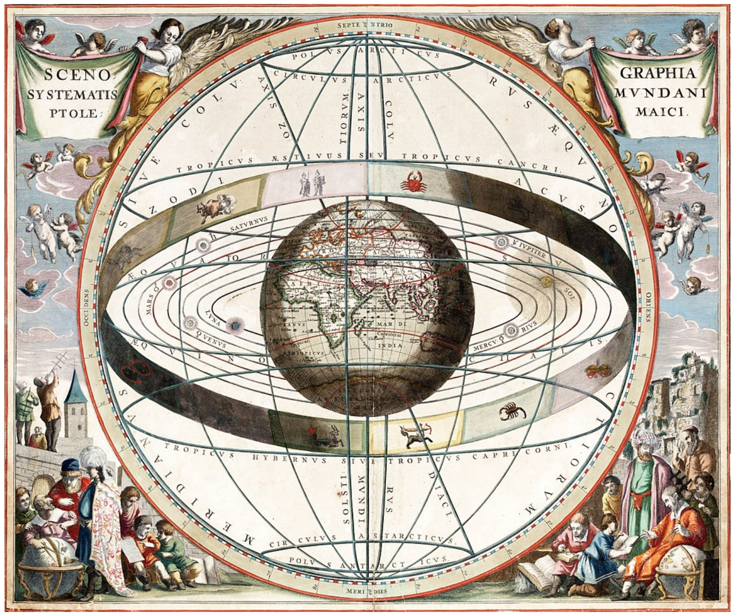


Fisica

UNITN - Lazzerini Thomas, Cappelletti Samuele

Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

Indice

1 Formulario

1.1 Unità di misura

T	=>	10^{12}	G	=>	10^{9}
M	=>	10^{6}	k	=>	10^{3}
m	=>	10^{-3}	μ	=>	10^{-6}
n	=>	10^{-9}	p	=>	10^{-12}

2 Introduzione

2.1 Il metodo sperimentale

Distingue discipline sperimentali da discipline non sperimentali. Si compone di diverse fasi:

1. **formulazione ipotesi**: si fa un'**ipostesi descrittiva** (in **linguaggio matematico**) della porzione di mondo che si vuole analizzare, di conseguenza si decide di **non considerare** altre caratteristiche del mondo che non centrano con l'ipotesi che stiamo formulando;

2. **esperimento**: si va a ricreare una situazione dove l'aspetto che vogliamo analizzare è **sicuramente presente** e **influenzato il meno possibile da fattori esterni**;

3. **esecuzione dell'esperimento**: si verifica l'ipotesi, formulata in modo matematico, confrontando i valori ottenuti con l'esperimento con quelli che si ottengono dalla nostra ipotesi.

In base alla "verifica" dell'ipotesi possiamo fare una differenziazione:

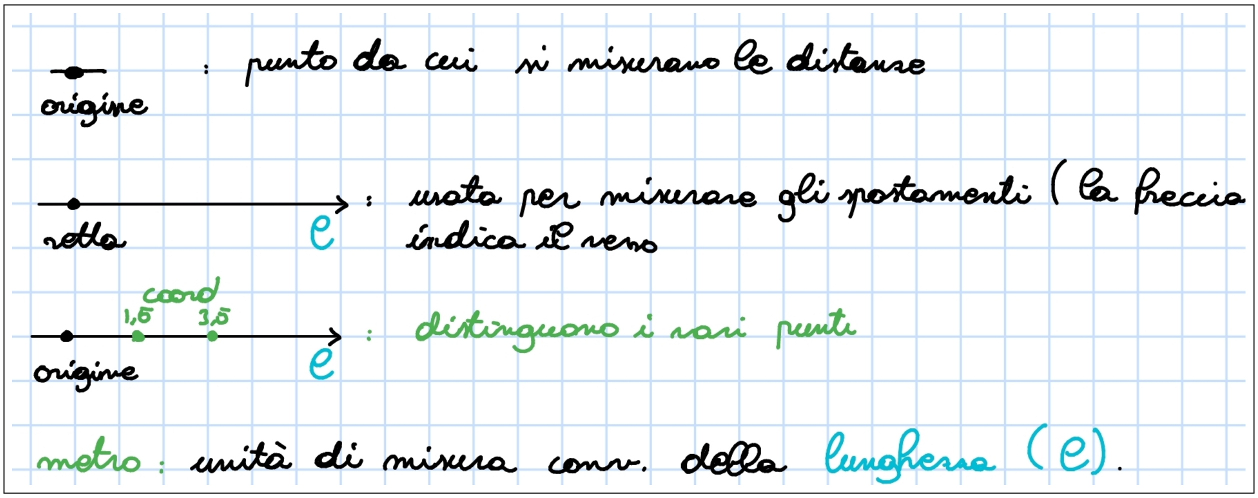
- **teoria**: l'ipotesi **non è ancora verificata**, o è verificata **parzialmente**;
- **legge fisica**: l'ipotesi **è verificata** (in un certo ambito);

3 Cinetica dei punti

Descrive il movimento dei corpi.

3.1 Sistema di riferimento

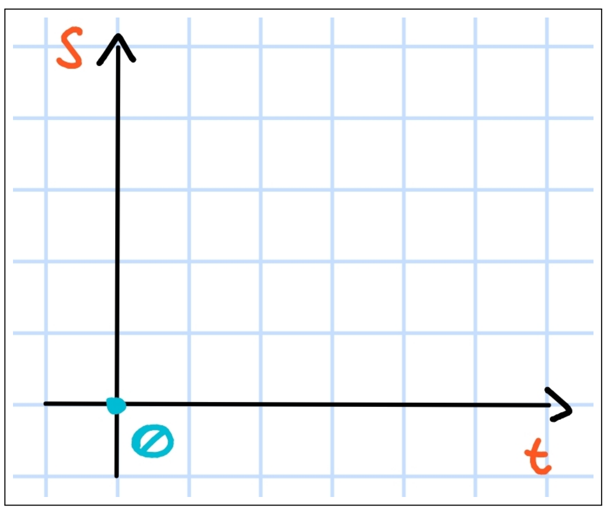
Specifichiamo un sistema di riferimento per il seguente argomento:



Una cosa importante da notare è che un numero singolo può rappresentare solo cose "**mono-dimensionali**" e che, soprattutto, non tutte le unità di misura possono rappresentare qualsiasi cosa (ad es.: l'età dell'universo non si può rappresentare con i metri).

3.2 Diagramma dello spazio

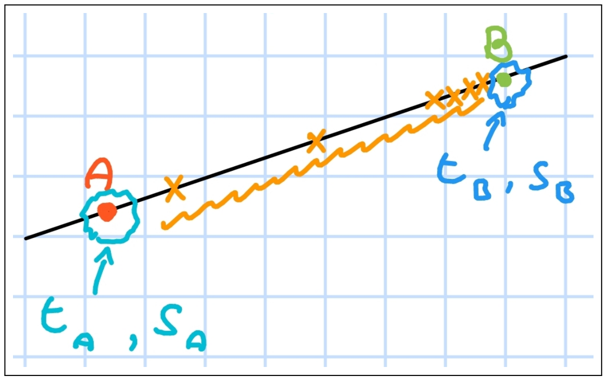
Rappresentiamo lo spostamento nel tempo tramite un "***diagramma dello spazio***":



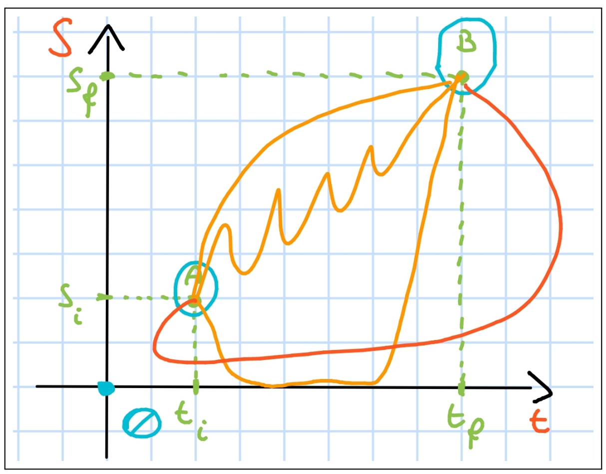
In particolare, in questo diagramma rappresentiamo sull'asse Y lo **spostamento** (s) (rappresentato come **valore uni-dimensionale**) e sull'asse X il **tempo** (t) (anche rappresentato come **valore uni-dimensionale**). *Nota che il diagrmma NON RAPPRESENTA una posizione, ma lo spostamento in relazione al tempo*.

3.3 Caso semplice

Vediamo un semplice caso di utilizzo per capire come usare i diagrammi dello spazio:



Possiamo immaginare di avere un oggetto in movimento su una retta tra i punti A e B, come possiamo rappresentare questo movimento nel diagramma? Come prima cosa posizioniamo i "fenomeni" (***def. qualcosa che appare evidente all'osservazione***), ovvero i **punti A e B**, nota che non è detto che questi punti coincidano con dei "punti particolari" (ad esempio l'origine) nel nostro diagramma. In particolare, a questi punti associamo **un valore sull'asse del tempo** (t_i, t_f) ed **un valore sull'asse dello spazio** (s_i, s_f). A questo punto esistono **infiniti possibili percorsi** tra il punto A ed il punto B, ad esempio:



Importante notare che ***non tutti questi percorsi, pur avendo senso matematico, hanno senso fisico***! Ad esempio, il percorso in rosso "torna indietro nel tempo"!

3.4 Moto rettilineo uniforme

STUB#################### (In teoria lo fa dopo, controllare)

3.5 Velocità

Possiamo immaginare la velocità (v) come la "***def. variazione dello spazio rapportato al tempo impiegato per percorrerlo***", in particolare la velocità è data dalla formula:

$$v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vediamo un semplice esempio:

$$s_i = 400m,\ s_f = 700m,\ t_i = 7:30 = 450min,\ t_f = 7:40 = 460min$$

$$v = \frac{700m - 400m}{460min - 450min} = \frac{300m}{600s} = 0,5m/s$$

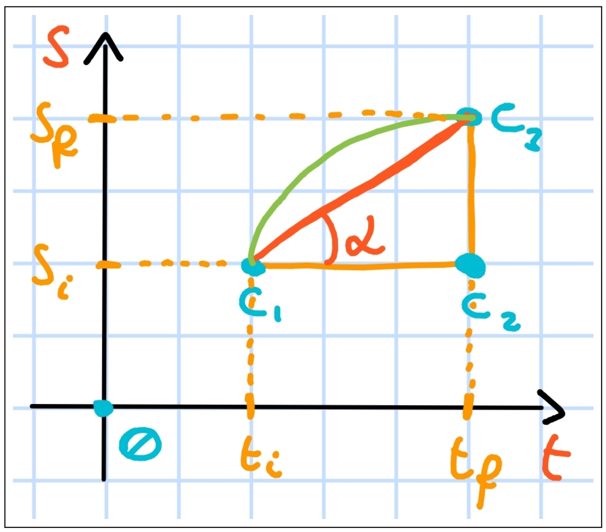
Nota che nella seconda uguaglianza nell'esempio abbiamo **convertito i minuti in secondi**, puoi immaginare che abbiamo posto "$min = (60s)$", quindi abbiamo fatto "$10min = 10 * (60s) = 600s$".

3.5.1 Velocità istantanea

Quella che abbiamo calcolato prima possiamo vederla come "velocità media" di tutto il percorso, la **velocità istantanea** invece possiamo vederla come la ***def. velocità in un punto specifico del percorso***. Immagina quindi di fare la formula:

$$v_{ist} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Nota che quando si usa la lettera "δ" stiamo ad indicare una **piccola** (infinitesima) **variazione**. Ora, se il valore di s viene espresso **in funzione di t**, quindi abbiamo $s(t)$, e la funzione "$s(t)$" è **derivabile**, allora la **velocità istantanea corrisponde alla derivata prima della funzione** $s(t)$, che a sua volta corrisponde a $\frac{ds}{dt}$.



Supponendo che il **moto del nostro punto** venga identificato dalla curva in verde, il rapporto tra la lunghezza dei 2 cateti C_1C_2 (Δt) e C_2C_3 (Δs) rappresenta la **tangente** α, che in questo caso rappresenta la **velocità media**. Ora, se restringiamo l'intervallo di t in modo che tenda a 0 e calcoliamo il valore della derivata in quel punto otterremo la velocità istantanea.

