienti, in gradi possiamo immaginare che  $\theta$  non superi i 4 gradi circa). Ora, considerando solo queste piccole oscillazioni, possiamo approssimare le formule in questo modo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \sin(\theta) * \cos(\theta) = [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\omega^2 * \sin^2(\theta) = [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \theta * 1 = [1 * \theta^{(2)} - \theta * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\omega^2 * \theta^2 = [\theta * \theta^{(2)} + 1 * \theta^{(1)2}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} \\ y \rightarrow -\omega^2 * \theta^2 = \theta^{(1)2} \end{cases} \end{aligned}$$

Nota che le parti in rosso, in quanto moltiplicate per  $\theta \ll 1$  diventano trascurabili, quindi le togliamo

Prendiamo in considerazione solo la formula per la x, abbiamo quindi che:

$$-\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 * \theta = 0$$

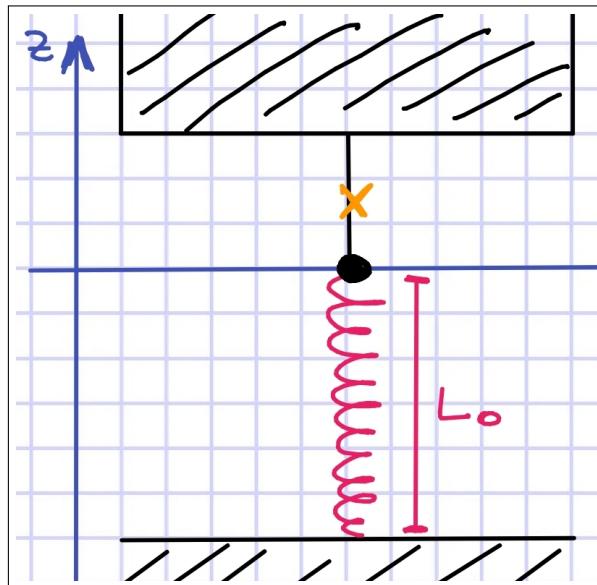
Ovvero **l'equazione del moto armonico!** Da qui possiamo dire quindi che:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} & \Rightarrow \frac{2\pi}{T} &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ 4 & & \Rightarrow T &= 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

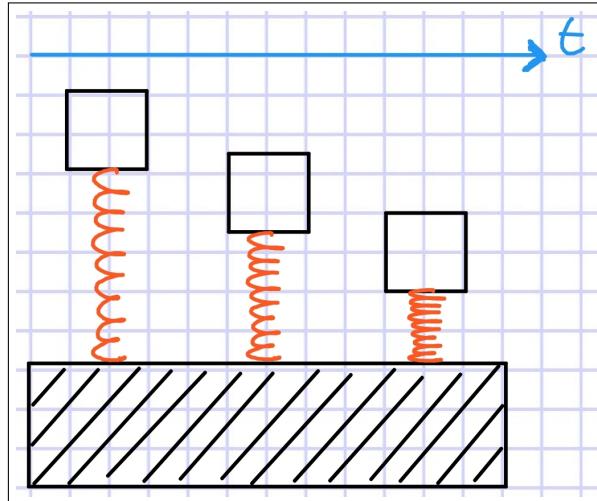
Ricorda che  $T$  in questo caso corrisponde al **periodo** e non alla forza di tensione.

## 4.8 Esercizio sulla dinamica

Vediamo ora un esercizio riassuntivo sulla dinamica, che cerca di raggruppare tutto quello che abbiamo visto. Supponiamo di essere in questa situazione:



Abbiamo un **peso di massa  $m$**  attaccato ad un **filo inestensibile di massa trascurabile** che poggia su una **molla in posizione di riposo con coefficiente elastico  $k$** . Ad un certo punto, il cavo viene tagliato, quindi il peso verrà **sostenuto interamente dalla molla**, che **inizierà a comprimersi ed allungarsi** (come si comporta una molla normale)



Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover trovare i seguenti valori:

$$k = 70 \text{ N/m}$$

$$m = 0,5 \text{ Kg}$$

$$T = ?$$

$$\Delta l_{max} = ?$$

$$z_{vMax} = ?$$

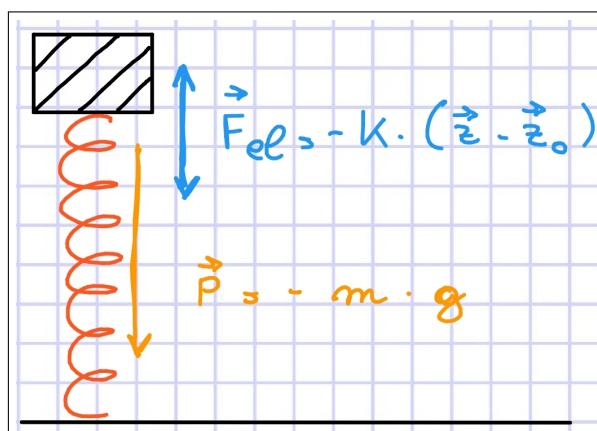
$$v_{max} = ?$$

Con:

- $T$  periodo;
- $\Delta l_{max}$  accorciamento massimo;
- $z_{vMax}$  z dove la velocità è massima;
- $v_{max}$  velocità massima;

Allora, come prima cosa **visualizziamo quali forze agiscono nel sistema**, in particolare abbiamo:

- la **forza peso**  $\vec{P} = -m * g$ ;
- la **forza elastica**  $\vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - \vec{z}_0)$ . La parte tra parentesi viene chiamata "**forza di richiamo**" e dipende dal **sistema di riferimento che adottiamo** (in particolare la  $z_0$ , che indica la **posizione di riposo** della nostra molla, nel nostro caso [in base al sistema di riferimento che abbiamo adottato] vale 0).



#### 4.8.1 Studio della dinamica del problema

Iniziamo considerando le varie risultanti delle forze che agiscono sul nostro asse z (semplicemente agiscono solo forze verticali, quindi ignoriamo l'asse orizzontale). Iniziamo considerando le 2 forze che abbiamo già visto prima:

$$\begin{cases} \vec{P} = -m * g * \hat{z} \\ \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - \vec{z}_0) = \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - 0) = \vec{F}_{el} = -k * z * \hat{z} \end{cases}$$

Nota che i **versori**  $\hat{z}$  servono solo per descrivere la direzione della forza, poi li possiamo togliere per semplicità. Ora, avremmo che la risultante di queste forze corrisponde alla loro somma:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_{el} = -m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} = m * \vec{a} \text{ (per definizione)}$$

A questo punto noi sappiamo però che l'accelerazione corrisponde alla **derivata seconda dello spazio**, quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} -m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} &= m * \frac{d^2 z}{dt^2} * \hat{z} \\ &\Rightarrow -g - \frac{k}{m} * z = \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g \end{aligned}$$

La formula **in rosso** sappiamo che è **l'equazione armonica!** In questo caso poniamo  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , ottenendo:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 * z = -g$$

Ci sono un po' di "problemi" però, rispetto all'equazione "classica" non abbiamo = 0 ma =  $-g$ , quello viene definito **membro forzante** e semplicemente **sfasa la nostra posizione di equilibrio**, in questo caso la sposta verso il basso. Per definizione del moto armonico [pag.13] che possiamo indicare lo spostamento nel tempo in questo modo:

$$z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t)$$

In questo caso dobbiamo **aggiungere questa parte in rosso** perché dobbiamo **compensare in qualche modo quell'  $=-g$** . Ora, per calcolare velocità ed accelerazione (quest'ultima è quella che ci interessa) ci basta semplicemente derivare la formula trovata prima:

$$\begin{aligned} z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t) &\Rightarrow \frac{dz}{dt} = A\omega * \cos(\omega t + \varphi) + \frac{dw}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega^2 * \sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned}$$

**Questa** è la formula che ci interessa! Infatti ora possiamo sostituirla all'interno dell'equazione iniziale, ovvero:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g \quad \Rightarrow -A\omega^2 * \sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2(A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t)) = -g$$

Bene, abbiamo la formula matematica che descrive la dinamica del nostro sistema. Ora dobbiamo fissare un po' di valori che non conosciamo al momento, in particolare  $\varphi, \omega$  e  $w(t)$ , come facciamo? Studiamo

la nostra formula, che ricordiamo essere in **funzione del tempo**, in alcuni punti (possibilmente comodi). Cominciamo considerando  $t = 0$ :

$$-A\omega^2 * \sin(\omega * 0 + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(A * \sin(\omega * 0 + \varphi) + w(0)) = -g \quad \Rightarrow \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) = -g$$

Ci siamo semplificati i seni, ora dobbiamo soltanto trovare il valore della nostra  $w(0)$ : per toglierci la derivata (che è abbastanza scomoda) possiamo supporre che  $w$  sia **costante in funzione del tempo**, quindi otterremo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) &= -g \\ &\Rightarrow 0 + \omega^2 * w = -g \\ &\Rightarrow w = -\frac{g}{\omega^2} \end{aligned}$$

Ecco fatto, ora possiamo tornare un po' di equazioni prima e **sostituire il valore che abbiamo trovato di w**:

$$z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t) \quad \Rightarrow z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega^2}$$

Ora ci manca solo da trovare il valore di  $A$  e di  $\varphi$ , per trovarli possiamo usare il fatto che **sia lo spazio che la velocità in t=0 valgono 0!** Vediamo:

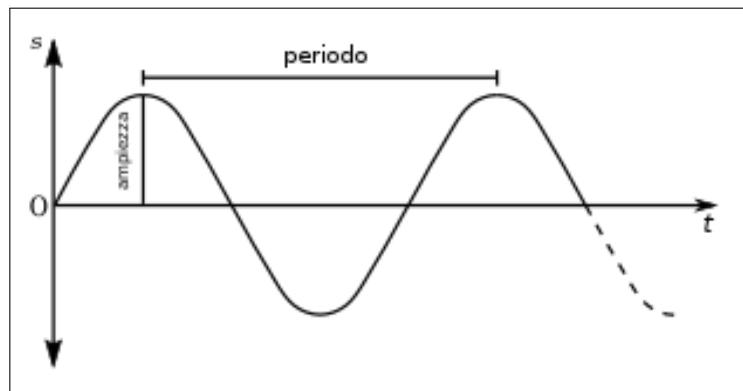
$$\begin{aligned} \begin{cases} z(t) = A * \sin(\omega * 0 + \varphi) - \frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * \cos(\omega * 0 + \varphi) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z(t) = A * \sin(\varphi) - \frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * \cos(\varphi) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{g}{\omega^2} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi arriviamo alla fine con questa formula che descrive il nostro moto:

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} * \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * \cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2}$$

Come la interpretiamo? Sostanzialmente come un normalissimo **moto armonico**, con:

- $a = \frac{g}{\omega^2} \rightarrow$  ampiezza, il valore massimo (o minimo) della curva;
- $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$  periodo, misurato in secondi;
- $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$  fase, indica da che punto parte il grafico, nel caso di questo esercizio l'abbiamo tolta trasformando il  $\sin$  in  $\cos$ ;



Ora che abbiamo questa formula, abbiamo tutto! Possiamo facilmente calcolare tutti i punti richiesti dal problema, vediamo come.

#### 4.8.2 Allungamento massimo

Come possiamo vedere dall'immagine precedente, l'ampiezza è la distanza massima dal punto di equilibrio, quindi ci basta prendere **2 volte l'ampiezza** (nota che il "-" è dovuto al sistema di riferimento adottato):

$$\Delta l_{max} = -2 \frac{g}{\omega^2} = -2 * \frac{m * g}{K} \approx -14cm$$

#### 4.8.3 Posizione di velocità massima

All'istante 0, anche la velocità vale 0. Successivamente la velocità inizierà ad aumentare finché non raggiungerà il massimo. Per capire dove si trova il massimo possiamo **studiare la derivata associata e vedere dove questa vale 0**, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = v(t) = -\frac{g}{\omega^2} * \omega * \sin(\omega t) + 0 \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\omega^2} * \omega^2 * \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g * \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Quando **questa** equazione vale 0? Dobbiamo **annullare il coseno**, quindi porre  $\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$ . In che posizione ci troviamo con  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ? Vediamo:

$$z\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{g}{\omega^2} * \cos\left(\omega * \frac{\pi}{2\omega}\right) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * 0 - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{g}{\omega^2}$$

Come si può facilmente notare, abbiamo la velocità nella **posizione di equilibrio della molla!** Potevamo anche arrivarci osservando il disegno, infatti nel punto di equilibrio il peso **smette di prendere velocità ed inizia a rallentare in seguito alla forza elastica!** Calcoliamo il numero:

$$z_{vMax} = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{g * m}{k} \approx -7cm$$

#### 4.8.4 Velocità massima

Prima abbiamo scoperto che la velocità massima si ottiene nella  $z_{eq}$ , che si raggiunge in  $t = \frac{\pi}{2*\omega^2}$

$$v\left(\frac{\pi}{2*\omega^2}\right) = -\frac{g}{\omega} * \sin\left(\omega \frac{\pi}{2*\omega^2}\right) = -\frac{g}{\omega} * 1 = -\frac{g}{\omega} = -g * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx -0,84m/s$$

Di nuovo, il "-" della velocità è sempre dovuto al sistema di riferimento che abbiamo adottato.

#### 4.8.5 Calcoliamo la T

C'è un problema: nella lezione Iuppa considera T come **il periodo** mentre nel video di Youtube la considera come **forza di tensione del cavo iniziale**. Calcoliamo entrambe.

**4.8.5.1 Il periodo** Nulla di complesso, noi sappiamo che:

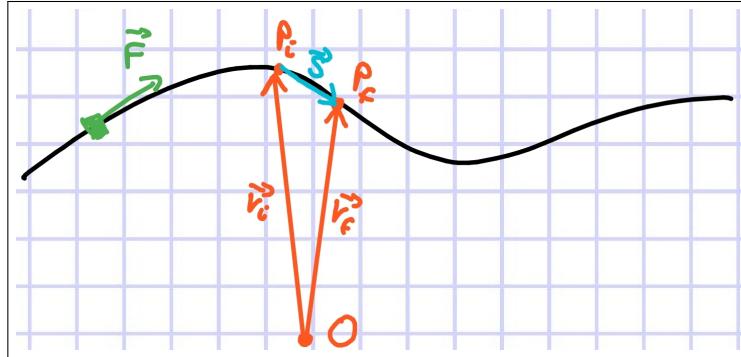
$$\begin{aligned} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \Rightarrow T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,52s \end{aligned}$$

**4.8.5.2 La tensione** Ancora, niente di particolare. Sappiamo semplicemente che la **tensione è uguale ed opposta alla forza peso**, quindi:

$$\vec{T} = -\vec{P} \Rightarrow \vec{T} = -m * g \approx 4,9N$$

# 5 Meccanica

## 5.1 Lavoro



Supponiamo che ci sia un corpo che si muove lungo una traiettoria. Ora prendiamo un punto d'origine del sistema di riferimento e descriviamo il movimento del corpo con dei raggi vettore dall'origine. Ora consideriamo un punto iniziale  $p_i$  ed uno finale  $p_f$  molto vicini tra loro e quindi otteniamo uno spostamento infinitesimale,  $d\vec{s} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ .

Sul corpo inoltre agisce una forza  $\vec{F}$  che è quella che lo fa spostare. Osserviamo ora che a seconda del valore di questa forza, potrebbe variare la velocità dell'oggetto. Se  $d\vec{s} \perp \vec{F}$ , allora il corpo non rallenta, quindi se l'angolo è  $90^\circ$ , l'effetto sarà minimo, mentre se l'angolo è  $0^\circ$  l'effetto sarà massimo e infine se l'angolo è  $180^\circ$  l'effetto sarà massimo ma in senso opposto.

In conclusione quindi l'effetto che la forza ha sul corpo è descritta dal coseno ed è definito come **lavoro infinitesimo**, in formula:

$$dW = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \alpha_{F,ds}$$

Se il lavoro infinitesimo è positivo, allora il corpo accelera, se è negativo invece, il corpo rallenta. L'interazione quindi tra il corpo e l'agente esterno, ovvero quello che applica la forza, è definita come energia. In questo caso, l'agente esterno perde energia.

Osserviamo ora che:

$$|\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\alpha_{v,w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

dove " $\cdot$ " rappresenta il prodotto scalare tra due vettori. Spesso questo viene detto  $v_T w$ , ovvero la componente di  $v$  tangente a  $w$ , quindi:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| \cos(\alpha_{v,w}) &= v_T \\ |\vec{w}| \cos(\alpha_{v,w}) &= w_T \end{aligned}$$

Ora usiamo quindi questa osservazione e otteniamo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che l'unità di misura del lavoro è il Joule,  $J = 1Nm$ . Una caloria sono,  $1cal = 4.18J$ . Ora calcoliamo il **lavoro medio** come segue:

$$\overline{W} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

Osserviamo che il lavoro è una quantità scalare, dato che il prodotto scalare prende due vettori e li trasforma in uno scalare.

Facciamo ora un'esempio molto semplice:

$$|\vec{F}| = 10N |\Delta \vec{s}| = 100m$$

Ora in base all'angolo  $\alpha_{F,ds}$  abbiamo dei diversi valori di lavoro:

| $\alpha_{F,ds}$ | $W$      |
|-----------------|----------|
| 0               | $1000J$  |
| $\pi$           | $-1000J$ |
| $\pi/2$         | $0J$     |
| $\pi/4$         | $707J$   |

Ora consideriamo tutti gli spostamenti infinitesimi e supponiamo che ogni spostamento infinitesimo abbia un valore di forza diversa (ovviamente la forza è esercitata sempre dallo stesso agente esterno, ma in istanti diversi). Abbiamo quindi per ogni spostamento infinitesimale un lavoro infinitesimale diverso. Rappresentiamo questa cosa come segue:

$$\begin{aligned} d\vec{s}_1, d\vec{s}_2, d\vec{s}_3, \dots, d\vec{s}_n \\ \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n \\ dW_1, dW_2, dW_3, \dots, dW_n \end{aligned}$$

Il **lavoro** quindi sarà la somma di tutti questi lavori infinitesimi:

$$W_{TOT} = \sum_{i=1}^n dW_i$$

però considerando che la n tende a infinito,  $n \rightarrow \infty$ , otteniamo:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^n dW_i = \int_i^n \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che la  $\vec{F}$  si può tirare fuori dall'integrale solo se non varia per nessun spostamento infinitesimale.

Ora consideriamo il lavoro  $W > 0$ , ovvero per un angolo compreso tra  $[0, \pi/2]$ , ovvero in cui la forza sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro motore**.

Se invece il lavoro  $W < 0$ , ovvero per un angolo compreso tra  $[\pi/2, \pi]$ , ovvero in cui la forza non sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro resistente**.

## 5.2 Esempi di lavoro

### 5.2.1 Lavoro forza peso

Data l'equazione della forza peso:

$$\vec{F}_p = -mh\hat{h}$$

abbiamo lavoro infinitesimo:

$$dW = \vec{F}_p \cdot d\vec{h} = -mh\hat{h} \cdot dh\hat{h} = -mgdh$$

Osserviamo che  $\hat{h} \cdot \hat{h} = 1$ . Ora quindi sommando tutti questi lavori infinitesimi otteniamo il lavoro  $W_p$ :

$$W_p = \int_i^f dW = \int_i^f -mgdh = -mg(h_f - h_i) = -mg\Delta h$$

Osserviamo ora che se  $\Delta h > 0$ , ovvero  $h_f > h_i$ , avremo  $W_p < 0$ , quindi lavoro resistente, mentre se  $\Delta h < 0$ , ovvero  $h_f < h_i$ , avremo  $W_p > 0$ , quindi lavoro motore.

Questo era il caso di spostamento verticale, se invece lo spostamento non è verticale il lavoro è comunque lo stesso.

Osserviamo ora che  $\vec{F}$  e  $d\vec{s}$  non dipendono dal sistema di riferimento, se però consideriamo la forma  $\vec{F}_p = -mgh$ , questa dipende dal sistema di riferimento dato che c'è  $\hat{h}$ .

Osserviamo inoltre che il lavoro della forza peso dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

Facciamo ora un'esercizio molto semplice:

$$m = 100kg$$

$$\Delta h = 1000m$$

$$W_p = -9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 100kg \cdot 1000m = -9.8 \cdot 10^5 kg \frac{m^2}{s^2} = -9.8 \cdot 10^5 J = -9.8 \cdot 10^2 KJ$$

### 5.2.2 Lavoro forza elastica

Data l'equazione della forza elastica:

$$\vec{F}_{el} = -K\vec{x}$$

abbiamo lavoro:

$$W_{el} = \int_i^f F_{el} dx = \int_i^f -Kx dx = -\frac{K}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Osserviamo ora che se  $x_f^2 > x_i^2$ , avremo  $W_{el} < 0$ , infatti allungo la molla che si oppone, mentre se  $x_f^2 < x_i^2$ , avremo  $W_{el} > 0$ , infatti accorci la molla che aiuta.

Osserviamo inoltre che il lavoro della forza elastica dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

### 5.2.3 Lavoro forza attrito

Data l'equazione della forza d'attrito:

$$\vec{F}_{att} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

abbiamo lavoro:

$$W_{att} = \int_i^f F_{att} dx = F_{att} \int_i^f dx = -\mu_d mg \int_i^f dx = -\mu_d mgL$$

dove  $L$  è la lunghezza dello spostamento ( $x_f - x_i$ ).

Osserviamo che l'attrito si oppone sempre al movimento, quindi non vale quello che valeva per il lavoro della forza peso e della forza elastica, ovvero che a seconda del punto finale e del punto iniziale il lavoro poteva essere positivo o negativo.

## 5.3 Energia cinetica

Consideriamo ora il lavoro infinitesimo,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = m d\vec{v} \frac{d\vec{s}}{dt} = m d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

e quindi,

$$dW = d[\frac{1}{2}mv^2]$$

**L'energia cinetica** è la seguente quantità:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi ho che:

$$dW = d[E_k]$$

### 5.3.1 Teorema delle forze vive

Il **Teorema delle forze vive** afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto. In formula:

$$E_{k,f} = W_{i \rightarrow f} + E_{k,i} \Rightarrow W_{i \rightarrow f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

Osserviamo ora che se  $v_i = 0$  e  $v_f = 0$ , allora per come è formulata  $E_k$ , vorrà dire che  $E_{k,i} = 0$  e  $E_{k,f} = 0$  e quindi  $W_{i \rightarrow f} = 0$ .

## 5.4 Potenza

La **potenza** è definita come:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt,  $W = 1 \frac{J}{s}$ .

## 5.5 Forze conservative

Una **forza conservativa** è una forza per cui il lavoro dipende solamente dal punto iniziale,  $p_i$ , e dal punto finale,  $p_f$ .

Se vado quindi da  $p_i$  a  $p_f$  seguendo due percorsi diversi il lavoro sarà lo stesso.

Se invece vado da  $p_f$  a  $p_i$ , il lavoro sarà sempre uguale ma avrà segno opposto, indipendentemente dal percorso. Questo è descritto come segue,

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

ovvero l'integrale chiuso.

### 5.5.1 Energia potenziale

L'**energia potenziale** di un corpo è l'energia che esso possiede a causa della sua posizione o del suo orientamento rispetto ad un campo di forze ed è denotata con  $U$ .

### 5.5.2 Energia meccanica

L'**energia meccanica** è la somma di energia cinetica ed energia potenziale ovvero,

$$E = E_k + U$$

### 5.5.3 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo il caso 1-DIM,

$$\int_{p_i}^{p_f} F dx = U(p_f) - U(p_i) = W_{p_i \rightarrow p_f}$$

Ora per il teorema delle forze vive ho che,

$$W_{p_i \rightarrow p_f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

e quindi, usando una notazione semplificata, ovvero per esempio invece che  $U(p_f)$  uso  $U_f$ , ottengo che,

$$U_f - U_i = E_{k,f} - E_{k,i} \Rightarrow U_f - E_{k,f} = U_i - E_{k,i} \Rightarrow E_f = E_i$$

ovvero l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale, e quindi

$$\Delta E = 0$$

ovvero la variazione di energia meccanica è 0, quindi nel caso in cui si hanno solo forze conservative, l'energia meccanica non varia, si conserva.

Se ora consideriamo,

$$-(U(p_f) - U(p_i)) = W_{p_i \rightarrow p_f}$$

ed deriviamo, otteniamo che,

$$F = -\frac{dU}{ds}$$

Nel caso a più dimensioni invece, per esempio consideriamo 3-DIM, abbiamo che,

$$F = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

### 5.5.4 Esercizio forze conservative

Consideriamo ora l'esercizio fatto in passato [pag.41].

Tutte le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica e risolverlo in modo molto più semplice.

Ora abbiamo quindi che le forze che agiscono sul sistema sono,

$$\vec{F}_p = -mg\hat{z}\vec{F}_e l = -k(z - z_i)\hat{z}$$

e considerando la conservazione dell'energia meccanica abbiamo che,

$$E_k + U = \text{cost} \Rightarrow E_k + U_p + U_{el} = \text{cost}$$

Calcoliamo ora quindi le energie potenziali,

$$\begin{aligned} U_p &= -W_p = mg(z - z_0) \\ U_{el} &= \frac{k}{2}(z^2 - z_0^2) \end{aligned}$$

e quindi ora sostituisco nella formula precedente e ottengo,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{k}{2}z^2 = \text{cost}$$

Ora considerando il sistema di riferimento scelto, nel punto iniziale abbiamo  $v_i = 0$  e  $z = 0$  e quindi, la formula precedente è  $= 0$ .

Considerando il punto  $z_{max}$ , ho sempre che  $v = 0$ , e ottengo che,

$$mgz_{max} + \frac{k}{2}z_{max}^2 = 0 \Rightarrow z_{max}\left(\frac{k}{2}z_{max} + mg\right) = 0$$

Le due soluzioni sono quindi  $z_{max} = 0$ , che non viene considerata, e

$$z_{max} = -\frac{2mg}{k} = \Delta z_{max}$$

Ora osserviamo che  $z_{v_{max}}$  è  $z_{eq}$ , ovvero la  $z$  nel punto di equilibrio, e quindi,

$$z_{v_{max}} = z_{eq} = \frac{z_{max}}{2} = -\frac{mg}{k}$$

Per calcolare la  $v_{max}$  ora, consideriamo sempre il fatto che essa è in  $z_{eq}$  e quindi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgz_{eq} + \frac{k}{2}z_{eq}^2 &= 0 & \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{(mg)^2}{2K} &= 0 \\ & & \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{2K} &= 0 \\ & & \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 &= \frac{(mg)^2}{2K} \\ & & \Rightarrow v_{max}^2 &= \frac{mg^2}{K} \\ & & \Rightarrow v_{max} &= \sqrt{\frac{mg^2}{K}} \end{aligned}$$

## 5.6 Forze non conservative e lavoro

Consideriamo ora il fatto in cui sul sistema agiscono anche forze non conservative e ne calcoliamo il lavoro. Abbiamo quindi che,

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R}_c + \vec{R}_{nc} \\ W_{TOT} &= \int_i^f \vec{R} d\vec{s} = \int_i^f \vec{R}_c d\vec{s} + \int_i^f \vec{R}_{nc} d\vec{s} = W_c + W_{nc} \end{aligned}$$

Ora però sappiamo che,

$$W_{TOT} = \Delta E_k \Rightarrow W_c + W_{nc} = \Delta E_k \Rightarrow W_{nc} = \Delta E_k - W_c$$

ma ora ci ricordiamo che  $W_c = -\Delta U$  e quindi,

$$W_{nc} = \Delta E_k + \Delta U \Rightarrow W_{nc} = \Delta E$$

Quindi se sul sistema agiscono delle forze non conservative, il lavoro di queste sarà uguale alla variazione di energia meccanica.

Osserviamo ora quindi che se  $W_{nc} < 0$ , vuol dire che  $E_f - E_i < 0$  e quindi  $E_f < E_i$ . Allo stesso modo, se  $W_{nc} > 0$ , vuol dire che  $E_f - E_i > 0$  e quindi  $E_f > E_i$ , e inoltre  $E_f = E_i + W_{nc}$ .

### 5.6.1 Esempio lavoro forze non conservative

Supponiamo che un corpo di massa  $m$  scali una montagna di altezza  $h_{max}$  partendo da  $h_0 = 0$ . Ora non considerando gli attriti, abbiamo solo la forza peso che agisce sulla massa. Calcoliamo quindi,

$$\begin{aligned}\Delta U_p &= mgh_{max} + mg0 = mgh_{max} \\ \Delta E_k &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}m0^2 = 0 \\ \Delta E &= mgh_{max} = W_{nc}\end{aligned}$$

L'energia cinetica è = 0 dato che sia la velocità iniziale che quella finale sono = 0 e quindi l'energia meccanica sarà uguale all'energia potenziale, quest'ultima è uguale all'energia potenziale finale dato che, essendo l'altezza iniziale = 0, anche l'energia potenziale iniziale = 0.

### 5.6.2 Esempio energie



## 5.7 Gravità universale

La **forza gravitazionale** è quella forza che esiste tra 2 corpi. Possiamo rappresentarla con questa formula:

$$\vec{F} = -\gamma * \frac{m_1 * m_2}{r_{1,2}^2} * \hat{r}_{1,2}$$

Dove:

- $G$  è la **costante di gravitazione universale**, calcolata scientificamente e vale  $\gamma = G = 6,67 * 10^{-11} \frac{N*m^2}{Kg^2}$ . Nota che  $G$  è  $\gamma$  per la Terra;
- $m_1, m_2$  sono le masse dei 2 corpi;
- $r_{1,2}$  è la distanza tra i 2 corpi;

Perché ci serve la costante di gravitazione? Se **controlliamo le unità di misura senza questa costante** otterremo una  $\frac{M^2}{L^2}$  ( $M \rightarrow$  massa,  $L \rightarrow$  lunghezza), ma noi **vogliamo una forza!** Per questo motivo introduciamo la costante di gravitazione, espressa proprio come  $N * \frac{L^2}{M^2}$ , se mettiamo tutto insieme le masse e le lunghezze si semplificano **lasciando solo una forza** (in Newton)! Se immaginiamo di avere la Terra e la Luna, la forza gravitazionale è proprio **la forza normale che permette alla luna di restare sulla sua orbita** (che immaginiamo essere perfettamente circolare per semplicità). Questa forza corrisponderebbe proprio a:

$$\vec{F} = -G * \frac{m_L * m_T}{d^2}$$

Ora, noi sappiamo che, per la II legge di Newton, che  $\vec{F} = m * \vec{a}$ . Possiamo mettere a confronto i **moduli di queste 2 forze**:

$$m_{I,L} * \frac{v^2}{d_{T,L}} = G * \frac{m_{G,L} * m_{G,T}}{d_{T,L}^2}$$

Alcune osservazioni:

1. il  $-G$  diventa  $G$  perché **stiamo paragonando i moduli**, quindi il segno non importa;
2. la forza a sinistra dell'= $=$  corrisponde alla **forza normale del moto circolare**;
3. a sinistra dell'= $=$ , la massa  $m_{I,L}$  è la **massa INERZIALE** (*capacità di un corpo di opporsi al moto*) della luna, mentre a destra la massa  $m_{G,L}$  è la **massa GRAVITAZIONALE** (*carica gravitazionale del corpo*) della luna. Sono 2 valori **concettualmente diversi**, ma **hanno valori uguali!**

Detto ciò, soprattutto facendo riferimento al terzo punto, possiamo applicare una serie di semplificazioni:

$$\begin{aligned} m_{I,L} * \frac{v^2}{d} &= G * \frac{m_{G,L} * m_{G,T}}{d^2} && \Rightarrow \frac{v^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\ &\text{conversione vel. moto circolare} && \Rightarrow \frac{(\omega * d)^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\ &&& \Rightarrow \omega^2 * d^2 = G * \frac{m_{G,T}}{d} \\ &\text{definizione } \omega && \Rightarrow \omega^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\ &&& \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\ &&& \Rightarrow \frac{d^3}{T^2} = G * \frac{m_{G,T}}{(2\pi)^2} \end{aligned}$$

Ok, con l'ultima equazione siamo arrivati al punto in cui abbiamo **tutto quello che riguarda il satellite** (la Luna) **è da una parte e tutto quello che riguarda la Terra è dall'altra**. In particolare, notiamo che la parte che riguarda la Terra **è costante!** Ciò ci permette di, ad esempio, scegliere una nuova distanza e, di conseguenza, il periodo  $T$  si "aggiusterà" di conseguenza per mantenere la costante "costante".

$$\frac{d^3}{T^2} = const.$$

Nota come la massa del satellite non influisce sulla distanza o sul periodo, quindi possiamo usare la stessa formula per qualsiasi satellite che orbita la terra (con un moto circolare uniforme). Immaginiamo di considerare l'ISS che orbita la terra ad una distanza di 500Km, la formula diventerebbe:

$$\frac{d_L^3}{T_L^2} = \text{const.} = \frac{d_{ISS}^3}{T_{ISS}^2}$$

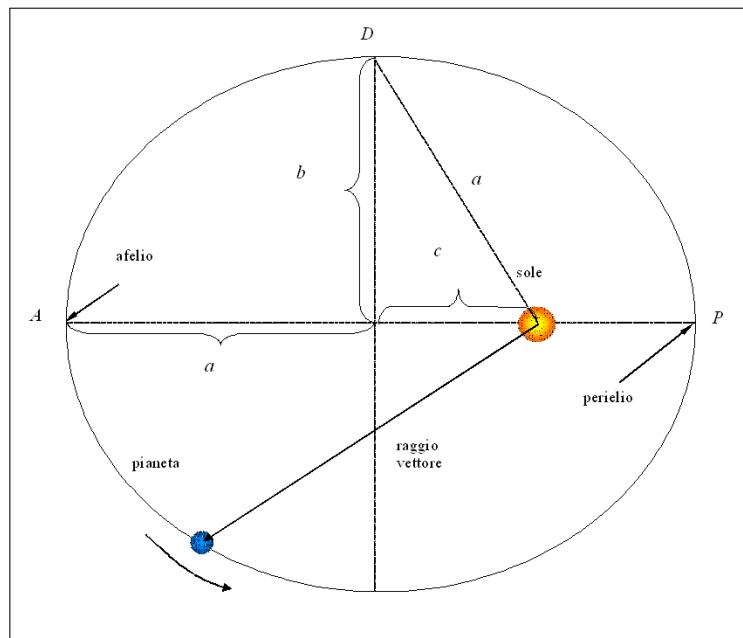
$$\frac{(300000\text{Km})^3}{(28gg)^2} = \text{const.} = \frac{(500\text{Km})^3}{(?)^2}$$

Come detto prima, se variamo il raggio dell'orbita, il periodo varia di conseguenza per mantenere il valore della costante uguale!

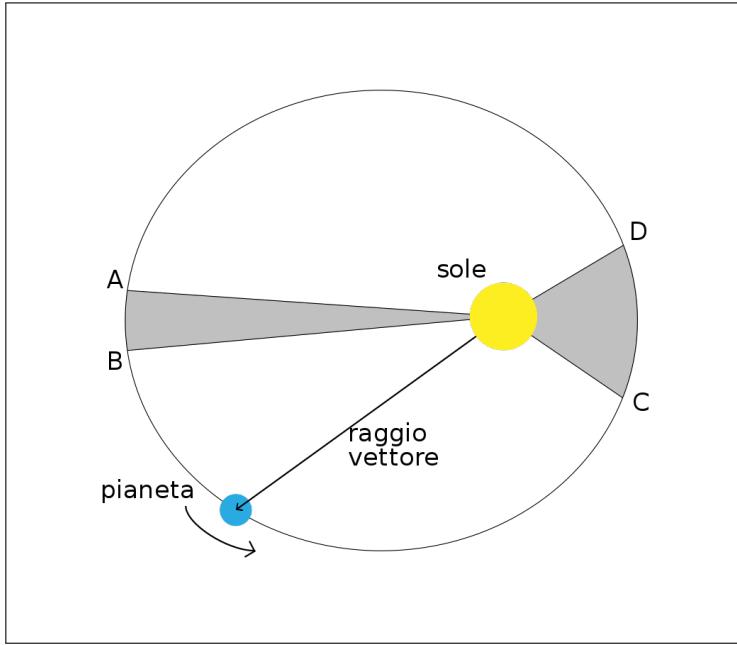
## 5.8 Leggi di Keplero

La legge di gravità universale è stata "creata" come "**unificazione**" delle **3 leggi di Keplero**. Nota che queste leggi descrivono il moto, ellittico, dei pianeti attorno al Sole. Citiamole per completezza:

1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;*



2. *Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali;*



3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore. Questa legge può essere scritta in forma matematica in questo modo:

$$T^2 = k * a^3$$

In particolare,  $k$  è una costante (detta anche Keplero) che dipende dal corpo attorno al quale si orbita.

## 5.9 Sistemi di riferimento non inerziali

Prima di cominciare con i sistemi di riferimento non inerziali, sostanzialmente quei **sistemi di riferimento soggetti ad una qualche accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale**, dobbiamo introdurre alcuni concetti fondamentali.