3.5.2 Accelerazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la **velocità in un punto corrisponde al valore della derivata prima** (della funzione che rappresenta il moto del nostro corpo) **in quel punto**, per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che **l'accelerazione corrisponde al rapporto tra la derivata della velocità e la derivata del tempo**, ottenendo quindi la formula $\frac{dv}{dt}$, operativamente dobbiamo fare la **derivata seconda della funzione che rappresenta il moto del nostro punto**.

3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accellerato

Cominciamo col dire che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ricorda che con dv e dt intendiamo le **derivate**. Da questa ricaviamo dv, ovvero:

$$dv = a * dt \;\; => \int_A^B dv = \int_A^B (a * dt) \;\; => v_B - v_A = a(t_B - t_A)$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Ottenuta questa formula, possiamo passare a calcolare lo **spazio in funzione del tempo**, ovvero:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \;\; => \;\; ds = v * dt \;\; => \;\; \int_A^B ds = \int_A^B v * dt \;\; => \;\; s_B - s_A = \int_A^B [v_0 + a(t - t_0)]dt \;\; =>$$

$$=> \;\; s_B - s_A = \left[v_0 * t + a\frac{(t - t_0)^2}{2} \right]_A^B \;\; => \;\; s_B - s_A = v_0 * t_B + a\frac{(t_B - t_0)^2}{2} - v_0 * t_A + a\frac{(t_A - t_0)^2}{2}$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Terminiamo dicendo che in questo moto **l'accelerazione è costante**, quindi:

$$\underline{a(t) = a}$$

3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule

Vediamo alcuni esempi:

3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme) Supponiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A (t_0, s_0) ad un punto B (t_1, s_1) tramite un **moto rettilineo uniforme**, abbiamo i seguenti dati:

$$t_0 = ? \qquad s_0 = 1,5Km \qquad v = 36m/s$$
$$s_1 = 11,5Km \qquad t_1 = 0,3h$$

L'obiettivo è trovare i dati mancanti (ovvero t_0). Noi sappiamo che la velocità "v" corrisponde a:

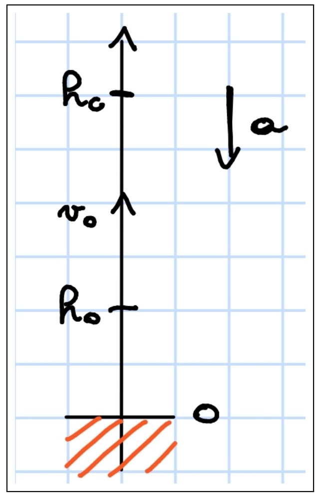
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} => ... => t_0 = t_1 - \frac{s_1 - s_0}{v}$$

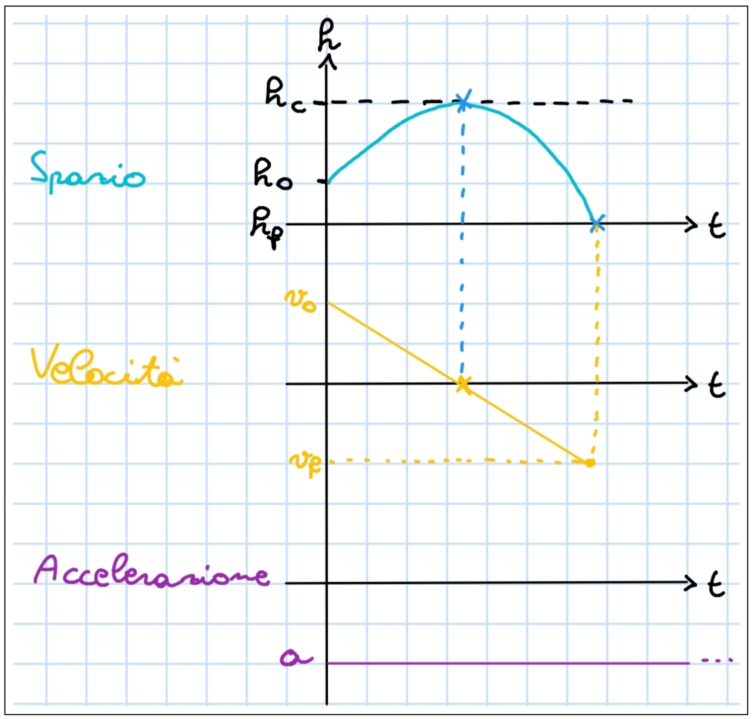
Sostituendo i valori forniti, otteniamo che $t_0 \approx 802,22s$

3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accellerato) Supponiamo di avere un oggetto all'altezza h_0 e di lanciarlo verso l'alto con una velocità v_0 nell'istante t_0 con un'accelerazione a. Dobbiamo trovare l'altezza (h_c) ed il tempo (t_c) di culmine e, supponendo che alla fine l'oggetto raggiunga l'altezza finale "h_f", trovare il tempo finale "t_f". Supponiamo di avere i seguenti dati:

$$h_0 = 100m \qquad t_0 = 0s \qquad v_0 = 5m/s \qquad a = -9,8m/s^2$$
$$t_c = ? \qquad h_c = ? \qquad t_f = ? \qquad h_f = 0m$$

Includiamo delle immagini complementari:





Procediamo per punti:

1. Vogliamo trovare il tempo di culmine (t_c), quindi poniamo $v(t) = 0$ e troviamo la t che rende vera l'equazione:

$$v(t) = 0 \ \ => \ \ v_0 + a(t-0) \ \ => \ \ t_c = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5m/s}{-9,8m/s^2} \approx 0,51s$$

2. Vogliamo calcolare l'altezza di culmine (h_c), per farlo usiamo la formula dello spazio:

$$h_c = s(t_c) = s_0 + v_0(t_c - 0) + \frac{1}{2}a(t_c - 0)^2 =$$
$$= 100m + 5m/s * (0,51s) + 1/2(-9,8m/s^2) * (0,51s)^2 \approx 101,28m$$

3. Vogliamo calcolare il tempo "finale" (t_f), per farlo usiamo sempre la formula dello spazio:

$$s(t_f) = h_f = 0 \ \ =>$$
$$=> \ \ s_0 + v_0(t_f - 0) + \frac{1}{2}a(t_f - 0)^2 = 0$$

A questo punto abbiamo una funzione di secondo grado con $x = t_f$, quindi usiamo la formula solita:

$$t_{f\ 1/2} = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{(-\frac{v_0}{a})^2 - 2\frac{s_0}{a}}$$
$$t_f = 0,51s + \sqrt{(0,51s)^2 - 2 * \frac{100m}{-9,8m/s^2}} \approx 5,06s$$

Nota che possiamo subito sostituire il "$\pm$" con un "$+$" dato che la radice sarà sicuramente più grande di quel $0,51$ che la precede, quindi non avrebbe fisicamente senso fare altrimenti (tempo negativo).

3.6 Moto armonico

Nel moto armonico abbiamo un'**accelerazione oscillante**, nella forma $\underline{a_0 * sin(t)}$. Il problema è che il sin (come tutte le funzioni matematiche) è adimensionale, quindi dobbiamo aggiungere delle componenti aggiuntive per **rendere il tempo "t" adimensionale**, in paricolare abbiamo che:

$$a(t) = a_0 * sin(\omega t + \varphi)$$

dove "ω" rappresenta la **pulsazione** e "φ" la **fase**. Nota che **abbiamo già l'accelerazione**, ovvero $a_0 * sin(t)$, quindi per calcolare velocità e spazio procediamo per **integrazioni successive**, con gli estremi di integrazione che corrispondono al **punto di inizio e di fine** della nostra misurazione.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau = v_0 + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} \omega a_0 sin(\omega t + \varphi)d\tau = \\ &= v_0 + \frac{1}{\omega}\Big[-cos(\omega t + \varphi)\Big]_{t_0}^{t} = {\color{red}v_0} - \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t + \varphi) + {\color{red}\frac{a_0}{\omega}cos(\omega t_0 + \varphi)} = \\ &= {\color{red}V} - \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Nota che il testo in rosso sopra, in quanto costante, viene raccolto in V, passiamo ora a calcolare lo spazio (che corrisponde all'integrazione della velocità):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau = \\ &= {\color{red}s_0} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t + \varphi) + {\color{red}\frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t_0 + \varphi)} = \\ &= {\color{red}S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

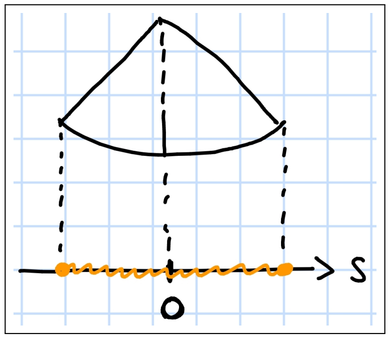
In definitiva, le formule che interessano a noi sono:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 * sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= {\color{red}V} - \frac{a_0}{\omega}cos(\omega t + \varphi) \\ s(t) &= {\color{red}S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2}sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ricorda che le parti in rosso sono costanti (di solito per noi varranno 0), mentre l'accelerazione ci è stata fornita all'intizio, quindi teniamo quella. Vediamo un "esempio":

3.6.1 Esempio di moto armonico

Ipotiziamo di avere una situazione del genere: vogliamo misuare l'andamento dell'ombra di un'altalena (che va solo avanti e indietro) sulla superficie.



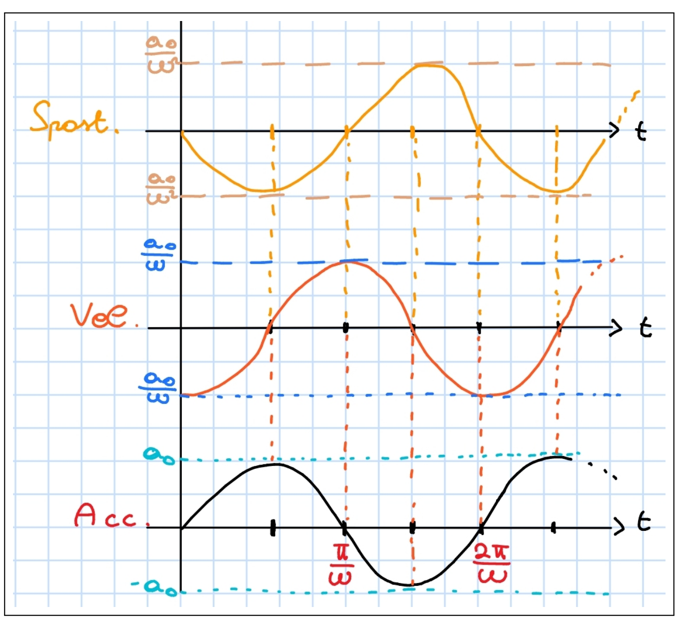
Noi ***assumiamo sempre che φ (ovvero la fase)$= 0$*** e che ***cominciamo da $t_0 = 0$***, quindi le nostre formule diventano:

$$a(t) = a_0 * sin(\omega t)$$
$$v(t) = -\frac{a_0}{\omega} cos(\omega t)$$
$$s(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} sin(\omega t)$$

Prima di passare al grafico dobbiamo calcolare il valore della nostra variabile t, ora noi sappiamo che ωt, dato che $\varphi = 0$, deve rappresentare una rotazione completa (2π):

$$\omega t = 2\pi \;\; => \;\; t = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

Nota che il nostro T rappresenta il **periodo**. Con queste funzioni/variabili, possiamo passare al calcolo dei grafici temporali:



3.7 I moti piani

Prima di partice con i moti veri e propri, introduciamo velocemente i **vettori**.

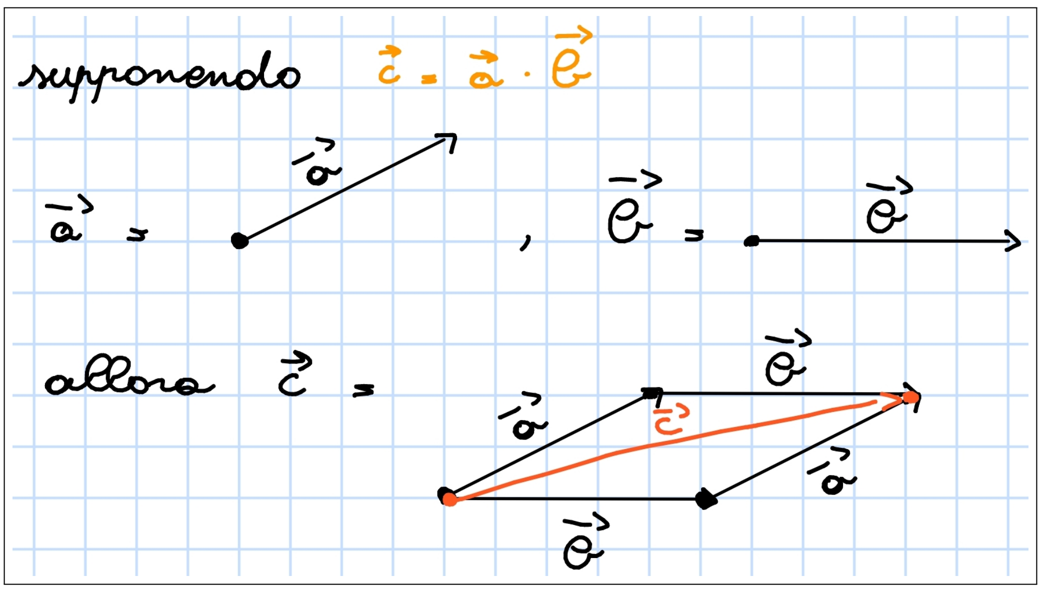
3.7.1 I vettori

Passiamo ora a considerare i **moti con 2 dimensioni**, per questo motivo dobbiamo introdurre i **vettori** composti da:

- punto di inizio;
- verso;
- modulo (la lunghezza del vettore);
- direzione (la retta su cui giace il vettore);

I vettori, si comportano in modi leggermente diversi rispetto ai numeri "normali", in particolare a noi interessa:

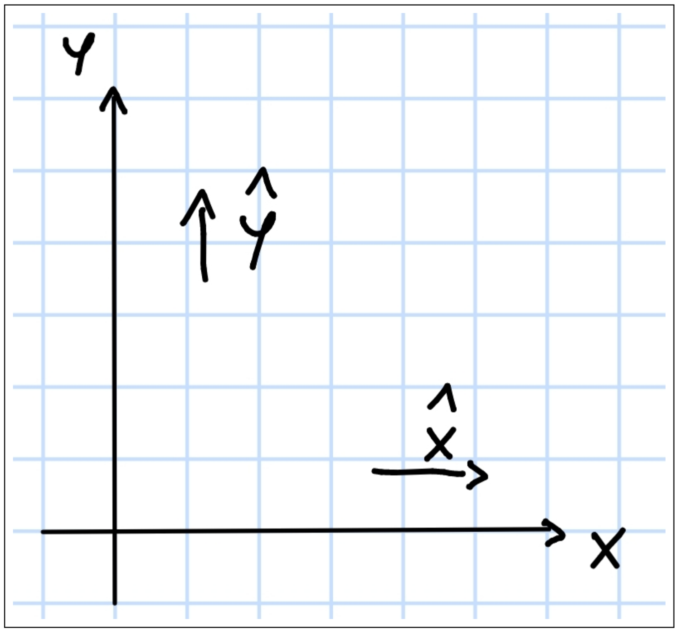
- somma: si fa con la **regola del parallelogramma**, ovvero:



- prodotto per scalare: quando si moltiplica un vettore per uno scalare, semplicemente si va a **moltiplicare il modulo del vettore**, in particolare "$\vec{a} = b * \vec{c} => |\vec{a}| = b * |\vec{c}|$"

3.7.2 Sistema di riferimento

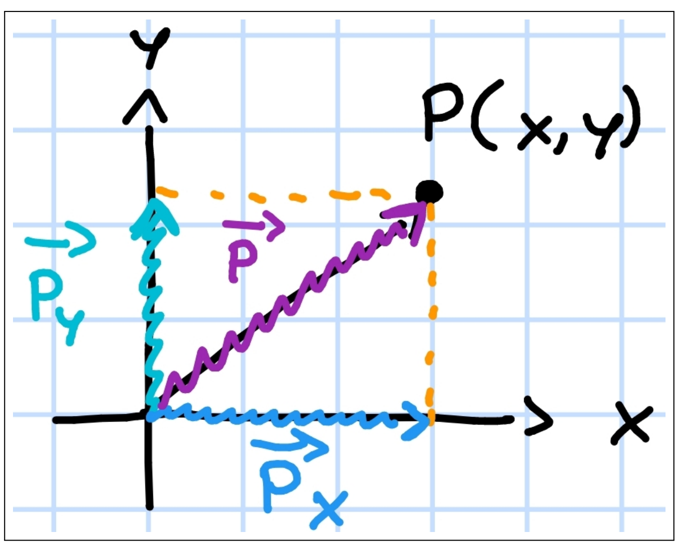
Introduciamo ora il sistema di riferimento per questo moto:



Da questo punto in poi, rappresentiamo il moto sul **piano cartesiano**: rappresenteremo quindi il **movimento "fisico"** del moto in quanto **non più unidimensionale!** Per quanto riguarda gli assi, si usano quelli che vengono definiti **versori** che matematicamente si rappresentano come $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$. In questo modo otteniamo qualcosa di **adimensionale** e che ha **modulo 1 per definizione**.

Quando vogliamo rappresentare un punto, possiamo farlo **attraverso un vettore**, che a sua volta si può rappresentare come la **somma di 2 vettori "unidimensionali"** (uno per ogni asse) che a loro volta si possono rappresentare come **spostamenti sui vari assi moltiplicati per il versore associato**:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}$$



Allo stesso modo possiamo rappresentare velocità ed accelerazione!

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x * \hat{x} + a_y * \hat{y}$$

Ora, possiamo anche rappresentare un vettore sottoforma di "matrice", in questo modo:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Ovvero lo spostamento, ad esempio, è composto dalla somma dello spostamento sull'asse x S_x e di quello sull'asse y S_y

3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione

Partiamo con la velocità: sappiamo che la velocità per il moto unidimensionale è data dalla **derivata dello spostamento**, per quanto riguarda il moto piano non cambia molto: dobbiamo soltanto **derivare una somma di 2 componenti!** Ovvero:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d[S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}]}{dt} = \frac{dS_x}{dt} * \hat{x} + S_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{dS_y}{dt} * \hat{y} + S_y * \frac{d\hat{y}}{dt}$$

Quelle 2 parti evidenziate in rosso sono speciali: rappresentano il possibile movimento degli assi. Per il momento, le considereremo **sempre nulle** in quanto i **nostri assi non si muoveranno**! Quindi, in soldoni, otteremmo che la nostra velocità equivale a:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS_x/dt \\ dS_y/dt \end{bmatrix}$$

Nota però che questo ragionamento possiamo farlo **solo se gli assi restano fermi**, altrimenti dovremmo fare delle considerazioni in più. Allo stesso modo, possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione, ottenendo anche qui:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \end{bmatrix}$$

3.7.4 Esempio

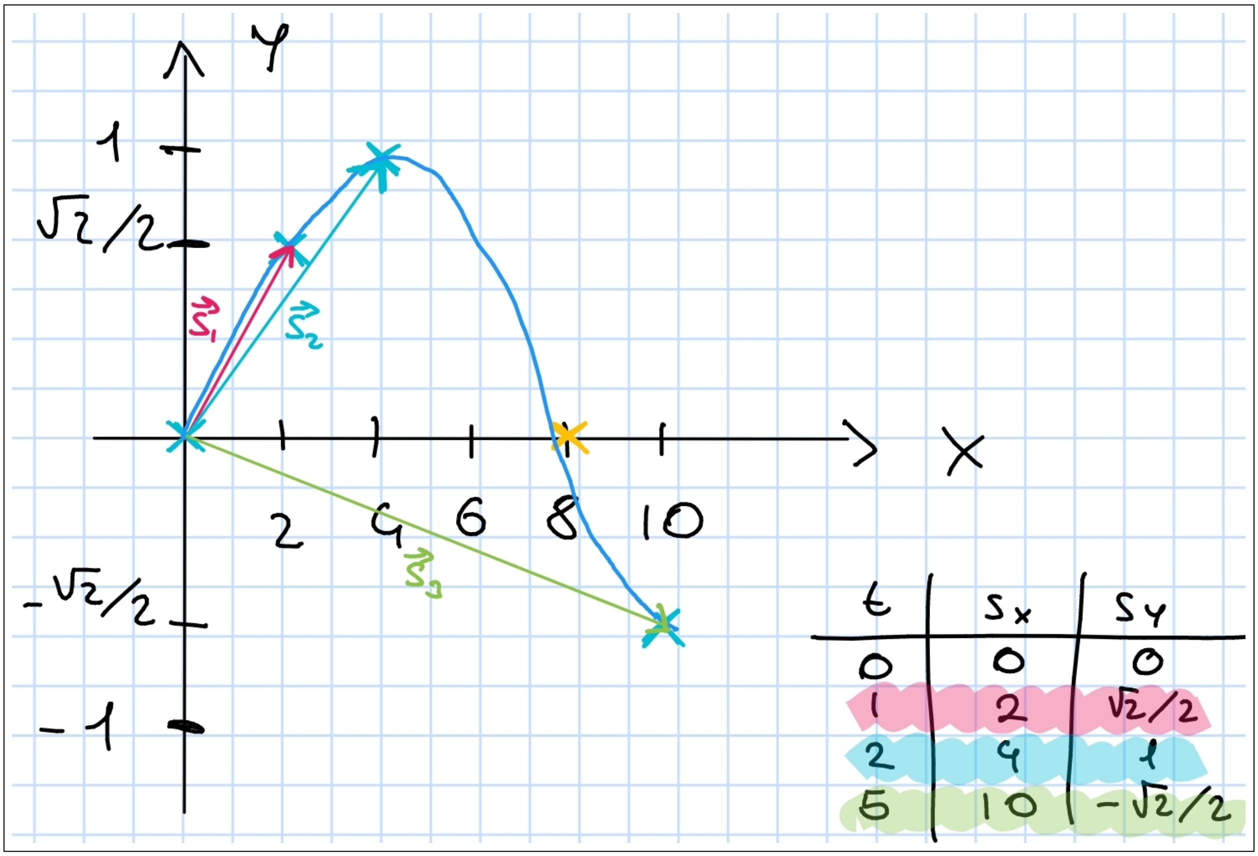
Vediamo un esempio, dobbiamo calcolare velocità e accelerazione sapendo che:

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m/s \\ 1m * sin(\pi/4\ Hz) \end{bmatrix}$$

Nota che $Hz = s^{-1}$, la prima cosa da fare ora è **rappresentare qalche punto**, possiamo farlo in una tabella:

t	S_x	S_y
0	0	0
1	2	$\sqrt{2}/2$
2	4	1
5	10	$-\sqrt{2}/2$

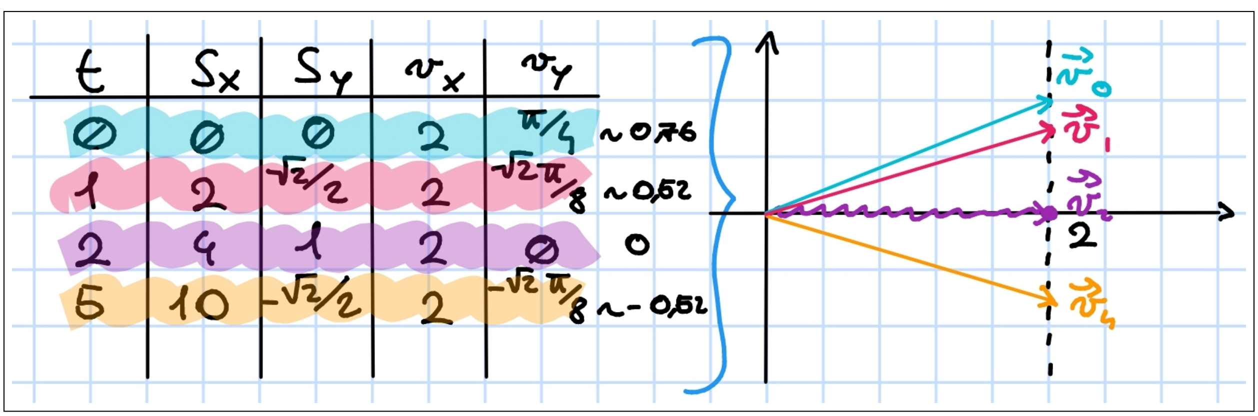
Rappresentiamo ora questi punti sul piano cartesiano (aggiungendo anche i vettori che rappresentano i punti), ricorda inoltre che il piano ora **rappresenta la traiettoria e <u>NON</u> più lo spazio/tempo**:



Ora **calcoliamo la velocità**, per farlo ci basta **derivare per t**:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4}cos(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Rifacciamo la tabella e rappresentiamo il tutto sul grafico:



Terminiamo con l'accelerazione, che corrisponde semplicemente alla **derivata della velocità**, otterremo quindi:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Ricapitolando i risultati ottenuti, abbiamo che:

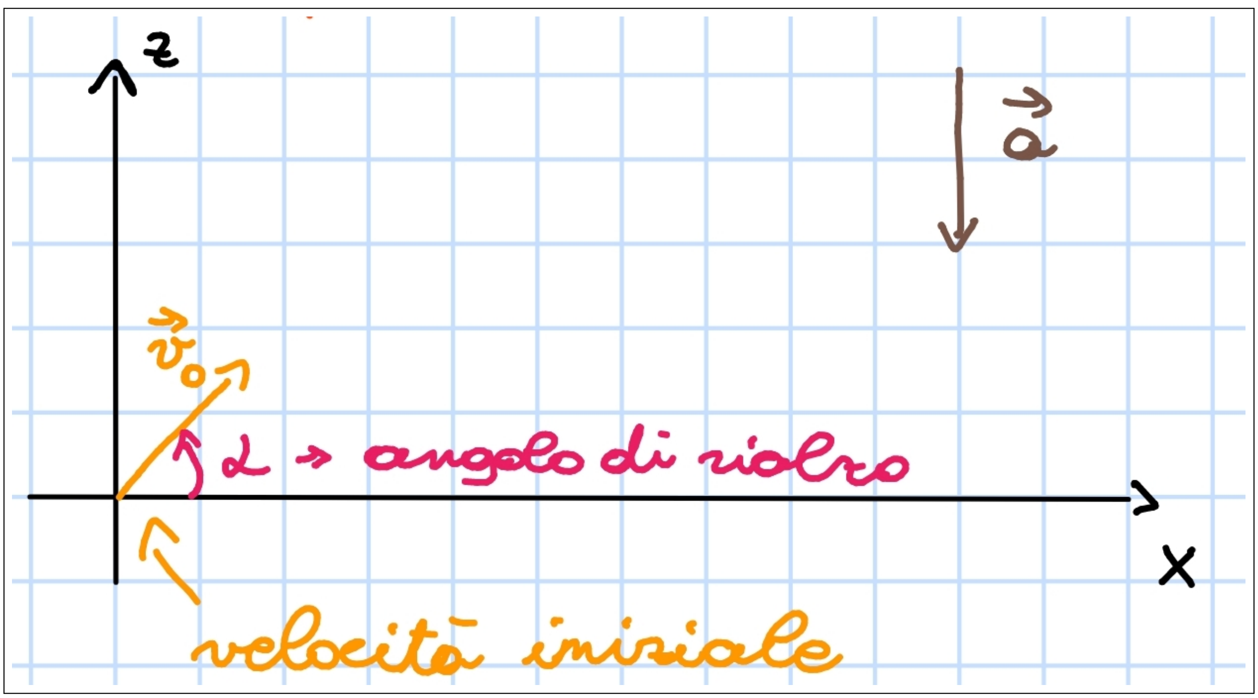
$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$
$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4}cos(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$
$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin(\pi/4\ t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

3.8 Il moto parabolico

Iniziamo introducendo il sistema di riferimento che andremo ad utilizzare.

3.8.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito un grafico:



Avremmo quindi un oggetto che parte da **un punto iniziale**, che per convenzione supponiamo **(0, 0)**, con una **certa velocità iniziale $\vec{v}_0$** ed un certo **angolo di rialzo α**. Inoltre sarà presente una **certa accelerazione "$\vec{a} = -g$" che punterà verso il basso** (suppungo che $-g$ indichi l'accelerazione gravitazionale terrestre). In questa sezione assumiam questa convenzione:

$$|\vec{v}_0| = v_0$$

Quindi possiamo riscrivere il vettore della velocità in questo modo:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 * cos(\alpha) \\ v_0 * sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

3.8.2 Rappresentare spazio, gittata γ, altezza massima h_{max} e velocità

Ora, come facciamo a rappresentare i grafici di spazio e velocità? Nota che l'accelerazione non serve, in quanto ci viene fornita in questo caso. Per quanto riguarda lo spazio, possiamo "spezzare" il problema in 2:

- spazio percorso in "larghezza" (x): lo trattiamo come un semprece problema di **moto rettilineo uniforme**, infatti l'accelerazione va solo verso il basso, non avanti o indietro;
- spazio percorso in "altezza" (z): in questo caso lo consideriamo un problema di **moto uniformemente accelerato**, infatti abbiamo un'accelerazione costante che preme verso il basso.

Quindi otterremo le formule:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0 cos(\alpha)t = \underline{v_0 * cos(\alpha)t}$$
$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z}{2}t^2 = \underline{v_0 * sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2}$$

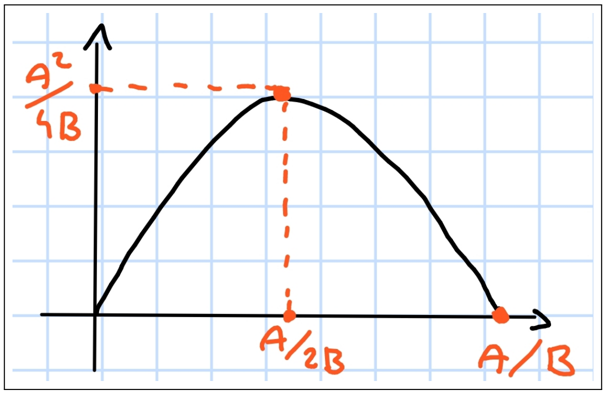
In definitiva, abbiamo che lo spazio corrisponde al vettore:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * cos(\alpha)t \\ v_0 * sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Ora proviamo a mettere insieme le 2 formule in modo da ottenere una funzione da poter rappresentare facilmente sul grafico:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$
$$z = v_{0z} * t - \frac{g}{2} * t^2 => \frac{v_{0z}}{v_{0x}} * x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right) * x^2 => Ax - Bx^2$$

Abbiamo ottenuto l'**equazione di una parabola!** In particolare, avremmo queste proporzioni:



Ora che abbiamo un grafico disegnato, ci risulta particolarmente semplice trovare altra 2 componenti importanti:

- **gittata** γ: ovvero la massima distanza percorsa in orizzontale. Possiamo ottenerla tramite la formula:

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{v_0}{v_{0x}} * \frac{2v_{0x}^2}{g} = \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}}{g} = \frac{v_0^2}{g} * 2 * sin(\alpha) * cos(\alpha) = \underline{\frac{v_0^2}{g} * sin(2\alpha)}$$

- **altezza massima** h_{max}: ovvero l'altezza di culmine della nostra parabola. Guardando il grafico possiamo vedere che corrisponde a:

$$h_{max} = \frac{A^2}{4B} = \frac{A}{4} * \frac{A}{B} = \frac{v_0 z}{4v_{0x}} * \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}^2}{v_{0x} g} = \frac{v_0 z}{4} * \frac{2 * v_{0z}}{g} = \frac{2v_{0z}^2}{4g} = \frac{1}{2} * \frac{v_{0z}^2}{g} = \underline{\frac{v_0^2 * sin^2(\alpha)}{2g}}$$

Terminiamo velocemente con la velocità che, ricordiamo, è la **derivata dello spazio percorso**:

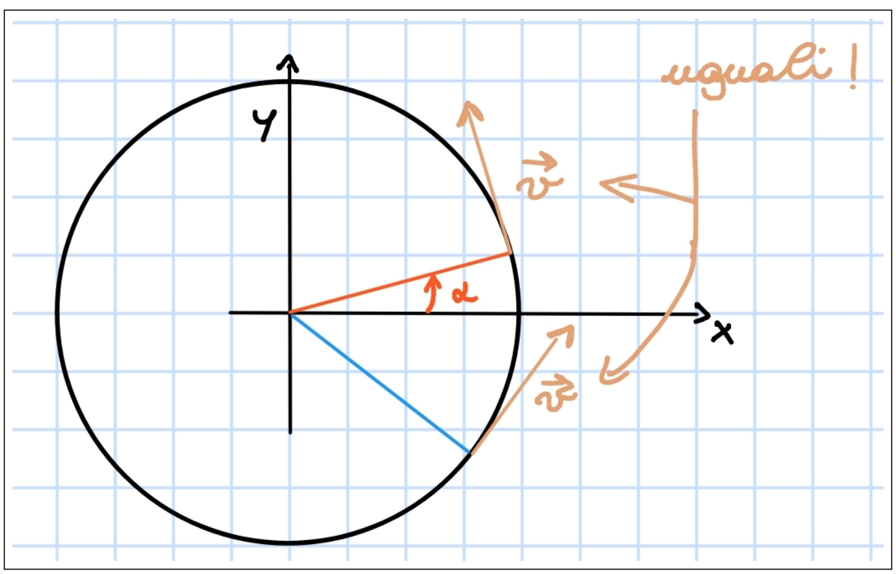
$$v_x(t) = \frac{d(v_0 * cos(\alpha)t)}{dt} = v_0 cos(\alpha) = v_{0x}$$
$$v_z(t) = \frac{dS_z}{dt} = v_0 * sin(\alpha) - gt = v_{0z} - gt$$

3.8.2.1 Riassunto

Ricapitolando tutte le formule che abbiamo visto:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * cos(\alpha)t \\ v_0 * sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$
$$\gamma = \frac{v_0^2}{g} * sin(2\alpha)$$
$$h_{max} = \frac{v_0^2 * sin^2(\alpha)}{2g}$$
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - gt \end{bmatrix}$$

3.9 Moto circolare uniforme



Nel moto circolare uniforme la velocità è **costante**, infatti in tutti i punti la velocità **non** cambia lunghezza, cambia solo la sua direzione. La velocità in un punto, inoltre, è **sempre tangente** alla traiettoria in quel punto. Si hanno le seguenti formule:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t \qquad\qquad r(t) = R$$

dove R è il raggio della circonferenza e ω è la velocità angolare, definita come $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con T periodo. La **frequenza** è definita come $f = \frac{1}{T}$ e la **velocità** come:

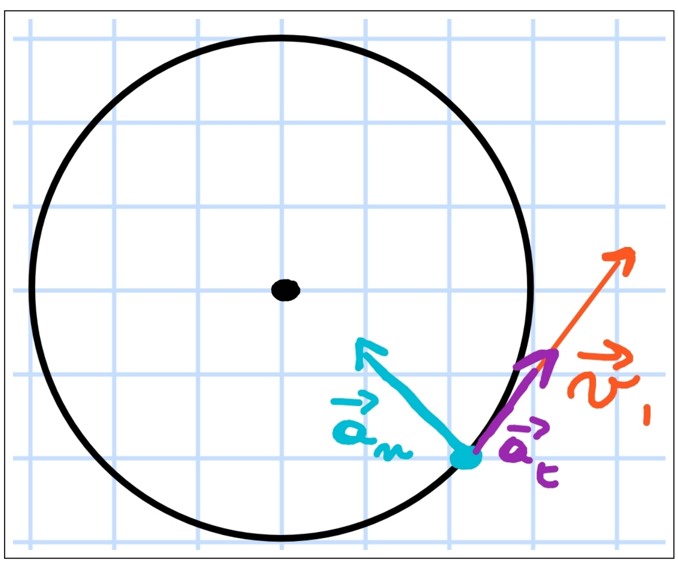
$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Osservando la formula qui sopra, possiamo notare che a meno che il raggio R non cambi, la velocità sarà costante, nel caso in cui cambia, invece, cambierà anche la velocità. Ora, ponendo l'origine del piano cartesiano come il centro della circonferenza, calcoliamo lo **spazio**, la **velocità** e l'**accelerazione** in funzione del tempo come segue:

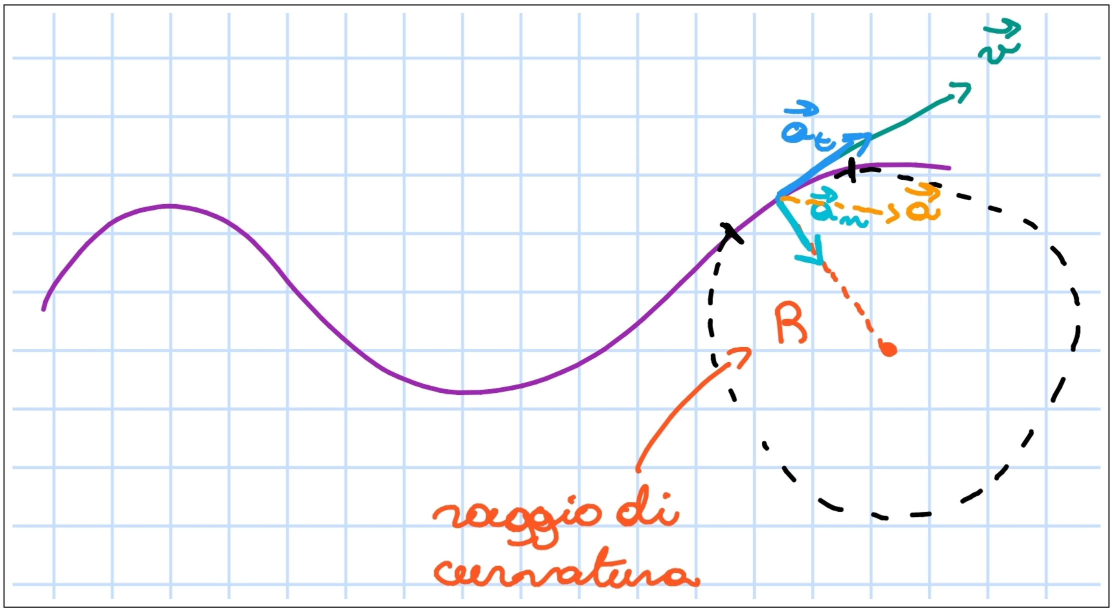
$$\vec{s}(t) = \begin{cases} x(t) = Rcos(\alpha(t)) \\ \\ y(t) = Rsin(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -R\frac{d\alpha}{dt}sin(\alpha(t)) = -\omega Rsin(\alpha(t)) \\ \\ v_y(t) = R\frac{d\alpha}{dt}cos(\alpha(t)) = \omega Rcos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 Rcos(\alpha(t)) \\ \\ a_y(t) = -\omega^2 Rsin(\alpha(t)) \end{cases}$$



Ora l'accelerazione si divide in due componenti, $\vec{a_t}$ (**accelerazione tangente**) e $\vec{a_n}$ (**accelerazione normale o centripeta**). La prima è parallela alla tangente nel punto e modifica il **modulo della velocità**, mentre la seconda è ortogonale alla tangente nel punto e modifica la **traiettoria(direzione)**. Dato un qualsiasi **moto piano**, se prendo una piccola parte di questo, allora può essere immaginato come un arco di circonferenza. Più il tratto è **grande** e più l'arco di circonferenza sembrerà **rettilineo**, più il tratto è **piccolo** e più l'arco di circonferenza sembrerà **curvo** e avrò corrispondentemente una circonferenza **grande** e una **piccola**.



In questo caso avrò quindi che le due componenti dell'accelerazione varranno:

$$|\vec{a_n}| = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a_t}| = \vec{a}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{a}\hat{v}$$

dove $\hat{v}$ è il **versore velocità**.

4 Dinamica

4.1 Leggi della dinamica

La **dinamica** si occupa dello studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause(**forze**), ovvero delle circostanze che lo determinano e lo modificano nel **tempo** e nello **spazio** del suo sistema di riferimento. Wikipedia Le leggi della dinamica sono 3 e sono le seguenti:

1. **Legge di Inerzia (I legge)**: un corpo rimane nel suo stato di quiete finchè non intervengono agenti esterni a modificarne questo stato. Questa legge vale sono in sistemi di riferimento inerziali;

2. **Legge di Newton (II legge)**: Viene definita la **quantità di moto** come $\vec{p} = m\vec{v}$, ovvero massa per velocità. Successivamente viene definita la forza ($\vec{F}$) come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove m è la **massa inerziale**, ovvero la capacità di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto, questa mette in relazione la velocità alla forza.
Nel caso in cui la massa non varia, allora la forza può essere definita come $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.
L'unità di misura della **forza** è il Newton (N) definito come $\frac{kg \cdot m}{s^2}$.

3. **<u>Principio di azione e reazione (III legge)</u>**: Quando il corpo 1 esercita una forza $\vec{F}$ sul corpo 2, quest'ultimo esercita sul corpo 1 una forza $-\vec{F}$, uguale e opposta.

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Osserviamo che la **prima legge** potrebbe sembrare un caso particolare della **seconda legge**, con $\vec{F} = \vec{0}$, ma in realtà non è così, infatti la seconda e la terza legge sono valide solo all'interno di sistemi di riferimento inerziali, che sono definiti dalla prima legge.

4.2 Forze impulsive

L'**impulso** $\vec{P}$ è definito come la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}$ in un Δt piccolo, ovvero:

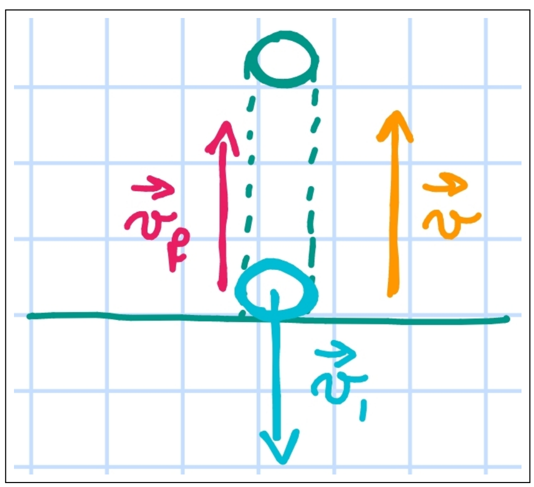
$$\vec{P} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

E la **forza impulsiva** come:

$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

4.2.1 Esempio forze impulsive

Supponiamo di avere un pavimento ed una palla che viene lasciata in aria. Questa palla cadrà verso il pavimento fino a raggiungerlo, rimbalzare su esso e tornare in su (assumiamo che la velocità con cui torna in su sia la stessa con cui cade, quindi non agiscono fattori esterni come attriti, ecc.).



Se ho un vettore velocità $\vec{v}$, allora ho che:

$$\begin{aligned} \vec{p_i} &= m\vec{v_i} = -m\vec{v} \\ \vec{p_f} &= m\vec{v_f} = m\vec{v} \\ \Delta\vec{p} &= \vec{p_f} - \vec{p_i} = 2m\vec{v} \end{aligned}$$

4.2.2 Esercizio su forze impulsive

Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover calcolare $\vec{F}_{imp}$ (forza impulsiva):

$$m = 98g \qquad v = 10.2\frac{m}{s} \qquad \Delta t = 100ms$$

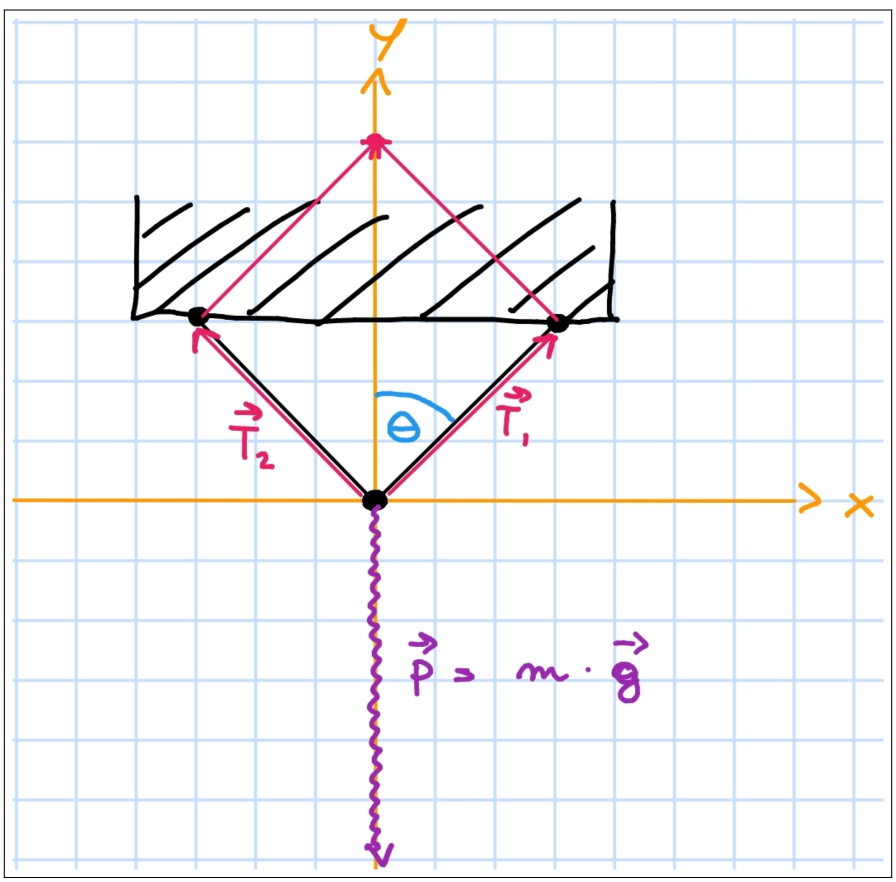
Procediamo ora quindi con calcolare $\Delta\vec{p}$ usando la formula appena calcolata sopra e una volta ottenuto il valore calcoliamo la $\vec{F}_{imp}$:

$$\Delta\vec{p} = 2m\vec{v} = 2 \cdot 10.2\frac{m}{s} \cdot 0.098kg = 0.99\frac{kg \cdot m}{s}$$
$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0.99\frac{kg \cdot m}{s}}{0.1s} = 9.99\frac{kg \cdot m}{s^2} = 9.99N$$

4.3 Esercizi sulla dinamica

Supponiamo di avere un oggetto appeso a due fili, che sono appesi al tetto, alla stessa distanza dall'oggetto e vogliamo trovare $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ tensioni dei fili, avendo i seguenti dati:

$$m = 100g \qquad \theta = 60°$$



Notiamo che l'oggetto resta fermo, quindi oltre a $\vec{p}$ (**forza peso**), su esso agiscono altre forze la cui somma è uguale e opposta a $\vec{p}$. Abbiamo quindi che la **risultante delle forze** $\vec{R} = \vec{0}$.

Ora possiamo notare che $|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$ e abbiamo le seguenti forze:

$$\vec{p} = -mg\hat{y}$$
$$\vec{T_1} = T_x\hat{x} + T_y\hat{x} = Tsin\theta\hat{x} + Tcos\theta\hat{y}$$
$$\vec{T_2} = -T_x\hat{x} + T_y\hat{y} = -Tsin\theta\hat{x} + Tcos\theta\hat{y}$$

Ora ci ricordiamo che $\vec{R} = \vec{0}$ quindi:

$$\vec{R} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} => \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} =>$$
$$=> \begin{cases} R_x = 0 = Tsin\theta - Tsin\theta \\ R_y = 0 = -mg + Tcos\theta + Tcos\theta = -mg + 2Tcos\theta \end{cases}$$

La prima equazione del sistema vale zero, ora dalla seconda ricaviamo T:

$$mg = 2Tcos\theta => T = \frac{mg}{2Tcos\theta} = \frac{0.1kg \cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0.98N$$

4.4 Forze fondamentali

Le forze fondamentali sono le seguenti (scritte in ordine di intensità, dalla più debole alla più intensa):

- **Forza gravitazionale**: descrive l'interazione tra le masse gravitazionali. È una forza onnipresente, non esiste quindi nessuna componente di materia che ha massa, che non la risente;
- **Forza debole**: è la forza responsabile dell'interazione per cui i nuclei cambiano di natura (e.g. decadimento dei nuclei);
- **Forza elettromagnetica**: deriva dall'unificazione di forza elettrica e forza magnetica. È la forza responsabile della trazione della ripulsione di cariche ed è alla base delle forze che aggregano la materia;
- **Forza forte/nucleare**: è la forza responsabile della stabilità dei nuclei. Inizialmente si è definita come **forza nucleare**, ovvero che descrive un'interazione nucleare, tra protoni e neutroni, tra neutroni e neutroni e tra protoni e protoni. Poi è stato scoperto che i protoni e i neutroni non sono particelle fondamentali ma sono fatti di quark, e l'interazione è sentita dai quark, quindi è stata definita **forza forte**.

La forza elettromagnetica e la forza debole unificate formano la **forza elettrodebole**. Osserviamo che il quadro precedente, ovvero l'ordine di intensità, è **attuale**, era diverso nel passato e lo sarà anche nel futuro.

Quando due corpi/sistemi fisici interagiscono tra loro per una delle forze fondamentali, lo fanno perchè hanno una sensibilità a quel tipo di forza, che è detta **carica** ed è rappresentata dalla lettera q. Per la forza gravitazionale per esempio, un corpo/sistema fisico subisce una trazione gravitazionale se ha una **massa** (**carica gravitazionale**, q_G), ovvero la misura dell'inclinazione del corpo ad interagire con questa gravitazione. Per la forza elettromagnetica è uguale, se due oggetti sono neutri, non c'è trazione ne repulsione. E la stessa cosa vale per forza debole e forza forte.