### 5.9.1 Convertire una rotazione in vettore

Come facciamo a rappresentare una rotazione utilizzando un vettore? Vediamo punto per punto:

- **direzione:** corrisponde all'asse su cui viene eseguita la rotazione;
- **verso:** applichiamo la "regola della vite destrorsa", ovvero immaginiamo di posizionare una vite sull'asse di rotazione ed applichiamo suddetta rotazione: il verso di avanzamento/arretramento della vite ci indica il verso del vettore (ricorda che le viti "entrano" se vengono ruotate in senso orario);
- **modulo:** come abbiamo già visto, possiamo rappresentare la rotazione con una **velocità angolare**  $\omega$ , prendiamo come modulo del vettore il **valore numerico di  $\omega$** ;

### 5.9.2 Prodotto vettoriale

Dobbiamo ridordare il concetto di **prodotto vettoriale**, in particolare è un'operazione binaria tra 2 vettori 3-dimensionali che restituisce un vettore 3-dimensionale. Matematicamente potremmo scrivere:

$$\times : R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$$

Supponiamo di avere:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{k}$$

Ora, il vettore  $\vec{k}$  ha 3 componenti principali, come le calcoliamo? Vediamo:

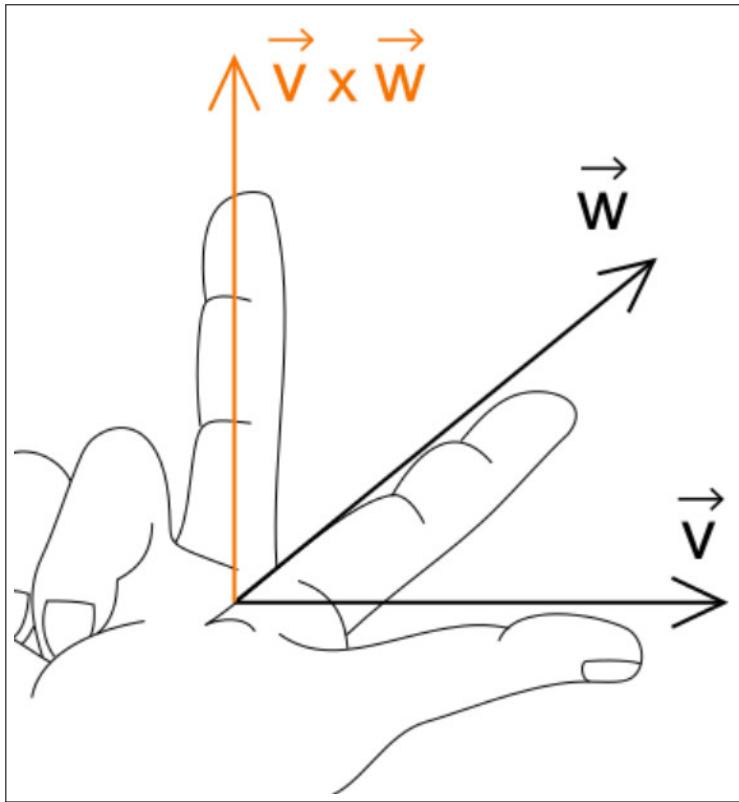
- **modulo:** corrisponde a

$$||\vec{v}|| * ||\vec{w}|| * \sin(\theta)$$

dove  $||\vec{v}||$  e  $||\vec{w}||$  rappresentano la **norma euclidea** dei rispettivi vettori (sostanzialmente si fa la radice della somma dei quadrati delle componenti del vettore), mentre  $\theta \in [0, \pi]$  rappresenta l'**angolo convesso tra i vettori**;

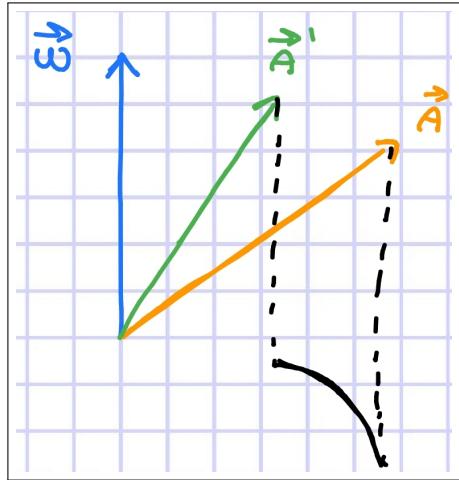
- **direzione:** la direzione **ortogonale** al piano che contiene  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ;
- **verso:** per quanto riguarda il verso, includo la regola generale della mano destra:

- il verso di  $\vec{v} \times \vec{w}$  si ricava con la **regola della mano destra**: si dispone il pollice della mano destra nella direzione e nel verso del vettore  $\vec{v}$ , e l'indice nella direzione e nel verso di  $\vec{w}$ . Distendendo il dito medio perpendicolarmente al palmo della mano, si ha la direzione e il verso in cui punta il prodotto  $\vec{v} \times \vec{w}$ .

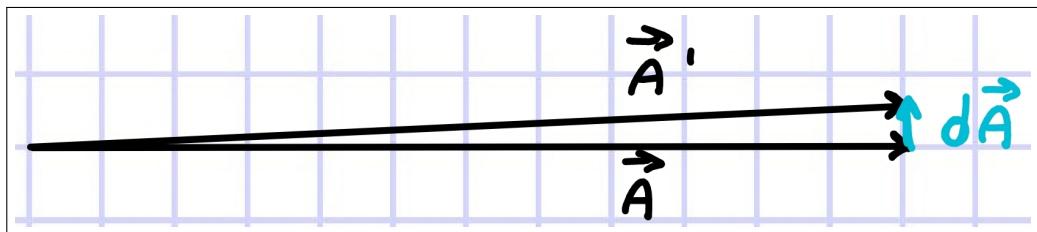


### 5.9.3 Legge di Poisson

L'ultimo concetto da introdurre, ci permette di "ridurre" la derivata di un vettore ad un prodotto vettoriale. Supponiamo di avere un cono gelato e di **disegnare un vettore sul lato di questo cono**. Ora, immaginiamo di applicare una rotazione sull'asse di questo cono, otterremo qualcosa del genere:



Ora, se lo spostamento di  $\vec{A}$  verso  $\vec{A}'$  è infinitesimale, ovvero



possiamo "approssimare"  $dA$  nell'intervallo di tempo  $dt$  ( $dA/dt$ , ovvero la derivata) come il **prodotto vettoriale tra il vettore rotazione  $\vec{\omega}$  ed il vettore  $\vec{A}$** :

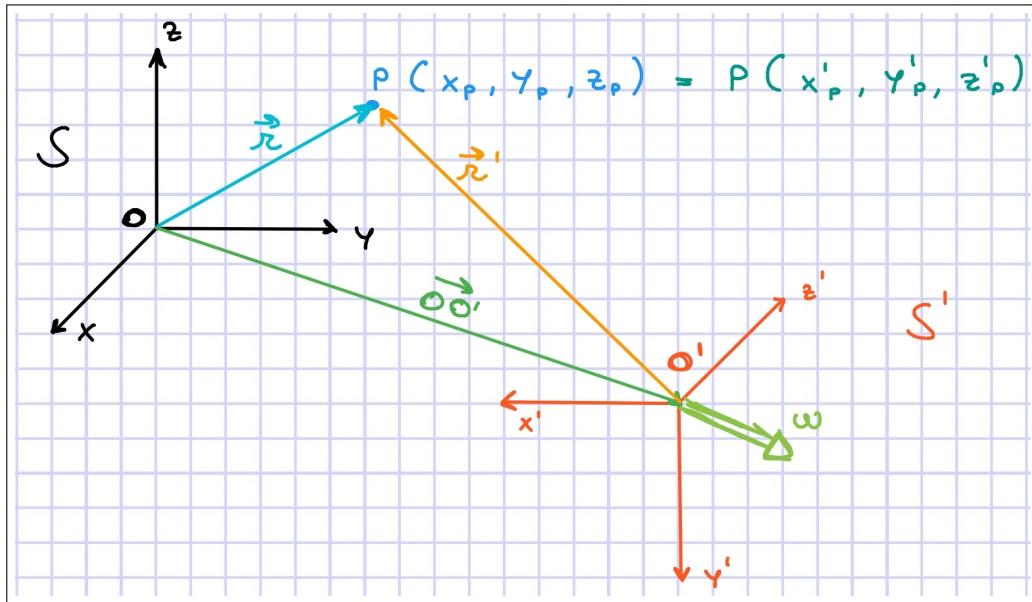
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

#### 5.9.4 Cambiare il sistema di riferimento

Supponiamo di avere **2 sistemi di riferimento**:

- $S$ : sistema di riferimento **inerziale, FISSO**;
- $S'$ : sistema di riferimento **non inerziale**, che **rispetto ad S NON è FISSO**;

Vediamo un disegno:



Come si vede dall'immagine, abbiamo un **sistema inerziale fisso** ( $S$ ) ed un **sistema non inerziale non fisso** ( $S'$ ). Nota che **conosciamo il vettore  $\vec{oo'}$**  (che rappresenta lo spostamento dell'origine di  $S'$ ) e **il vettore  $\vec{\omega}$**  (che rappresenta una rotazione di  $S'$ ). Ora, dato **un punto  $P$**  vogliamo sapere la relazione tra spazio, velocità ed accelerazione nei 2 sistemi di riferimento. Vediamo punto per punto.

**5.9.4.1 Spazio in un sistema non inerziale** Ci basta controllare il disegno, risulta abbastanza ovvio che:

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r}'$$

Ricorda che  $\vec{r}'$  corrisponde allo spazio di  $P$  visto da  $S'$ .

**5.9.4.2 Velocità in un sistema non inerziale (teorema delle velocità relative)** Sappiamo per definizione che la velocità è la derivata dello spazio, quindi **deriviamo lo spazio!** Cominciamo da  $S$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(r_x * \hat{x} + [y] + [z]) \\ &= \frac{dr_x}{dt} * \hat{x} + \textcolor{green}{r_x * \frac{d\hat{x}}{dt}} + [y] + [z] \\ &= v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} + v_z * \hat{z} \end{aligned}$$

Per semplicità "omettiamo" la  $y$  ( $[y]$ ) e la  $z$  ( $[z]$ ) dato che sono uguali alla  $x$ . Nota che la parte in verde si annulla in quanto il nostro sistema di riferimento resta immutato!

Proviamo ora a calcolare la velocità per  $S'$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{oo'} + \vec{r}') \\ &= \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \end{aligned}$$

Arriviamo a questo punto: per quanto riguarda  $\vec{oo'}$ , possiamo notare che il punto  $o$  (origine di  $S$ ) è fisso, pertanto è come se calcolassimo semplicemente la velocità di  $o'$  (l'unico punto in movimento dei 2). Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \vec{v}_{o'} + \left( \frac{dr_x}{dt} * \hat{x}' + r_x * \frac{d\hat{x}'}{dt} + [y] + [z] \right) \end{aligned}$$

Il problema ora è che la parte in verde questa volta non si annulla! Il sistema  $S'$  infatti è in movimento. Come lo gestiamo? **Usiamo le formule di Poisson** [pag.56]!

$$\vec{v}_{o'} + \left( \frac{dr_x}{dt} * \hat{x}' + r_x * \frac{dx'}{dt} + [y] + [z] \right) = \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + x' * \vec{\omega} \times \hat{x}'] + [y] + [z]$$

$$= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + \vec{\omega} \times (x' * \hat{x}')] + [y] + [z]$$

per definizione

$$= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'})] + [y] + [z]$$

espandi  $[y]$   $[z]$  e raccogli

$$= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{y'} * \hat{y}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{z'} * \hat{z}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{z'})]$$

$$= \vec{v}_{o'} + (v_{x'} * \hat{x}' + v_{y'} * \hat{y}' + v_{z'} * \hat{z}') + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'} + \vec{r}_{y'} + \vec{r}_{z'})$$

per definizione

$$= \vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Finiamo con l'ottenere quello che viene definito **teorema delle velocità relative**, ovvero:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Dove:

- $\vec{v}'$  rappresenta la velocità del punto P nel sistema di riferimento  $S'$ ;
- $\vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$  è quella che viene detta **velocità di trascinamento**, ovvero la velocità imposta dal sistema di riferimento che si muove e "trascina" il punto P.

**Un po' di casistica** Vediamo un po' di casi particolari:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$ : il S.R.  $S'$  **non ruota**, per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dallo spostamento dell'origine di  $S'$  (immagina ad esempio un treno su un tratto rettilino). In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'}$$

- $\vec{v}_{o'} = \vec{0}$ : il S.R.  $S'$  **non si sposta** (nota che ciò non garantisce che l'origine di  $S'$  coincide con quella di  $S$ ), per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dal prodotto vettoriale di *omēga* con  $\vec{r}'$  (immagina ad esempio un peso poggiato su un giradischi). In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

- $\vec{v}_{o'} = \vec{0}, \vec{\omega} = \vec{0}$ : il S.R.  $S'$  **non ruota e non si sposta** (anche qui, ciò non garantisce che l'origine di  $S'$  coincide con quella di  $S$ ), per questo la velocità di trascinamento è **nulla**. In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v}'$$

**5.9.4.3 Accelerazione in un sistema non inerziale (teorema delle accelerazioni relative)** Per quanto riguarda l'accelerazione, il procedimento è **sempre lo stesso: dobbiamo derivare la velocità**! Non è nulla di nuovo, è solo un po' lungo, si deve fare attenzione a fare i giusti raccoglimenti ed utilizzare le formule di Poisson [pag.56]. Sostanzialmente, il risultato finale, detto **teorema delle accelerazioni relative**, è:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Dove:

- $\vec{a}'$  corrisponde all'accelerazione del corpo in  $S'$ ;
- $\vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  è l'accelerazione di trascinamento;
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  è la **forza di Coriolis**, una **forza apparente** (trattiamo in seguito) che esiste solo se  $S'$  ruota rispetto ad  $S$ .

#### 5.9.4.4 Riassumendo

Riassumendo rapidamente, le formule che interessano a noi sono:

1. **spazio:**

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r}'$$

2. **velocità:**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

3. **accelerazione:**

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

## 5.10 Forze apparenti

Consideriamo ora le forze esterne nel sistema di riferimento  $S$ ,

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

e nel sistema di riferimento  $S'$ ,

$$\vec{F}_{ext} = m(\vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$$

In  $S'$  ottengo quindi che,

$$\vec{F}_{ext} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}' \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{F}_{ext} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C}{m}$$

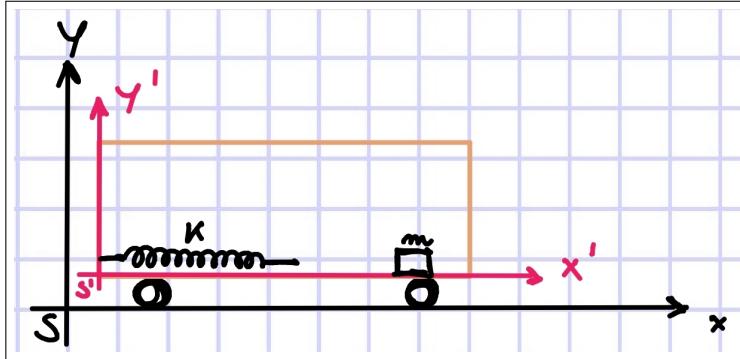
Le forze  $-m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$  sono dette **forze apparenti**. Apparenti perché sono legate al sistema di riferimento, infatti queste forze sono dovute al moto del sistema di riferimento non inerziale.

### 5.10.1 Principio di relatività galileiana

Il **principio di relatività galileiana** dice che è sempre possibile mantenere la formulazione delle leggi della fisica se ci si sposta da un sistema di riferimento ad un'altro, purchè la differenza di moto tra i due sistemi di riferimento sia esprimibile come una velocità.

La Terra non è un sistema di riferimento inerziale, dato che ruota intorno a se stessa e attorno al sole. Come sistema di riferimento inerziale di solito si usa quello delle **stelle fisse**, si prende il sole come origine e si puntano gli assi verso delle costellazioni che si vede che non si muovono.

### 5.10.2 Esempio 1 forze apparenti



Supponiamo di avere un sistema di riferimento  $S$  che sono i binari ed un sistema di riferimento  $S'$  che è un vagone. Nel vagone c'è una molla di costante elastica  $K$  e una massa  $m$  e trascuriamo gli attriti. Consideriamo anche  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , quindi il sistema  $S'$  non ruota.

Quando il vagone parte con una certa accelerazione, la massa si sposterà verso la molla, quindi con accelerazione uguale ed opposta a quella del vagone, finché non la raggiunge e poi comincia a contrarla. Se il vagone continua ad accelerare ad un certo punto la massa smetterà di contrarre la molla, questo si ha quando la forza elastica è bilanciata dalla forza apparente,

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}_T$$

Ho quindi ora che,

$$\vec{R} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}'$$

Ora se il vagone smette di accelerare quando la massa deve ancora raggiungere la molla, la massa continuerà in moto rettilineo uniforme verso la molla, se invece il vagone smette di accelerare quando la massa ha compresso la molla, la forza elastica della molla spingerà la massa nel senso opposto e quest'ultima continuerà di moto rettilineo uniforme fino a raggiungere la parete del vagone opposta a quella dove è attaccata la molla. Nel caso in cui il vagone smette di accelerare si ha quindi che,

$$\vec{R} = m\vec{a}_T \Rightarrow m\vec{a}_T = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{a}_T = -\frac{k\vec{x}}{m}$$

Osserviamo che si riesce a capire se ci si trova in un sistema di riferimento inerziale o meno osservando lo stato della molla (allungata, accorciata, a riposo).

Per il principio di relatività galileiana non riesco a distinguere un sistema di riferimento inerziale da un'altro, ma invece se sono in un sistema di riferimento non inerziale riesco ad accorgermene. Se il vagone è ben schermato e vedo le molle che si muovono, vuol dire che il movimento della molla ha a che vedere con il movimento del sistema di riferimento, che non è quindi inerziale.

### 5.10.3 Esempio 2 forze apparenti

Supponiamo che in un ascensore che è in caduta libera ci sia un omino, nel sistema di riferimento ascensore l'omino è fermo, mentre nel sistema di riferimento esterno all'ascensore l'omino ha un'accelerazione di trascinamento che è,

$$\vec{R} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}' \Rightarrow m\vec{g} - m\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \vec{a}_T = \vec{g}$$

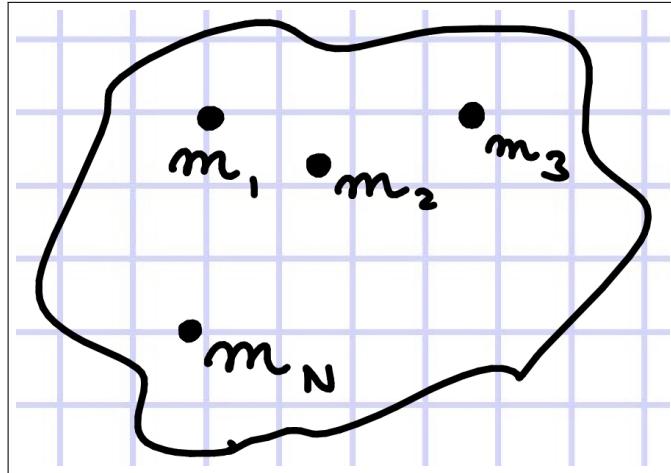
Osserviamo che l'accelerazione di Coriolis è  $= 0$  dato che non c'è rotazione e che  $\vec{a}' = 0$  perché l'omino per il sistema di riferimento ascensore è fermo.

Osserviamo quindi che la forza peso non è una forza apparente.

## 5.11 Punto materiale

Un **punto materiale** è un punto nel quale è concentrata tutta la massa del corpo, quindi rappresento il corpo come un punto materiale. Il punto materiale è un'astrazione/idealizzazione e non ha quindi dimensioni.

Se il movimento del corpo è molto più grande delle sue dimensioni infatti, si può trascurare il volume del corpo e considerarlo come un punto materiale.



Ora se considero un sistema di punti materiali, ogni punto avrà massa  $m_i$  per  $1 \leq i \leq n$ . Su ogni  $m_i$  agiscono delle **forze esterne** e delle **forze interne**. Ora quest'ultime saranno la somma di tutte le forze esercitate dalle altre masse su  $m_i$ , però considerando la III legge della dinamica [pag.24], abbiamo che la somma delle forze interne è 0.

Ora calcoliamo quindi la risultante delle forze per ogni  $m_i$ ,

$$\begin{aligned}\vec{R}_i &= m_i \vec{a}_i = \vec{R}_i^I + \vec{R}_i^E \\ \vec{R}_i^E &= \sum_{k=1}^M \vec{F}_{k,i}^E \\ \vec{R}_i^I &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j \rightarrow i}^I\end{aligned}$$

Ed ora otteniamo la risultante di queste,

$$\begin{aligned}\vec{R}^E &= \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^E \\ \vec{R}^I &= \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^I = \vec{0}\end{aligned}$$

Ora otteniamo che,

$$\vec{R} = \vec{R}^E = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

Ora possiamo fare il passaggio seguente,

$$\vec{R}^E = \sum_i^N \textcolor{red}{m_i} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{\sum_i^N m_i} = M \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{a}_i}{M} = M \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

Nota che la parte in rosso, ovvero la sommatoria di tutte le masse del nostro sistema di punti materiali (che andiamo poi a chiamare M), la moltiplichiamo e dividiamo (moltiplicando effettivamente per 1). Lo facciamo perché "vogliamo noi", ci servirà per definire il centro di massa come la media pesata per la massa, di tutte le posizioni dei costituenti del sistema. Ovvero la media pesata delle posizioni, dando come peso la frazione totale di massa che gli oggetti hanno. Il centro di massa è il seguente,

$$\vec{r}_{C.M.} = \sum_i^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

Ora ottengo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R}^E = M \frac{d^2 \vec{r}_{C.M.}}{dt^2} = M \frac{d \vec{v}_{C.M.}}{dt} = M \vec{a}_{C.M.}$$

Da questa formula possiamo capire che la risultante delle forze esterne, qualora non fosse nulla, può essere applicata come una forza solo sul centro di massa del nostro sistema! Possiamo immaginare il sistema come un corpo unico tutto condensato nel centro di massa.

### 5.11.1 Esercizio centro di massa

Supponiamo di avere ora tre punti come nell'immagine e di dover calcolare il centro di massa del sistema,

$$\vec{r}_{C.M.} = \begin{pmatrix} x_{C.M.} \\ y_{C.M.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1*2+2*5+3*6}{6} \\ \frac{1*3+2*2+3*6}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{25}{6} \end{pmatrix}$$

### 5.11.2 Sistema isolato

Un sistema è isolato se non agiscono forze esterne su di esso, quindi la risultante delle forze esterne è nulla.

Nei sistemi isolati ho quindi che,

$$\vec{R}^E = M \vec{a}_{C.M.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{C.M.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{C.M.} = \text{cost}$$

### 5.11.3 Principio di conservazione della quantità di moto

Il principio di conservazione della quantità di moto dice che in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva nel tempo.

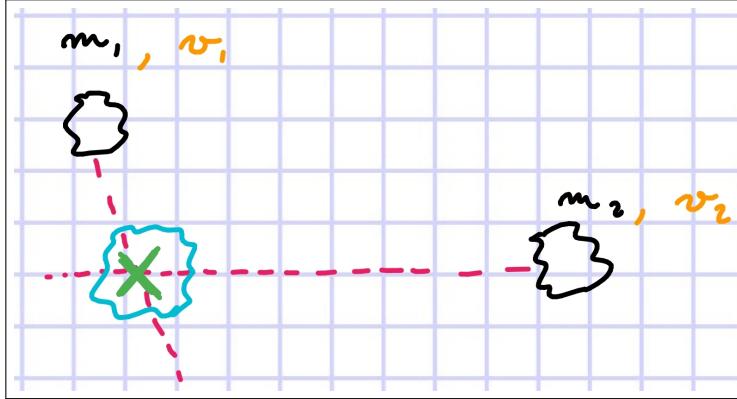
$$\frac{d \vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

## 5.12 Gli urti

Quando 2 oggetti si scontrano tra di loro abbiamo quello che viene definito "urto": durante questo urto, i 2 corpi hanno una qualche interazione tra di loro. Prendiamo ad esempio 2 biglie indeformabili (di acciaio) che si scontrano tra di loro: in questo esempio cambiano direzione, questo vuol dire che c'è stata qualche interazione tra i corpi che ha comportato il cambio di direzione! Il concetto di urto è molto

importante perché, in esperimenti seri, potrebbe essere l'unico mezzo con cui possiamo accorgerci della presenza di una qualche interazione tra corpi "invisibili" (molto piccoli) non osservabili altrimenti.

Introduciamo la situazione generica in cui ci troviamo:



Abbiamo 2 corpi distinti con le rispettive masse e velocità, supponendo che le loro traiettorie si incrocino avremmo effettivamente un impatto solo se:

$$\exists t | r_1(t) = r_2(t)$$

Ovvero se esiste un istante di tempo in cui la posizione dei 2 oggetti è la stessa. Se ciò avviene abbiamo un impatto localizzato in quella che viene chiamata **regione d'urto (d)**, tornando all'esempio delle biglie possiamo pensare alle zone delle biglie che entrano effettivamente in contatto. Affinché possiamo applicare le nostre solite approssimazioni, questa regione  $d$  deve essere **molto minore di qualsiasi altra distanza che entra in gioco** ( $d \ll r_j$ ).

### 5.12.1 Conservazione della quantità di moto

Supponendo che il sistema che rappresenta i nostri corpi sia **un sistema isolato**, abbiamo che l'accelerazione del centro di massa è nulla, quindi la sua velocità è **costante** (potrebbe essere nulla, ma non è detto). Facciamo ora un po' di passaggi algebrici:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2 + \dots}{M} \right) = \vec{const}$$

Da qui, possiamo fare altri passaggi algebrici che ci portano ad ottenere un risultato interessante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\sum_j m_j * \vec{r}_j}{M} &= \vec{const} & \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j m_j * \vec{r}_j &= \vec{const} * M = \vec{const} \\ && \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j m_j * \vec{r}_j &= \vec{const} \\ && \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j P_j &= \vec{const} \end{aligned}$$

Ovvero, abbiamo che la somma delle varie quantità di moto **resta costante!** Questo è il concetto importante:

**Negli urti la quantità di moto resta sempre costante!**

Abbiamo quindi che:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Ora, possiamo scomporre queste quantità di moto nelle loro componenti base, ovvero (supponendo un caso 3-D):

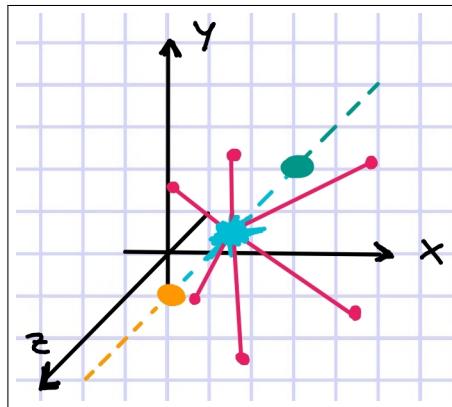
$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \begin{cases} P_{x,i} = P_{x,f} \\ P_{y,i} = P_{y,f} \\ P_{z,i} = P_{z,f} \end{cases}$$

Tornando ora al sistema isolato che abbiamo visto prima, possiamo introdurre il concetto di conservazione delle quantità di moto in questo modo:

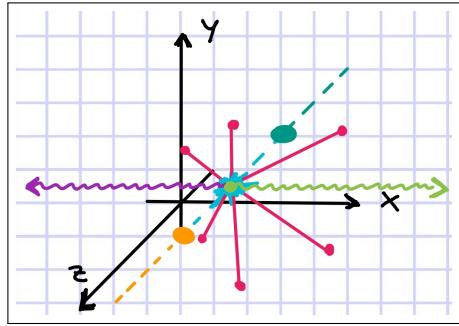
$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} + m_B * \vec{v}_{B,f} + \dots + m_N * \vec{v}_{N,f}$$

Nota come **cominciamo con 2 corpi** che vanno in urto tra loro (questo succederà sempre, semplicemente perché l'urto contemporaneo tra 3 corpi è un problema estremamente complesso) ma finiamo con **un numero N di quantità di moto finali**. Perché facciamo così? Durante l'urto può succedere che **i 2 corpi che si scontrano NON mantengano la loro natura**: potrebbero **fondersi in un corpo unico**, oppure potrebbero **esplodere in tanti corpi che vanno in tutte le direzioni!** Ovviamente, può anche succedere che i 2 corpi restino loro stessi e semplicemente cambino traiettoria (come succede con le biglie d'acciaio).

**5.12.1.1 Esempio neutrini (oggetti che "esplodono")** Al CERN di Ginevra si fanno questi esperimenti, si prendono 2 particelle e si fanno scontrare tra di loro a gran velocità: all'impatto queste "esplodono" sparando numerose componenti in tutte le direzioni:



Se ora noi prendiamo e sommiamo tutte le quantità di moto di questi nuovi oggetti dovremmo ottenere ESATTAMENTE la stessa quantità di moto iniziale che, nel caso di 2 particelle uguali sparate alla stessa velocità ma in senso opposto, dovrebbe essere 0. Spesso però questo non accade e ci ritroviamo con un vettore del genere (in verde, nel disegno ho tracciato un vettore casuale):



Però, ciò non è possibile, infatti noi sappiamo per definizione che la quantità di moto iniziale deve essere uguale a quella finale, che in questo caso deve essere 0. Allora DEVE esserci una quantità di moto uguale e contraria che però non abbiamo visto: quello (molto probabilmente) è un neutrino che è scappato in direzione del **vettore viola** e che bilancia il tutto portando la somma delle varie quantità di moto a 0.

Ecco, tornando alla nostra teoria precedente, questo è il tipico esempio in cui la formula della quantità di moto iniziale/finale corrisponde proprio a:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} + m_B * \vec{v}_{B,f} + \dots + m_N * \vec{v}_{N,f}$$

Però, come detto prima, esistono anche altri casi.

### 5.12.2 Urto (puramente) anelastico

Esistono 2 tipi di urti, il primo che vediamo è quello che viene detto **urto puramente anelastico**, ovvero quello dove i 2 corpi che si scontrano si **fondono tra loro creando un corpo unico** che, essendo appunto un corpo unico, corrisponderà anche al centro di massa del sistema. Ora, in questo caso è molto interessante **spostarsi in un sistema di riferimento che corrisponde al centro di massa**, è come se mettessimo l'origine a cavallo del centro di massa. Nota che, non trovandoci più in un sistema inerziale, **dobbiamo anche "modificare" la composizione delle velocità dei nostri corpi**, in particolare abbiamo:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} = m_A * \vec{v}_{CM}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_2\end{aligned}$$

Ora, dato che abbiamo posto che il nostro sistema di riferimento si trova a cavallo del CM, possiamo subito dite che  $\vec{v}_{CM} = 0$ , da qui otteniamo che:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} = m_A * \vec{v}_{CM} = m_A * 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = 0$$

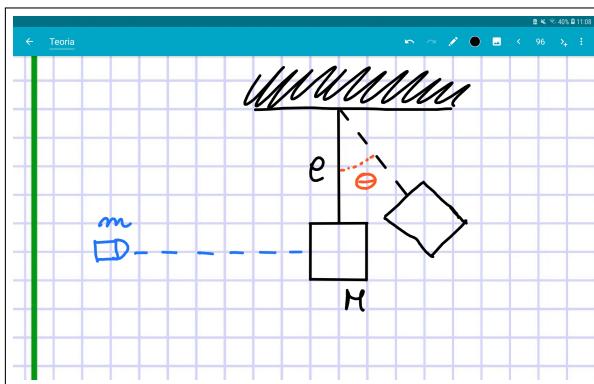
**5.12.2.1 Energie cinetiche** In questo caso è molto interessante controllare cosa succede a livello di energie cinetiche:

$$\begin{aligned}
 E_{k,i} &= E_{k,i,1} + E_{k,i,1} \\
 &= \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_2^2 \\
 \text{Usiamo il sys di ref del CM} &= \frac{1}{2} * m_1 * (v_{CM} + v'_1)^2 + \frac{1}{2} * m_2 * (v_{CM} + v'_2)^2 \\
 \text{Sviluppiamo i quadrati} &= \frac{1}{2} * [m_1 * (v_{CM}^2 + 2v_{CM} * v'_1 + v'^2_1) + m_2 * (v_{CM}^2 + 2v_{CM} * v'_2 + v'^2_2)] \\
 \text{Un po' di passaggi algebrici} &= \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * v_{CM}^2 + \frac{2}{2} * (\cancel{m_1 * v'_1} + \cancel{m_2 * v'_2}) * v_{CM} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} * m_1 * v'^2_1 + \frac{1}{2} * m_2 * v'^2_2 \\
 &= \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * v_{CM}^2 + \frac{1}{2} * m_1 * v'^2_1 + \frac{1}{2} * m_2 * v'^2_2 \\
 &= \mathbf{E_{k,f}} + \mathbf{E'_{k,i}}
 \end{aligned}$$

Ora, nota che la parte in verde **vale 0 per definizione**, dato che ci troviamo nel sistema di riferimento del CM (lo abbiamo definito prima). Otteniamo quindi che l'energia cistica iniziale corrisponde all'**energia cinetica finale (quella del CM)** + l'**energia cinetica iniziale presa però nel sys di ref del CM**. Fin qui niente di particolarmente strano, però se rigiriamo la formula per trovare l'energia cinetica finale:

$$E_{k,f} = E_{k,i} - E'_{k,i}$$

Abbiamo che  $E_{k,f} < E_{k,i}$ , infatti sappiamo che le **energie cinetiche sono sempre valori positivi!** Abbiamo quindi che l'energia cinetica finale è **minore** di quella iniziale, ma dove va quell'energia mancante? Sostanzialmente, l'energia persa viene **usata per "fondere" i 2 oggetti tra di loro!**



**5.12.2.2 Esercizio urto unelastico** Supponiamo di avere un sacco di sabbia di massa  $M$  appesa ad un filo di lunghezza  $l$  e di avere un proiettile di massa  $m$  che spariamo contro il sacco. Dobbiamo calcolare l'angolo  $\theta$  che oscilla il sacco dopo che l'urto è avvenuto.

Quando sparo il proiettile abbiamo che,

$$\begin{aligned}
 p_p &= wv \\
 E_{k,i,p} &= \frac{1}{2}mv^2
 \end{aligned}$$

e per il sacco,

$$\begin{aligned}
 p_s &= 0 \\
 E_{k,i,s} &= 0
 \end{aligned}$$

dato che il sacco deve ancora essere colpito dal proiettile, è fermo.

Ora per la conservazione della quantità di moto abbiamo che,

$$P_{TOT,i} = P_{TOT,f} \Rightarrow mv = (M+m)v_f$$

Ora per risolvere l'esercizio, possiamo considerare che dopo che avviene l'urto, ovvero durante l'oscillazione, l'energia meccanica si conserva, quindi abbiamo che,

$$E_{k,i,(M+m)} + U_{i,(M+m)} = E_{k,f,(M+m)} + U_{f,(M+m)}$$

e notiamo che l'energia potenziale iniziale si annulla dato che non c'è variazione dell'altezza e anche l'energia cinetica finale si annulla dato che la velocità finale è nulla, ovvero nel punto di oscillazione massima. Sostituendo otteniamo quindi,

$$E_{k,i,(M+m)} = U_{f,(M+m)} \Rightarrow \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = (M+m)g\Delta h$$

Osserviamo ora che  $v_f$  è la stessa che c'è sopra nella conservazione della quantità di moto, quindi possiamo ricavarla da quella e sostituirla qui. Questo perchè consideriamo che la quantità di moto finale (nella formula della conservazione della quantità di moto) e l'energia cinetica iniziale (nella formula della conservazione dell'energia) sono prese allo stesso istante di tempo.

Sostituendo e facendo un po di calcoli arriviamo al risultato finale. Osserviamo che il  $\Delta h$  si calcola prendendo  $l$ , ovvero la lunghezza del filo, e sottraendogli  $l * \cos\theta$ , come segue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 &= (M+m)g\Delta h & \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 &= gl(1 - \cos\theta) \\ && \Rightarrow \cos\theta &= 1 - \frac{1}{2gl}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 \\ && \Rightarrow \cos\theta &= 1 - \frac{m^2v^2}{2gl(M+m)^2} \\ && \Rightarrow \theta &= \arccos\left(1 - \frac{m^2v^2}{2gl(M+m)^2}\right) \end{aligned}$$

Questo risultato può essere scritto anche dividendo numeratore e denominatore per  $M$  come segue,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2}{2gl\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}$$

e con questo possiamo osservare che se la massa  $m$  del proiettile è molto piccola (quasi nulla), rispetto alla massa  $M$  del sacco di sabbia ho che  $\cos\theta \approx 1$ , ciò significa che  $\theta = 0$  e quindi il sacco non si muove. Osserviamo ora che per  $\theta \ll 1$ , per Taylor si ha  $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$  e quindi ho che,

$$\theta = \frac{mv}{\sqrt{gl}(M+m)}$$

### 5.12.3 Urto elastico

Il secondo tipo di urto che vediamo è quello **elastico**, ovvero quello dove i 2 corpi restano tali e "rimbalzano". A differenza dell'urto anelastico, in questo caso l'**energia cinetica si conserva** ( $E_{k,i} = E_{k,f}$ ). Ovviamente, anche la **quantità di moto si conserva**. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{x,i} = P_{x,f} \\ P_{y,i} = P_{y,f} \\ P_{z,i} = P_{z,f} \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases}$$

Questa "scomposizione" della quantità di moto è molto importante, perché ci permette di fare un ragionamento sui **gradi di libertà**:

| Dim. | Eq. Moto | Eq. Cinetica | Eq. Tot | Incognite | Grad. Libertà |
|------|----------|--------------|---------|-----------|---------------|
| 3    | 3        | 1            | 4       | 6         | 6-4 = 2       |
| 2    | 2        | 1            | 3       | 4         | 4-3 = 1       |
| 1    | 1        | 1            | 2       | 2         | 2-2 = 0       |

Prendiamo ad esempio le 3 dimensioni: con tre dimensioni abbiamo **3 assi**, quindi abbiamo **3 equazioni per la quantità di moto**, e **1 equazione per l'energia cinetica**. Espandiamo queste equazioni ("comprimendo" la quantità di moto, solo per risparmiare spazio):

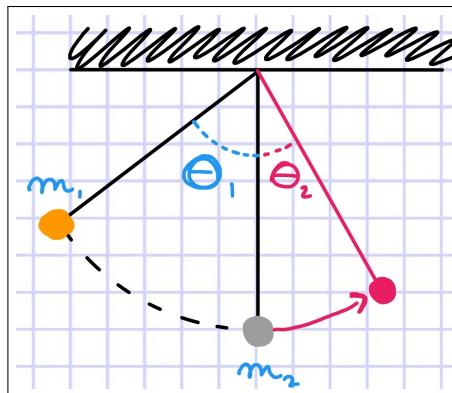
$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_1 * \vec{v}_{1,f} + m_2 * \vec{v}_{2,f} \\ \frac{1}{2}m_1 * \vec{v}_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 * \vec{v}_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 * \vec{v}_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 * \vec{v}_{2,f}^2 \end{cases}$$

Da questa espansione, possiamo notare che **non conosciamo le velocità finali dei 2 corpi!** Espandendo il moto sui 3 assi avrebbe **6 incognite**: 3 per la velocità finale del primo corpo e 3 per quella del secondo corpo. Il "problema" è che abbiamo **un sistema di 4 equazioni con 6 incognite**: avessimo soltanto 4 incognite, potremmo risolverlo "matematicamente", in questo caso però dobbiamo **introdurre 2 gradi di libertà** (che possono essere angoli di entrata, velocità fissate su 2 assi, ...) per poter risolvere matematicamente le altre incognite rimanenti.

Per quanto riguarda il caso **unidimensionale** invece è **tutto fissato!** Se l'evento si sviluppa su un solo asse possiamo calcolare tutto usando soltanto il principio di conservazione della quantità di moto.

#### 5.12.3.1 Esempio di esercizio

Vediamo un esempio:



In particolare, abbiamo una biglia di massa  $m_1$  sostenuta da un cavo inestensibile lungo  $l$  con un angolo  $\theta_1$  rispetto alla posizione a riposo del pendolo. Ad un certo punto, questa biglia inizierà a cadere scontrandosi

con l'altra biglia di massa  $m_2$ , sempre sostenuta allo stesso modo ma in posizione di equilibrio. Nota che **le 2 masse non sono uguali!** Vediamo velocemente un po' di casistica al momento dell'urto:

- $m_1 > m_2$ : la biglia 2 inizia a dondolare, la biglia 1 continua a dondolare "di meno" seguendo il percorso iniziale (è come se trascinasse la biglia 2);
- $m_1 < m_2$ : la biglia 2 inizia a dondolare, la biglia 1 continua a dondolare "di meno" però nel verso opposto (è come se rimbalzasse sulla biglia 2);
- $m_1 = m_2$ : la biglia 1 trasferisce tutto il suo moto alla biglia 2, la quale compirà lo stesso moto della biglia 1 (è come uno di quei giochi da ufficio con le biglie);

Tornando al nostro esercizio, **date le 2 masse e l'angolo iniziale della biglia 1, trovare l'angolo massimo della biglia 2**. Nota che, come visto nella casistica, dato che le masse sono diverse la biglia 1 compirà un qualche movimento dopo l'urto, ma a noi non interessa!

Ora, possiamo vedere questo problema come la **composizione di 2 diversi problemi**:

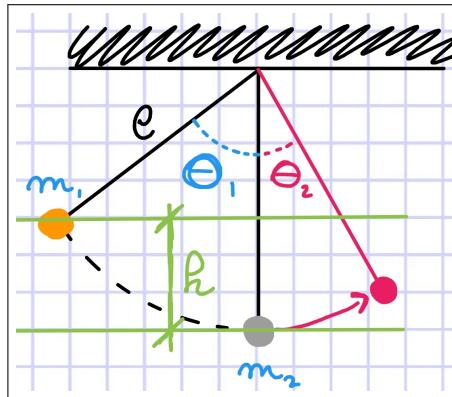
1. **pendolo**: calcolo dell'angolo  $\theta$  e della velocità che la biglia 1 acquisisce appena prima di urtare la biglia 2;
2. **urto**: urto vero e proprio, principalmente ci chiediamo quanta velocità viene passata alla biglia 2 dopo l'impatto;

Continuiamo a piccoli passi:

**Velocità pre-impatto** Il primo passo è **calcolare la velocità della biglia 1 prima dell'impatto con la 2**. Come facciamo? Possiamo avvalerci del **principio di conservazione dell'energia meccanica**: in questo caso possiamo notare che **non ci sono forze dissipative** (come sempre supponiamo di fare tutti i nostri esperimenti nel vuoto, evitando l'attrito dell'aria), quindi **l'energia potenziale della biglia 1 ( $U$ ) verrà completamente convertita in energia cinetica ( $E_k$ )**! Noi sappiamo che:

$$U = m * a * \Delta h$$

In particolare, abbiamo che l'accelerazione corrisponde a quella di gravità terrestre, mentre il  $\Delta h$  è questo piccolo segmento qui:



Per calcolarla possiamo sfruttare un po' di trigonometria, in particolare:

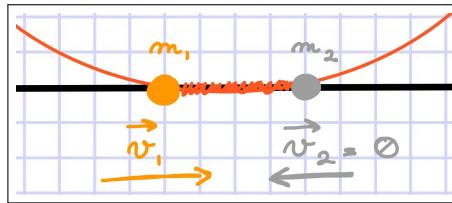
$$\Delta h = l - l * \cos(\theta_1) = l(1 - \cos(\theta_1))$$

Ora che abbiamo le 2 componenti che ci servono, semplicemente le **mettiamo in uguaglianza** (data la conservazione delle energie) e ci troviamo la nostra velocità:

$$\begin{aligned}
 U &= E_k \\
 &\Rightarrow m * g * \Delta h = \frac{1}{2} * m * v^2 \\
 &\Rightarrow g * \Delta h = \frac{1}{2} * v^2 \\
 &\Rightarrow 2 * g * \Delta h = v^2 \\
 &\Rightarrow \sqrt{2 * g * \Delta h} = v \\
 &\Rightarrow \sqrt{2 * g * l(1 - \cos(\theta_1))} = v_{i,1}
 \end{aligned}$$

Ricorda però che nella formula "vera" sia l'energia cinetica iniziale (quella che abbiamo in posizione  $\theta$ ) che l'energia potenziale finale (quella che abbiamo in posizione  $\theta = 0$ ) sono importanti! In questo caso possiamo ignorarle dato che sono entrambe nulle (la biglia parte da ferma e finisce nella posizione più bassa possibile).

**Trasferimento di energia nell'urto** Ora ci troviamo nella "fase di urto", dobbiamo capire **come viene trasmessa l'energia tra le 2 biglie**, in particolare **quanto sarà veloce alla fine la biglia 2**. In questa fase, possiamo **approssimare l'urto come un urto unidimensionale**:



Aprendo una piccola parentesi, concentrando solo sulle forze orizzontali presenti in quel piccolissimo istante in cui c'è l'urto effettivo possiamo **ignorare di fatto la forza peso** che spinge verso il basso, pertanto il sistema "biglie" **può essere considerato un sistema isolato!** Tornando a noi, partendo dal principio di conservazione del moto e dell'energia cinetica, possiamo fare un po' di operazioni algebriche in modo da ricavarci effettivamente la velocità della biglia 2 (possiamo farlo perché ci siamo ricondotti al caso monodimensionale):

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m_1 * v_{1,i} + m_2 * v_{2,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} \\
 v_{2,1} \text{ nulla, togliamo} &\Rightarrow \begin{cases} m_1 * v_{1,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A questo punto possiamo identificare **2 incognite**:  $v_{1,f}$  e  $v_{2,f}$ . Dato che a noi interessa solo conoscere  $\theta_2$ ,

ci concentriamo solo sulla risoluzione di  $v_{2,f}$ , quindi ci rigiriamo un po' le formule di prima:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1 * v_{1,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * (v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f})^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = (v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f})^2 + \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = (v_{1,i} - \rho * v_{2,f})^2 + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = v_{1,i}^2 + \rho^2 * v_{2,f}^2 - 2 * v_{1,i} * \rho * v_{2,f} + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = \rho^2 * v_{2,f}^2 - 2 * v_{1,i} * \rho * v_{2,f} + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = v_{2,f} * [\rho * (1 + \rho) * v_{2,f} - 2 * \rho * v_{1,i}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = v_{2,f} * [(1 + \rho) * v_{2,f} - 2 * v_{1,i}] \end{cases} \end{aligned}$$

Da quest'ultima equazione in **rosso** otteniamo che la velocità di uscita della seconda biglia può assumere 2 valori distinti:

- $v_{2,f} = 0$ , questo potrebbe succedere **qualora non ci fosse interazione tra le 2 biglie**, questo caso a noi non interessa;
- $v_{2,f} = \frac{2*v_{1,i}}{1+\rho} = \frac{2*v_{1,i}}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{2*m_1*v_{1,i}}{m_1+m_2}$ , quest'ultima soluzione è molto più interessante per noi!

**Calcolo finale dell'angolo** Nella fase precedente ci siamo calcolati la **velocità di uscita della biglia 2 dall'urto**, ora dobbiamo calcolare l'angolo di oscillazione massimo. Come facciamo? Allora, prima abbiamo stabilito che:

$$v_{i,1} = \sqrt{(2 * g * \Delta h_1)} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_1))}$$

Allo stesso modo, possiamo dire praticamente la stessa cosa per la velocità finale della biglia 2! Ovvvero:

$$v_{2,f} = \sqrt{(2 * g * \Delta h_f)} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_2))}$$

PERO', al punto prima abbiamo stabilito che:

$$v_{2,f} = \frac{2 * m_1 * v_{1,i}}{m_1 + m_2}$$

A questo punto ci basta mettere questi 2 punti insieme e rigirare un po' il tutto, in modo da **trovare l'angolo che ci interessa!**

$$\frac{2 * m_1 * v_{1,i}}{m_1 + m_2} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_2)))} \Rightarrow \frac{2 * m_1}{m_1 + m_2} * \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_1)))} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_2)))}$$

$$\begin{aligned} \text{Questa costante la chiamiamo "A" noi} &\Rightarrow A * \sqrt{2 * g * l(1 - \cos(\theta_1))} = \sqrt{2 * g * l(1 - \cos(\theta_2))} \\ &\Rightarrow A * \sqrt{1 - \cos(\theta_1)} = \sqrt{1 - \cos(\theta_2)} \end{aligned}$$

A questo punto, abbiamo le radici che rompono, quindi possiamo **moltiplicare da entrambe le parti per 2 ed applicare la formula di bisezione del seno** (nota che si riesce a fare anche senza, semplicemente viene più comodo):

$$\begin{aligned}
 A * \sqrt{1 - \cos(\theta_1)} &= \sqrt{1 - \cos(\theta_2)} \\
 \text{Bisezione del seno} &\Rightarrow A * \sqrt{2 * \frac{1 - \cos(\theta_1)}{2}} = \sqrt{2 * \frac{1 - \cos(\theta_2)}{2}} \\
 &\Rightarrow A * \sqrt[4]{2} * \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \sqrt[4]{2} * \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\
 &\Rightarrow \frac{\theta_2}{2} = \arcsin(A * \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)) \\
 &\Rightarrow \theta_2 = 2 * \arcsin(A * \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right))
 \end{aligned}$$

## 6 Termodinamica

La **termodinamica** è il ramo della fisica classica e della chimica che studia e descrive le trasformazioni termodinamiche indotte da calore a lavoro e viceversa in un sistema termodinamico, in seguito a processi che coinvolgono cambiamenti delle variabili di stato temperatura ed energia.

Ci ricordiamo ora che il lavoro delle forze non conservative è la variazione di energia meccanica, ovvero come segue,

$$W_{N.C.} = E_f - E_i$$

### 6.1 Numero di Avogadro

Consideriamo ora un numero molto alto di costituenti del sistema. Le relazioni che ci sono tra di essi sono espresse in un'unità di misura che è il **numero di Avogadro**,

$$N_A = 6,022 * 10^{23} = 1 mol$$

esso indica quanti costituenti fondamentali sono contenuti in una certa quantità di sostanza detta **mole**.

### 6.2 Sistema termodinamico

Nella termodinamica vediamo l'universo composto da due parti, il **sistema termodinamico** e l'**ambiente**. Tra questi due c'è un'iterazione/scambio continuo ed in base a questo scambio definiamo i diversi tipi di sistemi termodinamici:

|             | ENERGIA | MATERIA | ESEMPIO   |
|-------------|---------|---------|---|
| APERTO      | si      | si      | pentola d'acqua che bolle senza coperchio       |
| CHIUSO      | si      | no      | pentola d'acqua che bolle con coperchio         |
| ISOLATO     | no      | no      | contenitore isolato che contiene acqua          |
| IMPOSSIBILE | no      | si      | impossibile, scambio materia => scambio energia |

### 6.3 Variabili termodinamiche

Le **variabili termodinamiche**, anche dette **coordinate termodinamiche**, si distinguono in **grandezze estensive**, ovvero quelle che dipendono dall'estensione del sistema termodinamico (eg. volume, massa), e **grandezze intensive**, ovvero quelle che non dipendono dall'estensione del sistema termodinamico (eg.

pressione, temperatura, densità).

Queste variabili sono anche distinte in **variabili globali**, ovvero quelle che sono riferibili a tutto il sistema (come la temperatura, nel caso in cui si lasci abbastanza tempo ad un corpo di scaldarsi/raffreddarsi), e **variabili locali**, ovvero quelle che sono riferibili ad una parte del sistema (come la densità, se si pensa ad una torta con crema e frutta, queste due avranno densità diversa).

Il loro numero dipende dal sistema che sto considerando e le più famose sono **pressione, temperatura, volume, densità, massa,...**

Osserviamo che per i sistemi di gas useremo pressione, volume e temperatura ed inoltre il numero di moli e di componenti.

## 6.4 Equilibrio termodinamico

L'**equilibrio termodinamico** di un sistema termodinamico si ha quando tutte le suoi corpi/componenti sono in:

- **equilibrio meccanico**: ovvero quando non ci sono momenti delle forze che agiscono tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.
- **equilibrio termico**: ovvero quando non c'è nessuna differenza di temperatura tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.
- **equilibrio chimico**: ovvero quando non c'è nessuna reazione chimica tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.

## 6.5 Trasformazione termodinamica

Una **trasformazione termodinamica** è il passaggio del sistema termodinamico da uno stato termodinamico ad un altro.

Un esempio è il passaggio da caldo a freddo, in esso ci sono tanti passaggi/variazioni:

- **espansione/contrazione** di liquidi e gas
- variazione resistenza elettrica
- variazione differenza di potenziale
- variazione di riflettività/trasmittanza

È utile rappresentare le trasformazioni come spostamenti in un piano di coordinate. Per i gas di solito si usa il piano  $V, p$ .

## 6.6 Temperatura

La **temperatura** si misura su una scala e corrisponde alla media dell'energia cinetica dei componenti del sistema, ovvero quanto i componenti "sono agitati".

### 6.6.1 Unità di misura temperatura

La temperatura si misura con diverse unità di misura, **Celsius** ( $^{\circ}\text{C}$ ), **Fahrenheit** ( $^{\circ}\text{F}$ ) e **Kelvin** (K). Osserviamo che il simbolo della temperatura, per il Kelvin è  $T$ , mentre per le altre unità di misura è  $t$ , quindi la maiuscola è solo per il Kelvin.

Per passare da una u.d.m. all'altra le formule sono le seguenti,

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.16$$

$$t(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5}t(^{\circ}\text{C}) + 32$$

e le restanti si possono ricavare da queste.

### 6.6.2 Punto triplo dell' $\text{H}_2\text{O}$

Il **punto triplo dell'** $\text{H}_2\text{O}$  è il punto in cui coesistono i 3 stati della materia, che nel caso dell' $\text{H}_2\text{O}$  sono ghiaccio, acqua e vapore acqueo, e corrisponde a

$$T_0 = 273.16\text{K} = 0^{\circ}\text{C}$$

### 6.6.3 Termometro

Un **termometro** è un sistema fisico, usato come strumento, che ci permette di esprimere le variazioni di temperatura in funzione di una grandezza fisica,

$$\Delta T \rightarrow \Delta X$$

$$T = T(x)$$

Nel caso di termometro a mercurio, la grandezza fisica è la lunghezza della colonnina di mercurio che leggiamo.

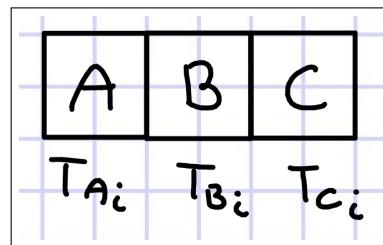
Si cerca di far sì che questa lunghezza sia lineare, ovvero che cresca linearmente con la temperatura, in modo che,

$$T = T(X) = \beta X$$

Quando si costruisce un termometro si deve calibrarlo, per farlo si prende una temperatura di riferimento ( $T_0$ ) e si misura la lunghezza ( $X_0$ ), poi con questi due dati si calcola,

$$\beta = \frac{T_0}{X_0}$$

### 6.6.4 Contatto termico



Supponiamo di avere tre corpi, A, B e C a contatto tra loro come in figura, con temperature iniziali  $T_{A,i}$ ,  $T_{B,i}$  e  $T_{C,i}$  corrispondentemente, diverse tra di loro.

Dopo un periodo di tempo abbastanza lungo, le tre temperature,  $T_{A,f}$ ,  $T_{B,f}$  e  $T_{C,f}$ , saranno uguali. Se invece aspettiamo poco tempo, ci si può trovare in diverse situazioni a seconda del tipo di contatto tra i corpi.

Le pareti si dividono quindi in:

- **pareti diatermiche**: permettono lo scambio di calore grazie all'ottimo contatto
- **pareti adiabatiche**: non permettono scambio di calore, sono quindi "isolanti"

Il **contenitore adiabatico** è un contenitore isolante termicamente.

Osserviamo che in pratica, se si aspetta un tempo sufficientemente lungo, niente è perfettamente isolante.

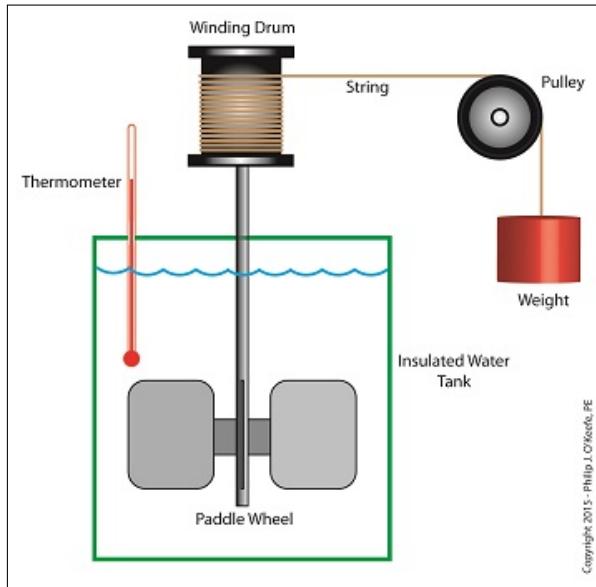
### 6.6.5 Principio zero della termodinamica

Il principio zero della termodinamica dice che se due corpi sono entrambi in equilibrio termico con un terzo corpo, allora lo sono anche fra loro, ovvero se A e B sono in equilibrio termico e B e C sono in equilibrio termico, allora anche A e C sono in equilibrio termico.

Questo si traduce nel fatto che se,

$$T_A = T_B \quad AND \quad T_B = T_C \quad \Rightarrow \quad T_A = T_C$$

## 6.7 Esperimento di Joule



Supponiamo di avere un contenitore con pareti adiabatiche, riempito di un fluido al cui interno è inserito un **mulinello** agganciato ad una puleggia a cui è appesa una massa  $m$ . La massa andando su e giù fa girare il mulinello, che a sua volta fa scaldare l'acqua.

Ora si può legare  $\Delta h$  a  $\Delta T$ . Il lavoro che compio è il seguente,

$$W = mg\Delta h$$

Analogamente al mulinello posso immergere una **resistenza** nell'acqua e in questo caso ottengo lavoro,

$$W = \frac{\Delta V^2}{R} \Delta t$$

Stessa cosa se immergo in acqua un'**elica** e la faccio muovere su e giù, o due **piastre** che faccio sfregare tra loro producendo attrito.

Posso anche immergere un **pallone** nell'acqua e far variare il suo volume.

In conclusione quindi se faccio lavoro (o casino) dentro ad un sistema termodinamico, la temperatura (o agitazione) aumenta, infatti il lavoro è legato alla variazione di temperatura, a lavori uguali corrispondono variazioni di temperatura uguali,

$$W = -\Delta U_{int}$$

osserviamo che il segno "-" è una convenzione adottata in termodinamica, dato che quello che interessa della macchina termica è il lavoro che "l'acqua" può compiere. Se il sistema da energia, il lavoro sarà  $> 0$ , se invece il sistema riceve energia, il lavoro sarà  $< 0$ .

Con questo esperimento abbiamo appreso che l'energia interna dipende solo dalla temperatura ovvero,

$$U = U(T)$$

## 6.8 Calore

Il **calore** è quindi ciò che determina la variazione di temperatura,

$$\Delta T = \gamma Q \Rightarrow Q = \frac{1}{\gamma} \Delta T = \frac{1}{\gamma} (T_f - T_i) = \frac{1}{\gamma} (U_f - U_i) = \frac{1}{\gamma} \Delta U = \eta \Delta U$$

con  $\eta = \frac{1}{\gamma}$ . Ora quindi se confrontiamo due differenze di temperature,

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= \gamma Q_1 \\ \Delta T_2 &= \gamma Q_2\end{aligned}$$

otteniamo,

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{\gamma Q_2}{\gamma Q_1}$$

Ora sperimentalmente si prova che  $\eta = 1$  e quindi ottengo che,

$$Q = \Delta U_{int}$$

ovvero il calore è tutto energia interna.

Osserviamo che introducendo il calore abbiamo generalizzato il principio di conservazione dell'energia, infatti il calore è un modo per scambiare l'energia.

### 6.8.1 Esempio di calore

La massa (e.g. carbone) che brucio per scaldare una pentola d'acqua darà un certo calore che, a parità di massa, dipende da tante cose come l'umidità, la qualità del carbone, il tipo di pentola che uso,... Tutte queste sono delle costanti quindi ho,

$$Q = c_p c_h c_q \dots m$$

Facendo un po' di esperimenti in condizioni diverse si potranno osservare delle variazioni di temperatura diverse, quello che però osservo sempre è che se raddoppio la massa che brucio, raddoppia anche la variazione di temperatura, la costante  $\gamma$  tiene conto di queste costanti.

## 6.9 Principio di equivalenza calore-lavoro

Dato ora quindi che il calore è  $Q = \Delta U_{int}$  e ricordandoci da prima che  $W = -\Delta U_{int}$  possiamo ricavare che,

$$Q = -W \Leftrightarrow W = -Q$$

Il calore e il lavoro quindi sono energia in trasferimento/movimento, identificano una differenza tra lo stato iniziale e lo stato finale.

## 6.10 I principio della termodinamica

Tornando ora a parlare della variazione d'energia interna, essa è causata in parte dal lavoro che il sistema compie/subisce e in parte dal calore che il sistema assorbe/cede, ovvero

$$\begin{aligned}\Delta U_{int} &= \Delta U_{int}^{(W)} + \Delta U_{int}^{(Q)} \\ \Delta U_{int}^{(W)} &= -W \\ \Delta U_{int}^{(Q)} &= Q\end{aligned}$$

La variazione di energia interna dovuta al lavoro è  $-W$  dato che se il sistema compie lavoro, questo viene a "danno" della sua energia interna. Per la variazione di energia dovuta al calore invece è  $Q$  dato che se ricevo calore questo si "trasforma" in energia interna.

In conclusione quindi ho che la variazione di energia interna è la differenza tra il calore e il lavoro,

$$\Delta U_{int} = Q - W$$

Osserviamo ora che per passare dallo stato iniziale a quello finale ci sono tanti modi/traiettorie, ognuna delle quali ha il suo  $Q_i$  e il suo  $W_i$ , la  $\Delta U$  però è sempre uguale, indipendentemente dalla traiettoria.

Ora posso concentrarmi sulle quantità infinitesimali, quindi mi verrebbe da scrivere,

$$dU = dQ - dW$$

La parte sinistra all'"=" è corretta, infatti la variazione di energia dipende solo dallo stato iniziale e da quello finale, è differenziabile. La parte destra invece, quindi la variazione di calore e di lavoro dipende anche dal percorso e non è un differenziale esatto, quindi si usa  $\delta$  come segue,

$$dU = \delta Q - \delta W$$

La variazione infinitesima di calore e di lavoro dipende quindi dalla trasformazione  $\gamma$  che effettuo sul piano,

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta Q_\gamma(p, V, T) \\ \delta W &= \delta W_\gamma(p, V, T)\end{aligned}$$

## 6.11 Tipi di trasformazioni termodinamiche

### 6.11.1 Trasformazione ciclica

Una **trasformazione ciclica** è una trasformazione per cui lo stato iniziale e quello finale coincidono. Dato quindi che  $i \equiv f$  ho che,

$$\begin{aligned}T_i &= T_f \\ U_i &= U_f\end{aligned}$$

e quindi,

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

Infatti se ho incamerato energia, devo in qualche modo restituirla all'ambiente esterno, per far si stato iniziale e finale coincidano.

I motori per esempio fanno trasformazioni cicliche.

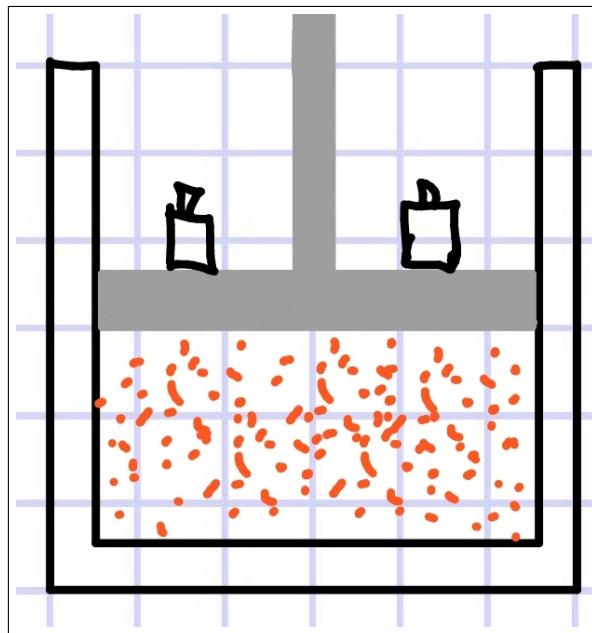
### 6.11.2 Trasformazione quasi-statica

Una **trasformazione quasi-statica** è una trasformazione in cui ogni stato intermedio è uno stato di equilibrio, dove le "cose" sono fatte con "dolcezza" tale da non perturbare ne il sistema ne l'ambiente esterno.

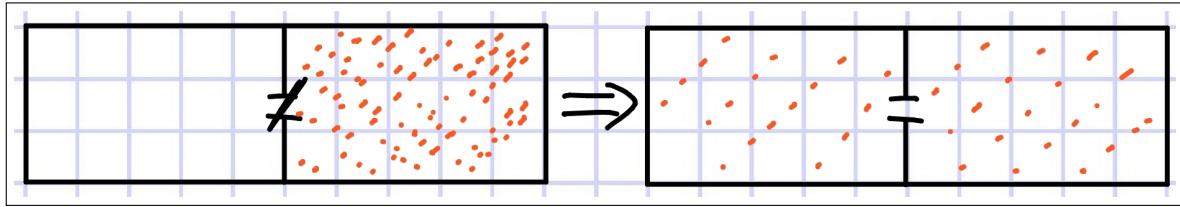
### 6.11.3 Trasformazione reversibile

Una **trasformazione reversibile** è una trasformazione in cui si "può tornare indietro". Per essere reversibile, una trasformazione deve essere quasi statica e non ci devono essere dissipazioni.

**6.11.3.1 Esempio trasformazione reversibile** Supponiamo di avere un contenitore, con del gas all'interno, aperto sopra e nell'apertura è inserito un pistone, supponiamo anche che tra il pistone e le pareti non ci siano perdite. Se ora metto dei pesetti sopra il pistone, riesco a farlo abbassare. Posso assumere che gli infiniti stati intermedi infinitesimi sono in equilibrio, quindi la trasformazione è quasi-statica. Inoltre è una trasformazione reversibile, infatti togliendo i pesetti che ho messo sopra il pistone, il sistema ritorna allo stato in cui era prima di metterci i pesetti.



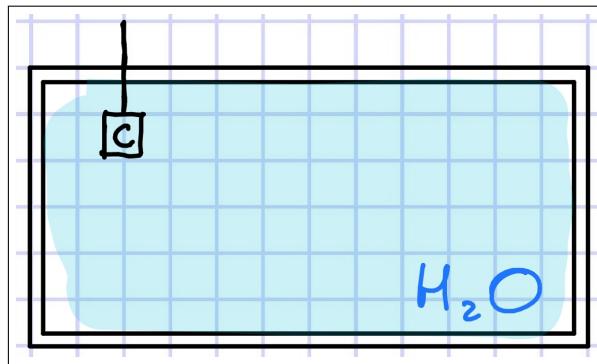
**6.11.3.2 Esempio trasformazione non reversibile** Questo esempio riguarda l'espansione libera dei gas, infatti ho un contenitore adiabatico separato all'interno in due camere con un rubinetto che le collega. All'inizio il rubinetto è chiuso e nella camera destra c'è gas, mentre in quella sinistra il vuoto. Se ora apro il rubinetto ed aspetto un certo tempo, finisco nella situazione in cui il gas si è distribuito nelle due camere. Ora per far si che il gas torni tutto nella camera destra (situazione iniziale) devo aspettare tempo infinito.



#### 6.11.4 Lentezza

Ci riferiamo alla **lentezza** come la caratteristica/velocità di un processo (trasformazione termodinamica) che ci consente di trattare tutti gli stati intermedi come stati di equilibrio e che ci consente di raffigurare la trasformazione come passaggi su infiniti stati intermedi tutti di equilibrio.

### 6.12 Calorimetria



Consideriamo un sistema termodinamico composto da un contenitore adiabatico con all'interno  $H_2O$  a  $T_{H_2O,i}$  ed un corpo  $c$  immerso nell'acqua a  $T_{c,i}$  (analogamente se considero due masse solide a contatto tra loro in un contenitore adiabatico ottengo gli stessi risultati). Aspettando un istante di tempo abbastanza lungo passo dal sistema descritto sopra, ad un sistema in cui l' $H_2O$  e  $c$  hanno la stessa temperatura  $T_*$ , quindi ipotizzando che l' $H_2O$  abbia temperatura inferiore a  $c$  abbiamo che  $T_{H_2O,i} < T_* < T_{c,i}$ . Ora essendo il sistema isolato abbiamo che,

$$Q = 0 \quad AND \quad W = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$$

e quindi,

$$0 = \Delta U = \Delta U_{H_2O} + \Delta U_c \Rightarrow \Delta U_{H_2O} = -\Delta U_c$$

ovvero l'energia interna che l' $H_2O$  "guadagna" la "toglie" dal corpo  $c$ . Osserviamo ora che  $\Delta V = 0$ , ovvero il volume non cambia, e quindi  $\Delta W = 0$  sia per l' $H_2O$  che per  $c$  e quindi ho che,

$$\begin{aligned}\Delta U_{H_2O} &= Q_{H_2O} - W_{H_2O} \\ \Delta U_c &= Q_c - W_c\end{aligned}$$

La variazione di energia interna avviene tutta per cambio di calore, e quindi ora ottengo,

$$\Delta U_{H_2O} = -\Delta U_c \Rightarrow Q_{H_2O} = -Q_c$$

Ora devo capire a che energia corrisponde la variazione di temperatura, questa mi consente di calcolare il lavoro che mi serve per fare aumentare la temperatura dell' $H_2O$ . Questo sarà il calore  $Q_{H_2O}$ , che sarà  $-Q_c$ . Ora ottengo che

$$Q = c_\gamma m \Delta T$$

dove  $c_\gamma$  è il calore specifico.

Osserviamo che questa è una trasformazione non reversibile, infatti devo aspettare infinito tempo per far si che le due temperature tornino ai valori iniziali.

### 6.12.1 Calore specifico

Il **calore specifico** di un corpo è una costante definita come segue,

$$c = \frac{1}{m} \left[ \frac{dQ}{dT} \right]_\gamma$$

La sua unità di misura è quindi  $\frac{J}{kgK}$ .

Osserviamo ora che il calore specifico si cita per una particolare trasformazione, infatti scrivere,

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

oppure,

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$$

sarebbe sbagliato.

Osserviamo ora che il fatto di scambiare calore con l'esterno non implica che ci sia una variazione di temperatura, infatti quest'ultima si ha solo quando varia l'energia interna.

Il calore specifico è utile solo nel caso in cui c'è variazione di temperatura. Per esempio quando l'acqua nel freezer diventa ghiaccio (passaggio di fase), non c'è variazione di temperatura anche se il frigo ha spento energia per ghiacciare l'acqua, quindi c'è scambio di calore ma non ha senso parlare di calore specifico.

Per una qualsiasi trasformazione quasi-statica, da  $P_i$  a  $P_f$ , il calore è definito come segue,

$$Q = \int_{P_i}^{P_f} \delta Q = \int_{P_i}^{P_f} mc_\gamma dT$$

ed in alternativa,

$$Q = C(T_f - T_i)$$

dove  $C$  è la capacità termica.

### 6.12.2 Calorimetro

Il **calorimetro** è un sistema controllato per il quale so connettere la variazione di temperatura al calore ricevuto. Quello dell'esempio precedente (contenitore adiabatico contenente acqua ed un oggetto immerso), è un calorimetro a bagno.

### 6.12.3 Capacità termica

La **capacità termica** è il prodotto tra massa e calore specifico della trasformazione che stiamo considerando, ovvero come segue,

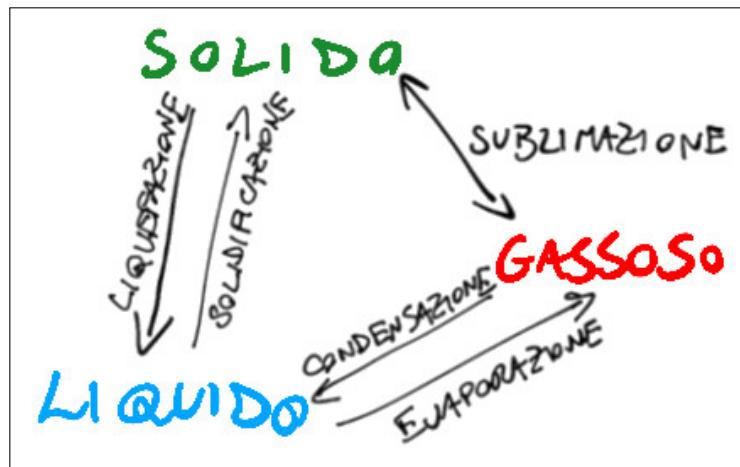
$$C = mc_\gamma$$

## 6.13 Cambi di fase

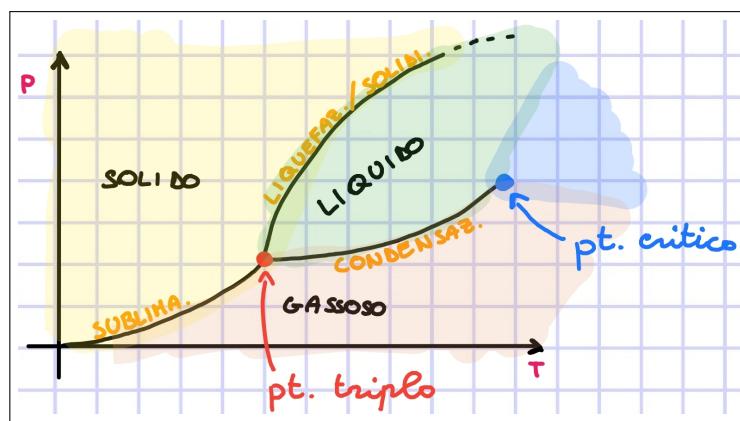
La materia può trovarsi in **3 diversi stati**:

- solido: il corpo ha forma e volume propri;
- liquido: il corpo ha un volume proprio ma assume la forma del recipiente che lo contiene;
- gassoso: il corpo, molto spesso aeroforme, assume forma e volume del recipiente che lo contiene;

Sotto certe condizioni, un corpo può passare da uno stato all'altro, questo passaggio, in base agli stati iniziale e finale, ha doversi nomi:



Quando si parla di termodinamica, le "scale di misura" importanti sono volume, **pressione e temperatura**, se prendiamo le ultime 2 e le rappresentiamo su un piano cartesiano otteniamo quello che viene detto **diagramma di fase**:



Ovviamente varia da materiale a materiale, ma sostanzialmente la forma è quella. Prendendo ad esempio l'acqua, in corrispondenza di  $T = 273,16K$  e  $P = 611Pa$  abbiamo quello che si definisce **punto triplo**, ovvero quel punto in cui le **3 linee di demarcazione si intersecano**. In questo punto, i 3 stati possono coesistere contemporaneamente (in rosso nell'immagine)! È particolarmente importante perché **definisce la scala di temperatura**. Un altro punto particolarmente importante è quello che viene definito **punto critico**, ovvero il punto in cui **finisce la linea di demarcazione tra liquido e gas**. In particolare, oltre quel punto, gli stati gassoso e liquido non sono più distinguibili (fluido supercritico).

### 6.13.1 Calori latenti

Immaginiamo di voler far passare dell'acqua dallo stato liquido a quello gassoso: osservando il diagramma di fase, possiamo notare che per farlo potremmo far variare la pressione, mantenendo la temperatura stabile, oppure modificare la temperatura mantenendo la pressione stabile (oppure anche modificare entrambe ovviamente). Se decidessimo di mantenere la temperatura stabile, e quindi spostarci solo sull'asse P, potremmo notare che per mantenere la temperatura effettivamente stabile **dobbiamo fornire calore al sistema!** Il passaggio da liquido a gassoso, in genere, **ha bisogno di assorbire calore dall'ambiente circostante per effettuare il cambio di fase.** Allo stesso modo, se passassimo da gassoso a liquido dovremmo **assorbire noi calore** per poter mantenere la temperatura stabile.