Quella che chiamiamo carica in senso comune, in realtà è la **carica elettrica** (q_E).

4.5 Forze

4.5.1 Forza peso

La **forza peso** è descritta come segue, dato $\vec{g} = -g\hat{z}$:

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g}$$

Ora applico la seconda legge della dinamica [pag.21] e ottengo:

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g} = -m_G \cdot \vec{g}$$

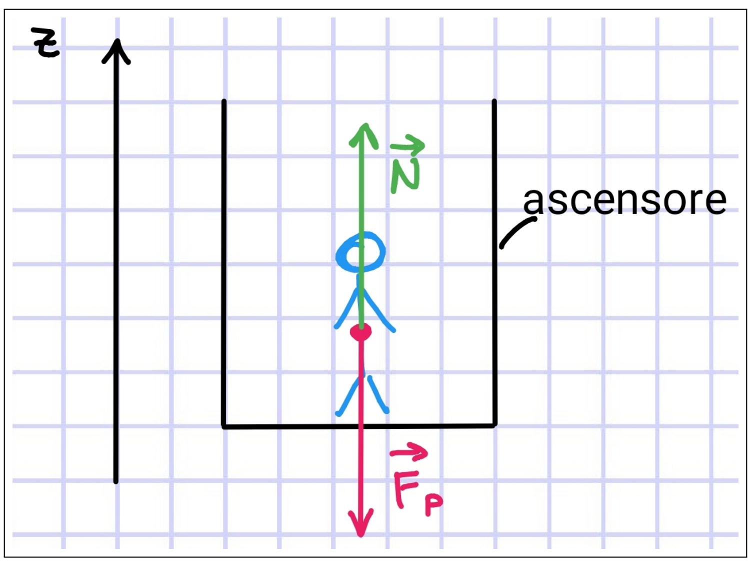
dove m_G è la **massa gravitazionale**.

Ora calcolo le forze esterne ($\vec{F}_{EXT}$):

$$\vec{F}_{EXT} = m_i \cdot \vec{a}$$

dove m_i è la **massa inerziale**, e posso assumere che $\vec{a} = \vec{g}$, e quindi di conseguenza, $m_i = m_G$. Osserviamo che m_i e m_G sono uguali dal punto di vista quantitativo, ma non dal punto di vista concettuale. Infatti il primo è la capacità del corpo di opporsi al movimento, mentre il secondo è la carica dell'interazione gravitazionale che il corpo ha.

4.5.1.1 Esempio sensazione del peso Supponiamo di avere un'ascensore che ha 100 piani. La sensazione che si ha è di essere più "pesanti" quando l'ascensore parte per salire e più "leggeri" quando si ferma in alto.



Ora studiamo in particolare alcuni casi interessanti per vedere le differenze che ci sono:

- <u>**CASO INTERMEDIO**</u> (e.g. da piano 25 a piano 75):
Supponiamo che l'ascensore sia ben isolata dall'ambiente, quindi che non ci siano vibrazioni, rumori, indicatore del piano, ecc., allora non si ha la percezione se ci si sta muovendo o se si è fermi. In questo

caso abbiamo:

$$\vec{v} = cost$$
$$\vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{R} = \vec{0}$$
$$|\vec{F_p}| = |\vec{N}| = N_0$$

- **<u>CASO PARTENZA IN SALITA</u>**:
Se siamo fermi in un piano inferiore al piano 100 e premiamo un piano più alto di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di più. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} = a\hat{z}$$
$$\vec{g} = -g\hat{z}$$
$$\vec{R} \neq \vec{0}$$
$$\vec{F_p} + \vec{N} = m\vec{a} => -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} => -mg + N = ma => N = ma + mg = N_0 + ma$$

con $ma > 0$.

- **<u>CASO PARTENZA IN DISCESA</u>**:
Se siamo fermi in un piano superiore al piano 0 e premiamo un piano più basso di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di meno. Questo caso è uguale a quello della **partenza in salita** solo che c'è una decelerazione. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} < 0$$
$$\vec{F_p} + \vec{N} = m\vec{a} => -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} => -mg + N = ma => N = ma + mg = N_0 + ma$$

con $ma < 0$.

- **<u>CASO PARTICOLARE</u>**:
Nel caso in cui si tagli in cavo dell'ascensore, sarà in caduta libera. Non si percepisce nessun effetto di reazione vincolare da parte del suolo/pavimento dell'ascensore. In caduta libera non si percepisce il peso. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} < 0$$
$$|\vec{a}| = |\vec{g}|$$
$$N = N_0 + ma = mg - mg = 0$$

4.5.2 Forza gravitazionale

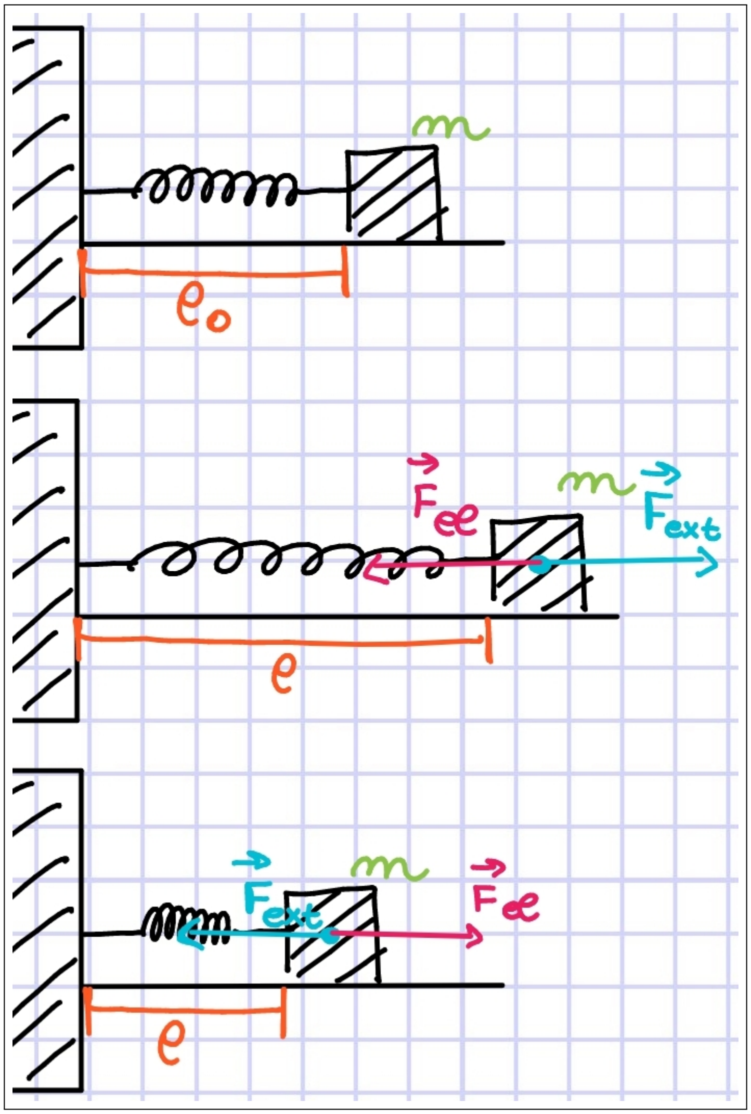
la **forza gravitazionale** ci dice che c'è un'attrazione con una certa costante di proporzionalità G, e l'intensità dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due masse e direttamente proporzionale al prodotto delle due masse, ovvero come descritto nella seguente formula:

$$\vec{F_G} = \frac{m_g M}{r^2}\hat{r}$$

Assumendo ora che $M = M_E$ e $r = r_E$, ovvero consideriamo massa e raggio della Terra, allora $\vec{F_G}$ è una costante uguale a $\vec{g}$.

4.5.3 Forza elastica

Supponiamo di avere una molla vincolata ad un supporto non movibile e fermo e all'altra estremità della molla attaccata una massa m. Assumiamo che non ci siano attriti.
Quando ci allontaniamo dalla **lunghezza di riposo**, l_0, della molla, quest'ultima si allunga o accorcia tramite una **sollecitazione esterna**.



Supponendo ora di avere una forza $\vec{F_{ext}}$ che agisce sulla massa, per far si che la massa rimanga ferma, vorrà dire che sulla massa agisce un'altra forza uguale e opposta esercitata dalla molla chiamata **forza elastica** $\vec{F_{el}}$.
Osserviamo che se la molla si allunga, allora $\vec{F_{ext}}$ e $\vec{F_{el}}$ avranno un verso, se invece la molla si accorcia, avranno verso opposto.
Osserviamo che la forza elastica è sempre opposta a $\Delta\vec{l} = \vec{l} - \vec{l_0}$, quindi se il verso di $\Delta\vec{l}$ è positivo, allora il verso di $\vec{F_{el}}$ è negativo, e viceversa.
La $\vec{F_{el}}$ e $\Delta\vec{l}$ sono proporzionali, infatti la formula della $\vec{F_{el}}$ è la seguente:

$$\vec{F_{el}} = -K(\vec{l} - \vec{l_0}) = -K\Delta\vec{l}$$

Dove K è detta **costante elastica** e la sua unità di misura è quindi $\frac{N}{m}$ (Newton/metro).
Osservando la formula precedente si può facilmente notare che la costante elastica è indipendente dalla

massa del corpo, infatti indica solo la durezza della molla.
Le **forze di richiamo**, non solo la forza elastica, sono proporzionali allo spostamento, ovvero quando il corpo si allontana dal suo equilibrio viene richiamato verso di esso tramite una forza di richiamo che è sempre direttamente proporzionale allo spostamento, cioè a quanto il corpo si allontana dall'equilibrio.
Ora consideriamo la massa m e abbiamo:

$$F = -K \cdot x$$

ovvero la forza è inversamente proporzionale allo spostamento.
Ora considerando la seconda legge della dinamica [pag.21], sostituiamo la definizione di forza e otteniamo:

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2} => \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ora definiamo $\omega^2 = \frac{K}{m}$ e otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

da cui ci ricaviamo $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ come segue:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$$
$$v(t) = A\omega cos(\omega t + \varphi)$$
$$a(t) = -A\omega^2 sin(\omega t + \varphi)$$

Per dimostrare come abbiamo ricavato $x(t)$, osserviamo la sua derivata seconda, ovvero $a(t)$, e notiamo che togliendo $-\omega^2$ abbiamo esattamente $x(t)$ quindi sostituendo quella con x, otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x => \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ovvero l'ipotesi iniziale.
Osserviamo ora quindi che se applico una forza esterna sulla molla e poi la lascio andare, essa si muove in moto armonico intorno al punto di riposo. Questo moto dato che compare sin nella formula sarà periodico, e il periodo è il seguente:

$$\omega t + \varphi = \omega(t + T) + \varphi + 2k\pi => \omega t = \omega t + \omega T + 2k\pi$$
$$=> \omega T = 2k\pi => T = \frac{2k\pi}{\omega}$$

Osserviamo ora che se fisso i valori di $x(t)$ e $v(t)$, riesco a ricavare φ e A. Quindi se per esempio fisso:

$$v(0) = v_M$$
$$x(0) = 0$$

dove v_M è la velocità massima, mi ricavo:

$$A\omega cos(\varphi) = v_M$$
$$Asin(\varphi) = 0$$

e da qui mi ricavo:

$$A\omega = v_M => A = \frac{v_M}{\omega}$$
$$\varphi = 0$$

e quindi ottengo:

$$x(t) = \frac{v_M}{\omega} sin(\omega t)$$
$$v(t) = v_M cos(\omega t)$$

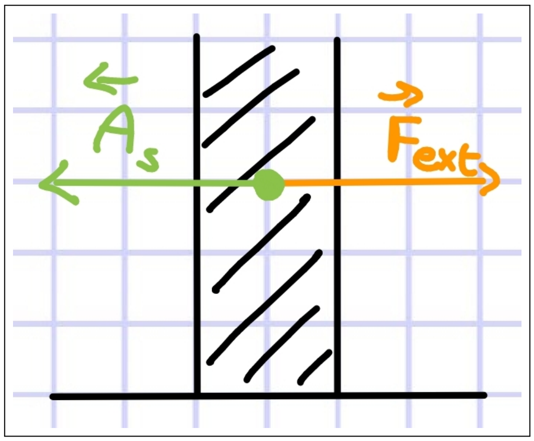
4.5.4 Forza di attrito (radente)

Iniziamo col dire che esistono molti tipi diversi di attrito, noi però ci concentriamo sul'**attrito radente**, ovvero quello che si ottiene con **2 superfici a contatto**. In genere, l'attrito si comporta in 2 modi diversi, facciamo un esempio con una sedia sul pavimento:

- **attrito statico**: se applichiamo una certa forza $\vec{F}_{ext}$ alla sedia e quella **resta ferma** abbiamo una forza di **attrito statico** ($\vec{A}_s$) **che bilancia** la forza che applichiamo noi. In particolare:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_{ext} * \hat{x} \\ \vec{A}_s = -|\vec{A}_s| * \hat{x} = -|F_{ext}| * \hat{x} \end{array}\right\} \vec{A}_s = -|\vec{F}_{ext}| * \hat{x}\#\#\#NONSICUROSUHAT!!!$$

  Da quest'ultimo pezzo possiamo capire che l'attrito, finché resta statico, è una **uguale ed opposta** alla forza che applichiamo noi sulla sedia, quindi quest'ultima resta ferma!