In particolare, questo "calore che non fa variare la temperatura", definito **calore latente di fusione/evaporazione/...**, è proporzionale alla massa dell'oggetto sottoposto al cambio di fase, in particolare la formula è:

$$Q_\lambda = \lambda * m$$

Il parametro importante di questa formula è il  $\lambda$ , ovvero la **costante di calore latente** e varia da materiale a materiale e, soprattutto, in base alla temperatura alla quale si trova il corpo sottoposto al cambio di fase. Facciamo alcuni esempi con l'acqua:

$$\lambda_{fusione} = 3,3 * 10^5 \frac{J}{Kg} \iff 273,16K \quad \lambda_{evaporazione} = 22,6 * 10^5 \frac{J}{Kg} \iff 373,16K$$

Idealmente, se andiamo verso lo stato solido (nel diagramma di fase saliamo verso l'alto sull'asse della pressione) è **il cambio di fase a darci calore** (siamo noi che dobbiamo assorbirlo), quindi abbiamo:

$$Q_\lambda = -\lambda * m$$

Se invece andiamo verso lo stato gassoso (nel diagramma di fase sceniamo verso il basso sull'asse della pressione) siamo **noi che dobbiamo dare calore al cambio di fase** (è il cambio di fase che lo assorbe), quindi abbiamo:

$$Q_\lambda = +\lambda * m$$

Nota che facciamo questo discorso (noi che forniamo calore, noi che assorbiamo calore). I **calori latenti** sono molto interessanti in quanto sono uno dei pochi casi in cui **abbiamo uno scambio di calore senza un'effettiva variazione di temperatura**.

**6.13.1.1 Esempio** Facciamo un veloce esercizio: *abbiamo 1 litro di acqua liquida ad una temperatura di 273,16 K, quanto calore dobbiamo fornire/sottrarre dal sistema per solidificare l'acqua mantenendo la temperatura costante?*

Allora, la prima cosa da notare è che **da liquido vogliamo passare a solido**, quindi la costante che ci interessa sarà **quella della fusione "al contrario"**. Avremmo allora:

$$Q_\lambda = \lambda_{solidificazione} * m = -\lambda_{fusione} * m$$

Ora, un altro problema è che noi abbiamo **litri** di acqua, non chili. Ricorda che i **i litri sono un'unità di misura del volume**, quindi ci basta semplicemente **moltiplicare il volume per la densità dell'acqua** (in particolare  $1 \frac{Kg}{dm^3}$ , aka.  $1 \frac{Kg}{l}$ , infatti  $1\text{litro} = 1dm^3$ ). Tornando a noi, avremmo:

$$\begin{aligned} Q_\lambda &= -\lambda_{fusione} * m \\ &= -\lambda_{fusione} * \delta_{H2O} * V_{H2O} \\ &= -3,3 * 10^5 \frac{J}{Kg} * 1 \frac{Kg}{l} * 1l \\ &= -3,3 * 10^5 J = -330KJ \end{aligned}$$

### 6.13.1.2 Esempio temperatura di equilibrio

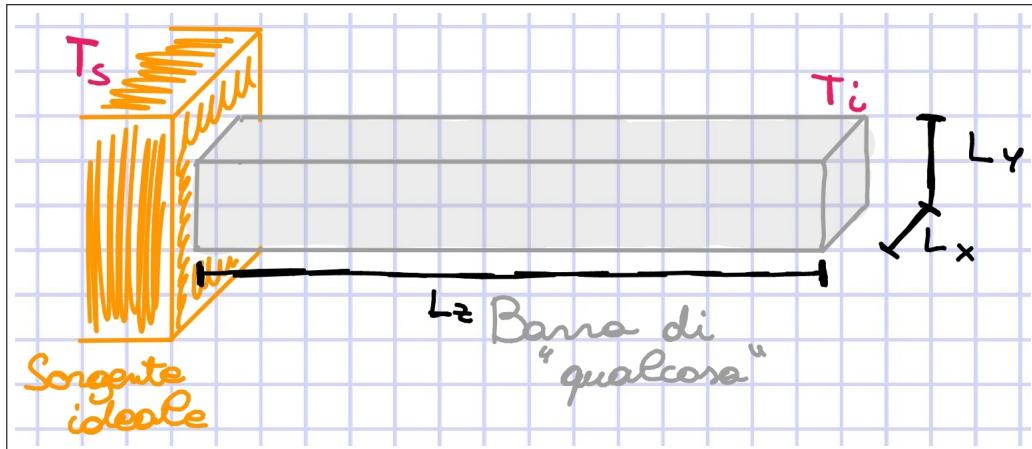
## 6.14 Trasferimento di calore

Iniziamo col ricordare che il calore non è altro che "*energia in movimento*": fisicamente parlando, un corpo **non ha calore**, ma **ha energia** (ricordalo per l'orale :P). Detto ciò, introduciamo i 3 principali metodi per il trasferimento del calore:

- conduzione;
- convezione;
- irraggiamento;

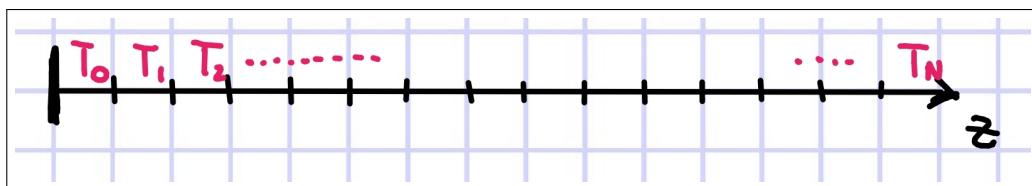
### 6.14.1 Conduzione

Ovvero il **trasferimento di energia tramite contatto**, immaginamo di avere una barra di "*qualsiasi cosa*" collegata ad una **sorgente di calore ideale** (definiamo sorgente di calore ideale un *corpo ideale capace di fornire/assorbire calore all'infinito*):



La barra inizialmente si trova ad una sua **temperatura iniziale**  $T_i$ , mentre la sorgente si trova costantemente ad una **temperatura**  $T_s$ . Supponendo che le dimensioni  $L_x$  ed  $L_y$  della barra (la sua sezione trasversale) siano **trascurabili**, possiamo immaginarla di **dividerla in tratti infinitesimali** per lunghezza. Se lasciamo scorrere il tempo, i **tratti vicini alla sorgente cambieranno la loro temperatura**, avvicinandosi (fino a raggiungere)  $T_s$ . Dopo un certo tempo, avremmo che **tutta la barra raggiungerà la temperatura**  $T_2$ .

Come facciamo a quantificare il tutto? Come detto prima, immaginiamo di dividere la barra in molte sezioni trasversali:



Ora, possiamo notare diverse "proporzionalità":

- $Q \propto \Delta T$ : il calore assorbito dalla barra è **proporzionale alla differenza di temperatura tra le sue sezioni trasversali**;
- $Q \propto \Delta t$ : il calore assorbito dalla barra è **proporzionale al tempo per cui resta a contatto con la sorgente ideale** (più tempo resto a contatto e più calore assorbo);
- $Q \propto S$ : il calore assorbito dalla barra è **proporzionale alla superficie di contatto tra la barra e la sorgente** (più superficie ho a contatto con la sorgente e più calore assorbo);

Se consideriamo tratti infinitesimi possiamo ricavare la **legge di Fourier**, ovvero:

$$dQ = -K * \frac{dT}{dz} * dS * dt$$

Analizziamola un po': sostanzialmente ci sta dicendo che la *quantità infinitesima di calore assorbito dalla barra* (e quindi sottratto alla sorgente, per quello il segno -) è *proporzionale alla differenza di temperatura per unità di lunghezza* ( $\frac{\Delta T}{dz}$ ), *alla superficie trasversale della barra* ( $dS$ ) e *al tempo di contatto* ( $dt$ ). Tutto ciò è regolato da una costante di proporzionalità ( $K$ , nota che è DIVERSA dal Kelvin) che rappresenta la **conducibilità del materiale**.

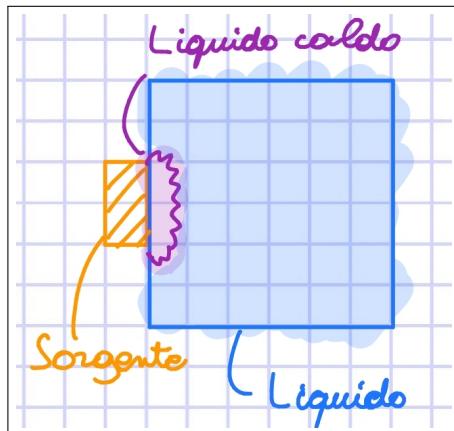
**6.14.1.1 La costante di conducibilità** Se ci rigiriamo un po' la formula di Fourier, possiamo facilmente notare che l'unità di misura di questa costante corrisponde a  $\frac{[energ]}{[lung]*[temp]*[temperat]}$ , in particolare avremmo  $\frac{J}{ms^2K}$ . Più è grande questa costante e più facilmente il nostro materiale condurrà calore, vediamo qualche esempio:

- alluminio:  $200 \frac{J}{ms^2K}$ , buon conduttore di calore;
- sughero:  $0,04 \frac{J}{ms^2K}$ , cattivo conduttore di calore

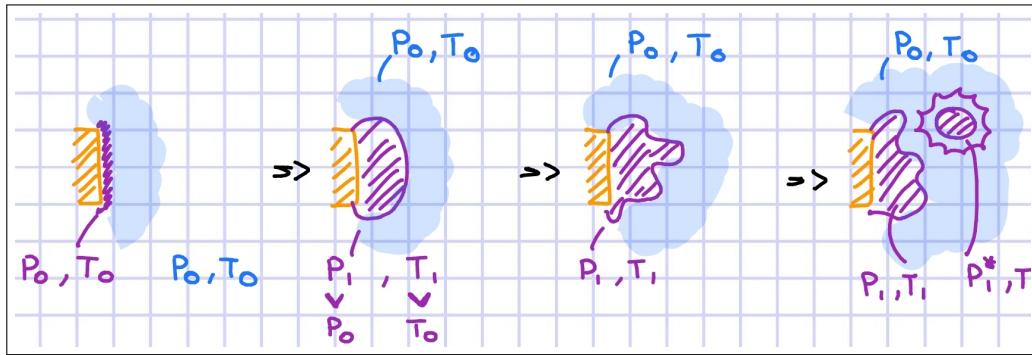
Nota che, la maggior parte delle volte, i buoni conduttori di calore sono anche buoni conduttori di energia elettrica (quindi i metalli).

## 6.14.2 Convezione

Il metodo di trasferimento del calore principale quando si parla di liquidi e di atmosfera. Non lo trattiamo approfonditamente (dato che i meccanismi algebrici che lo riguardano sono molto complessi), ma lo vediamo velocemente comunque. Supponiamo di essere in questa situazione:



Abbiamo una sorgente a contatto con un liquido più freddo. Ora, vediamo cosa succede se alziamo la temperatura della sorgente e aspettiamo un certo tempo (non specificato, un tempo generico):



Consideriamo diversi momenti:

1. partiremo in un momento in cui tutto il liquido (sia a contatto con la sorgente che non) è alla **stessa pressione  $P_0$  e temperatura  $T_0$** ;
2. col passare del tempo, il liquido a contatto con la sorgente **inizia a scaldarsi** e ciò comporta un **aumento della sua pressione** (al momento prendi per buono);
3. dato che la pressione  $P_1 > P_0$ , allora il liquido caldo **inizia ad espandersi in maniera irregolare**;
4. dato che l'espansione è irregolare, può succedere che **bolle calde si "staccano" dalla sorgente** ed iniziano a "fluttuare" nel liquido freddo, **permettendo ad altro liquido freddo di scaldarsi con la sorgente**. Un'altro punto importante è che **anche la bolla calda scalderà il liquido freddo!**

Concludendo, l'idea è che, con il passare del tempo, il numero di bolle calde che navigano nel fluido continua ad aumentare finché **tutto il fluido non arriverà alla temperatura della sorgente**.

### 6.14.3 Irraggiamento

Ogni corpo emette delle **onde elettromagnetiche**, queste non sono altro che **fasci di energia pura**: trasferendo energia possiamo trasferire calore! Ora, la formula che regola questo fenomeno è la **legge di Stefan-Boltzmann**, ovvero:

$$\epsilon = \sigma * e * T^4$$

In particolare abbiamo che:

- $\epsilon$ : l'energia emessa da un corpo;
- $\sigma$ : la **costante di Stefan-Boltzmann**, vale  $\sigma = 5,67 * 10^{-8} \frac{J}{m^2 * s * K^4}$ ;
- $e$ : emissività del corpo, possiamo vederla anche come la capacità del corpo di riflettere le onde elettromagnetiche. Vale un valore  $\in [0, 1]$ , dove 1 identifica un corpo NERO;
- $T^4$ : la temperatura <sup>4</sup> del corpo che consideriamo.

Se analizziamo l'unità di misura di questa quantità  $\epsilon$  vediamo che corrisponde a  $\frac{J}{m^2 * K}$ , in altre parole  $[\epsilon] = [\frac{E}{L^2 * T}]$ , ovvero Energia su Lunghezza<sup>2</sup>\*Temperatura. Nota che tutti i corpi emettono queste onde elettromagnetiche, un esempio interessante (e soprattutto che potrebbe tornare all'esame) è quello della **costante solare**, ovvero la quantità di energia "irraggiata" dal sole. Identifichiamo questa quantità (così come un sacco di altre cose che non centrano niente, quindi ATTENZIONE) con la lettera  $c$  e la chiamiamo **costante solare**. In particolare, vale (mediamente):

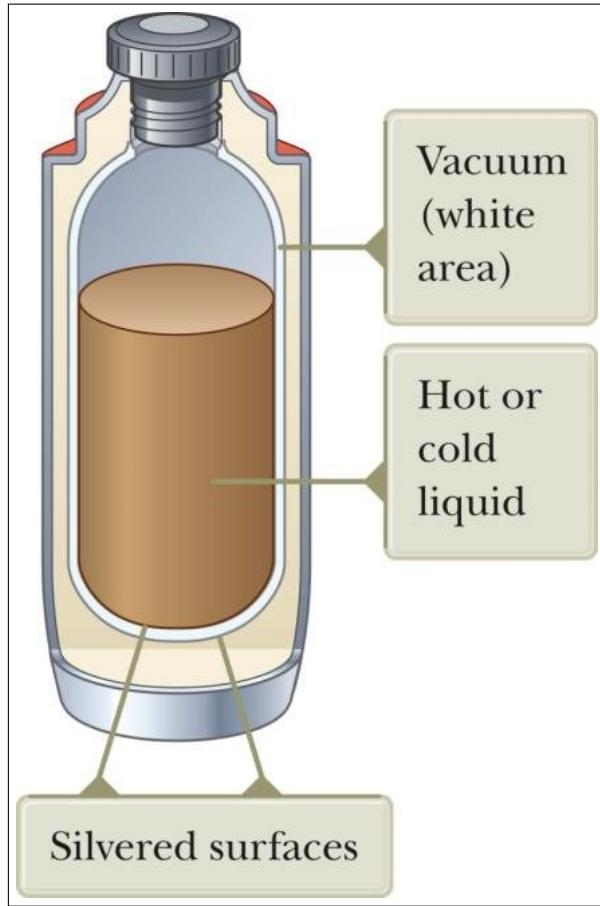
$$c = 1367 \frac{J}{m^2 * s} = 1367 \frac{W}{m^2}$$

Una piccola nota conclusiva: è abbastanza improprio considerare l'irraggiamento come forma di trasmissione del calore "normale", infatti **non c'è un vero e proprio trasferimento meccanico del calore**

### 6.14.3.1 Esercizio con costante solare

### 6.14.4 Contenitore adiabatico

Ora che conosciamo i vari metodi per il trasferimento di calore, possiamo porci il quesito "**come costruire un contenitore veramente adiabatico**" (isolante)? Uno dei metodi possibili è quello del *vaso Dewar*, che possiamo schematizzare in questo modo:



Per evitare tutti i tipi di trasferimento di calore, il contenitore deve avere diverse caratteristiche, in particolare:

1. essere a tenuta stagna, in modo da **evitare la convezione**;
2. avere uno "strato di vuoto" il più vicino al liquido da mantenere a temperatura, in modo da **evitare la conduzione**;
3. avere delle pareti **riflettenti** (Dewar usava delle pareti argenteate) in modo da **evitare l'irraggiamento**. Nota che le pareti devono essere riflettenti **sia verso l'esterno** (per riflettere le onde dell'ambiente esterno) **sia verso l'interno** (in modo da impedire al liquido di disperdere il suo calore).

## 6.15 Gas ideali

I gas sono un sistema termodinamico composto da un **gran numero di molecole libere di muoversi nello spazio**. Noi consideriamo i cosiddetti "**gas ideali**", ovvero quei gas per cui valgono le seguenti condizioni:

- gli elementi che compongono il gas **non interagiscono tra di loro in alcun modo**;
- gli elementi che compongono il gas **hanno volume nullo** (li approssimiamo come dei punti materiali, infatti, rispetto a loro, il contenitore che le contiene è infinitamente grande [di solito]);
- **non ci sono reazioni chimiche** tra le componenti del gas o col contenitore.

Come si intuisce dal nome, i **gas ideali** (in quanto ideali) **sono impossibili**, però sono una **buona approssimazione per quei gas a bassa pressione** (in genere  $< 100\text{atm}$ ).

### 6.15.1 Le variabili principali

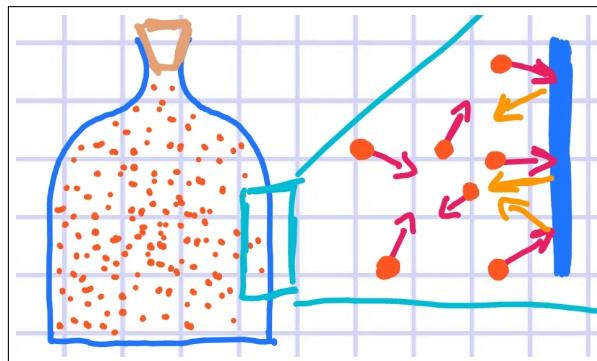
Per descrivere i gas, usiamo principalmente **3 variabili**:

- volume ( $V$ );
- pressione ( $P$ );
- temperatura ( $T$ );

Analizziamole velocemente:

**6.15.1.1 Volume** La più semplice delle 3: quando parliamo di gas supponiamo che **questo sia contenuto in un qualche contenitore**, questo contenitore **"contiene" una porzione di spazio** che rappresenta appunto il volume. Nota che, se non diversamente specificato, supponiamo che il gas **occupi tutto il volume a sua disposizione**. Il volume si misura come una **lunghezza al cubo** ( $L^3$ ), in particolare il **metro<sup>3</sup>** oppure il **litro** (che corrisponde a un  $\text{dm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$ ).

**6.15.1.2 Pressione** Il fatto che il gas occupi tutto lo spazio a sua disposizione implica che **sarà a contatto col contenitore che lo contiene**. Inoltre, le molecole del gas sono in costante movimento quindi ci saranno **degli urti tra il contenitore e le molecole del gas**: ciò darà origine ad una forza che premerà sul contenitore.



Formalizzando il tutto, ogni molecola del gas si muove liberamente nel contenitore con una **certa velocità  $v$**  ed ha anche una **certa massa  $m$** . Possiamo quindi dire che **ogni molecola ha una certa quantità di moto  $m * v = p$** . Ora, quando le molecole urtano il contenitore avviene **un urto perfettamente elastico** tra la molecola e la parete del contenitore. C'è da notare che la massa della molecola ( $m$ ) è **infinitesimale** rispetto alla massa della parete del contenitore ( $m_{parete}$ ), quindi potremmo dire che c'è

una specie di "**inversione del moto**". Questa variazione della quantità di moto  $\Delta p$  avviene in un certo tempo  $\Delta t$  e sappiamo che non è nulla, quindi abbiamo **una forza impulsiva!**

$$\frac{m * \vec{v}_i - m * \vec{v}_f}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} \neq \vec{0}$$

Questo per ogni singola molecola, se però sommiamo le forze impulsive di tutte le molecole del gas otteniamo una forza (ortogonale alla parete del contenitore) non trascurabile. Se poi andiamo a considerare la **forza ortogonale per unità di superficie** otteniamo proprio la **pressione!** In particolare:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$

Dimensionalmente, ci troviamo con una Forza fratto una Superficie, avremmo quindi:

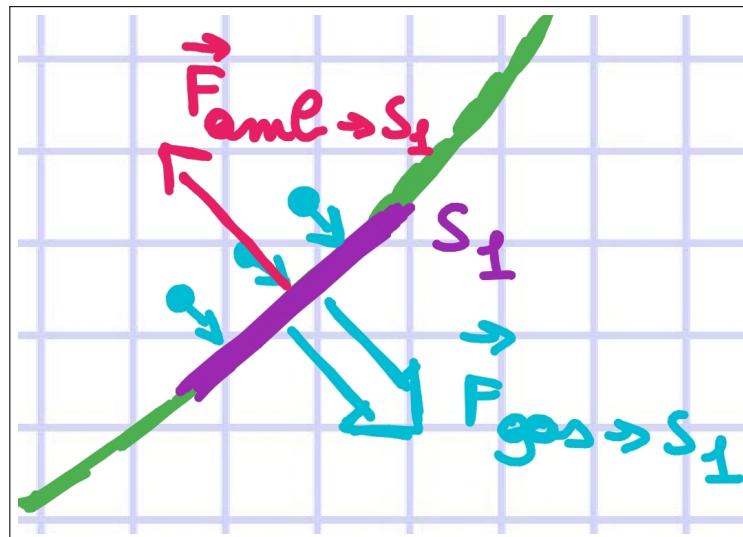
$$[p] = \frac{[F]}{[L^2]} = \frac{N}{m^2} = \textcolor{red}{\text{Pascal}} = \textcolor{red}{\text{Pa}}$$

L'unità di misura fondamentale della pressione è il Pascal, esistono poi delle "derivate", in particolare citiamo:

$$\textcolor{red}{bar} = 10^5 \textcolor{red}{Pa}$$

$$\textcolor{red}{atmosfera} = \textcolor{red}{atm} = 1,013 \textcolor{red}{bar}$$

Terminiamo la pressione con una precisazione per quanto riguarda i **gas in equilibrio**. Immaginiamo di avere una situazione di questo tipo:

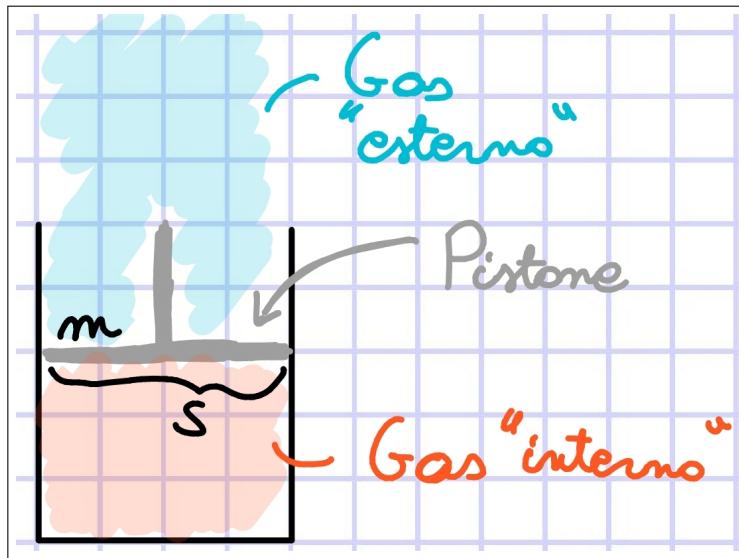


Una supposizione importante per capire questo "esempio" è che il contenitore (in verde) possa, volendo, espandersi all'infinito. Ora, abbiamo detto che le molecole del gas all'interno del contenitore, scontrandosi con le sue pareti, creano una forza (che noi chiamiamo **pressione**) che spinge verso l'esterno. Se prendiamo ad esempio un palloncino e lo gonfiamo, notiamo che inizia ad **aumentare di volume**. Ad un certo punto però **si ferma**. Ciò avviene perché si è raggiunto uno **stato di equilibrio**, ovvero abbiamo la forza della pressione che spinge verso l'esterno ma c'è anche una forza uguale ma opposta che bilancia la pressione. Nel caso del palloncino, questa è la **risultante della somma tra forza elastica del pallone ( $\vec{F}_{gas->S_1}$ ) e pressione dell'ambiente esterno** che preme sul pallone dall'esterno verso l'interno ( $\vec{F}_{amb->S_1}$ ). Se noi "estremizziamo" questo esempio e togliamo la forza elastica del pallone, abbiamo che

il pallone smette di crescere solo quando la **forza del gas che preme sulla superficie è uguale alla forza dell'ambiente che preme sulla superficie**, ovvero:

$$\vec{F}_{amb \rightarrow S_1} = -\vec{F}_{gas \rightarrow S_1} \Rightarrow \frac{F_{\perp,a}}{S_1} = \frac{F_{\perp,g}}{S_1} \Rightarrow P_a = P_g$$

Questa equazione in **rosso** è molto importante per i **sistemi in equilibrio**. Di fatto, la parete del contenitore trasmette meccanicamente le forze dall'interno verso l'esterno e vice versa. Possiamo quindi pensare di "togliere virtualmente" la parete e fare dei confronti tra i 2 gas. In molti casi, infatti, non possiamo direttamente misurare la pressione dei gas che ci interessano, però, se questi si trovano in equilibrio con l'ambiente esterno, possiamo calcolarla considerando la pressione dell'ambiente esterno! Ad esempio:



Abbiamo un pistone che preme del gas contenuto in un contenitore a tenuta stagna. Di questo pistone conosciamo la **massa** ( $m$ ) e la **superficie** ( $S$ ), come facciamo a calcolare la pressione del gas in rosso? Se il sistema si trova in uno stato di equilibrio, ovvero il pistone è fermo e non scende (comprimendo ulteriormente il gas), possiamo dire che la pressione del gas rosso è **uguale alla pressione dell'ambiente esterno**, ovvero:

$$\begin{aligned} P_{ambiente} &= P_{atmosferica} + P_{pistone} \\ &= P_{atmosferica} + \frac{F_{pesoPistone}}{S} \\ &= P_{atmosferica} + \frac{m * g}{S} \end{aligned}$$

Concludendo, dato che la pressione del gas rosso è uguale alla pressione dell'ambiente esterno (perchè il sistema è in equilibrio), abbiamo che  $P_{gasRosso} = P_{atmosferica} + \frac{m*g}{S}$ !

**6.15.1.3 Temperatura** La temperatura è **fortemente legata all'energia interna del gas**. Possiamo vedere l'energia interna del gas come la **somma dell'energia cinetica di ogni molecola del gas** ( $\frac{1}{2}mv^2$ ). Per quanto riguarda le unità di misura, abbiamo già detto prima che utilizziamo il **Kelvin (K)** e, in alcuni casi, i gradi *Celsius* ( $^{\circ}C$ ) o *Fahrenheit* ( $^{\circ}F$ )

## 6.15.2 Equazione di stato dei gas ideali (o perfetti)

Introduciamo ora l'**equazione di stato** di questi gas ideali, prima però una veloce definizione (tratta da Wikipedia) di equazione di stato:

*In termodinamica e chimica fisica, una equazione di stato è una legge costitutiva che descrive lo stato della materia sotto un dato insieme di condizioni fisiche. Fornisce una relazione matematica tra due o più variabili di stato associate alla materia, come temperatura, pressione, volume o energia interna.*

In pratica, è una funzione ( $= 0$ ) che ci descrive il comportamento del nostro gas in base alla variazione delle variabili termodinamiche che consideriamo. Come detto prima, per i gas usiamo come variabili **pressione**, **volume** e **temperatura**, dato che sono 3 rappresentiamo il tutto in un **diagramma bidimensionale** ( $3 - 1$ , infatti se avessimo  $N$  variabili dovremmo usare una dimensione  $N - 1$ , questo perché, di solito, siamo interessati a scoprire il valore di una particolare variabile date le altre). In particolare, per i gas l'equazione di stato è:

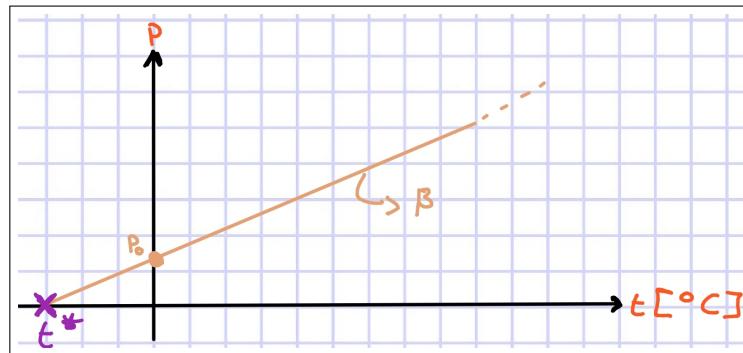
$$p * V - nRT = 0$$

Questa equazione la si ottiene basandosi sui risultati di 3 (o meglio 4) leggi, vediamole.

**6.15.2.1 Legge isocora di Gay-Lussac** Se noi teniamo il **volume costante** ( $V = \text{const}$ , isocora), abbiamo che pressione la corrisponde a:

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

Dove  $p_0$  corrisponde alla pressione ad una temperatura di **0 gradi Celsius**. Se noi rappresentassimo questa equazione sul piano cartesiano in funzione della temperatura, otterremo qualcosa del genere:

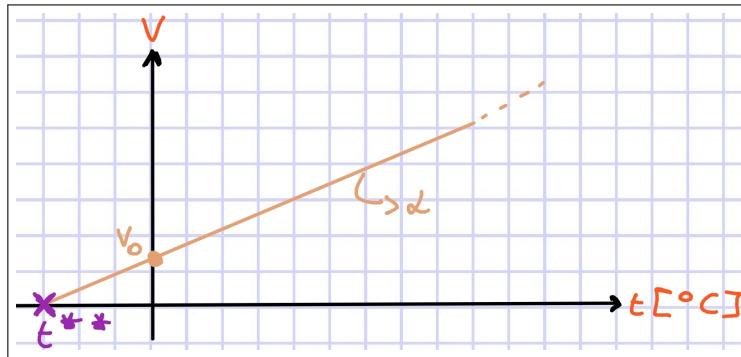


Nota come la retta è crescente, questo implica che, per qualche valore di temperatura ( $t^*$ ), avremmo **pressione = 0**, e ciò è particolarmente interessante! Idealmente, più è bassa la temperatura e, a parità di volume, la pressione si abbassa: però la pressione **non può essere negativa!** Su questo punto ci torneremo in seguito;

**6.15.2.2 Legge isobara di Gay-Lussac** Se noi teniamo la **pressione costante** ( $p = \text{const}$ , isobara), abbiamo che il volume in funzione della temperatura corrisponde a:

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

Dove  $V_0$  corrisponde al volume ad una temperatura di **0 gradi Celsius**. Se noi rappresentassimo questa equazione sul piano cartesiano in funzione della temperatura, otterremo qualcosa del genere:

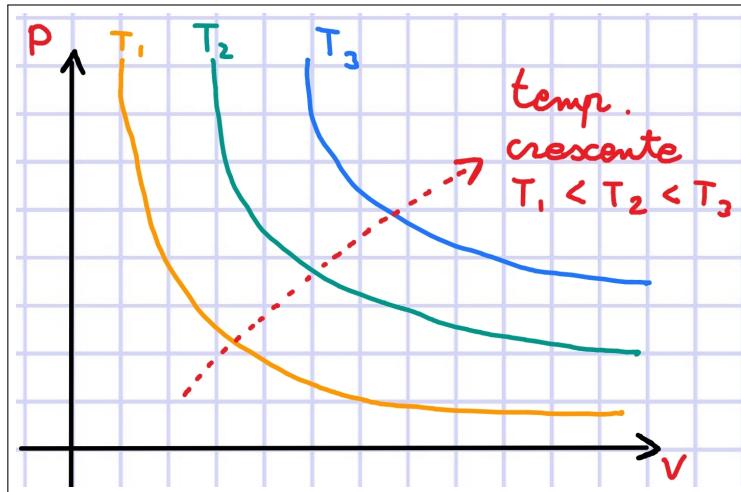


Nota come la retta è crescente, questo implica che, per qualche valore di temperatura ( $t^{**}$ ), avremmo **volumen = 0**, e anche questo è particolarmente interessante! Idealmente, più è bassa la temperatura e, a parità di pressione, il volume si abbassa: però il volume **non può essere negativo!** Cosa ancora più interessante,  $t^* = t^{**}$  (i 2 punti sono uguali)! Dopo ci torneremo più in dettaglio;

**6.15.2.3 Legge isoterna di Boyle** A parità di temperatura, il **prodotto  $p * V$  resta costante!**  
Ovvero:

$$p_i * V_i = p_f * V_f = \text{const}$$

In soldoni, se tengo la temperatura costante e abbasso la pressione, il volume **aumenta per compensare e viceversa**. Se prendiamo questa equazione e la rappresentiamo su un grafico bidimensionale, otteniamo un'iperbole equilatera:



**6.15.2.4 Legge di Avogadro** Gas diversi nelle stesse condizioni di temperatura, pressione e volume **contengono lo stesso numero di oggetti (N)**. In particolare, abbiamo che:

$$N = \frac{1}{K_B} \frac{pV}{T}$$

Dove  $K_B$  rappresenta la **costante di Boltzmann** ( $K_B = 1,38 * 10^{-23} \frac{J}{K}$ ). Da dove deriva la sua unità di misura? Se controlliamo l'equazione precedente, abbiamo che  $N$ , ovvero il numero di "molecole" del gas (adimensionale) è (tralasciando  $K_B$ ) uguale al  $\left[ \frac{pV}{T} \right] = \left[ \frac{\frac{F}{L^2} * L^3}{T} \right] = \left[ \frac{F * L}{T} \right] = \left[ \frac{E}{T} \right] = \left[ \frac{J}{K} \right]$  ricorda che, per definizione, **una forza per uno spostamento è un'energia** (che ha unità di misura Joule). Dato che dobbiamo "semplificare" queste unità di misura per rendere il tutto adimensionale, la costante di Boltzmann

avrà come unità di misura  $\frac{J}{K}$ ! Molto spesso però, ci troveremo a lavorare con il **numero di moli**  $n$  invece che con il numero esatto di elementi  $N$ . Possiamo quindi modificare la formula precedente in questo modo:

$$n = \frac{1}{R} \frac{pV}{T}$$

Sappiamo infatti che le moli  $n = \frac{N}{N_A}$  (ricorda che il *numero di Avogadro*  $N_A = 6,022 * 10^{23}$ ), quindi ci basta **divedere da entrambe le parti per  $N_A$** . Infatti  $R$  corrisponde proprio a  $R = \frac{1}{k_B * N_A} \approx 8,314 \frac{J}{K * mol}$ . Concludiamo con un po' di numeri, supponiamo di avere un gas con queste caratteristiche:

$$n = 1 \text{ mol}$$

$$p = 1 \text{ atm}$$

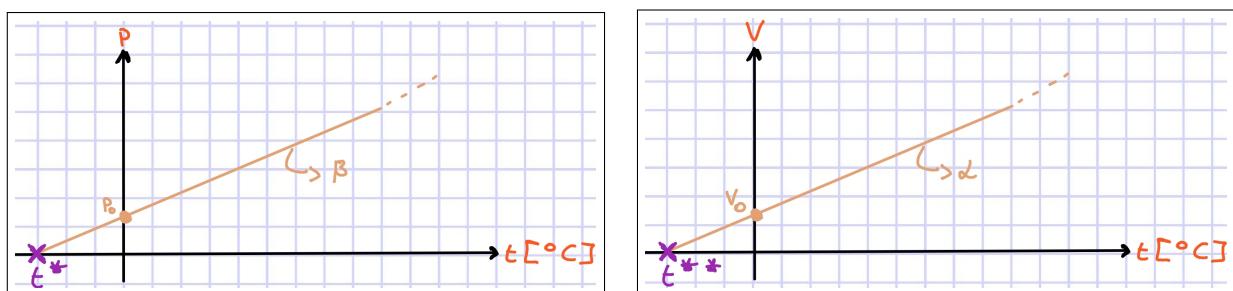
$$t = 0^\circ C \Rightarrow 273,16 K$$

Allora il suo volume è fissato, e vale:

$$V = 22,414 \text{ dm}^3 = 22,414 \text{ l}$$

Questo viene definito **volumen molare**.

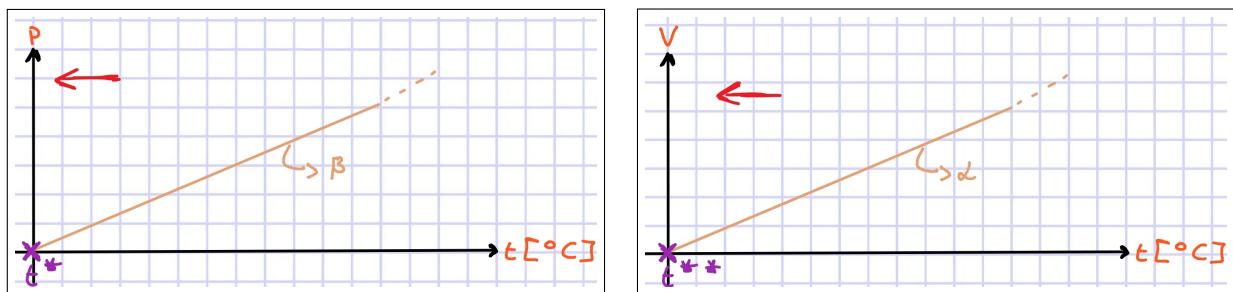
**6.15.2.5 Mettiamo tutte le leggi insieme** L'equazione di stato dei gas si ottiene **mettendo insieme le 4 leggi viste prima**, cominciamo da quelle di *Gay-Lussac*:



Avevamo questi 2 grafici, ovviamente la retta dipende dal gas: per gas diversi otterremo rette diverse. La cosa interessante però è che i punti  $t^*$  e  $t^{**}$  **puntano allo stesso valore di temperatura!** Questo succede indipendentemente dal valore di  $\alpha$  e  $\beta$  (che dipendono dal tipo di gas, dal contenitore, ...). Prendendo 2 misurazioni (2 punti sul grafico) siamo capaci di tracciare la retta associata e stimare questa temperatura. Col tempo, siamo arrivati ad un'ottima approssimazione, ovvero:

$$t^* = t^{**} = t_0 = -273,15^\circ C = 0 K$$

L'idea ora è quella di fare una cosa del genere:



Ovvero **sostituiamo il sistema di riferimento**, in modo da usare il **sistema di riferimento assoluto per la temperatura** (i gradi Kelvin appunto). Se facciamo cos', le equazioni delle leggi fondamentali

cambiano leggermente, in particolare:

$$\begin{cases} \text{gay - lussac : } p = p_0(1 + \beta t) \\ \text{gay - lussac : } p = V_0(1 + \alpha t) \\ \text{boyle : } p_i * V_i = p_f * V_f = \text{const} \\ \text{avogadro : } n = \frac{1}{R} \frac{pV}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{gay - lussac : } p = p_0\beta T \\ \text{gay - lussac : } p = V_0\alpha T \\ \text{boyle : } p * V = \text{const} \\ \text{avogadro : } \frac{pV}{T} = nR \end{cases}$$

Il significato resta sempre lo stesso, le stiamo solo considerando con la scala della temperatura assoluta. Questa formulazione delle **leggi sperimentali** ci permette di capire che questi sono solo dei "casi particolari" di una formulazione più generica, che è proprio la nostra **equazione di stato dei gas ideali**:

$$pV = nRT$$

Ricorda che questa equazione vale **solo per gli stati di equilibrio del nostro sistema termodinamico!** Un'altra cosa interessante da notare è che l'equazione di stato è uguale all'equazione di Avogadro: in realtà la formulazione della legge di Avogadro non è esattamente quella data. Nell'originale ci sono delle costanti moltiplicative che la rendono effettivamente diversa dall'equazione di stato. Al momento però ce la facciamo andare bene così.

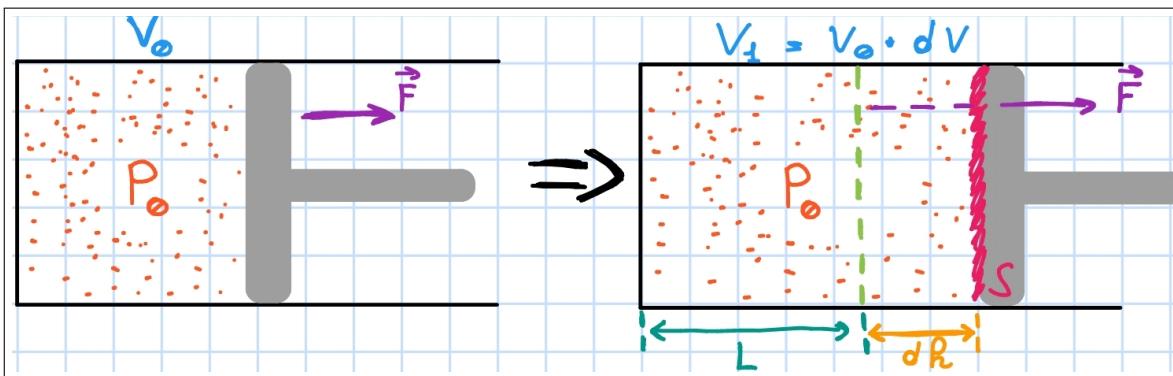
### 6.15.2.6 Esempio

#### 6.15.3 Lavoro dei gas

In questa parte è importante **ricordare la prima legge della termodinamica**:

$$\Delta U = Q - W$$

Ora, immaginiamo di essere in una situazione in cui c'è un gas che si espande:



Partiamo con un gas a volume  $V_0$  e a pressione  $p_0$ , ora supponiamo che si faccia un **incremento infinitesimale del volume**, passando al volume  $V_1 = V_0 + dV$ , mantenendo una pressione  $p_0$  costante. Come calcoliamo il lavoro infinitesimale ( $dW$ ) compiuto con questo incremento di volume? Sappiamo che **il lavoro corrisponde a Forza \* Spostamento** ( $dW = \vec{F} * d\vec{s}$ , volendo possiamo togliere anche il simbolo del vettore, dato che tutto avviene sullo stesso asse). Possiamo fare un po' di passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} * d\vec{s} \\ \text{Sostituiamo i parametri} &= F * dh \\ \text{Moltiplichiamo e dividiamo per la Superficie} &= \frac{F}{S} * Sh \\ \text{Abbiamo che } \frac{F}{S} &= \text{pressione e } S * dh = L^2 * L = \text{volume} &= p * dV \end{aligned}$$

Questo ragionamento vale solo per **lavori infinitesimi** e, quindi, per **spostamenti infinitesimi**: cosa succede quando abbiamo spostamenti più grandi? "Semplicemente" facciamo l'integrale di tutti i lavori infinitesimi! In particolare:

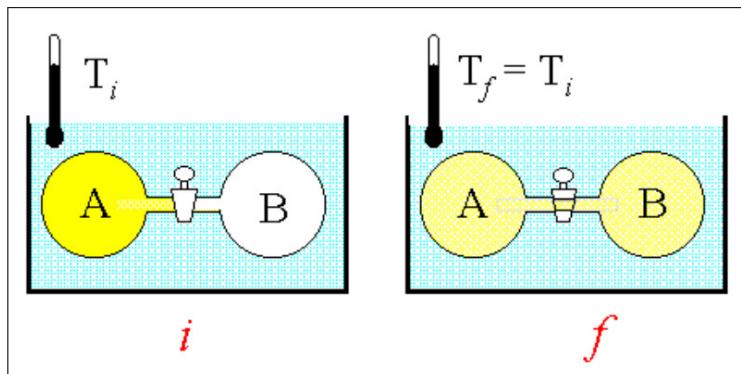
$$\int_i^f dW = \int_i^f p(v) * dV$$

Nota come **la pressione dipende dal volume**: nell'esempio prima potevamo mettere che la pressione restasse costante dato che la variazione di volume è infinitesima, ma nel caso in cui abbiamo una variazione maggiore dobbiamo tenerne conto! Il messaggio da portare a casa è che **il gas compie del lavoro quando cambia di volume!**

#### 6.15.4 Energia interna dei gas

Diciamolo subito: **l'energia interna di un gas dipende SOLO dalla sua temperatura**. Possiamo arrivare a questa conclusione con diversi metodi, vediamoli.

**6.15.4.1 Esperimento dell'espansione libera del gas** A questo punto è molto importante citare l'esperimento dell'espansione libera di Joule:



In questo esperimento abbiamo un vaso Dewar che contiene un liquido, in questo liquido sono immerse 2 camere: una contiene del gas, l'altra il vuoto. Nota che il liquido è in equilibrio termico col gas. Queste camere sono collegate da un piccolo passaggio, inizialmente chiuso, e sono fatte di un materiale che **conduce calore**. Ad un certo punto **apriamo il passaggio tra le 2 camere**, permettendo al gas di passare nella camera vuota. Dopo questa **espansione libera del gas** "succedono delle cose", in particolare:

$$\begin{array}{ll} V_i < V_f & \text{Il volume occupata dal gas aumenta (occupa entrambe le camere)} \\ p_i > p_f & \text{La pressione del gas diminuisce (stessa quantità in volume maggiore)} \end{array}$$

$$T_i \approx T_f$$

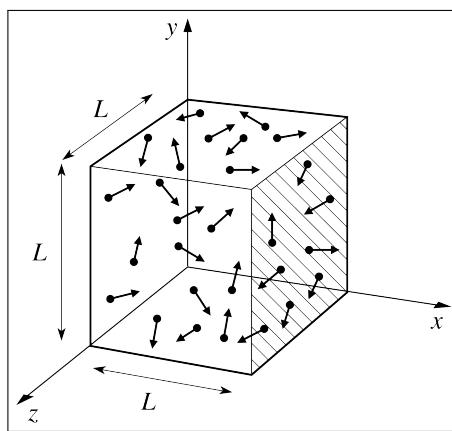
L'ultima riga è la più interessante: nonostante il volume e la pressione siano cambiati, la temperatura resta uguale (in realtà cambia, ma in modo quasi impercettibile). In generale, l'energia interna del sistema dipende da pressione, volume e temperatura ( $U(p, V, T)$ ). Inoltre, per il primo principio della termodinamica, abbiamo che  $\Delta U = Q - W$ . Ora, il **contenitore è rigido** quindi il **volume resta effettivamente costante**, di conseguenza **NON C'E' LAVORO** ( $W = 0$ , è vero che il gas aumenta di volume però lo fa liberamente senza opporsi a nessuno [es. un pistone], quindi NON c'è lavoro). Per quanto riguarda il calore, tutto il nostro sistema si trova in un **contenitore adiabatico**, allora **non abbiamo scambio di**

**calore con l'esterno** ( $Q = 0$ , il calore del sistema è già all'interno del sistema, non si può prendere calore da nessuna parte). Dunque, per la prima legge della dinamica abbiamo che:

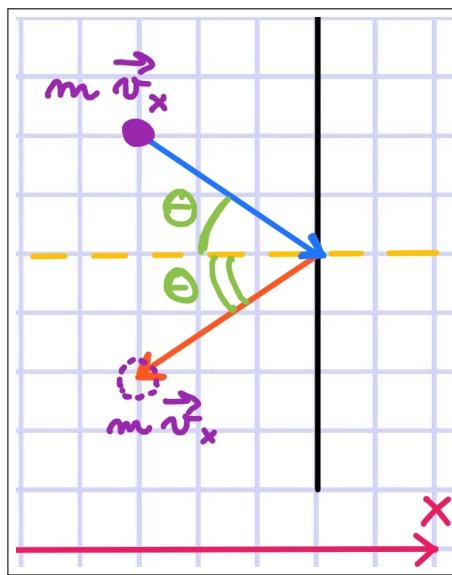
$$\Delta U = Q - W = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Quindi, se  $\Delta U == 0$ , allora che  $\Delta T == 0$ ! Abbiamo detto prima che, **in genere**, l'energia interna di un sistema dipende da pressione, volume e temperatura, **PERO'** abbiamo visto sperimentalmente che, pur cambiando la pressione ed il volume, **l'energia interna del sistema resta uguale**: possiamo quindi dire che **l'energia interna del gas dipende solo dalla Temperatura!**

**6.15.4.2 Teoria cinetica dei gas** Prima abbiamo visto un **metodo sperimentale**, ora passiamo a vedere il "metodo" matematico. Per fare ciò dobbiamo introdurre quella che viene definita **teoria cinetica dei gas**, ovvero "*come si muovono le molecole dei gas?*" Immaginiamo di avere un contenitore tridimensionale che contiene del gas:



Le molecole del gas si **muovono in modo caotico, non hanno una direzione preferita** (molto importante). Supponiamo che il contenitore sia un cubo di **lato L**. Iniziamo considerando una parete singola:

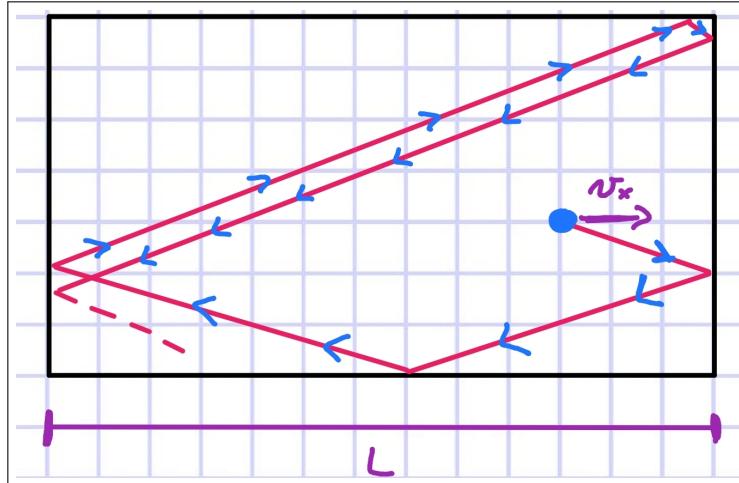


La nostra molecola entrerà in collisione con la "parete  $L_y/L_z$ " con **un angolo  $\theta$ , una certa velocità  $v_x$  ed una massa  $m$**  (la stessa per tutte le molecole): in questo caso si verificherà un **urto perfettamente**

elastico dove la **parete del contenitore** resterà perfettamente immobile (dato che la sua massa è praticamente infinita rispetto a quella della molecola). Ora, l'angolo di uscita della molecola sarà uguale a quello di entrata e, più importante, la **velocità sull'asse x** (che nel caso della parete ortogonale all'asse x è l'unica che ci interessa) sarà **uguale e contraria alla velocità di entrata**. Avremmo quindi un  $\Delta p$  (quantità di moto) molto specifico:

$$\Delta p = p_f - p_i = m * v_{x,f} - m * v_{x,i} = m * (v_{x,f} - v_{x,i}) = 2m * v_{x,i} = 2m * v_x$$

Ora possiamo chiederci "ogni quanto, in termini di tempo, questa molecola urta QUESTA parete"? Dato che in ogni urto l'angolo d'uscita è lo stesso di quello in entrata, possiamo immaginare che le molecole del gas si muovano in questo modo "speculare":



Dunque, per percorrere nella sua interezza la lunghezza  $L_x$  (che si trova sull'asse x) alla velocità  $v_x$  impiegheremo esattamente  $\frac{L_x}{v_x}$ , poi moltiplichiamo il tutto per 2 dato che vogliamo gli urti sulla stessa parete (praticamente si deve percorrere  $2L_x$ ). Otteniamo quindi:

$$\Delta t = \frac{2L_x}{v_x}$$

Abbiamo un  $\Delta p$  e abbiamo un  $\Delta t$ , quindi **abbiamo una forza impulsiva!** In particolare:

$$F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m * v_x}{\frac{2L_x}{v_x}} = \frac{2m * v_x * v_x}{2L_x} = \frac{m * v_x^2}{L_x}$$

Questa è la forza esercitata da una paticella sola, se vogliamo calcolare la **forza totale esercitata sulla parete** dobbiamo sommare la forza esercitata da tutte le particelle, quindi:

$$F_x^{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{m * v_x^2}{L_x} = \frac{m}{L_x} \sum_{i=1}^N v_x^2$$

Nota come  $m$  ed  $L_x$  siano 2 valori costanti per tutte le particelle, quindi li portiamo fuori dalla sommatoria. A questo punto, le particelle sono davvero tante e trovare la velocità di tutte potrebbe essere un procedimento un po' lungo, quindi **iniziamo a considerare la velocità media delle particelle** ( $\langle v_x \rangle$ ), quindi possiamo scrivere così:

$$F_x^{tot} = \frac{m}{L_x} \sum_{i=1}^N v_x^2 = \frac{m}{L_x} N * \langle v_x^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad F_x^{tot} = \frac{m}{L_x} N * \langle v_x^2 \rangle$$

Bene, a questo punto decidiamo di dividere da entrambe le parti per  $L_y$  e  $L_z$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} F_x^{tot} &= \frac{m}{L_x} N * \langle v_x^2 \rangle & \Rightarrow \frac{F_x^{tot}}{L_y * L_z} &= \frac{m}{L_x * L_y * L_z} N * \langle v_x^2 \rangle \\ \text{Superficie e Volume} & & \Rightarrow \frac{F_x^{tot}}{S} &= \frac{m}{V} N * \langle v_x^2 \rangle \\ \text{Pressione su } X & & \Rightarrow P_x &= \frac{m}{V} N * \langle v_x^2 \rangle \end{aligned}$$

Questo è un risultato abbastanza importante: abbiamo ottenuto la **pressione misurata sull'asse x**. Ora facciamo un passaggio abbastanza "scivoloso": **la pressione che misuriamo sull'asse x deve essere uguale a quella che misuriamo sull'asse y e sull'asse z** (la pressione del gas deve essere uguale in tutto il gas)!

$$P_x = P_y = P_z = P$$

Da questo punto, considerando la formula della  $P - x$  che abbiamo trovato prima, possiamo dedurre che:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

Questo è vero perché il gas **non può avere una direzione preferita in media!** Tutte le particelle si muovono in moto assolutamente caotico. Ora, considerando la velocità al quadrato media del gas:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

PERO', dato che  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ , abbiamo:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 * \langle v_x^2 \rangle$$

Allora  $\langle v_x^2 \rangle$  sarà ugugale a:

$$\langle v^2 \rangle = 3 * \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

Possiamo usare questa nuova informazione nella formula precedente:

$$P = \frac{m}{V} N * \langle v_x^2 \rangle = \frac{m * N * \langle v^2 \rangle}{3V} = \frac{N * m * v^2}{3V}$$

Questo è un risultato molto interessante, infatti possiamo **moltiplicare e dividere per 2**, ottenendo l'**energia cinetica media**:

$$\begin{aligned} P &= \frac{N * m * v^2}{3V} & \Rightarrow P &= \frac{N}{3V} * \langle m * v^2 \rangle \\ & & \Rightarrow P &= \frac{2N}{3V} * \langle \frac{1}{2} * m * v^2 \rangle \\ & & \Rightarrow P &= \frac{2N}{3V} * \langle E_K \rangle \end{aligned}$$

Ma non ci fermiamo qui, infatti possiamo "spostare" il volume così:

$$P = \frac{2N}{3V} * \langle E_K \rangle \quad \Rightarrow PV = \frac{2N}{3} * \langle E_K \rangle$$

Ora, per l'equazione di stato dei gas ideali, possiamo **sostituire quel PV**:

$$PV = \frac{2N}{3} * \langle E_K \rangle \quad \Rightarrow \quad N K_B T = \frac{2N}{3} * \langle E_K \rangle$$

Alla fine di tutto questo procedimento molto verboso, possiamo finalmente concludere con:

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} * K_B T$$

**L'energia cinetica media delle particelle del gas dipende solo dalla sua Temperatura** (moltiplicata per una costante). Questo è un risultato molto interessante. Avevamo detto in precedenza che, nel nostro modello molto easy dei gas ideali, **l'energia interna del sistema corrisponde alla dell'energia cinetica delle particelle che compongono in nostro gas** ( $N \langle E_K \rangle = U$ ), possiamo quindi dire che:

$$U = \frac{3}{2} * N K_B T$$

Questa formula è fantastica: abbiamo stabilito per **deduzione dal modello** che **l'energia cinetica** delle particelle del gas e quindi l'energia interna del gas **dipende solo la temperatura!** Infatti tutta la **parte in rosso** è **costante**, l'unica roba che può cambiare e far variare l'energia interna è la Temperatura. Rigirando la formula, possiamo dire che la temperatura del gas dipende dall'energia cinetica delle sue particelle! Da questo possiamo dire che, per raggiungere lo *zero assoluto* (0 K o -273,16 ° C) solo quando tutte le particelle sono completamente ferme.

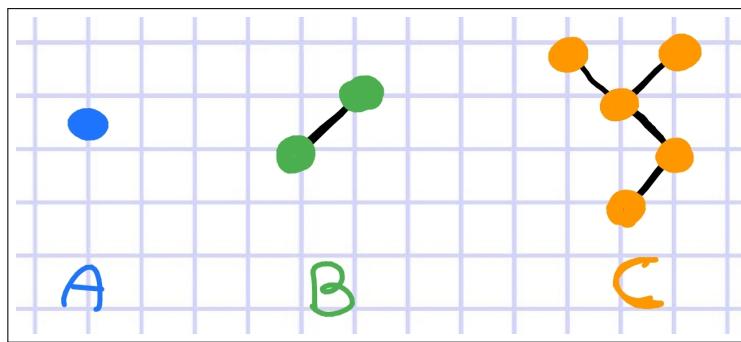
**Gradi di libertà** Per quanto riguarda questo metodo "matematico" c'è un discorso sui *gradi di libertà*. Partiamo da questa formul:

$$U = \frac{3}{2} * N K_B T$$

Ora, **da dove deriva questo 3?** Se ricordi, quel 3 deriva da come abbiamo "semplificato" la velocità della particella del gas:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

Questo ragionamento va bene per i **gas mono-atomici** (A), ovvero quelli composti da "particelle uniche". Se però abbiamo **gas bi-atomici** (B) o **poli-atomici** (C)?



Non si deve cambiare molto il ragionamento, si deve solo tenere conto del fatto che le particelle bi-atomiche e poli-atomiche **possono ruotare**. Non ci fermiamo troppo, basti sapere che la **formula generale per l'energia interna** è:

$$U = \frac{l}{2} * N K_B T$$

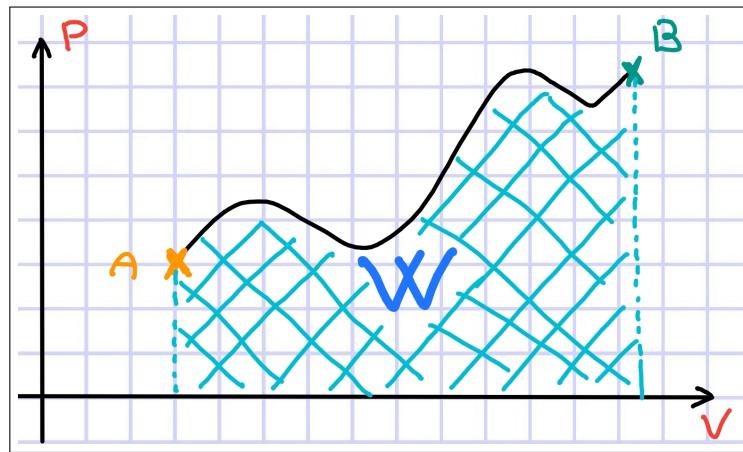
Dove  $l$  rappresenta i **gradi di libertà** e vale:

- **gas mono-atomici**, la particella può muoversi su 3 assi:  $l = 3$ ;
- **gas bi-atomici**, la particella è composta da 2 atomi, può muoversi su 3 assi e ruotare in modo "significativo" su 2 assi (una rotazione sull'asse che connette i 2 atomi non comporta nessun cambiamento significativo della particella):  $l = 3 + 2 = 5$ ;
- **gas poli-atomici**, la particella è composta da più di 2 atomi, può muoversi su 3 assi e ruotare in modo "significativo" su 3 assi:  $l = 3 + 3 = 6$ ;

Negli esercizi verrà detto il tipo di gas: basta **sostituire la  $l$ !**

## 6.16 Trasformazioni particolari dei gas ideali

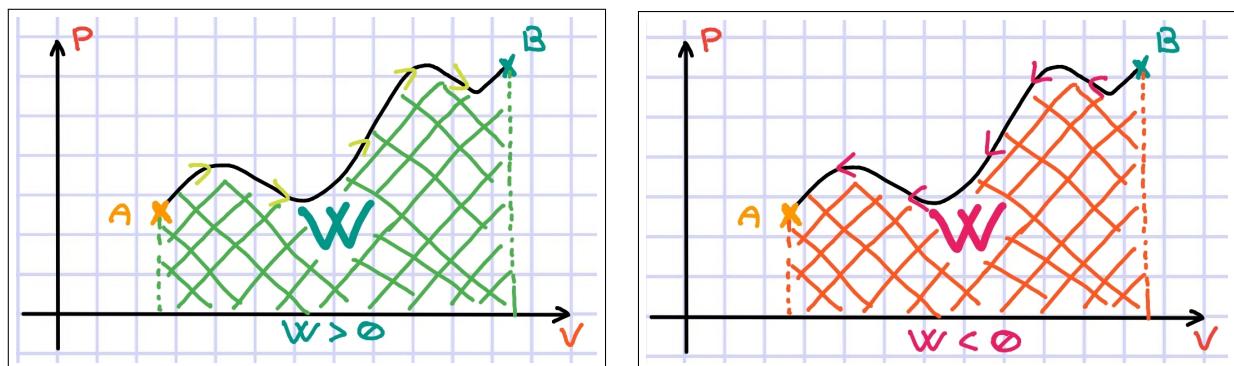
Vediamo alcune trasformazioni dei gas ideali, questo vengono definite "particolari" perché **mantengono una delle variabili termodinamiche costanti**. Per rappresentare queste trasformazioni usiamo il piano PV:



Una cosa importante in queste trasformazioni è la **rappresentazione del lavoro**, abbiamo detto che:

$$W_{I \rightarrow F} = \int_I^F p(V)dV$$

Ovvero, il lavoro compiuto dal gas corrisponde all'integrale della pressione (che dipende dal Volume) rispetto al Volume dal punto iniziale  $I$  al punto finale  $F$ . Graficamente sul piano corrisponde all'area di piano sotto la curva della nostra trasformazione. Non dimenticare come funzionano le integrali però:

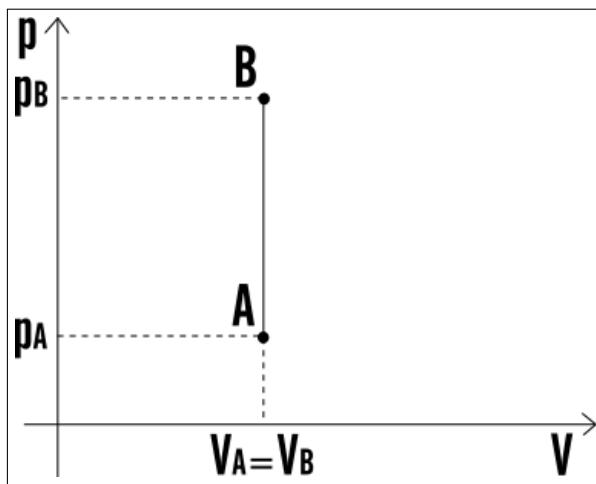


Se andiamo da  $A$  verso  $B$  (ovvero il Volume aumenta) allora **il segno dell'integrale sarà POSITIVO**, altrimenti se andiamo da  $B$  verso  $A$  (ovvero il Volume diminuisce) allora **il segno dell'integrale sarà NEGATIVO**. Finiamo questa introduzione ricordando **la prima legge della termodinamica**:

$$\Delta U = Q - W$$

Ci tornerà molto utile nell'analisi delle trasformazioni.

### 6.16.1 Trasformazione isocora



La **trasformazione isocora** è una trasformazione per cui il volume rimane costante. La variazione di energia interna è quindi legata solamente al calore che il sistema scambia con l'esterno.

$$V = \text{cost} \Rightarrow dV = 0$$

Osserviamo ora che anche la variazione di lavoro infinitesimale e la variazione di calore sono,

$$\delta W = p * dV = 0$$

$$\Delta W = 0$$

$$\delta Q = n c_V dT$$

$$\Delta Q = n c_V \Delta T$$

Osserviamo che in questo caso (quando si parla di gas) non si usa il calore specifico inteso come capacità termica ma introduciamo il **calore specifico molare** e quindi usiamo il numero di moli  $n$  e non la massa  $m$ .

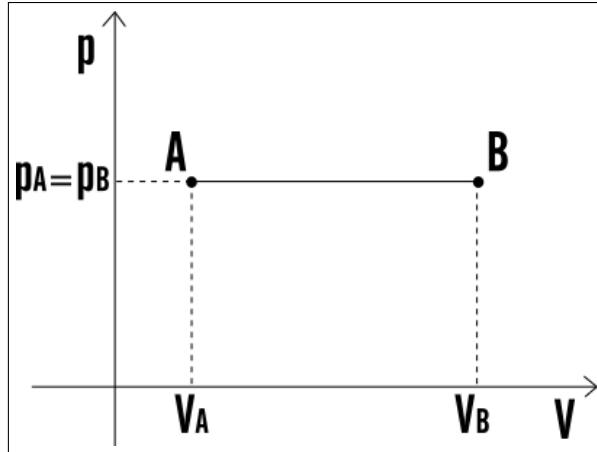
Ora calcoliamo la variazione di energia interna,

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q - \delta W = n c_V dT \\ \Delta U &= n c_V \Delta T \end{aligned}$$

**NOTA IMPORTANTE!!!!!!!!!!!!!!**

Questa formulazione dell'energia interna vale anche per le altre trasformazioni, non solo per l'isocora.

### 6.16.2 Trasformazione isobara



La **trasformazione isobara** è una trasformazione per cui la pressione rimane costante.

$$p = \text{cost} \Rightarrow dp = 0$$

Ora dall'**equazione di stato dei gas ideali** possiamo ricavarci la pressione,

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} = \text{cost}$$

ed otteniamo variazione di lavoro e variazione di calore,

$$\begin{aligned}\delta W &= pdV = \frac{nRT}{V} dV \\ \delta Q &= nc_PdT\end{aligned}$$

e quindi variazione di energia interna,

$$dU = \delta Q - \delta W = nc_PdT - pdV$$

In conclusione abbiamo quindi che,

$$\begin{aligned}W &= p\Delta V \\ Q &= nc_P\Delta T \\ \Delta U &= Q - W = nc_P\Delta T - p\Delta V = nc_V\Delta T\end{aligned}$$

### 6.16.3 Relazione di Mayer

La **relazione di Mayer** è una relazione tra il calore specifico a pressione costante ed il calore specifico a volume costante per i gas ideali. Per calcolarla facciamo come segue.

Per la trasformazione isocora avevamo ottenuto,

$$dU = nc_VdT$$

che valeva anche per le altre trasformazioni. Ora osserviamo che la variazione di energia interna può essere definita anche come,

$$dU = \delta Q - \delta W$$

e quindi da questa possiamo ricavare la variazione di calore,

$$\delta Q = dU + \delta W$$

e sostituendo all'energia interna il valore ottenuto per l'isocora e al lavoro la sua definizione, ottengo,

$$\delta Q = nc_VdT + pdV$$

Mettendo insieme quindi quest'ultima formula e il valore di  $\delta Q$  ottenuto per l'isobara, ottengo che,

$$nc_PdT = nc_VdT + pdV$$

Ora posso osservare che derivando l'equazione di stato dei gas ideali, dato che siamo nell'isobara ho pressione costante, ed inoltre  $n$  ed  $R$  sono costanti e quindi ottengo,

$$d[pV] = d[nRT] \Rightarrow pdV = nRdT$$

Sostituendo questa alla formula precedente ottengo quindi,

$$\begin{aligned} nc_PdT &= nc_VdT + nRdT \\ &\Rightarrow nc_PdT = nc_VdT + nRdT \\ &\Rightarrow c_P - c_V = R \end{aligned}$$

#### 6.16.4 Calore specifico a volume costante

Dalla teoria cinetica dei gas abbiamo che l'energia interna è,

$$U = N \frac{l}{2} k_B T$$

e se considero il numero di moli invece che il numero di componenti diventa,

$$U = n \frac{l}{2} RT$$

questo perchè se moltiplico e divido per  $N_A$  a destra, ottengo,

$$U = \frac{N}{N_A} \frac{l}{2} k_B N_A T$$

e  $\frac{N}{N_A} = n$  e  $k_B N_A = R$ .

Oraabbiamo anche dalla isocora che,

$$U = nc_V T$$

e quindi mettendole insieme ottengo,

$$n \frac{l}{2} RT = nc_V T \Rightarrow c_V = \frac{l}{2} R$$

Per i gas mono-atomici ho quindi che  $c_V = \frac{3}{2} R$  e per i gas bi-atomici ho che  $c_V = \frac{5}{2} R$ .

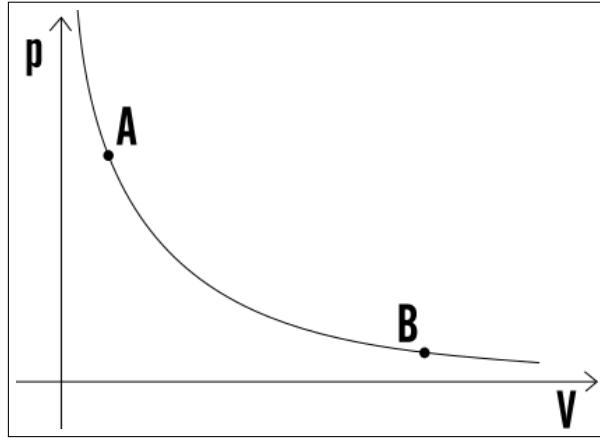
#### 6.16.5 Calore specifico a pressione costante

Per calcolare il calore specifico a pressione costante utilizzo la relazione di Mayer ed il calore specifico a volume costante appena calcolato,

$$c_P = c_V + R = \frac{l}{2} R + R = \frac{l+2}{2} R$$

Per i gas mono-atomici ho quindi che  $c_P = \frac{5}{2} R$  e per i gas bi-atomici ho che  $c_P = \frac{7}{2} R$ .

### 6.16.6 Trasformazione isoterna



La **trasformazione isoterna** è una trasformazione per cui la temperatura rimane costante. Di conseguenza anche l'energia rimarrà costante.

$$T = \text{cost} \Rightarrow \Delta T = 0$$

$$U = \text{cost} \Rightarrow dU = 0$$

e quindi l'equazione di stato dei gas sarà,

$$pV = nRT = \text{cost}$$

Ora la variazione di energia è,

$$dU = \delta Q - \delta W \Rightarrow \delta Q = \delta W$$

Lo scambio di calore quindi coincide con lo scambio di lavoro.

In questo caso non vale,

$$\delta Q = nc_TdT$$

ma il calore si calcola tramite il lavoro,

$$\delta W = pdV = nRT \frac{dV}{V}$$

Il lavoro ora sarà quindi,

$$W = \int_i^f \delta W = \int_i^f nRT \frac{dV}{V} = nRT \int_i^f \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

quindi il lavoro compiuto durante un'espansione/compressione isoterna è proporzionale ad  $nRT$  e quindi alla temperatura in cui avviene la trasformazione.

In conclusione ho quindi che,

$$Q = W = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Se ho un'espansione allora calore e lavoro saranno positivi, se ho una compressione invece saranno negativi.

### 6.16.6.1 Esempio espansione isoterma

**6.16.6.1 Esempio espansione isoterma** Supponiamo di avere un'espansione isoterma e di voler calcolare  $p_f$  e  $T_i$ . Abbiamo i seguenti dati,

$$p_i = 2 \text{ atm}$$

$$V_i = 3l$$

$$n = 2 \text{ mol}$$

$$V_f = 2V_i$$

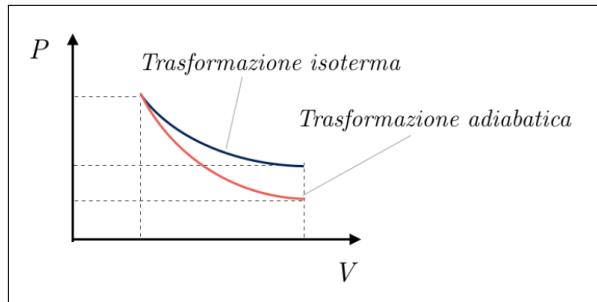
Adesso per calcolare  $p_f$  si fa come segue,

$$p_f = \frac{p_i V_i}{V_f} = \frac{2 \text{ atm}}{2} = 1 \text{ atm}$$

Per calcolare  $T_i$  invece si tiene conto di  $pV = nRT = \text{cost}$  e quindi ho,

$$p_i V_i = nRT_i \Rightarrow T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 3l}{2 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}}} = \frac{2 * 1,013 * 10^5 \text{ Pa} * 3 * 10^{-3} \text{ m}^3}{2 * 8,314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}}} \simeq 34 \text{ K}$$

### 6.16.7 Trasformazione adiabatica



#### 6.16.7 Trasformazione adiabatica

La **trasformazione adiabatica** è una trasformazione per cui lo scambio di calore infinitesimale è uguale a 0, quindi non scambio calore con l'esterno.

$$\begin{aligned}\delta Q &= 0 \\ dU &= \delta Q - \delta W = -dW\end{aligned}$$

Osserviamo che ora è  $dW$  e non  $\delta W$  dato che il lavoro è legato a  $dU$  e quindi è un differenziale esatto. Ora sostituiamo i valori in quest'ultima e otteniamo,

$$nc_VdT = -pdV$$

ora dall'equazione di stato dei gas ideali ci ricaviamo la temperatura e la deriviamo così da poter sostituirla nella formula precedente,

$$\begin{aligned}pV &= nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR} \\ d[T] &= d\left[\frac{pV}{nR}\right] \Rightarrow dT = \frac{1}{nR}d[pV] = \frac{pdV + Vdp}{nR}\end{aligned}$$

Supponendo una trasformazione adiabatica dallo stato A allo stato B, abbiamo alcune equivalenze importanti per calcolare le varie variabili (p, V, T):

- $T_A * V_A^{\gamma-1} = T_B * V_B^{\gamma-1}$ ;

- $p_A * V_A^\gamma = p_B * V_B^\gamma$ ;

- $T_A * p_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_B * p_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ ;

Dove  $\gamma$  rappresenta il rapporto  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ . Inserisco una tabella dei valori notevoli per i gas monoatomici e biatomici:

|          | <b>Gas monoatomico</b> | <b>Gas biatomico</b> |
|----------|------------------------|----------------------|
| $c_v$    | $\frac{3}{2}R$         | $\frac{5}{2}R$       |
| $c_p$    | $\frac{5}{2}R$         | $\frac{7}{2}R$       |
| $\gamma$ | $\frac{5}{3}$          | $\frac{7}{5}$        |

e la sostituisco nella formula precedente,

$$\begin{aligned}
nc_VdT = -pdV &\Rightarrow \frac{nc_V}{nR}(pdV + Vdp) = -pdV \\
&\Rightarrow \cancel{\frac{nc_V}{nR}}(pdV + Vdp) = -RpdV \\
&\Rightarrow c_V(pdV + Vdp) = -RpdV \\
&\Rightarrow c_VpdV + c_VVdp = -RpdV \\
&\Rightarrow c_VpdV + RpdV = -c_VVdp \\
&\Rightarrow (c_V + R)pdV = -c_VVdp \\
&\Rightarrow c_ppdV = -c_VVdp \\
&\Rightarrow \gamma pdV = -Vdp \\
&\Rightarrow \gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \\
&\Rightarrow \gamma d[\ln(V)] = -d[\ln(p)] \\
&\Rightarrow d[\ln(V)^\gamma] = d[\ln(p)^{-1}] \\
&\Rightarrow \ln(V)^\gamma = \ln\left(\frac{1}{p}\right) \\
&\Rightarrow V^\gamma = \frac{1}{p} \\
&\Rightarrow V^\gamma p = cost
\end{aligned}$$

Ora chiamo  $pV^\gamma = A$  dato che è costante e calcolo il lavoro,

$$W = \int_i^f pdV = \int_i^f \frac{A}{V^\gamma} dV = \int_i^f = AV^{1-\gamma} + cost$$

In conclusione per le varie trasformazioni ho quindi,

|            | $\Delta V = 0$ | $\Delta p = 0$ | $\Delta T = 0$                      | $\Delta Q = 0$  |
|------------|----------------|----------------|-------------------------------------|-----------------|
| $\Delta U$ | $nc_V\Delta T$ | $nc_V\Delta T$ | $nc_V\Delta T$                      | $nc_V\Delta T$  |
| $Q$        | $nc_V\Delta T$ | $nc_p\Delta T$ | $nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ | 0               |
| $W$        | 0              | $nR\Delta T$   | $nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ | $-nc_V\Delta T$ |

Per le trasformazioni generiche ho che,

$$\delta Q = nc_VdT + \delta W$$

## ATTENZIONE!!!!!!!!!!!!!!

Per la isoterma c'è un errore,

$$Q = W = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

## 6.17 Trasformazioni cicliche

Le **trasformazioni cicliche** sono trasformazioni dove il punto iniziale coincide con quello finale. La variazione di energia interna è 0.