  L'attrito statico esiste fino ad un certo punto, identificato con la **soglia** "$\vec{A}_{s,max}$", che possiamo calcolare con la formula:

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext}$$

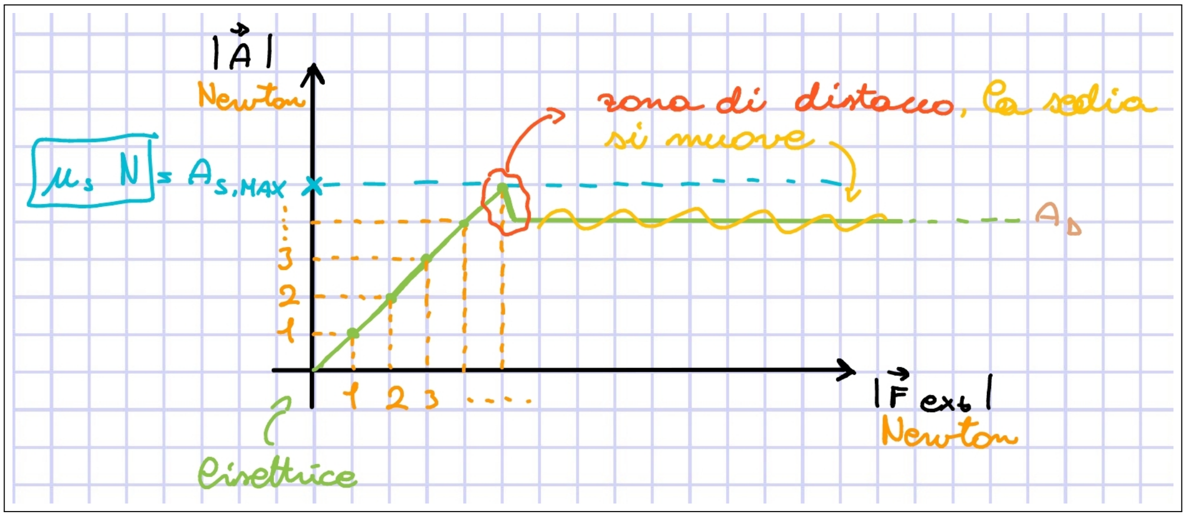
  In particolare μ_s rappresenta il **coefficiente di attrito statico** (dipende dalle 2 superfici a contatto), $\vec{N}$ è la **forza vincolate** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto** (in questo caso il "moto" è rappresentato dalla forza esterna che applichiamo noi alla sedia). Una volta che la forza esterna supera questa soglia, subentra l'**attrito dinamico**;

- **attrito dinamico**: ad un certo punto, la forza che applichiamo noi sarà tale da **muovere** la sedia, a questo punto entriamo un una fase di **attrito dinamico**. Possiamo calcolarlo con la formula:

$$\vec{A}_D = -\mu_D * |\vec{N}| * \hat{v}$$

  Anche qui μ_D rappresenta il **coefficiente di attrito dinamico** (dipende dalle 2 superfici a contatto), $\vec{N}$ è la **forza vincolate** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto**.

Ora, all'intersezione tra attrito statico e dinamico succede una cosa particolare: la forza dell'attrito **diminuisce**. Vediamo un grafico:



Il distacco tra $A_{s,max}$ e A_D dipende dal distacco tra μ_s e μ_D

4.5.4.1 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito statico Vediamo un esempio per il calcolo del coefficiente di attrito statico, supponiamo di avere una sedia con **massa** m_s e un'**attrito statico massimo** $A_{s,max}$ calcolato usando una molla con **allungamento** Δx e **coefficiente elastico** K, quanto vale il **coefficiente di attrito statico**?

$$m_s = 6Kg \qquad |A_{s,max}| = \begin{cases} \Delta x = 6cm \\ K = 1,2N/m \end{cases} \qquad \mu_s = ?$$

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext} ===> \mu_s = \frac{|\vec{A}_{s,max}|}{|\vec{N}|} = \frac{K * \Delta x}{m_s * g} = \frac{7,2 * 10^{-2}N}{5,9 * 10^{1}N} = 1,2 * 10^{-3}$$

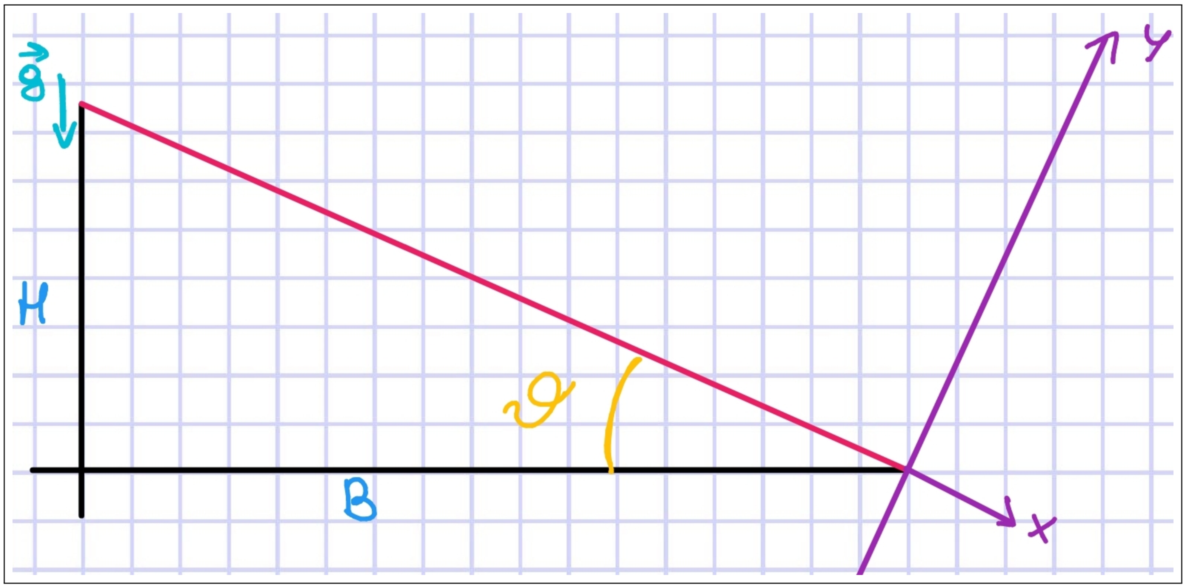
Nota che g corrisponde all'accelerazione di gravità terrestre $(9,8m/s^2)$ o di qualsiasi altro pianeta su cui facciamo le misurazioni.

4.6 Piano inclinato

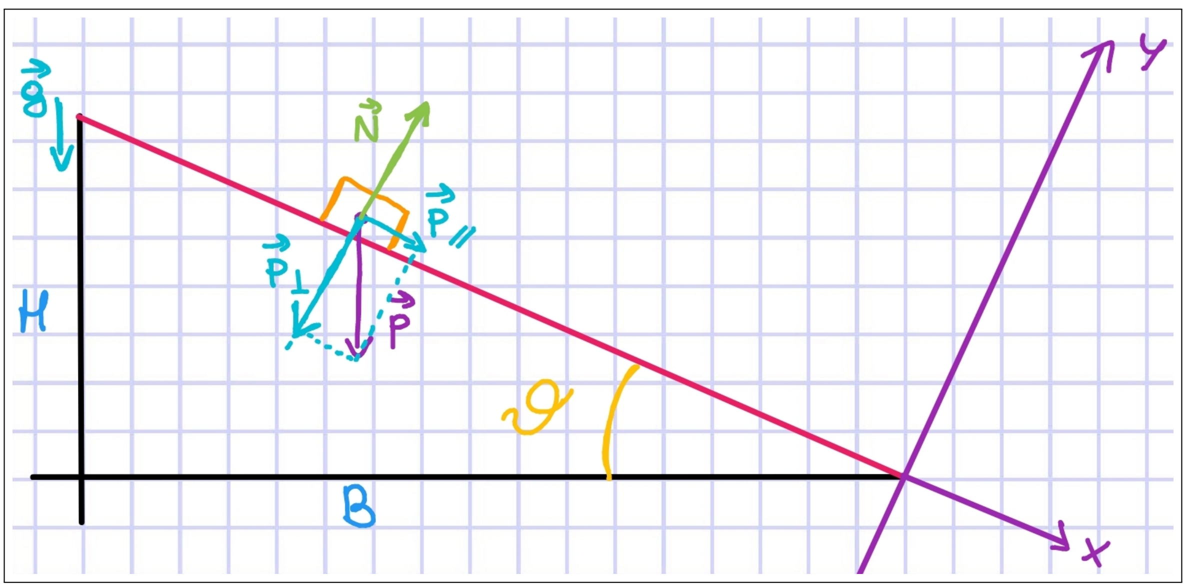
Introduciamo ora il concetto di **piano inclinato rispetto alla verticale** (con verticale intendiamo l'asse su cui giace la gravità).

4.6.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito il sistema di riferimento:



Come asse x usiamo la **retta su cui giace il piano inclinato** mentre l'asse y è rappresentato dalla **normale all'asse x**. Nota inoltre che $\frac{H}{B} = tan(\theta)$. Ora posizioniamo sul piano inclinato un qualche oggetto: questo avrà una **forza peso** con verso che giace sulla retta parallela alla verticale. Possiamo scomporre questa forza come proiezione sugli assi che abbiamo stabilito prima, in particolare $\vec{P}_{\parallel}$ per l'asse x e $\vec{P}_{\perp}$ per l'asse y. A questo punto, ora che abbiamo comoda la forza $\vec{P}_{\perp}$ possiamo anche stabilire la **forza vincolante** $\vec{N}$ che il piano oppone a questo oggetto (ricorda che la forza vincolante **può solo essere ortogonale al piano**). Vediamo un grafico:

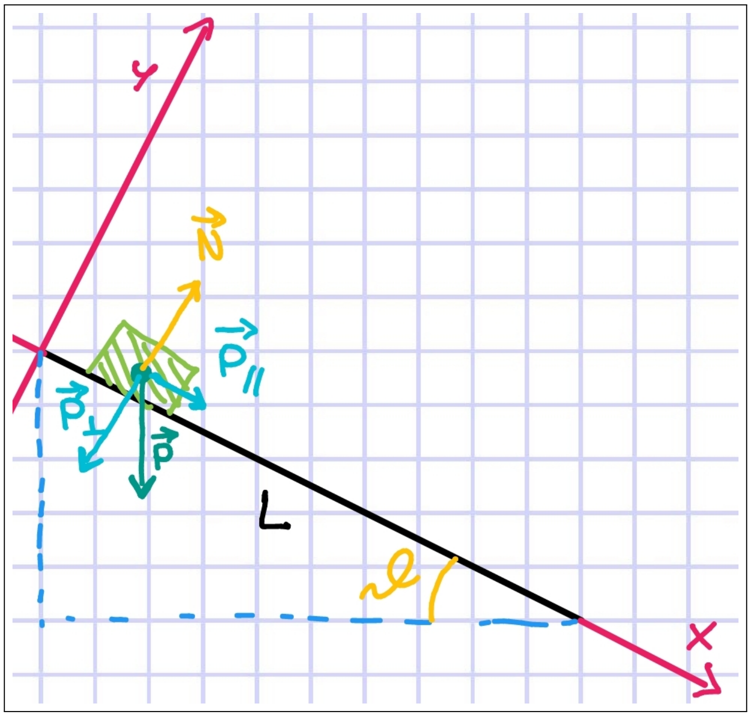


L'obiettivo ora è calcolare le **risultanti delle forze** per gli assi x e y (con risultanti intendiamo la somma di tutte le forze "parallele" ad un certo asse), in particolare:

$$\vec{F}_{ext} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} = m * g * sin(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P}_{\perp} + \vec{N} = m * g * cos(\theta) - N = 0 \end{cases}$$