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W \Rightarrow \delta Q = \delta W$$

Osserviamo che però le variazioni di calore e lavoro infinitesimali non sono uguali.

Il lavoro totale è quindi l'area del ciclo nel piano p,V, il lavoro ha segno che dipende dal senso di percorrenza.

### 6.17.1 Macchine termiche

Le **macchine termiche** sono macchine per cui il lavoro è positivo. Quindi prende calore dall'esterno e lo trasforma in lavoro.

$$W > 0 \Rightarrow Q > 0$$

Il rendimento delle macchine termiche è il lavoro che la macchina compie diviso il calore che assorbe,

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

dato che il calore ceduto  $Q_C < 0$ .

In pratica è impossibile che il rendimento sia  $\eta = 1$ , perché c'è sempre una piccola quantità di calore che cedo all'ambiente esterno.

Per calcolare il rendimento devo mettere a numeratore ciò di cui voglio misurare l'efficienza e a denominatore ciò che devo pagare.

### 6.17.2 Macchine frigorifere

Le **macchine frigorifere** sono macchine per cui il lavoro è negativo. Quindi viene portato via calore.

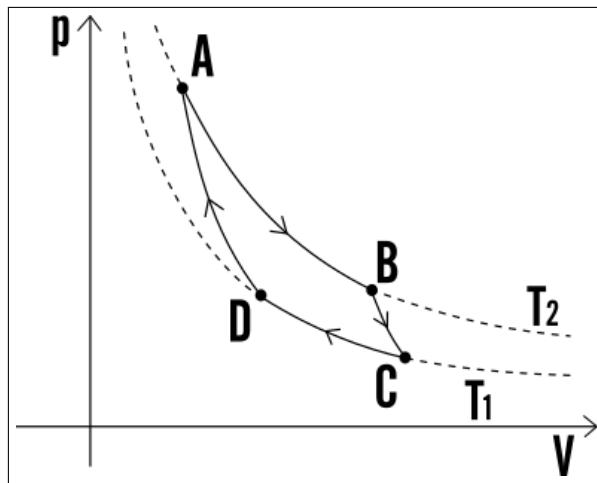
$$W < 0 \Rightarrow Q < 0$$

Il coefficiente di prestazione delle macchine frigorifere è il calore che assorbo diviso il lavoro che subisco.

$$\eta = \frac{Q_A}{|W|}$$

Per calcolare il coefficiente di prestazione devo mettere a numeratore ciò di cui voglio misurare l'efficienza e a denominatore ciò che devo pagare.

## 6.18 Ciclo di Carnot



Il **ciclo di Carnot** è un ciclo reversibile, quindi composto da trasformazioni reversibili. È composto infatti da una espansione isoterma, da A a B, e da una adiabatica, da B a C, e da una compressione isoterma, da C a D, e da una adiabatica, da D ad A, tutte reversibili. Per l'espansione isoterma ho  $T_2$  e per la compressione

isoterma ho  $T_1$ .

Posso rappresentare il ciclo di Carnot come una macchina come segue, Per i vari tratti (trasformazioni) ho quindi,

|    | $\Delta U$        | $Q$                                    | $W$                                   |
|----|-------------------|--|---------------------------------------|
| AB | 0                 | $-nRT2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ | $nRT2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ |
| BC | $mc_V(T_1 - T_2)$ | 0                                      | $-mc_V(T_1 - T_2)$                    |
| CD | 0                 | $-nRT1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$ | $nRT1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$ |
| DA | $mc_V(T_2 - T_1)$ | 0                                      | $-mc_V(T_2 - T_1)$                    |

Ora calcolo il rendimento,

$$W = nRT2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \quad \cancel{- mc_V(T_1 - T_2)} \quad \cancel{- mc_V(T_2 - T_1)}$$

$$Q_A = nRT2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\eta = \frac{nRT2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{T2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T1}{T2} \frac{\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T1}{T2}$$

Se ho quindi  $T_1$  molto bassa e  $T_2$  molto alta, il rendimento è  $\eta \simeq 1$ , quindi ho rendimento massimo.

## 6.19 Secondo principio della termodinamica

Possiamo dividere il secondo principio della termodinamica in 2 parti (+ 1):

1. **principio di Kelvin:** è impossibile realizzare una macchina termica ciclica il cui **unico** risultato sia la conversione in lavoro di tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea;
2. **principio di Clausius:** è impossibile realizzare una trasformazione il cui **unico** risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo a uno più caldo senza l'apporto di lavoro esterno;
3. è impossibile realizzare una macchina termica il cui rendimento sia pari al 100% (questa parte non viene citata dal professore, la aggiungo io per completezza [trovata su Wikipedia], da questo punto in poi lo ignorerò).

Questi, in quanto principi, **non vanno dimostrati!** Però, è possibile (con una dimostrazione per assurdo) dimostrare che entrambi i principi sono equivalenti.

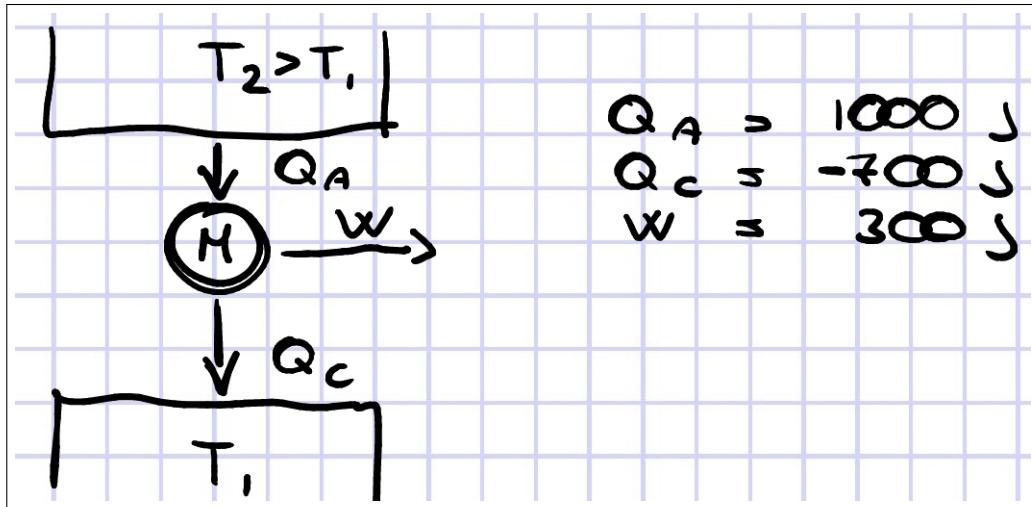
### 6.19.1 Veloce recap sulle macchine

Prima di passare alla dimostrazione per assurdo precedentemente citata, facciamo un veloce ripasso per quanto riguarda le macchine termiche e le macchine frigorifere. In entrambi i casi, nota che la temperatura  $T_2$  è sempre **maggior**e della temperatura  $T_1$

**6.19.1.1 Macchine termiche** Definiamo una **macchina termica** una macchina che ha come scopo **produrre lavoro** ( $W$ ) tramite l'**assorbimento di calore** ( $Q_A$ ). Come visto in precedenza, questo NON è un procedimento efficiente al 100% (tutto il *calore assorbito* ( $Q_A$ ) non verrà mai convertito 1:1 in lavoro), ma ci sarà anche del *calore ceduto* ( $Q_C$ ). In particolare, il rendimento della nostra macchina corrisponderà a:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = \frac{Q_A}{Q_A} - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Vediamo un rapido esempio:



La macchina ( $M$ ) assorbe calore ( $Q_A$ , segno positivo dato che lo assorbe) e produce un certo lavoro in uscita ( $W$ , segno positivo perché lo produce). In contemporanea però, cede del calore ( $Q_C$ , segno negativo perché lo perde). Ora, seguendo la formuletta vista prima, possiamo dire che  **$M$  lavora con un rendimento del 30%**, però possiamo anche andare oltre! Supponendo che questa sia una **macchina di Carnot**, possiamo anche dire il **rappporto tra le temperature in gioco!** In particolare, avevamo detto che il rendimento di una macchina di Carnot corrisponde a:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Quindi possiamo dire che:

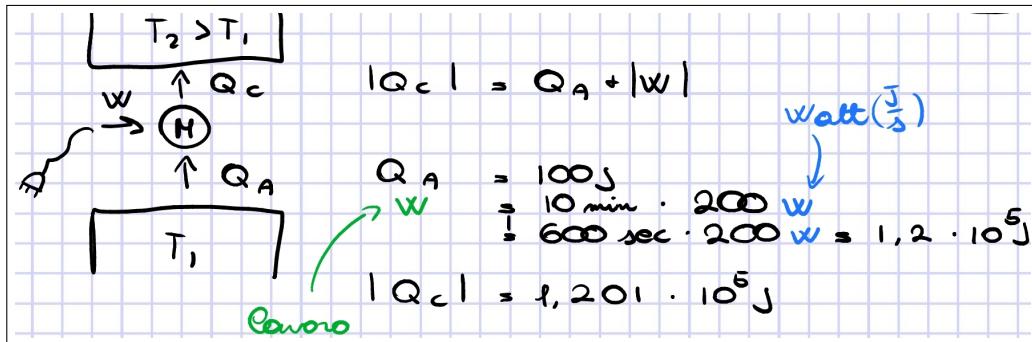
$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 30\% = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{7}{10}$$

Data una delle 2 temperature possiamo dire quale deve essere l'altra temperatura per lavorare con un rendimento del 30%!

**6.19.1.2 Macchine frigorifere** Definiamo una **macchina frigorifera** una macchina che ha come scopo **assorbire calore** ( $Q_A$ ) tramite l'**assorbimento di lavoro** ( $W$ ). In questo caso, il rendimento di questa macchina dipende dal rapporto tra calore assorbito e quantità di lavoro impiegata per assorbire tale calore. La formula sarà quindi:

$$\eta = \frac{Q_A}{|W|}$$

Ricorda che nelle macchine frigorifere, il lavoro viene "rubato" a noi, quindi (nel nostro sistema di riferimento) avrà segno negativo (da qui il modulo). Ricorda inoltre che  $W = Q_A - |Q_C|$  (ancora, nel nostro sistema di riferimento il calore ceduto è negativo, quindi mettiamo il modulo). Vediamo ora un rapido esempio:

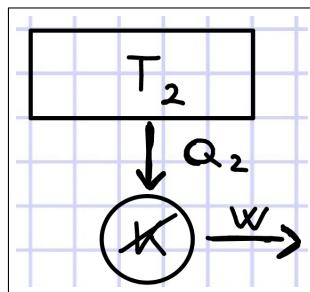


La macchina ( $M$ ) assorbe calore ( $Q_A$ , segno positivo dato che lo assorbe) da una zona di **bassa temperatura** ( $T_1$ ) utilizzando una certa quantità di lavoro in entrata ( $W$ , segno negativo perché lo "ruba" a noi). In contemporanea cede del calore ( $Q_C$ , segno negativo perché lo perde) ad una zona ad **alta temperatura** ( $T_2$ ).

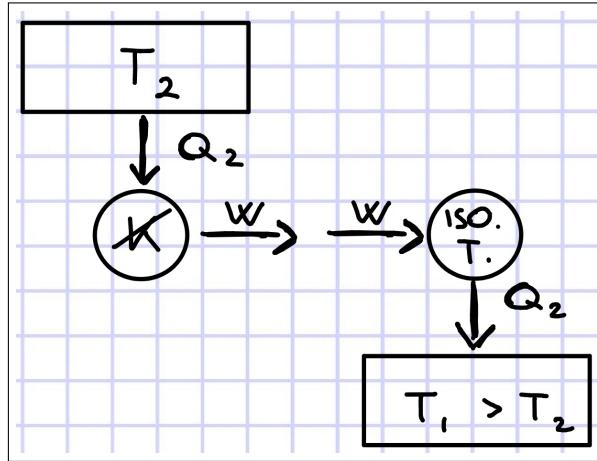
### 6.19.2 Dimostrazione dell'uguaglianza delle 2 principi

I 2 principi (di Kelvin e Clausius) sono equivalenti, ciò è facilmente dimostrabile con una dimostrazione per assurdo, vediamo entrambi i casi.

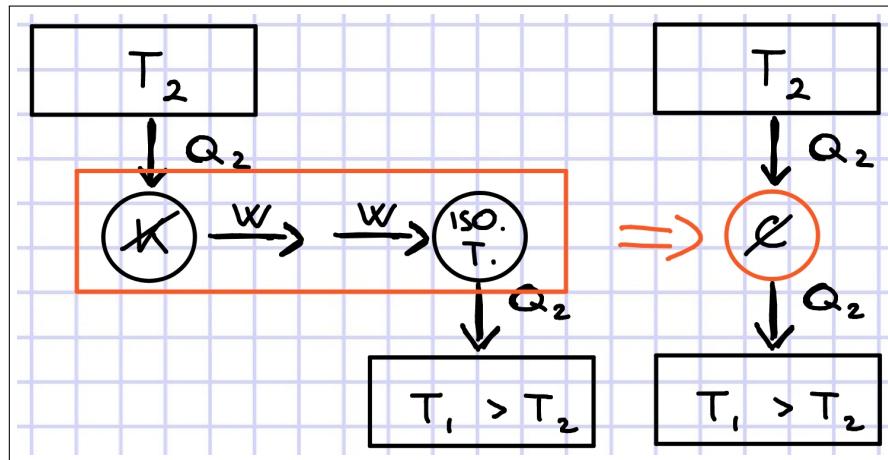
**6.19.2.1 Kelvin => Clausius** Immaginiamo di avere una macchina " $\mathbb{K}$ " capace di violare il principio di Kelvin: se tale macchina esistesse, allora sarebbe anche possibile violare il principio di Clausius! Quindi, immaginiamo di avere questa macchina " $\mathbb{K}$ ", capace di **assorbire una quantità  $Q_2$  di calore** (da una sorgente a temperatura  $T_2$ ) e convertire tutto questo calore in un **lavoro  $W$  senza dispersione**:



Ora, possiamo affiancarci una normalissima macchina che compie una **trasformazione isotermica**. Questa macchina **assorbirà tutto il lavoro** prodotto da  $\mathbb{K}$  e **restituirà una quantità  $Q_2$**  di calore ad una sorgente a temperatura  $T_1$ . Visto che possiamo, supponiamo anche che  $T_1 > T_2$  (molto importante):

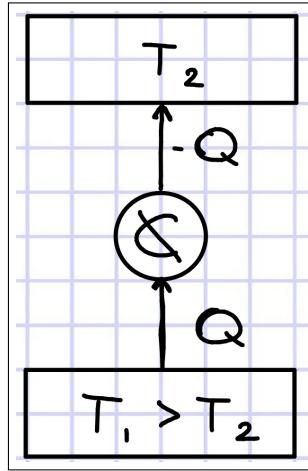


A questo punto possiamo "**compattare**" queste macchine in una **macchina unica** che andremmo a chiamare  $\mathcal{X}$ :

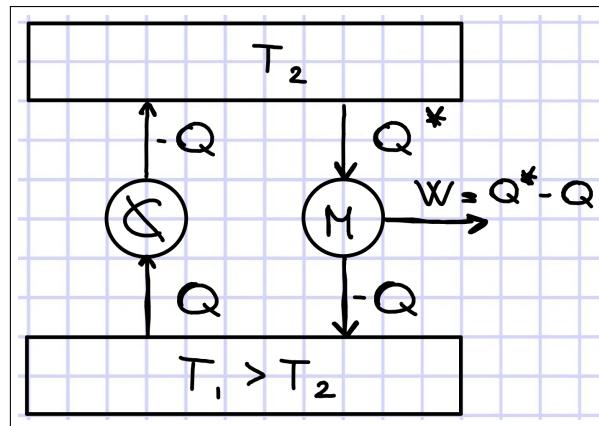


Se andiamo ad analizzare la macchina  $\mathcal{X}$  notiamo che **viola il principio di Clausius!** Infatti è capace di **trasferire calore dalla sorgente a temperatura  $T_2$  a quella a temperatura  $T_1$**  e, come abbiamo detto prima,  $T_1 > T_2$ : in questa macchina il calore passa da una zona fredda ad una zona più calda "naturalmente", senza l'assorbimento di lavoro esterno (il lavoro viene generato tutto internamente alla macchina  $\mathcal{X}$ , quindi quello possiamo ignorarlo)!

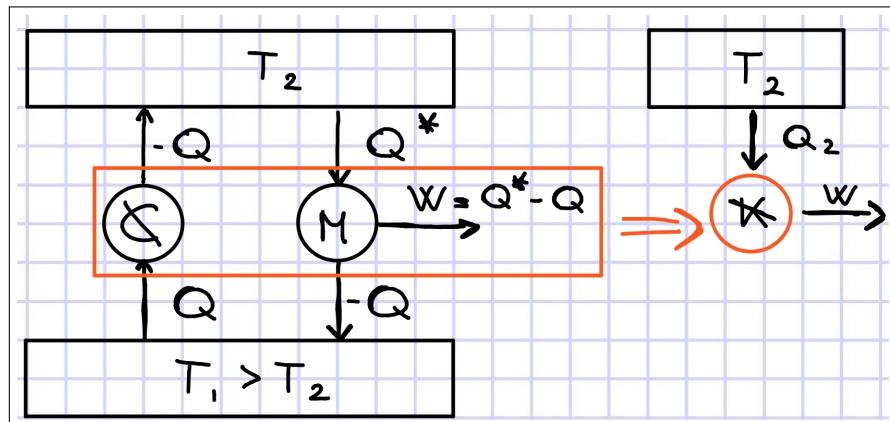
**6.19.2.2 Clausius  $\Rightarrow$  Kelvin** In un modo simile, possiamo dimostrare che l'esistenza di una macchina capace di violare il principio di Clausius implicherebbe l'esistenza di una macchina capace di violare il principio di Kelvin. Come prima, immaginiamo di avere questa macchina " $\mathcal{X}$ ", capace di **assorbire una quantità  $Q$  di calore da una sorgente a temperatura  $T_1$  e cedere la stessa quantità di calore (quindi  $-Q$ ) ad una sorgente a temperatura  $T_2$  (vale sempre  $T_1 > T_2$ ):**



Ora, a questa macchina impossibile ne affianchiamo una normalissima che assorbe un calore  $Q^*$  dalla sorgente  $T_2$  e produce un certo lavoro  $W$ . La parte importante qui è il **calore ceduto**: supponiamo che **corrisponda esattamente a  $-Q$**  ( $Q^*$  può essere arbitrariamente grande, quindi gestiamo il rendimento della macchina e l'assorbimento di calore in modo da cederne quanto vogliamo noi):

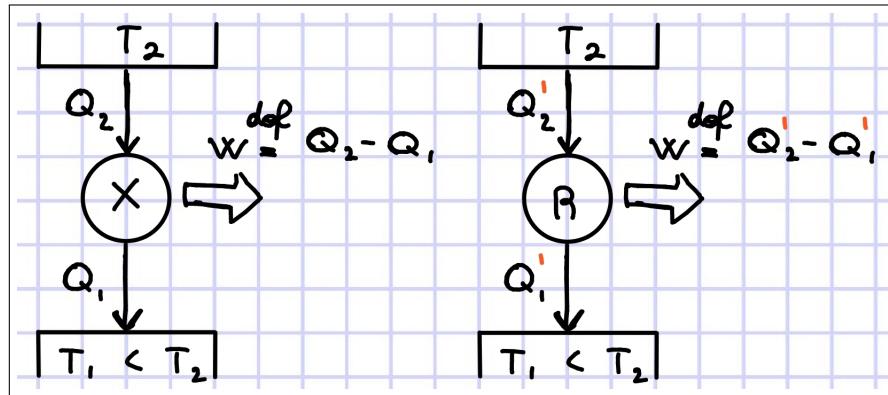


E adesso comprimiamo **queste macchine**: dato che **assorbiamo e cediamo una quantità di calore  $Q$  dalla sorgente  $T_1$**  è come se non assorbissimo effettivamente calore! Quindi otteniamo una macchina (che possiamo chiamare  $\mathbb{K}$ ) capace di violare il principio di Kelvin!



## 6.20 Teorema di Carnot

Questo teorema nasce da una domanda molto semplice: "*a parità di temperature, e più efficiente una macchina termica reversibile o una irreversibile?*". Nota MOLTO bene quel "*a parità di temperature*": durante l'orale è importante citarlo! Per la dimostrazione ci troviamo in questa situazione:



1. abbiamo 2 macchine termiche:

- una **macchina generica**  $X$  di cui non conosciamo le specifiche, in particolare **non sappiamo se è reversibile** (può diventare una macchina frigorifera) o **irreversibile**;
- una **macchina NON generica**  $R$  che **sappiamo essere reversibile**

2. abbiamo 2 sorgenti di temperatura:

- una alla temperatura  $T_2$ ;
- una alla temperatura  $T_1$  che sappiamo essere **più fredda** dell'altra ( $T_1 < T_2$ );

3. entrambe le macchine **assorbono calore da  $T_2$  e cedono calore a  $T_1$** , nota che **non è detto che le 2 macchine assorbano/cedano le stesse quantità di calore**;

4. entrambe le macchine **producono la stessa quantità di lavoro  $W$** .

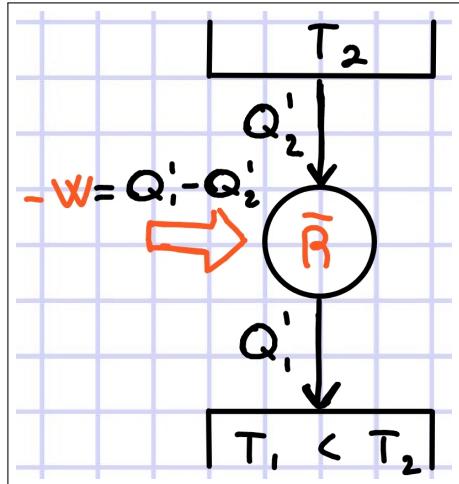
Ora, noi ci chiediamo:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \geq \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

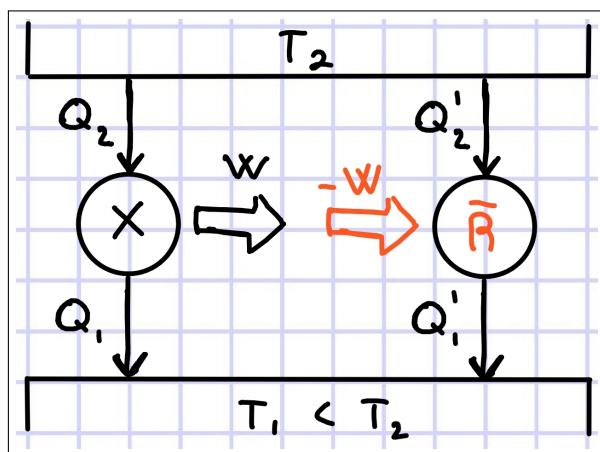
ovvero, **come si relazionano i rendimenti delle 2 macchine tra di loro?** Il teorema di Carnot risponde proprio a questo quesito: **il rendimento di una macchina termica generica  $X$  è SEMPRE minore o uguale al rendimento di una macchina termica reversibile** (l' = vale quando entrambe le macchine sono reversibili). Come arriviamo a questa conclusione? Ci arriviamo tramite delle assunzioni, in particolare assumiamo (per assurdo) che :

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} > \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

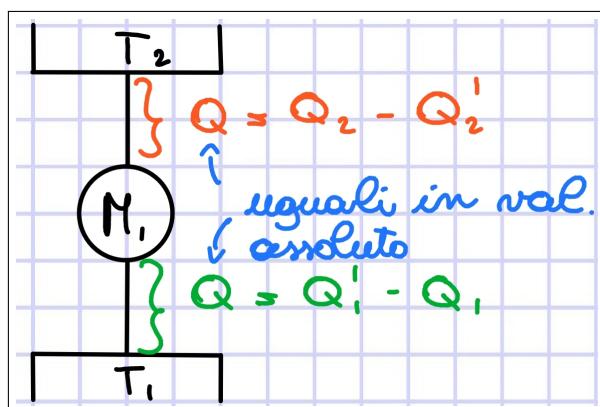
Ok, dato che la macchina  $R$  è reversibile, possiamo farne la **versione "negata"**  $\bar{R}$ :



e dato che assorbe proprio una **quantità  $-W$**  di lavoro la possiamo **connettere in serie** alla macchina generica X:



Possiamo quindi immaginare di **comprimere le 2 macchine** (annullando di fatto l'apporto del lavoro, è tutta roba interna alla macchine quindi noi non perdiamo niente), ottenendo la macchina **M<sub>1</sub>**:

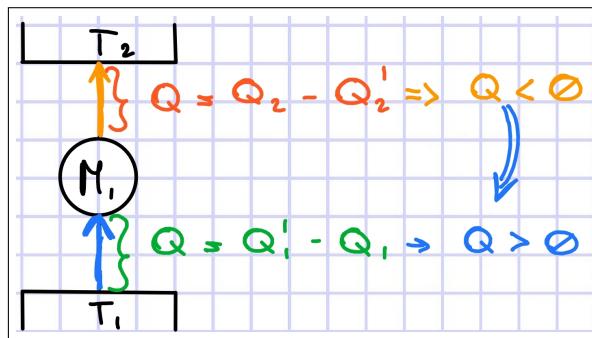


Ora, ci sono dei trasferimenti di energia tra  $T_1 < - > M_1$  e  $T_2 < - > M_1$ , però in quale verso? Prima

abbiamo supposto " $\eta_{X,(T_1,T_2)} > \eta_{R,(T_1,T_2)}$ ", quindi possiamo ragionarci sopra:

$$\begin{aligned} \eta_{X,(T_1,T_2)} &> \eta_{R,(T_1,T_2)} \\ &\Rightarrow \frac{\dot{W}}{Q_2} > \frac{\dot{W}}{Q'_2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{Q_2} > \frac{1}{Q'_2} \\ &\Rightarrow Q'_2 > Q_2 \end{aligned}$$

Dato il lavoro prodotto dalle macchine e i calori che assorbono possiamo facilmente calcolare il loro rendimento, dato che sappiamo (o meglio, abbiamo supposto) che il rendimento di  $X$  è maggiore di quello di  $R$  possiamo applicare dei semplici passaggi algebrici e scoprire che  $Q'_2$  deve essere maggiore di  $Q_2$ . Fai attenzione qui: se il calore è  $> 0$  allora la macchina lo sta assorbendo, se è  $< 0$  allora lo sta cedendo. Dato che non stiamo producendo lavoro, i 2 calori devono essere uguali e contrari, cioè stiamo trasferendo calore da una sorgente ad un'altra. Facciamo un disegno:



Qui ci accorgiamo però che **c'è un problema**: abbiamo detto prima che  $T_1 < T_2$ , quindi  **$T_1$  è più fredda di  $T_2$ !** Stiamo trasferendo calore da una fonte fredda verso una fonte calda, ma questo è impossibile per il principio di Clausius! Non possiamo trasferire calore da una fonte fredda verso una fonte calda senza l'apporto di lavoro esterno, possiamo quindi dire che:

$$\cancel{\eta_{X,(T_1,T_2)} > \eta_{R,(T_1,T_2)}}$$

Non si può fare, è impossibile. **Quindi deve essere:**

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \leq \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

Ora, possiamo considerare un altro caso: e se anche la macchina **X** fosse reversibile? Ricorda che è una macchina generica, potrebbe essere reversibile come no: nel caso fosse reversibile potremmo invertire  $X$  e fare gli stessi identici passaggi fatti prima. Da questi otteremo che:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \Rightarrow \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

Se ora mettiamo insieme quanto abbiamo scoperto, otteniamo che:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{X,(T_1,T_2)} &\leq \eta_{R,(T_1,T_2)} \\ \eta_{X,(T_1,T_2)} &\Rightarrow \eta_{R,(T_1,T_2)} \end{aligned} \right\} \eta_{X,(T_1,T_2)} = \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

Se le 2 macchine sono entrambe reversibili (e lavorano nello stesso range di temperatura) devono avere lo stesso rendimento! Sostanzialmente, questa è la legge di Carnot:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \leq \eta_{R,(T_1,T_2)} \quad (1)$$

**Il rendimento di una macchina termica qualsiasi è, sempre minore o uguale del rendimento di una qualsiasi macchina termica reversibile che lavora nello stesso range di temperatura** (se anche la prima macchina è reversibile, le 2 macchine DEVONO avere lo stesso rendimento).

### 6.20.1 Corollario e osservazioni

A questo punto possiamo mettere insieme un corollario:

1. **corollario:** come già detto in precedenza, **tutte le macchine reversibili che lavorano alle stesse temperature hanno lo stesso rendimento;**
2. **osservazione 1:** abbiamo detto che **tutte le macchine reversibili DEVONO avere la stessa efficienza** (a parità di temperatura), dato che la **macchina di carnot è reversibile** ed ha un rendimento che corrisponde a " $1 - \frac{T_1}{T_2}$ " (ricorda che  $T_1 < T_2$ ) possiamo dire che **tutte le macchine termiche reversibili hanno rendimento  $\frac{T_1}{T_2}$** ;
3. **osservazione 2:** supponendo che la macchina  $X$  ceda il calore  $Q_1$  a  $T_1$  ed assorba  $Q_2$  da  $T_2$ , possiamo dire che il suo rendimento corrisponde a  $1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$  (ricorda che  $Q_1$  è negativo perché è il calore ceduto dalla macchina). Ora, per il teorema di Carnot, possiamo dire che:

$$\begin{aligned} \eta_{X,(T_1,T_2)} &\leq \eta_{R,(T_1,T_2)} & \implies 1 - \frac{|Q_{1,X}|}{Q_{2,X}} &\leq 1 - \frac{|Q_{1,R}|}{Q_{2,R}} \\ \text{Per osservazione precedente (R reversibile)} & & \implies 1 - \frac{|Q_{1,X}|}{Q_{2,X}} &\leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ \text{Tolgo } X \text{ per semplicità} & & \implies 1 - \frac{|Q_1|}{T_1} &\leq 1 - \frac{Q_2}{T_2} \\ Q_1 &= -|Q_1| & \implies +\frac{Q_1}{T_1} &\leq -\frac{Q_2}{T_2} \\ & & \implies \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Questa è una formulazione alternativa del teorema di Carnot che ci tornerà molto utile in futuro;

4. **osservazione 3:** dato che, all'osservazione 2, abbiamo stabilito che " $\frac{|Q_{1,X}|}{Q_{2,X}} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$ ". Bene, possiamo quindi dire che il **massimo rendimento possibile per qualsiasi macchina** che lavora nel range di temperatura  $[T_1, T_2]$  corrisponde esattamente a:

$$\eta_{MAX,(T_1,T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Questa è una cosa abbastanza sorprendente: a livello teorico siamo riusciti a trovare un limite effettivamente impossibile da superare nella realtà! Supponendo di avere  $T_1 = 283K$  e  $T_2 = 300K$ , possiamo subito dire che qualsiasi macchina che lavora in questo range di temperature avrà di sicuro un rendimento che non supera  $1 - \frac{283}{300} = \frac{17}{300}$  (piuttosto basso come rendimento): questo è il trucco! Più è piccolo è il divario delle temperature e minore sarà il rendimento! Questa è un limite teorico, dimostrabile con i teoremi!

5. **osservazione 4:** facendo riferimento all'osservazione 2, se abbiamo 2 macchine reversibili possiamo dire che:  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ . Se esplicitiamo i segni dei 2 calori (usando i moduli), otteniamo:  $\frac{-|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} = 0$ . Questo "cambio di segni" ci permette di ottenere questa equazione:

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}$$

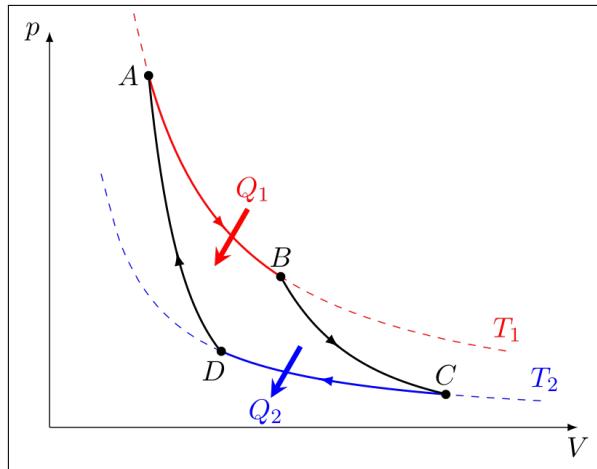
Questa equazione ci permette di stabilire una **relazione tra calore trasferito Q e la temperatura T**: questo rapporto ci permette di creare degli strumenti di misurazione della temperatura assoluta. Misurando lo scambio del calore, possiamo misurare la temperatura!

## 6.21 Teorema di Clausius

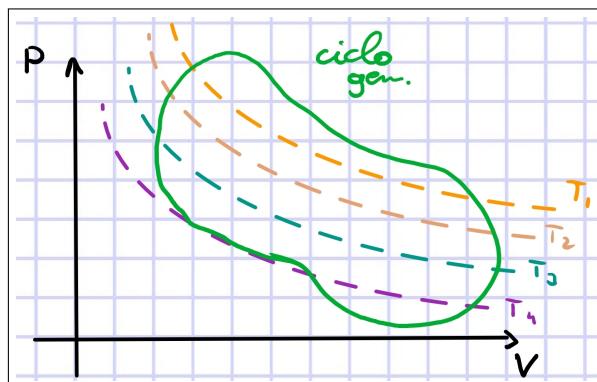
Il teorema di Clausius è un'estensione del teorema di Carnot su **cicli generici**. Allora, partiamo dalla formulazione di Carnot vista nel corollario:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

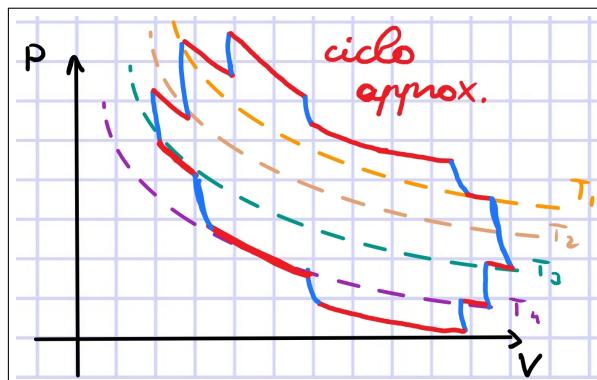
In questa formula notiamo facilmente che il ciclo in questione **lavora tra 2 temperature fisse** (ha 2 scambi di calore):



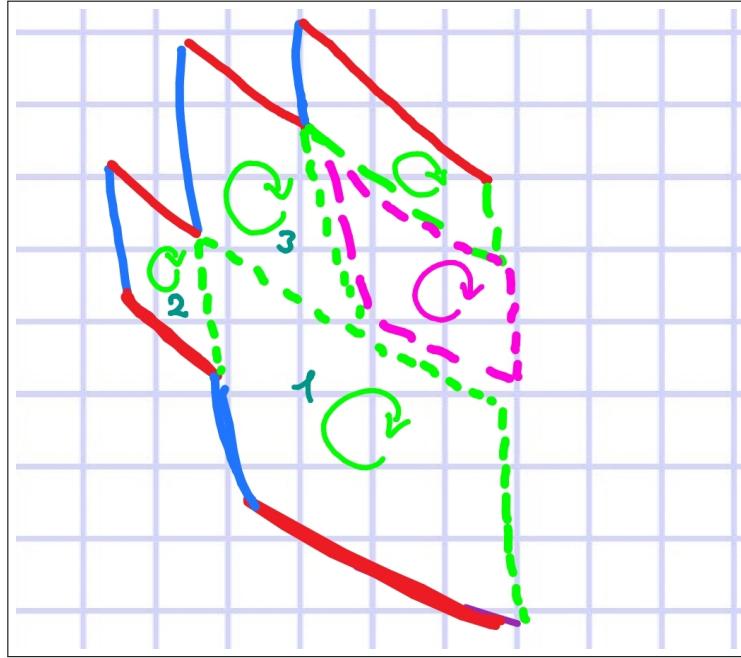
Ma se avessimo un "ciclo termodinamico generico" che lavora **a contatto con più temperature diverse**? Ad esempio:



Possiamo immaginare di prendere questo ciclo e **dividerlo in piccoli cicli di carnot**, ottenendo qualcosa del genere:



Questa è un'approssimazione molto grossolana: devi immaginala con tratti infinitesimi, prossimi al ciclo generico vero e proprio (se abbiamo  $N$  tratti, allora  $N$  dovrebbe tendere ad  $\infty$ ). Immaginiamo di ingrandire un tratto di questa approssimazione e disegnami i cicli di carnot:



Che info possiamo estrarre da ogni ciclo di carnot? Per il ciclo  $i$ -esimo possiamo dire che:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

(L' = vale solo se il ciclo è reversibile). Ora, se immaginiamo che i cicli interni siano tutti reversibili, abbiamo che i loro **tratti adiabatici non scambiano calore** mentre **quelli isotermi si!** In particolare, in un tratto **assorbono calore** (da dx a sx), mentre in un tratto **cedono calore** (da sx a dx). Ora un passaggio importante: dal disegno precedente si può notare che ogni tratto interno al ciclo (quelli tratteggiati) viene condiviso tra 2 diversi cicli. Uno **cederà calore**, mentre l'altro **lo assorbità**: avremmo la stessa quantità  $\frac{Q}{T}$  **2 volte ma di segno opposto!** Se sommiamo tutte queste quantità, **quelle interne si bilanciano tra di loro e resteremmo solo con i contributi dei tratti esterni!** Quindi, se facciamo:

$$\sum_{MicroCicli} \left( \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \right) \leq 0$$

Se poi espandessimo questa sommatoria, potremmo notare che i termini interni si semplificherebbero tra di loro, **lasciando solo le quantità relative ai tratti esterni**. Quindi, possiamo sommare i contributi di tutti i tratti esterni (supponiamo  $N$ ) ottenendo:

$$\sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{T_j} \leq 0$$

Ovvvero **la somma dei rapporti tra i calori scambiati e le rispettive temperature delle sorgenti è negativa (macchine irriversibili) o uguale a 0 (macchine reversibili)**. Sostanzialmente questo è il teorema di Clausius. Esiste anche la sua versione "continua", ovvero l'integrale:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

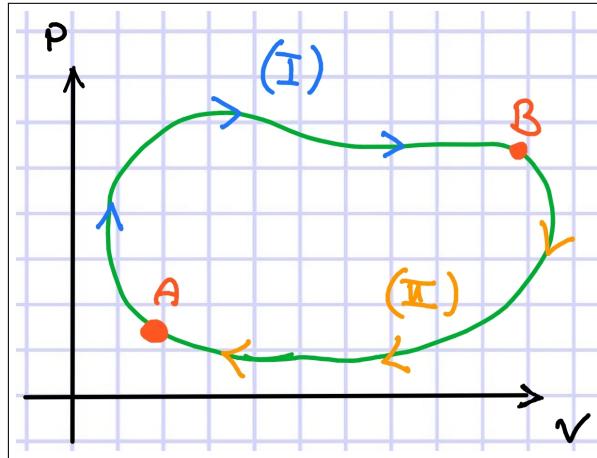
Anche in questo caso, il " $<$ " vale per le macchine (i cicli) irreversibili, mentre l'" $=$ " per quelli reversibili. Questa poi è la base per l'**integrale di Clausius**:

$$\oint \frac{dQ}{T}$$

Fondamentale per andare poi a definire quella che è l'**entropia**.

## 6.22 Entropia

Supponiamo di cominciare con una **trasformazione ciclica "divisiva"** in 2 parti, ad esempio:



Possiamo quindi individuare 2 tratti:

- $A \rightarrow B$ : lo chiamiamo tratto  $I$ ;
- $B \rightarrow A$ : lo chiamiamo tratto  $II$ ;

Ora possiamo dire che, per il teorema di Clausius visto prima, abbiamo:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

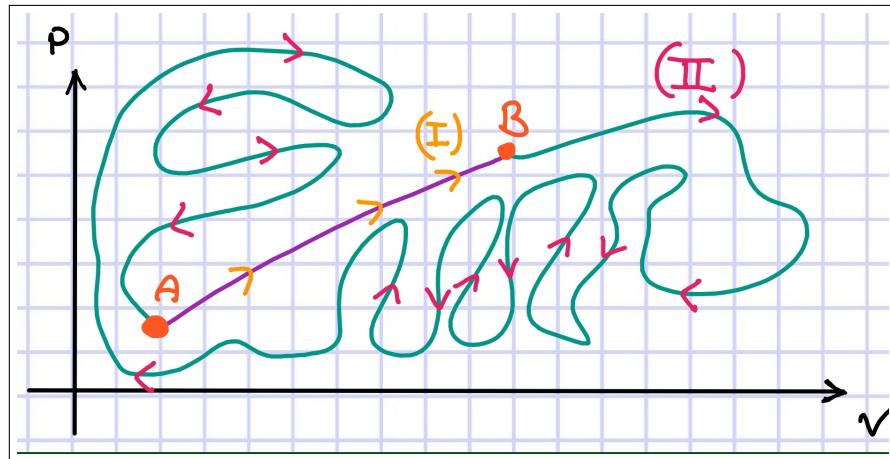
In particolare per i cicli reversibili:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Concentriamoci su quest'ultimi per il momento. Per le proprietà degli integrali possiamo dire che:

$$\begin{aligned} \oint \frac{dQ}{T} &= 0 & \Rightarrow \oint_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{(I)} + \oint_B^A \left( \frac{dQ}{T} \right)_{(II)} &= 0 \\ \text{Applico reversibilità integrali} & & \Rightarrow \oint_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{(I)} - \oint_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{(II)} &= 0 \\ & & \Rightarrow \oint_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{(I)} &= \oint_A^B \left( \frac{dQ}{T} \right)_{(II)} \end{aligned}$$

Tutto questo **indipendentemente dal percorso compiuto dal tratto!** Volendo avrei potuto prendere dei percorsi completamente diversi, tipo:



ed avrei **ottenuto la stessa identica formula**. Morale della favola:  $\oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)$  **NON dipende dal percorso che scelgo**. Dato che il percorso non ci interessa possiamo dire che il risultato di  $\oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)$  è un **integrando perfetto**, quindi lo possiamo "risolvere" in questo modo:

$$\oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right) \triangleq S(B) - S(A)$$

[Small nota di servizio: " $\triangleq$ " è "uguale per definizione"] Dove  $S$  corrisponde ad un nuova funzione di stato chiamata **entropia**. È anche possibile avere la "versione infinitesima" della variazione di entropia, ovvero  $\frac{dQ}{T} = dS$  (praticamente abbiamo solo tolto l'integrale, molto probabilmente è solo una notazione).

### 6.22.1 Variazione di entropia $\Delta S$

Ora un punto molto importante, possiamo dire che:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = \oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{per Rev Qualsiasi}}$$

Concentrati su quel "**per una reversibile qualsiasi**" (perRevQualsiasi): **la variazione di entropia, per una trasformazione qualsiasi (sia reversibile che non), dallo stato termodinamico A allo stato termodinamico B dipende soltanto dalla posizione di questi 2 punti, ed è completamente indipendente dal percorso che li congiunge!**

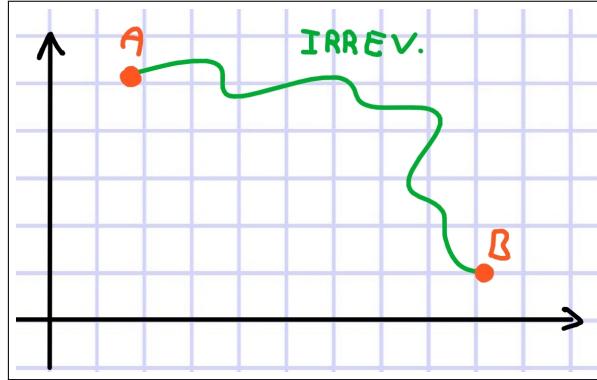
Calcolare la variazione di entropia è molto semplici: dato che non ci interessa il percorso, ci basta prendere **il punto iniziale ed il punto finale, scegliere la trasformazione REVERSIBILE più semplice tra questi 2 punti e calcolare l'integrale  $\oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)$ .**

### 6.22.2 Alcune osservazioni

Facciamo alcune osservazioni sull'entropia:

- l'entropia è una **quantità additiva**, ovvero: se abbiamo 2 sistemi (con relative entropie  $S_1$  ed  $S_2$ ) e creiamo un terzo sistema dall'**unione dei 2 sistemi precedenti**, l'entropia del terzo sistema corrisponderà a  $S_3 = S_1 + S_2$ ;

- l'entropia è una **grandezza fisica estensiva**, ovvero dipende dalle **dimensioni del sistema**, in particolare dal calore scambiato col sistema esterno (a sua volta il calore è anche un grandeza fisica estensiva);
- per il calcolo della  $\Delta S$  occore scegliere la trasformazione termodinamica **REVERSIBILE** più conveniente, ad esempio supponiamo di avere questa trasformazione irreversibile.



Dato che la trasformazione fornita è IRREVERSIBILE, non possiamo calcolarla  $\oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR}$ , questo perché  $\oint_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} \neq S_B - S_A$  (e anche perché calcolalo tu questo integrale :P). Supponendo che (il testo dell'esercizio ci dica che)  $T_A = T_B$ , allora possiamo **collegare i 2 stati termodinamici con una ISOTERMA REVERSIBILE**. Per quel caso specifico (dell'isoterma reversibile) noi SAPPIAMO che:

$$dQ = \frac{n * R * T}{V} dV \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{T} = n * R * \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right) = \int_A^B n * R * \frac{dV}{V}$$

A questo punto risolviamo semplicemente l'integrale, ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right) &= \int_A^B n * R * \frac{dV}{V} n * R * \int_A^B \frac{dV}{V} \\ &= n * R * (\ln(V_f) - \ln(V_i)) \\ &= n * R * \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \end{aligned}$$

Questa è la nostra **variazione di entropia!**

### 6.22.3 Variazione di entropia per le trasformazioni termodinamiche notevoli

Vediamo la formulazione della variazione di entropia per le principali trasformazioni termodinamiche:

**6.22.3.1 Trasformazione isoterma** Come abbiamo già visto prima, abbiamo che  $V_i \rightarrow V_f$  e sappiamo che  $dQ = \frac{n * R * T}{V} dV$ , quindi mettiamo insieme l'integrale e risolviamo:

$$\begin{aligned} \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right) &= \int_A^B n * R * \frac{dV}{V} n * R * \int_A^B \frac{dV}{V} \\ &= n * R * (\ln(V_f) - \ln(V_i)) \\ &= n * R * \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \end{aligned}$$

Quindi possiamo dire che per le isoterme  $\Delta S = n * R * (\ln(\frac{V_f}{V_i}))$ .

**6.22.3.2 Trasformazione isocora** In questo caso abbiamo  $dV = 0$ , di conseguenza anche  $W = 0$ . Per definizione, abbiamo quindi che  $dQ = dU = nc_v dT$ , di conseguenza la variazione infinitesima di entropia corrisponderà a  $\frac{dQ}{T} = nC_v \frac{dT}{T}$ . Facciamo l'integrale e, similmente a prima, finiamo con:  $\Delta S = n * R * \ln(\frac{T_f}{T_i})$ .

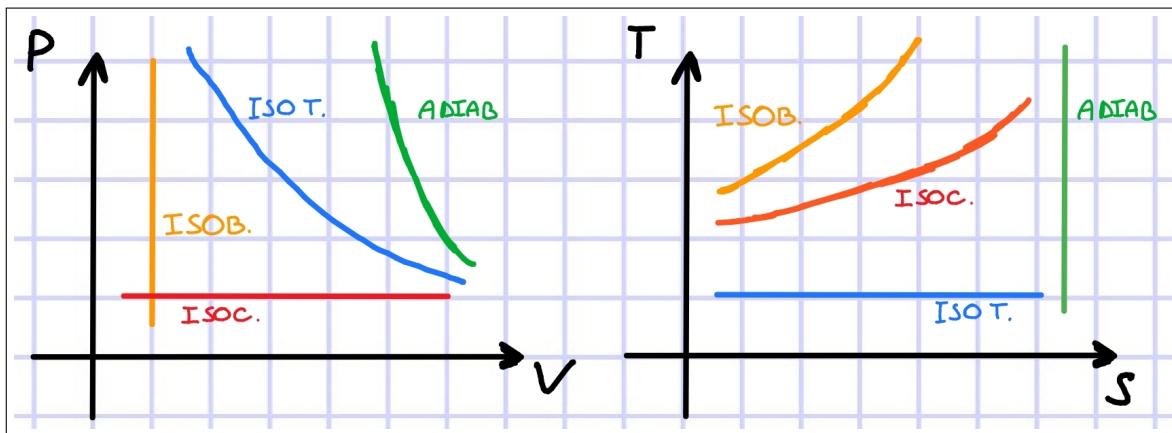
**6.22.3.3 Trasformazione isobara** Qui abbiamo che  $p = const$ , allora  $dQ = nc_p dT$ , quindi  $\frac{dQ}{T} = nc_p \frac{dT}{T} = dS$ , svolgendo l'integrale abbiamo:  $\Delta S = \int_i^f dS = n * c_p * \ln(\frac{T_f}{T_i})$ .

**6.22.3.4 Trasformazione adiabatica** Sappiamo che il  $dQ = 0$  (nelle adiabatiche non c'è scambio di temperatura), di conseguenza  $\int_A^B (\frac{dQ}{T}) \triangleq 0$  (per definizione degli integrali);

**6.22.3.5 Cambi di fase (non necessariamente gas ideali)** Allora, sappiamo che nei cambi di fase  $dQ = \lambda * dm$  (ricorda che  $\lambda$  corrisponde al calore latente, mentre  $dm$  corrisponde alla massa che cambia di fase). Ora basta applicare tutti i passaggi visti prima ed otteniamo che  $\frac{dQ}{T} = \frac{\lambda}{T} * dm = dS$  e fare l'integrale per ottenere:  $\Delta S = \int dS = \frac{\lambda * m}{T}$

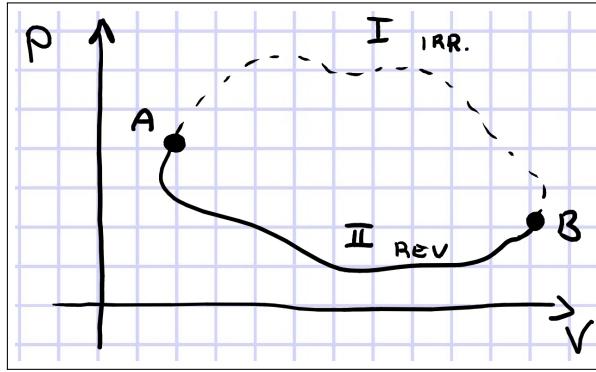
#### 6.22.4 Diagrammi T-S

Tutte le trasformazioni che abbiamo visto prima le possiamo anche rappresentare sui **diagrammi T-S**, che mettono in rapporto la temperatura con l'entropia:



#### 6.22.5 Teorema dell'entropia (formulazione matematica del secondo principio della termodinamica)

Supponiamo di avere una trasformazione ciclica divisa in 2 tratti: uno IRREVERSIBILE (I) ed uno REVERSIBILE (II).



Ora, per il **teorema di Clausius** abbiamo che:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

Dovrebbe essere " $\leq$ ", ma dato che la trasformazione comprende un tratto irreversibile va considerata tutta irreversibile! Possiamo quindi togliere l'"=" (che vale solo nel caso reversibile). Adesso facciamo un po' di passaggi algebrici:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

*Invertiamo la reversibile*

*Giriamo l'equazione per comodità*

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} < 0 \\ &\Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} < 0 \\ &\Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} < \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} \\ &\Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} \end{aligned}$$

Teniamo a mente questo pezzo, ci torna utile dopo. Fatto ciò, consideriamo una **sistema isolato** dove, per definizione,  $d\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ . Non abbiamo scambio di calore con l'esterno, quindi qualsiasi integrale della forma  $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right) = 0$ . Ora, ricordiamo a cosa corrisponde la variazione di entropia:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV}$$

Quindi, secondo questa definizione se  $dQ = 0$ , e se la trasformazione che facciamo è **reversibile**, allora anche  $\Delta S_{A \rightarrow B} = 0$ . Fin qui niente di strano. Ora però **riprendiamo quel pezzo di prima**:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR}$$

Questo è molto interessante: se lo scambio di calore è nullo, allora anche l'integrale di Clausius è nullo. Però, se questo è **relativo ad una trasformazione irreversibile rappresenterà** (matematicamente, per quanto abbiamo dimostrato prima) **una quantità inferiore alla variazione di entropia!** Di conseguenza, se  $dQ = 0$  e quindi  $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} = 0$  avremmo:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} = S_B - S_A > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} = 0$$

Quindi avremmo che  $S_B - S_A > 0$ . Mettendo tutto insieme, possiamo dire che:

$$S_B - S_A >= 0 \begin{cases} S_B = S_A & \text{Se trasformazione reversibile} \\ S_B > S_A & \text{Se trasformazione irreversibile} \end{cases}$$

Questo è un risultato molto importante: ***nei sistemi isolati, l'entropia NON PUO' MAI CALARE!*** Ciò viene anche chiamato *formulazione matematica del secondo principio della termodinamica*. Se poi andiamo a pensare che l'**l'universo può essere considerato un sistema isolato**, possiamo dire che **l'entropia dell'universo continua ad aumentare** (o al massimo resta uguale). Questo è un concetto interessante, da un senso fisico al tempo se ci pensiamo. In natura (fisicamente parlando), un evento avviene solo nel senso in cui aumenta l'entropia dell'universo!

## 6.23 Esercizi termodinamica

### 6.23.1 Esercizio n.10, esame giugno2021b

10. **(4 punti)** Un blocco di piombo viene lasciato cadere da fermo da un'altezza  $h$  (m). La temperatura iniziale del piombo è  $T_0$  ( $^{\circ}\text{C}$ ). Dopo l'urto col suolo, tutto il blocco di piombo si fonde. Si considerino il calore specifico del piombo solido  $c_p = 0.031 \text{ kcal}/(\text{K kg})$  e il calore latente di fusione del piombo  $\lambda_f = 6 \text{ kcal/kg}$ . Dati:  $h = 6600.0$ , trovare  $T_0$ .

Nel testo del problema manca  $T_f = 600K$  temperatura di fusione del piombo!!!!

Possiamo subito notare che il calore assorbito dal cubo di piombo ( $Q_A > 0$ ) è dovuto all'attrito con l'aria, il lavoro dell'attrito sarà quindi  $W_{ATT} < 0$ . Ora abbiamo variazione di energia interna,

$$\Delta U = Q - W = 0 \Rightarrow Q_A = -W_{ATT}$$

Osserviamo ora che il calore di fusione è,

$$Q_F = m\lambda$$

Ora osserviamo che l'energia potenziale iniziale è = 0 dato che il cubo di piombo parte da fermo, la variazione di energia potenziale è quindi,

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = Q_A + Q_F \Rightarrow Q$$

da questa sostituiamo e otteniamo,

$$mgh = mc\Delta T + m\lambda \Rightarrow gh = c(T_f - T_0) + \lambda$$

e da questa ci ricaviamo la temperatura iniziale  $T_0$  come segue,

$$T_0 = T_f - \frac{gh - \lambda}{c}$$

Ora convertiamo  $c$  e  $\lambda$ ,

$$c = 0.031 \frac{kcal}{Kkg} = 0.031 * 4184 \frac{J}{Kkg} = 0.129 * 10^3 \frac{J}{Kkg}$$

$$\lambda = 6 \frac{kcal}{kg} = 6 * 4184 \frac{J}{kg} = 25.1 * 10^3 \frac{J}{kg}$$

Ora sostituiamo i valori e calcoliamo la temperatura iniziale,

$$T_0 = 600K - \frac{9.8 \frac{m}{s^2} * 6, 6 * 10^3 m - 25, 2 * 10^3 \frac{J}{kg}}{0.126 * 10^3 \frac{J}{Kkg}} = 600K - \frac{6.4 * 10^4 \frac{m^2}{s^2} - 2.52 * 10^4 \frac{\frac{kgm^2}{s^2}}{Kkg}}{0.0126 * 10^4 \frac{\frac{kgm^2}{s^2}}{Kkg}}$$

$$= 600K - \frac{6.4 * 10^4 - 2.52 * 10^4}{0.0126 * 10^4 \frac{1}{K}} = 600K - \frac{6.4 - 2.52}{0.0126} K = 600K - 308K = 292K$$

Ora convertiamo la temperatura in  $^{\circ}C$ ,

$$292 - 273.16 = 18.84^{\circ}C$$

### 6.23.2 Entropia esercizio n.10, esame giugno2021b

Arrivati ora alla soluzione dell'esercizio precedente proviamo a calcolare l'entropia,

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}$$

dove  $AB$  indica la caduta e  $BC$  indica la fusione.// Ai dati precedenti aggiungiamo massa  $m = 70g$  e ora possiamo procedere con l'esercizio. Calcoliamo prima la parte di caduta che è una isobara,

$$\Delta S_{AB} = m \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) = 70 * 10^{-3} \text{kg} * 1.26 * 10^2 \frac{J}{K \text{kg}} \ln\left(\frac{600K}{292K}\right) = 8.8 \frac{J}{K} \ln(2.05) = 6.34 \frac{J}{K}$$

Calcoliamo ora la parte di fusione che è un cambiamento di fase,

$$\Delta S_{BC} = \frac{\lambda m}{T_F} = \frac{2.5 * 10^4 \frac{J}{kg} * 70 * 10^{-3} \text{kg}}{600K} = \frac{1750J}{600K} = 2.92 \frac{J}{K}$$

Ora quindi ho che,

$$\Delta S = 6.34 + 2.92 = 9.26 \frac{J}{K}$$

## 7 Elettromagnetismo

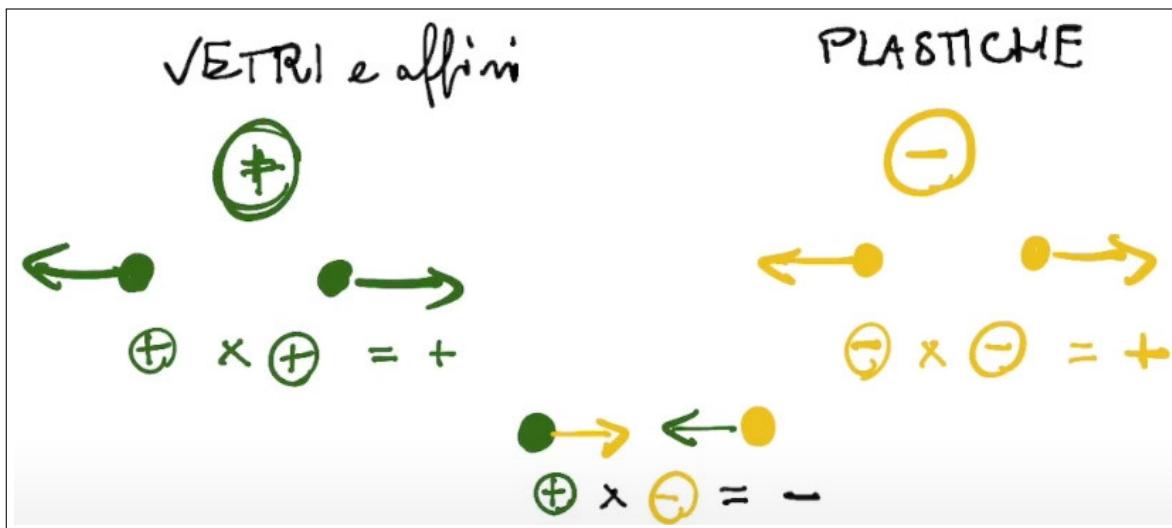
### 7.1 Introduzione all'elettromagnetismo

In natura, esistono 2 tipi di materiali (elettricamente parlando):

- **conduttori:** materiali abbastanza noiosi (PER IL PROGRAMMA CHE ABBIAMO FATTO NOI QUEST'ANNO) perché **non si magnetizzano**;
- **isolanti:** tali materiali **possono essere "elettrizzati"** (ovvero possono assumere delle cariche). Di questi possiamo applicare un'altra classificazione:
  - **vetri e affini**;
  - **plastiche**.

## 7.2 Forza di Coulomb

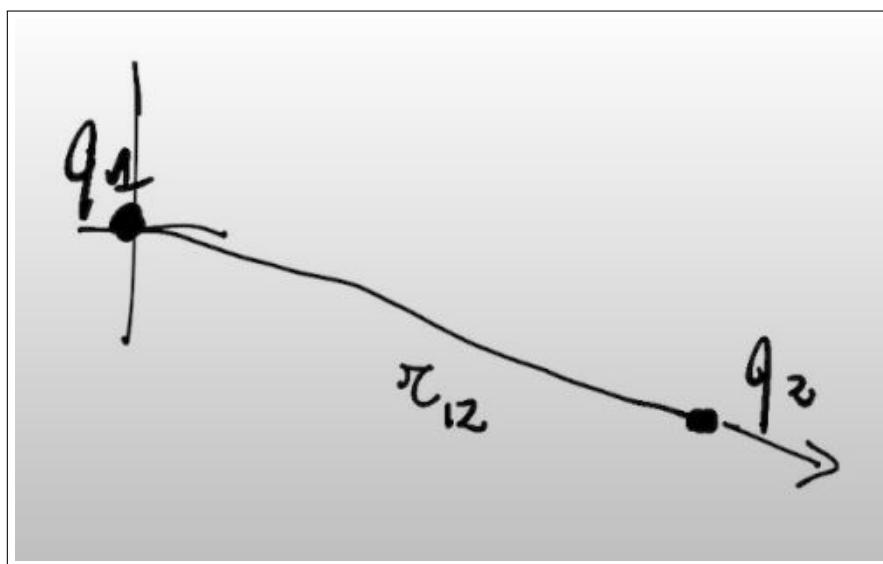
Vediamo ora perché questa classificazione è interessante:



Ovvero, 2 cariche dello stesso materiale (vetri/vetri o plastiche/plastiche) poste vicine si **respingono tra loro**. Al contrario, 2 cariche di materiali diversi (vetri/plastiche) si **attraggono!** Per esplicitare questo concetto di attrazione/repulsione associamo alle cariche dei vetri il **segno +**, mentre alle cariche dei materiali plastici associamo il **segno -**. Altro elemento importante è che tale forza si manifesta sull'**asse congiungente le 2 cariche**. Ora, come quantifichiamo questa forza? Possiamo usare la **forza di Coulomb**:

$$F_{el} = K * \frac{q_1 * q_2}{r_{1,2}^2} * r_{1,2}^\wedge = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q_1 * q_2}{r_{1,2}^2} * r_{1,2}^\wedge$$

Dunque, la **forza elettrica** ( $F_{el}$ ) è una forza appunto, quindi unità di misura *Newton*, per quanto riguarda le 2 cariche  $q_1$  e  $q_2$  hanno come unità di misura il *Coulomb*. Per quanto riguarda  $K$  invece è una costante che permette di ottenere una forza appunto, a sua volta può essere **scomposta** come  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  (utile quando usiamo il teorema di Gauss) dove compare la **costante dielettrica del vuoto**  $\epsilon_0 = 8,85418 * 10^{-12} \frac{C^2}{N*m^2}$ . Facciamo un disegnino per visualizzare meglio la situazione:



Nota che noi supponiamo sempre che le 2 cariche siano ferme.

### 7.2.1 Digressione sugli atomi

La materia è composta da atomi, a loro volta gli atomi sono composti da un **nucleo** di **protoni** (carica positiva), **neutroni** (carica neutra, sono la "colla" che tiene insieme i protoni [altrimenti le cariche positive si respingerebbero tra di loro]) ed **elettroni** (carica negativa). Di solito, l'atomo ha una carica elettrica complessiva nulla (**i protoni si bilanciano con gli elettroni**), però è possibile "strappare" o aggiungere degli elettroni, in modo che l'atomo abbia una carica elettrica. Ora, è possibile osservare che **non esistono cariche libere più piccole di una certa soglia** (che corrisponde alla carica dell'elettrone/protone), ovvero  $e = 1,602 * 10^{-19} C$ . Possiamo fare una tabellina veloce:

|                  | Carica | Massa                         |
|------------------|--------|-------------------------------|
| <b>Elettrone</b> | $-e$   | $m_{el} = 0,91 * 10^{-30} Kg$ |
| <b>Protone</b>   | $+e$   | $m_{pr} = 1,67 * 10^{-27} Kg$ |
| <b>Neutrone</b>  | 0      | $m_{ne} \approx m_{pr}$       |

Ora, perché mettiamo anche la massa? Possiamo notare che la *forza di gravitazione universale* e la *forza di Coulomb* hanno una forma **estremamente simile!** Risulta quindi naturale provare a confrontare le 2 forze, possiamo immaginare di usare un altomo di idrogeno (1 protone e 1 elettrone). Abbiamo quindi:

$$\langle r \rangle = 5,3 * 10^{-11} m$$

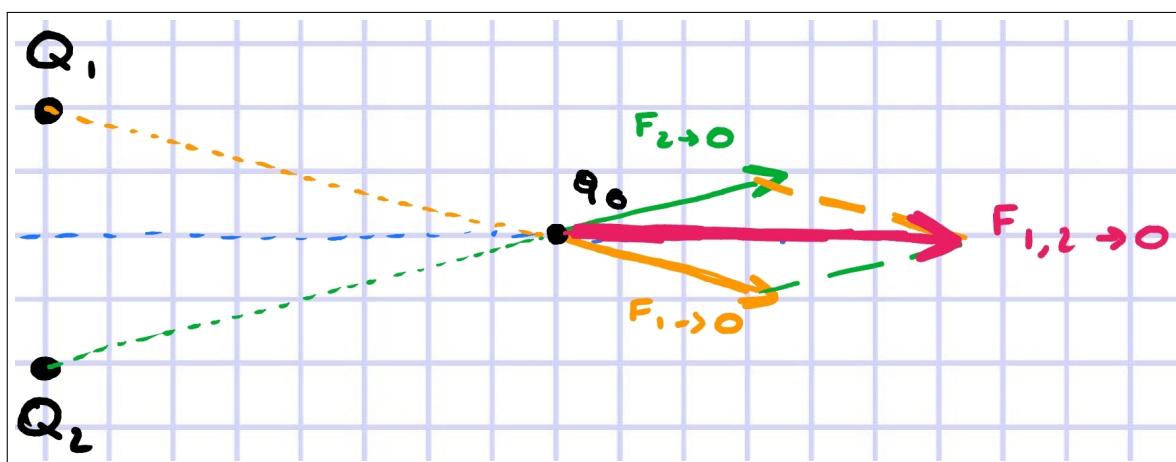
$$F_{el} = -K * \frac{e^2}{\langle r \rangle^2} \approx -8,2 * 10^{-8} N \quad \text{Forza elettrica}$$

$$F_{gr} = -G * \frac{m_e * m_p}{\langle r \rangle^2} \approx -3,6 * 10^{-47} N \quad \text{Forza gravitazionale}$$

Si nota che **la forza gravitazionale è diversi ordini di grandezza inferiore a quella elettrica!** Risulta quindi sensato ignorare la forza gravitazionale all'interno dei legami atomici!

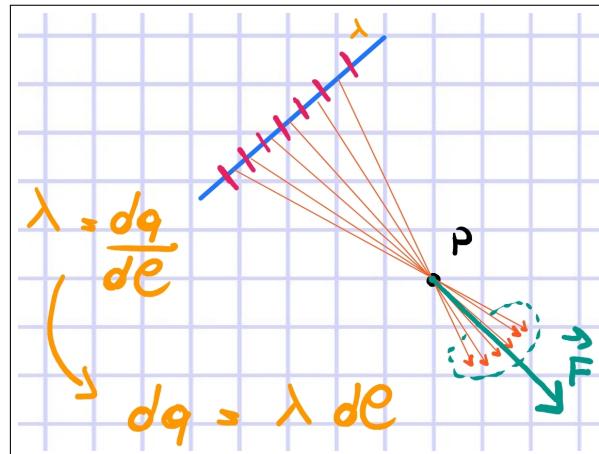
### 7.3 Principio di sovrapposizione

Supponiamo di essere in questa situazione: abbiamo **2 cariche** "importanti" statiche ( $Q_1$  e  $Q_2$ ) ed una **carica di prova** ( $q_0$ ). Ora, la carica di  $q_0$  è **molto minore rispetto alle altre 2** ( $|q_0| \ll Q_1$  e  $|q_0| \ll Q_2$ ): questo è molto importante perché, come già detto prima, esiste una carica "elettromagnetica" [ricontrolla questo ""] **minima** ( $1,6 * 10^{-19} C$ ) **sotto la quale non si può andare!** Quindi anche  $q_0$  ha una carica elettrica che va ad interagire con le altre 2 cariche e, quindi, a perturbare il nostro sistema! Questa supposizione serve a perturbare il sistema il meno possibile. Tornando al discorso iniziale, supponiamo di avere queste cariche posizionate in su un piano e che interagiscano tra loro in questo modo:

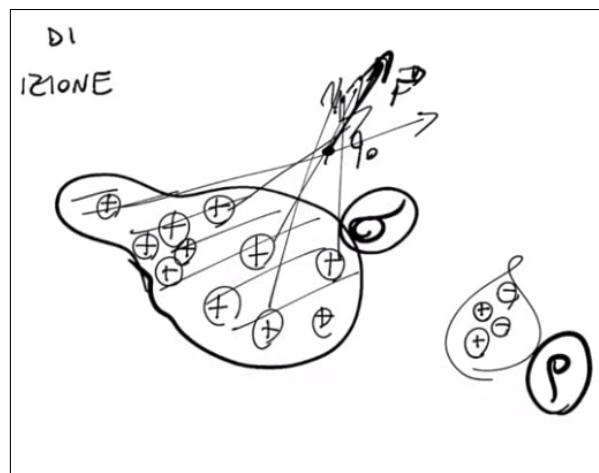


Secondo la **legge di Coulomb**,  $Q_1$  eserciterà una forza  $F_{1 \rightarrow 0}$  sulla carica  $q_0$  (lo stesso vale per  $Q_2$  con la forza  $F_{2 \rightarrow 0}$ ), possiamo immaginare che le 2 forze siano quelle mostrate in figura (sono uguali solo per puro caso). Ora, per capire quale forza agisce complessivamente sulla carica  $q_0$  possiamo **sommare i 2 vettori delle forze secondo la regola del parallelogramma**: per fare questo ci avvaliamo del **principio di sovrapposizione**, che ci garantisce che l'interazione tra  $Q_1$  e  $q_0$  non viene perturbata in alcun modo dall'interazione tra  $Q_2$  e  $q_0$  e viceversa, permettendoci quindi di "sovraporre" le 2 forze! (Sostanzialmente, il principio di sovrapposizione dice solo la parte sulla sovrapposizione, la prima parte delle interazioni è una conseguenza di questa seconda parte :P)

In questo caso specifico abbiamo solo 2 cariche puntiformi, però nulla ci vieta di usare N cariche disposte in varie forme, ad esempio un cavo:



In questo caso però si deve introdurre una **densità lineare di carica** " $\lambda$ " che, sostanzialmente, corrisponde alla **quantità di carica** ( $dq$ ) disposta presente in una certa lunghezza di filo ( $dl$ ). Come per l'esempio delle cariche puntiformi, la forza totale che agisce su  $q_0$  corrisponde alla **sovrapposizione di tutte le forze (infinitesime) delle varie cariche (infinitesime, infatti  $dq = \lambda dl$ )**. Allo stesso modo, il discorso si può estendere a 2 e 3 dimensioni, l'unica cosa che cambia è che al posto di  $\lambda$  (1-D) avremmo  $\sigma$  (2-D, *densità superficiale di carica*) e  $\rho$  (3-D, *densità volumica di carica*):



## 7.4 Campo elettrico

Diventa interessante analizzare l'effetto che le cariche hanno sulla carica di prova **senza considerare le cariche stesse** (senza dover quindi effettuare un integrale considerando tutte le cariche)! Per questo motivo

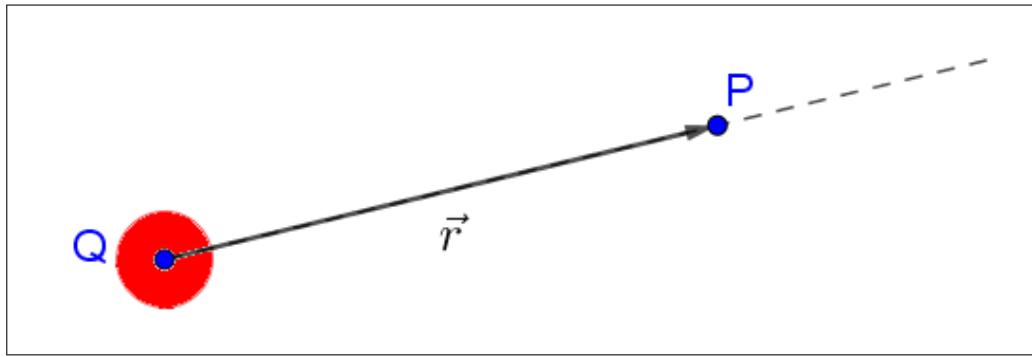
viene introdotto il concetto di **campo elettrico** (o meglio, *elettrostatico* dato che le nostre cariche sono ferme). Formalmente, definiamo il campo elettrico ( $\vec{E}$ ) come il rapporto tra la forza provata dalla carica di prova ( $\vec{F}$ ) e la carica di prova stessa ( $q_0$ ), quindi:

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Pensa a  $q_0$  come ad una sonda che **va a misurare la forza in un certo punto dello spazio**, misurando questa forza in, idealmente, tutte le possibili posizioni e mettendo tutto insieme otteniamo un **campo vettoriale** dove ad ogni posizione è assegnato un vettore!

#### 7.4.1 Campo elettrico per campo puntiforme

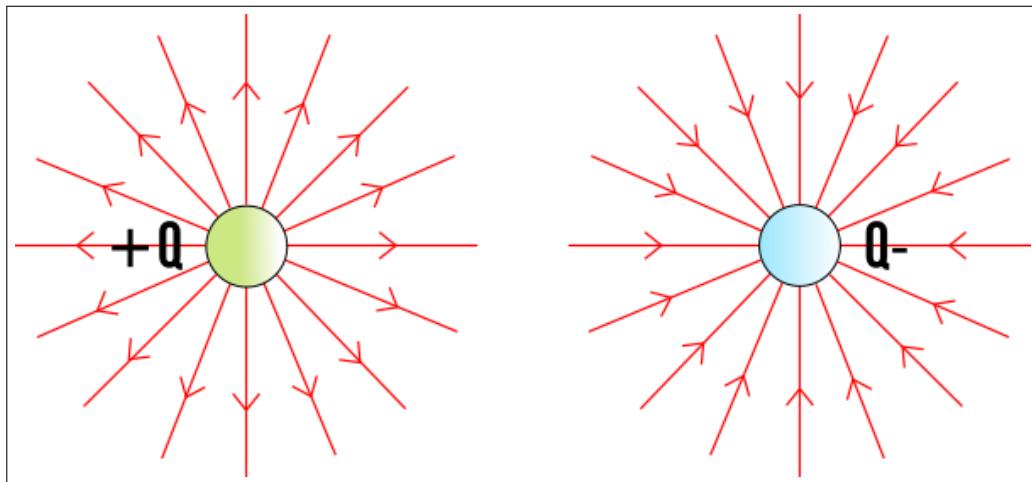
Cominciamo considerando una **carica puntiforme**: se inseriamo la nostra sonda e facciamo un sistema del genere:



Possiamo dire che, per definizione, il campo elettrico della carica  $Q$  corrisponde a:

$$\vec{F} = K * \frac{q_0 * Q}{r^2} \hat{r} \quad \Rightarrow \vec{E} = K * \frac{q_0 * Q}{r^2 * q_0} \hat{r} = K * \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Si nota facilmente che, tralasciando la costante elettrica  $K$ , il campo elettrico è **direttamente proporzionale alla carica elettrica  $Q$**  ed è **diretto in senso raiale alla carica**, ottenendo qualcosa del genere:

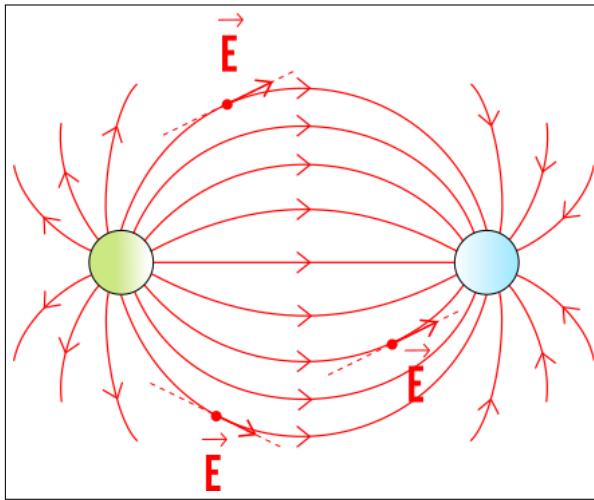


A livello di convenzione, si assume sempre che la nostra **carica di prova  $q_0$  sia positiva**, quindi:

- se  $Q > 0$  allora **il campo sarà uscente**;
- se  $Q < 0$  allora **il campo sarà entrante**;

### 7.4.2 Campo di dipolo

Se ora prendiamo 2 sorgenti puntiformi statiche di segno opposto e le mettiamo vicine. Per ogni carica puntiforme ci saranno delle **linee di campo** (uscenti per  $+Q$  ed entranti per  $-Q$ ) e, se le congiungiamo, otteniamo un campo elettrico del genere:



In ogni posizione associamo un vettore che indica il campo elettrico in quel punto specifico: in questo caso il campo elettrico sarà dato proprio dalla **sovraposizione delle forze delle 2 cariche Q!** Se ci viene fornita la funzione che descrive questo **campo elettrico in funzione della posizione**, ci **risparmiamo tutto il lavoro sul calcolo degli effetti sulla carica di prova dovuti all'interazione con tutte le sorgenti del nostro sistema!** In un certo senso, la nozione di campo elettrico ci permette di descrivere la "realtà fisica" del nostro sistema **senza dover considerare in modo "geometrico, perfetto" le sorgenti del campo** (le sorgenti potrebbero essere estremamente tante, irregolari, difficili da analizzare o, adirittura, impossibili da analizzare perché magari non le conosciamo, quindi con il campo elettrico andiamo a considerare solo l'effetto che queste cariche hanno sulla nostra carica di prova).

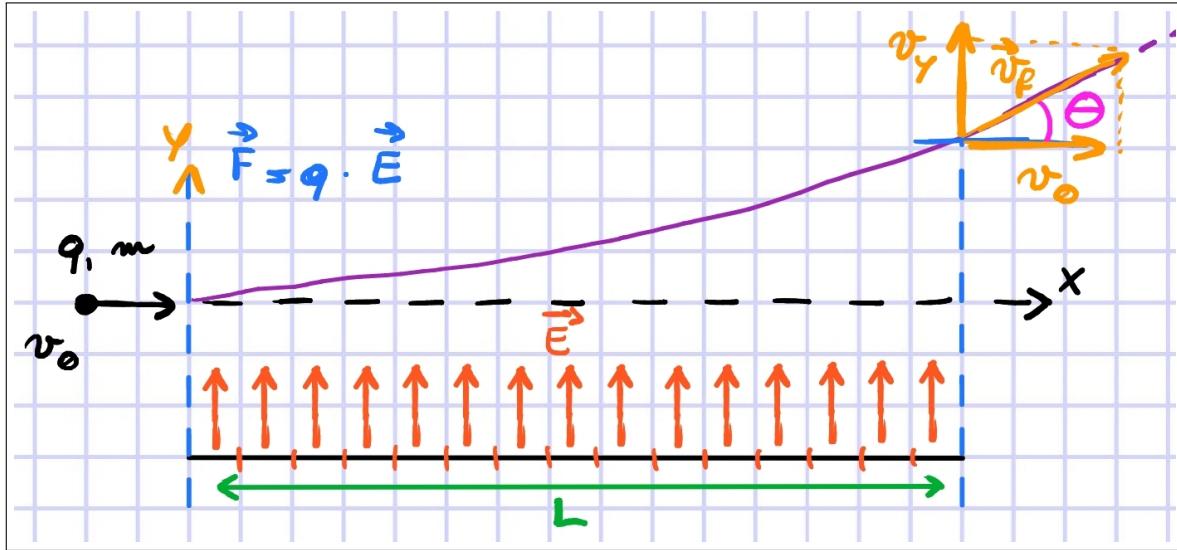
Nota però che con questa rappresentazione grafica perdiamo la quantificazione del modulo del vettore della forza nella posizione specifica, ma questo non è un problema.

### 7.4.3 Esempio di esercizio con il campo elettrico

La formula fondamentale per lavorare negli esercizi con i campi elettrici è questa:

$$\vec{F}(\vec{r}) \triangleq q * \vec{E}(\vec{r})$$

Vediamo il problema:



Dunque, abbiamo una **carica di prova**  $p$  di massa  $m$  che si muove ad una velocità  $v_0$ . Ad un certo punto **entra nel campo elettrico** (nota che nella realtà uno "spezzamento" così netto tra "campo elettrico" e "non campo elettrico" non è realizzabile, in questo caso facciamo delle approssimazioni e non ci interessa :P). Ora, entrando nel campo elettrico, la nostra carica di prova "devia" dal suo percorso: quando uscirà dal campo elettrico, lo farà con un **certo angolo**  $\theta$ . Conoscendo il **campo elettrico**  $\vec{E}$ , quanto vale l'**angolo**  $\theta$ ?

Allora, cominciamo con la seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m * \vec{a} = m * \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Però a cosa corrisponde quella forza specifica? Proprio alla forza dovuta all'campo elettrico:

$$\vec{F} = q * \vec{E} = q * E * \hat{y}$$

Ora, quest'ultimo pezzo è importante: la forza legata al **campo elettrico agisce solo sull'asse y!** La velocità della carica sull'asse x quindi resterà costante:

$$\begin{cases} x) \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ y) \begin{cases} \vec{F} = m * a_y = m * \frac{dv_y}{dt} \\ \vec{F} = q * \vec{E} = q * E \end{cases} \end{cases} \quad \text{Perche } v_x \text{ costante} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{q * E}{m}$$

Facciamo qualche magheggio da fisico su **questo pezzo**, ottenendo:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q * E}{m}$$

$v_y$  dipende da  $t$  perche tutto il resto e' costante

$$\begin{aligned} &\Rightarrow dv_y = \frac{q * E}{m} * dt \\ &\Rightarrow \int dv_y = \int \frac{q * E}{m} * dt \\ &\Rightarrow v_y(t) = \frac{q * E}{m} * t \end{aligned}$$

Bene, abbiamo ottenuto  $v_y$  in funzione del tempo  $t$ : quanto vale  $t$ ? Possiamo scoprilo sfruttando la x:

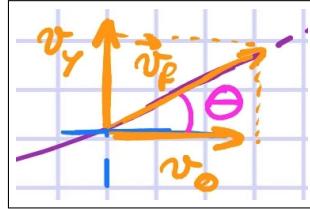
$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = 0 &\Rightarrow v_x = \text{const} = v_0 \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \\ &\Rightarrow dx = v_0 dt \\ &\Rightarrow \int dx = \int v_0 dt \\ &\Rightarrow \int dx = v_0 \int dt \\ &\Rightarrow x(t) = v_0 * t \\ &\Rightarrow \frac{x(t)}{v_0} = t \end{aligned}$$

Ora che abbiamo il **tempo** per percorrere lo spazio L (fai riferimento al disegno) possiamo **sostituirlo nell'equazione della velocità!**

$$\begin{cases} t = \frac{x(t)}{v_0} \\ v_y(t) = \frac{q*E}{m} * t \end{cases} \Rightarrow v_y(t) = \frac{q*E}{m} * \frac{x(t)}{v_0}$$

Abbiamo la **velocità su y**, come la riconduciamo all'**angolo theta**? Ricorda che:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_y = \sin(\theta) * |\vec{v}| \\ v_x = \cos(\theta) * |\vec{v}| \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{v}_y}{\mathbf{v}_x} = \frac{\sin(\theta) * |\vec{v}|}{\cos(\theta) * |\vec{v}|} = \tan(\theta)$$



Ora ci basta mettere tutto a sistema:

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan(\theta) = \frac{q*E}{m} * \frac{x(t)}{v_0} * \frac{1}{v_0} = \frac{q*E}{m} * \frac{L}{v_0^2}$$

Ricorda che  $x(t) = L$ . Abbiamo finito, questo è il nostro risultato finale:

$$\tan(\theta) = \frac{\mathbf{q} * \mathbf{E}}{\mathbf{m}} * \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{v}_0^2} = \frac{q * E * L}{2 * (\frac{1}{2} * m * v_0^2)} = \frac{q * E * L}{2 * E_{K,ini}}$$

Volendo è possibile fare qualche trasformazione algebrica per ricondurci alla **all'energia cinetica della particella di prova** (utile per fare delle considerazioni teoriche, esperimento di Rutherford).

## 7.5 Circuitazione e potenziale elettrico

Dato che parliamo di "forza elettrica" (quella di *Coulomb*) ha senso cercare di **calcolare il lavoro compiuto da tale forza!** Noi consideriamo solo il **caso elettrostatico** (dato che abbiamo fatto solo quello). Dunque,

la definizione generale di lavoro ci dice che, il lavoro ampiuto da una forza tra il punto A ed il punto B corrisponde a:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A \vec{F} d\vec{s}$$

A questa definizione possiamo applicare quella di **campo elettrico** (per la precisione, *elettrostatico*), ottenendo:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A \vec{F} ds = \int_B^A q * \vec{E} ds$$

E togliamo la "q" dall'integrale in quanto costante:

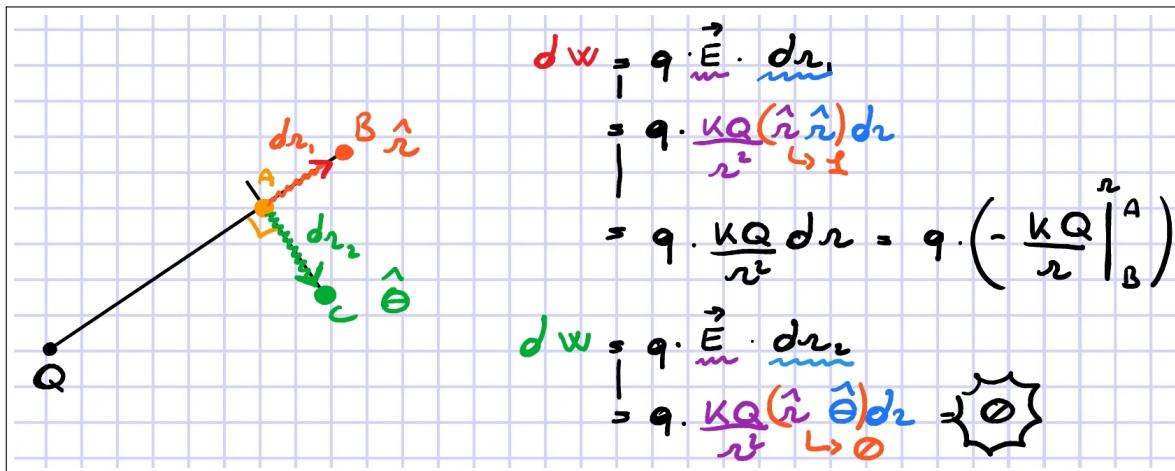
$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A \vec{F} ds = \int_B^A q * \vec{E} ds = q * \int_B^A \vec{E} ds$$

Ora **questo pezzo** viene chiamato **circuitazione**, nel caso delle cariche statiche vale:

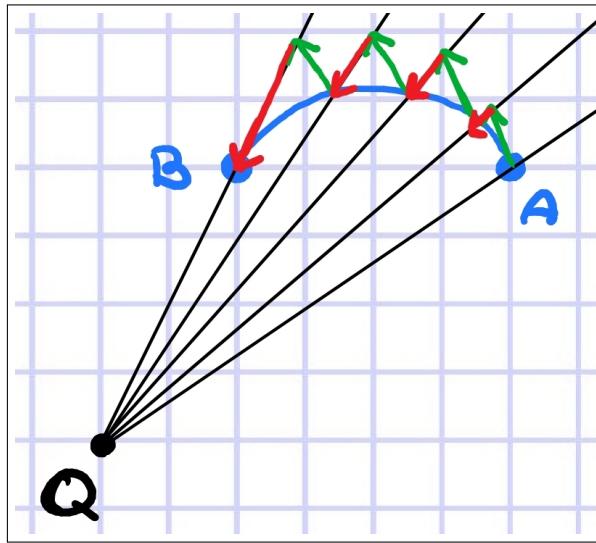
$$\oint \vec{E} ds = 0$$

### 7.5.1 Energia potenziale elettrica e potenziale (sono 2 cose relativamente diverse :P) nel caso di cariche puntiformi singole

Allora, nel caso delle cariche singole possiamo dimostrare che la circuitazione vale 0 in modo molto semplice. Per farlo, "calcoliamo" quanto vale il lavoro per gli spostamenti "elementrari", in particolare quelli "**radiali alla carica**" (paralleli al versore con la carica) e quelli "**ortogonali alla carica**" (ortogonali al versore con la carica):



Il tutto si basa sui **versori**: nel caso rosso abbiamo  $\hat{r} * \hat{r} = 1$ , mentre nel caso verde abbiamo  $\hat{r} * \hat{\theta} = 0$  (infatti  $\hat{\theta}$  è ortogonale a  $\hat{r}$ , quindi il prodotto è uguale a 0), ciò porta tutto a 0! Ora, vediamo un esempio, supponiamo di avere questo spostamento da A a B:



L'idea è quella di **scomporre lo spostamento in tratti ortogonali e tratti radiali**. Alla fine possiamo calcolare il lavoro:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A dW = \int_B^A dW_{\text{ort}} + \int_B^A dW_{\text{rad}}$$

Però, sappiamo dalla dimostrazione data prima che il lavoro ortogonale è **uguale a 0!** Quindi:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A dW = \cancel{\int_B^A dW_{\text{ort}}} + \int_B^A dW_{\text{rad}}$$

Allora sviluppiamo l'integrale del lavoro radiale:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A dW_{\text{rad}} = q * \int_B^A \frac{KQ}{r^2} dr$$

Ora, supponiamo di avere "segmenti infinitamente piccoli", quindi avremmo qualcosa del tipo:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A dW_{\text{rad}} = q * \int_B^A \frac{KQ}{r^2} dr = -qQK \left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_A} \right) + \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_{N-2}} \right) + \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{N-1}} \right) \right]$$

Di questa serie infinita di addizioni e sottrazioni ci sono **un sacco di elementi che si annullano tra di loro!** In particolare lasceranno SOLO i punti agli estremi:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_B^A dW_{\text{rad}} = q * \int_B^A \frac{KQ}{r^2} dr = -qQK \left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_A} \right) + \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \dots + \left( \frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_{N-2}} \right) + \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{N-1}} \right) \right] = \frac{-qQK}{r_B} - \frac{-qQK}{r_A}$$

La cosa importante da ricordare qui è che **il lavoro dipende solo dagli estremi A e B!** Non da altri punti! Facciamo un po' di considerazioni:

- **energia potenziale elettrostatica:** dato che la forza elettrica è conservativa (ovvero il lavoro su un percorso chiuso è 0), possiamo dire che la **variazione di energia potenziale elettrica  $\Delta U$  corrisponde al lavoro \* -1:**

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -\Delta U_{AB} \\ &\quad \text{--- --- --- --- ---} \\ U_X &= \frac{KQq}{r_X} + \text{const} \end{aligned}$$

Nota che la  $const$  è una costante arbitraria (che nella pratica non è importante dato che quando facciamo la differenza si semplifica);

- La **forza potenziale elettrica è conservativa**, quindi abbiamo che:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Infatti sappiamo che " $W_{A \rightarrow A} = 0$ ", possiamo scomporre tale lavoro come " $W_{A \rightarrow A} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ ". Dato che " $q = const$ ", allora deve essere che " $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ "!

- **Differenza di potenziale  $\Delta V$** : come abbiamo fatto per il campo elettrico, viene naturale pensare di fare lo stesso con l'energia potenziale elettrica:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

Quindi possiamo dire che il **potenziale nella posizione A** corrisponde a:

$$V_A = \frac{KQ}{r_A} + const'$$

Ora, anche qui la costante  $const'$  è arbitraria e relativamente poco importante (a noi interessa la **differenza** di potenziale, quindi se facciamo la differenza questa costante si semplifica).

### 7.5.2 Energia potenziale elettrica e potenziale nel caso di cariche puntiformi multiple

Abbiamo visto il caso delle cariche puntiformi singole, ma nel caso ne avessimo di più? Sostanzialmente la stessa cosa di prima, però usiamo il **principio di sovreapposizione!** In pratica consiste nel calcolare il **lavoro/energia potenziale/potenziale** di tutte le cariche e li sommiamo!

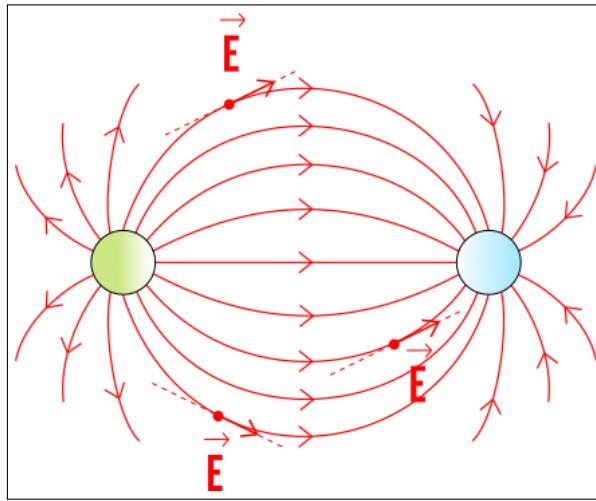
$$\begin{aligned} W_{TOT,A} &= \sum_i W_{i,A} \\ \Delta U_{TOT,A} &= \sum_i \Delta U_{i,A} \\ \Delta V_{TOT,A} &= \sum_i V_{i,A} \end{aligned}$$

## 7.6 Teorema di Gauss

Prima di introdurre il teorema vero e proprio, dobbiamo introdurre diversi concetti importanti:

### 7.6.1 Concetto di "linee di forza"

Possiamo rappresentare un campo vettoriale (un campo elettrico nel nostro caso) tramite delle **linee di forza**, ad esempio:



Da queste linee di forza possiamo "estrarre" le informazioni relative al vettore ( $\vec{v}$ ) di una certa posizione:

- **direzione di  $v_A$** : corrisponde alla tangente della linea di forza nella posizione A;
- **verso di  $v_A$** : corrisponde al verso di percorrenza della linea di forza nella posizione A;
- **modulo di  $v_A$** : corrisponde alla densità delle linee di forza nel punto A, non offre spunti di calcolo particolari ma è comunque utile per capire dove il campo è più o meno forte;

### 7.6.2 Concetto di "flusso di $\vec{v}$ "

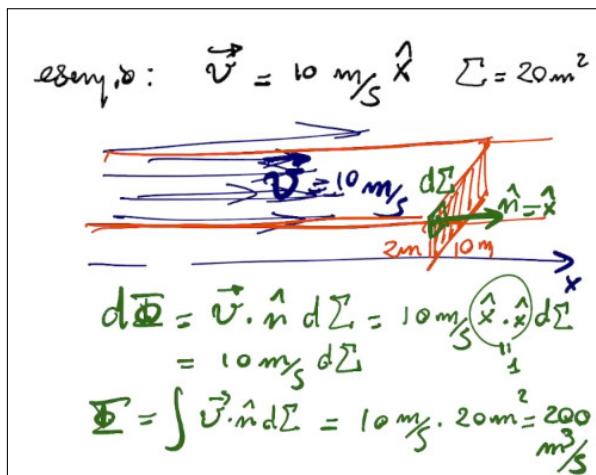
Supponiamo di avere una **superficie infinitesima  $d\Sigma$  rappresentata da un versore  $\hat{n}$**  (normale alla superficie). Ora, il flusso infinitesimo viene identificato come:

$$d\Phi = \vec{v} * \hat{n} * d\Sigma$$

Possiamo vederlo come la "*quantità infinitesima di forza che passa attraverso la superficie infinitesima*". Se immaginiamo di estendere tale superficie in modo che non sia più infinitesima, possiamo calcolare il flusso semplicemente applicando un integrale (inteso come la somma di tutte le aree infinitesime che rappresentano la nostra superficie non infinitesima):

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{v} * \hat{n} * d\Sigma$$

Vediamo un esempio veloce:



Supponiamo di avere un fiume dove l'acqua scorre con una velocità di  $10m/s$  lungo il versore  $\hat{x}$  e di avere una sezione del fiume con un'area di  $20m^2$ , identificata da un versore normale  $\hat{x}$  che ha la stessa direzione di  $\hat{x}$ . Ora, se volessimo calcolare il flusso di acqua che passa attraverso la sezione del fiume dovremmo semplicemente applicare la formula vista prima! Espandiamo un po':

$$\Phi = \int_{\Sigma} d\Phi = \int_{\Sigma} \vec{v} * \hat{n} * d\Sigma = (\vec{v} * \hat{n}) * \int_{\Sigma} d\Sigma$$

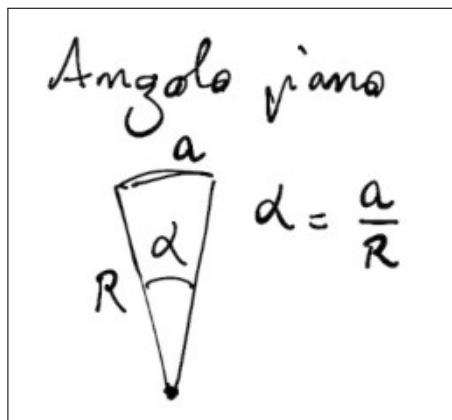
Dunque, questo pezzo lo portiamo fuori dato che non dipende da  $\Sigma$ , mentre quest'altro corrisponde, idealmente, alla somma di tutte le aree infinitesime che compongono la nostra area non infinitesima (quindi corrisponde proprio alla nostra superficie "completa"  $\Sigma$ ):

$$\Phi = (\vec{v} * \hat{n}) * \int_{\Sigma} d\Sigma = 10m/s * (\hat{x} * \hat{n}) * \Sigma = 10m/s * (1) * 20m^2 = 200m^3/s$$

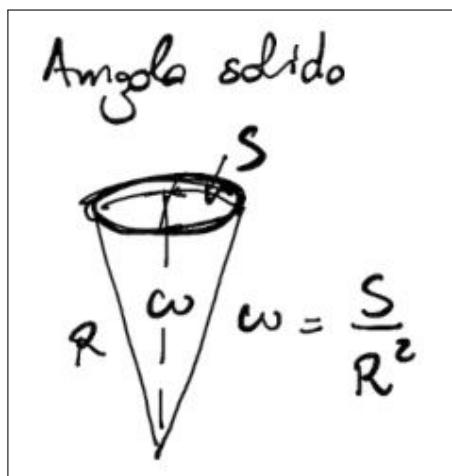
Molto semplice!

### 7.6.3 Concetto di "angolo solido"

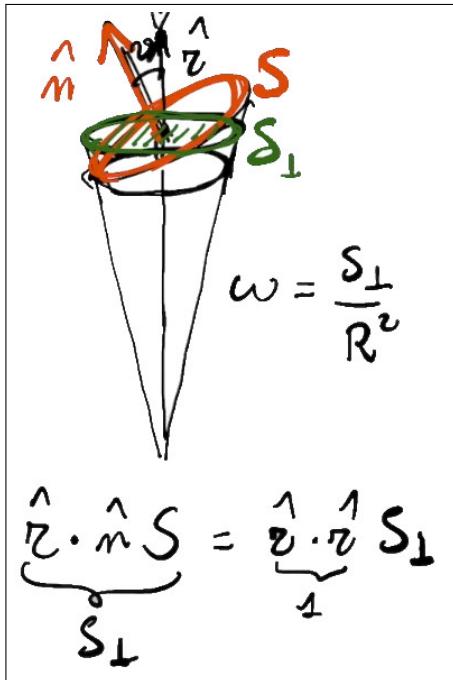
Anche qui il concetto è molto semplice, partiamo da quello di "angolo piano":



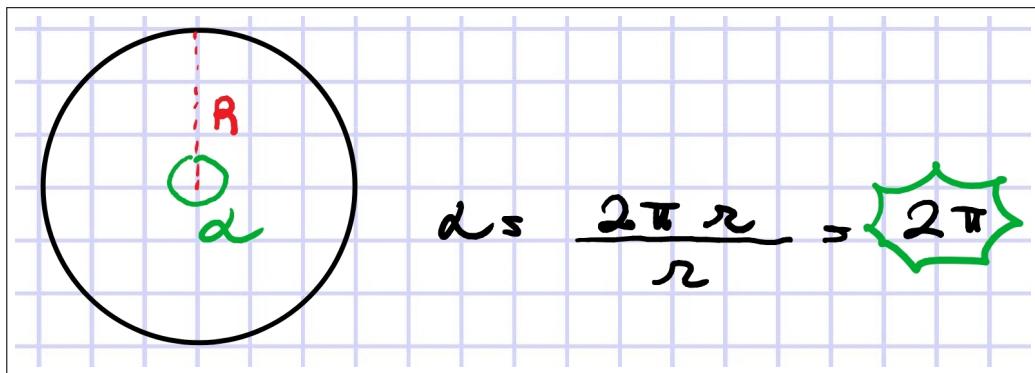
L'angolo  $\alpha$  corrisponde alla lunghezza della sezione circolare  $a$  fratto il raggio  $R$ . Ora, possiamo pensare di prendere questo concetto ed allargarlo aggiungendo una dimensione in più, ottenendo appunto l'**angolo solido**  $\omega$ !



Cosa succede però se abbiamo una calotta sferica (la  $S$ ) **non ortogonale** al raggio? Ricorda che possiamo identificare una superficie con il versore ortogonale associato, in altre parole cosa facciamo quanto il versore di  $S$  non è parallelo al raggio? Basta semplicemente fare la proiezione della calotta non ortogonale in modo che diventi ortogonale al raggio! In pratica basta fare così:



Ora un po' di considerazioni che ci serviranno in seguito, pensa all'angolo piano: quanto vale l'angolo piano totale? Il massimo che possiamo avere come arco è l'intero cerchio, quindi:



Se ci pensi è proprio **l'angolo giro espresso in radianti!** Ora, facciamo la stessa cosa con gli angoli solidi, la massima calotta sferica che possiamo avere è l'intera sfera, quindi:

$$\omega_{max} = \frac{\text{area sfera}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

Tieni a mente questa roba, torna dopo nella dimostrazione del teorema di gauss!

#### 7.6.4 Il teorema vero e proprio

Ora che abbiamo tutti i concetti fondamentali, possiamo introdurre il **teorema di Gauss** vero e proprio! La domanda a cui vogliamo rispondere è, quanto vale:

$$\oint \vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = ?$$

Ovvero, quanto vale il flusso che passa attraverso una superficie chiusa (il " $\oint$ " indica una superficie chiusa)? Vediamo un po' di casistiche:

#### 7.6.4.1 Cariche puntiformi

A sua volta, possiamo considerare anche altre casistiche:

**Cariche puntiformi singole interne a superfici chiuse** Dunque, ci troviamo in una situazione di questo tipo: Abbiamo una **carica**  $q$  che si trova all'interno di una certa superficie chiusa. Ora, scegliamo una generica  $d\Sigma$  che avrà un suo versore ortogonale  $\hat{n}$ . Quindi facciamo delle considerazioni sull'integrandi:

$$\vec{E} * \hat{n} * d\Sigma$$

Come prima cosa espandiamo la definizione di campo:

$$\vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0 * r^2} \hat{r} * \hat{n} d\Sigma$$

Bene, adesso questo pezzo è la definizione vista nell'angolo solido con la calotta non ortogonale, quindi la applichiamo ed otteniamo la **superficie ortogonale**:

$$\vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0 * r^2} \hat{r} * \hat{n} d\Sigma = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0 * r^2} * d\Sigma_{\perp}$$

Però sappiamo per la definizione di angolo solido, sappiamo che la superficie ortogonale corrisponde proprio all'angolo solido moltiplicato per il raggio<sup>2</sup> (dobbiamo fare una trasformazione veloce rispetto alla formula di prima, ma niente di speciale):

$$\vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0 * r^2} \hat{r} * \hat{n} d\Sigma = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0 * r^2} * d\Sigma_{\perp} = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0 * r^2} * \cancel{r^2} * d\omega = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} d\omega$$

Si può notare che è possibile semplificare un  $r^2$ ! Proprietà estremamente importante del teorema di gauss perchè ci dice che il flusso NON dipende dall'orientamento della superficie, infatti in qualsiasi modo sia orientata noi andremo solo a considerare l'angolo solido da cui "si vede" quella superficie. Ottimo! Possiamo reintrodurre l'integrale:

$$\oint \vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = \oint \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} d\omega$$

Portiamo fuori tutto quello che non dipende da  $\omega$  (quindi tutto :P):

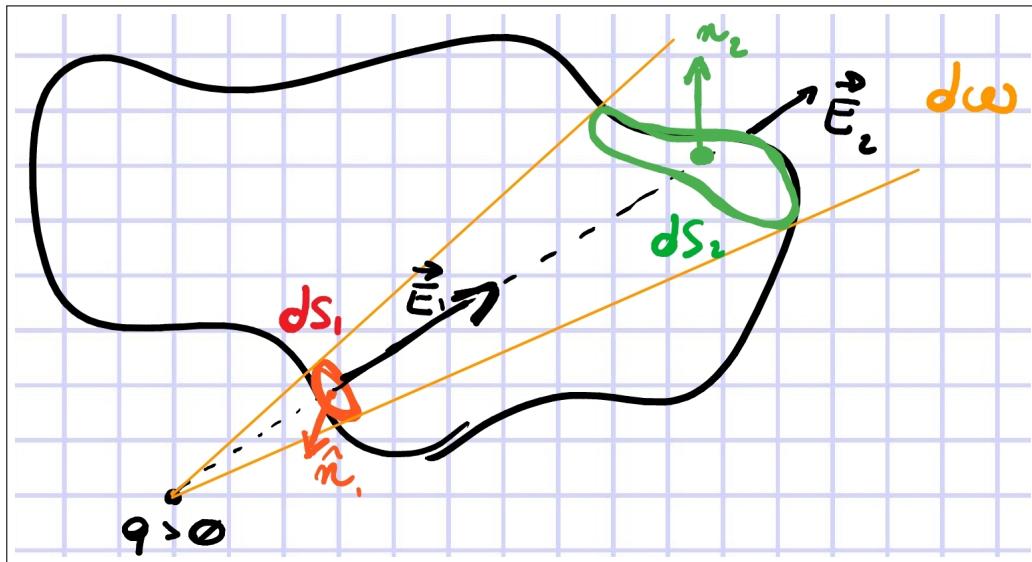
$$\oint \vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = \oint \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} d\omega = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} \oint d\omega$$

"Risolviamo" l'integrale e quello ci darà **l'angolo solido totale** che, abbiamo visto prima, vale proprio  $4\pi$ , quindi possiamo fare un'altra semplificazione:

$$\oint \vec{E} * \hat{n} * d\Sigma = \oint \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} d\omega = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} \oint d\omega = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} \omega_{TOT} = \frac{q}{4\pi * \epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**QUESTO** è il risultato finale! Ci dice che il flusso passante attraverso una superficie chiusa dipende solo dalla carica!

**Cariche puntiformi singole esterne a superfici chiuse** Risposta veloce: il flusso in questo caso vale **0!** Ma perché?



Dall'immagine possiamo notare che il flusso attraversa la superficie **2 volte**: la prima **entra** (quindi il flusso sarà negativo) e la seconda volta **escce** (quindi il flusso sarà negativo). Facciamo un po' di passaggi:

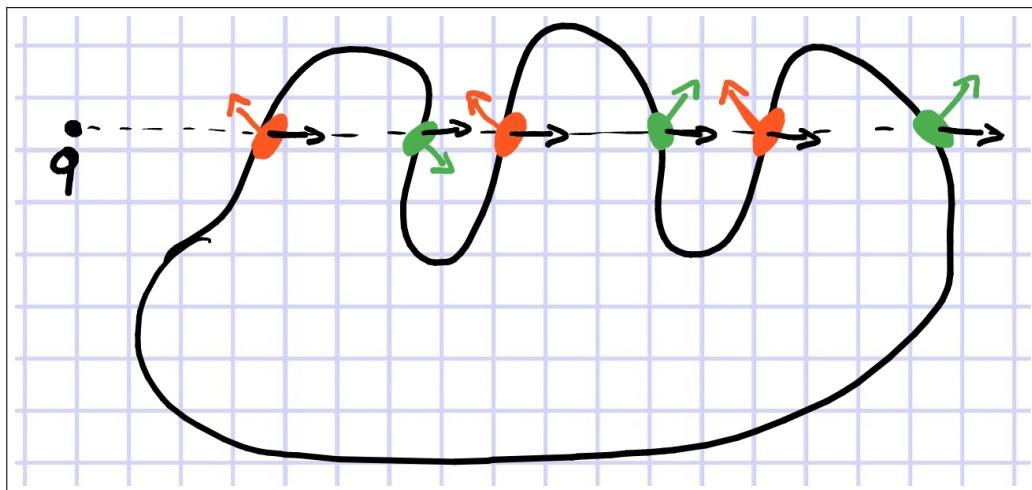
$$\vec{E}_1 * \hat{n}_1 * dS_1 = \dots = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_1$$

$$\vec{E}_2 * \hat{n}_2 * dS_2 = \dots = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_2$$

Ora, la "fregatura" sta nel fatto che, in entrambe le equazioni, **l'angolo solido è lo stesso!** Nel caso di  $dS_1$  la calotta sferica è più piccola, però è anche più vicina alla carica! Nel caso di  $dS_2$  invece è più grande, ma è anche più lontana dalla carica! Tutto si bilancia in modo che l'angolo solido è lo stesso! Per calcolare il flusso totale infinitesimo possiamo quindi sommare tutto, ottenendo:

$$\vec{E}_{TOT} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega = 0$$

Ma nel caso di forme strambe?



Nulla cambia, è un semplice concetto di topologia: se entro una volta, per forza devo anche uscire! Quindi ogni entrata sarà bilanciata da un uscita.

**Cariche puntiformi multiple** Molto semplice! Facciamo le stesse viste prima (sia nel caso delle cariche interne che esterne) ma usando il **principio di sovrapposizione!** In particolare avremmo che:

$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_{n-1} + \vec{E}_n$$

Di conseguenza:

$$\vec{\Phi}_{TOT} = \oint \vec{E}_{TOT} * \hat{n} * d\Sigma = \oint (\vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_n) * \hat{n} * d\Sigma$$

Dato che abbiamo una somma, possiamo spezzare l'integrale:

$$\vec{\Phi}_{TOT} = \oint (\vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_n) * \hat{n} * d\Sigma = \oint \vec{E}_1 * \hat{n} * d\Sigma + \dots + \oint \vec{E}_n * \hat{n} * d\Sigma$$

Ma **questi** sono proprio i flussi delle varie cariche, che per definizione (dimostrato prima) corrispondono proprio alla cariche fratto la costante dielettrica del vuoto:

$$\vec{\Phi}_{TOT} = \oint (\vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_n) * \hat{n} * d\Sigma = \oint \vec{E}_1 * \hat{n} * d\Sigma + \dots + \oint \vec{E}_n * \hat{n} * d\Sigma = \Phi_1 + \dots + \Phi_n = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\varepsilon_0}$$

Quindi possiamo riassumere il tutto come:

$$\vec{\Phi}_{TOT} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$