4.6.2 Esempio

Vediamo ora un esempio: abbiamo un bambino di **massa** m e uno scivolo di **lunghezza** L e con **inclinazione** θ. Quanto **tempo** impiega il bambino a scivolare sullo scivolo? Faremo 2 versioni di questo problema, la prima utilizzando un normale **moto uniformemente accelerato** e la seconda **introducendo anche l'attrito**. Vediamo una rappresentazione grafica del problema:



4.6.2.1 Versione senza attrito Se proviamo a risolvere il problema senza considerare l'attrito, ci troviamo in presenza di un "semplice" **moto uniformemente accelerato**. Come prima cosa, **analizziamo le forze in campo** e calcoliamo le forze risultanti parallele agli assi. Iniziamo col dire che quella sull'asse y (che ricordo essere inclinato!) non ci interessa, infatti abbiamo la forza vincolante che bilancia, concentriamoci quindi solo sulla forza sull'asse x. Ricordiamo, per la *seconda legge della dinamica* [pag. 21]che:

$$\vec{F_x} = m * a_x$$

A questo punto a noi interessa trovare l'accelerazione a_x, quindi rigiriamo un po' questa formula ed "**espandiamo**" la nostra $\vec{F_x}$ utilizzando le formule viste prima [pag. 31]:

$$\vec{F_x} = m * a_x => a_x = \frac{\vec{F_x}}{m} = \frac{m * g * sin(\theta)}{m} = g * sin(\theta)$$

Ora che abbiamo l'accelerazione, possiamo recuperare le formule viste per il moto uniformemente accelerato [pag. 9]. In questo caso ci interessa la formula dello **spazio percorso** (dato che sappiamo che il nostro scivolo è lungo L), ovvero:

$$L = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

A questa formula possiamo fare delle semplificazioni, in particolare togliere il I ($s_0 = 0$) e il II ($v_0 = 0$) termine, ottenendo:

$$L = \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

Che sostituendo l'accelerazione e, per comodità, il tempo diventa:

$$L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

A noi interessa calcolare Δt, quindi ci rigiriamo la formula in questo modo:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * sin(\theta)}}$$

Introduciamo ora un po' di numeri, supponendo:

$$m = 20Kg \qquad \theta = 30° \qquad L = 4m \qquad \Delta t = ?$$

Otteniamo il tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * sin(\theta)}} = \sqrt{\frac{2 * 4m}{9,8m/s^2 * sin(30°)}} = \sqrt{\frac{8s^2}{9,8 * 1/2}} \approx 1,27s$$

4.6.2.2 Versione con attrito

Se aggiungiamo l'attrito, dobbiamo modificare un po' le nostre formule in modo da considerare l'attrito statico e dinamico:

- **attrito statico**:

$$\begin{cases} R_x = m * g * sin(\theta_{max}) - A_{s,max} & => m * g * sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 \\ R_y = m * g * cos(\theta_{max}) - N & => N = m * g * cos(\theta_{max}) = 0 \end{cases}$$

  Da qui otteniamo che

$$\begin{aligned} m * g * sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 \quad & => m * g * sin(\theta_{max}) - \mu_s * m * g * cos(\theta_{max}) = 0 \\ & => m * g * [sin(\theta_{max}) - \mu_s * cos(\theta_{max})] = 0 \end{aligned}$$

  Ora, dato che sappiamo che $m * g$ non è nullo, possiamo dedurre che sia la seconda parte ad annullarsi, quindi:

$$\begin{aligned} sin(\theta_{max}) - \mu_s * cos(\theta_{max}) = 0 \quad & => \mu_s * cos(\theta_{max}) = sin(\theta_{max}) \\ & => \mu_s = \frac{sin(\theta_{max})}{cos(\theta_{max})} \\ & => \mu_s = tan(\theta_{max}) \end{aligned}$$

  Nota che con "θ_{max}" indica l'angolo massimo oltre al quale il nostro oggetto sul piano inclinato inizia a muoversi, superando la soglia di attrito statico, senza l'applicazione di forze esterne;

- **attrito dinamico**: in questo caso, la componente che ci interessa trovare è l'accelerazione sull'asse x (a_x). Partiamo quindi da quello che conosciamo e cerchiamo di rigirarlo un po' per ottenere l'accelerazione:

$$\begin{cases} R_x = m * g * sin(\theta) - A_d & => m * g * sin(\theta) - \mu_d * N = m * a_x \\ R_y = m * g * cos(\theta) - N = 0 & => N = m * g * cos(\theta) \end{cases}$$

  Da qui otteniamo che:

$$\begin{aligned} m * g * sin(\theta) - \mu_d * m * g * cos(\theta) = m * a_x \quad & => g * sin(\theta) - \mu_d * g * cos(\theta) = a_x \\ & => a_x = g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta)) \end{aligned}$$

4.6.3 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito dinamico

Supponiamo di avere lo stesso identico esercizio di prima, però ora **entra in gioco anche l'attrito**. Supponendo che l'oggetto impieghi Δt_{att} secondi a percorrere tutto il piano, a quanto corrisponde il coefficiente di attrito dinamico?
Iniziamo con **l'equazione dello spazio per il moto uniformemente accelerato** e la rigiriamo un po':

$$s = s_0 + v_0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \qquad => L = 0 + 0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$
$$=> L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$
$$=> L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

Ora, sappiamo che, in un contesto di moto con attrito dinamico, $\vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} - \vec{A}_D = m * a_x$, utilizzando i calcoli visti prima otteniamo che l'accelerazione vale:

$$a = g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta))$$

Mettiamo tutti insieme e otteniamo:

$$L = \frac{1}{2} * g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta)) * (\Delta t)^2$$

La modifichiamo per ottenere il valore di μ_d:

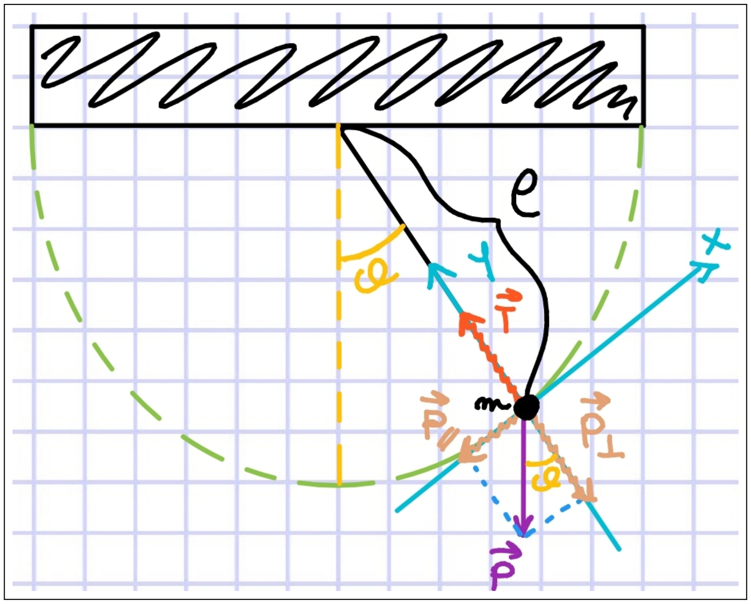
$$L = \frac{1}{2} * g * (sin(\theta) - \mu_d * cos(\theta)) * (\Delta t)^2 \qquad \mu_d = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} - \frac{2L}{g * \Delta t^2 * cos(\theta)}$$

Ora ci basta semplicemente inserire i valori (li puoi ritrovare all'esercizio prima, [pag. 33]) ed otteniamo il nostro risultato $\mu_d \approx 0,28$.

4.7 Pendolo semplice

Introduciamo il pendolo, ovvero una **massa** agganciata ad un punto di ancoraggio tramite una **fune inestensibile**. Supponiamo che **non ci sia alcun attrito**, quindi il nostro pendolo continuerà ad oscillare tramite un **moto perpetuo**. Cominciamo introducendo i 2 sistemi di riferimento: il primo ci serivirà per specificare delle cose nel secondo.

4.7.1 Sistema di riferimento sul peso



Nota che questo sistema di riferiemento **si muove assieme al peso**, in particolare abbiamo che l'asse y che è **normale alla traiettoria** e l'asse x che è **tangente alla traiettoria**. Iniziamo analizzando le forze in gioco. In questo caso abbiamo solo la **forza peso** che può essere scomposta in questo modo:

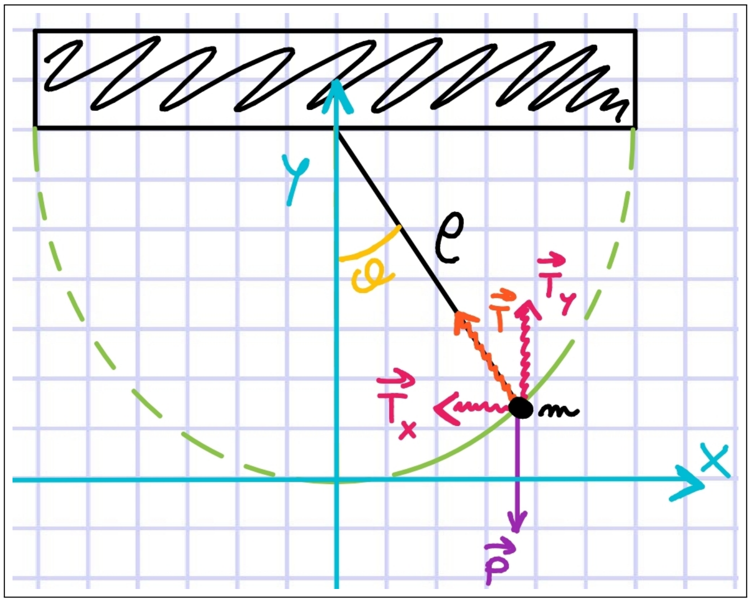
$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_{\parallel} & = -m * g * sin(\theta) \\ \vec{P}_{\perp} & = m * g * cos(\theta) \end{cases}$$

Inoltre, dato che consideriamo **il cavo inestensibile**, abbiamo una **forza di tensione** ($\vec{T}$) uguale e opposta a $\vec{P}_bot$ che la bilancia. A questo punto possiamo analizzare **le risultanti**:

$$\vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} = -m * g * sin(\theta)$$
$$\vec{R}_y = \vec{P}_{\perp} + \vec{T} = m * g * cos(\theta) - T = 0$$

4.7.2 Sistema di riferimento nella posizione di equilibrio

Ora, cambiamo sistema di riferimento e utilizziamo quello "cartesiano" con centro nella posizione di equilibri del nostro pendolo:



Con questo nuovo riferimento, possiamo trovare facilmente la poszione (x, y) del nostro peso:

$$x(t) = R * sin[\theta(t)]$$
$$y(t) = R - R * cos[\theta(t)]$$

Supponendo che R sia la lunghezza del nostro cavo. Nota anche che le coordinate dipendono dal tempo, infatti **sarà l'angolo θ a variare col tempo**. Il problema è **in che modo**? Ci torneremo in seguito. Questo sistema di riferimento ci permette inoltre di scomporre le nostre 2 forze (peso e tensione) in questo modo:

$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_x = 0 \\ \vec{P}_y = -m * g \end{cases} \qquad \vec{T} = \begin{cases} \vec{T}_x = -Tsin(\theta) = -m * g * cos(\theta)sin(\theta) \\ \vec{T}_y = Tcos(\theta) = m * g * cos(\theta) * cos(\theta) \end{cases}$$

Nella scomposizione della tensione possiamo usare la formula che abbiamo trovato prima, ovvero "$m * g * cos(\theta) - T = 0$" (prima dobbiamo rigirarla un po'). Con queste "nuove" scomposizioni, possiamo calcolare le forze risultanti sugli assi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{T}_x = -m * g * sin(\theta) * cos(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P} + \vec{T}_y = -m * g + m * g * cos^2(\theta) = -m * g * (1 - cos^2(\theta)) = -m * g * sin^2(\theta) \end{cases}$$

A questo punto, per la **II legge della dinamica**, sappiamo per definizione che $R = m * a$, quindi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = m * a_x = -m * g * sin(\theta) * cos(\theta) & => a_x = -g * sin(\theta) * cos(\theta) \\ \vec{R}_y = m * a_y = -m * g * sin^2(\theta) & => a_y = -g * sin^2(\theta) \end{cases}$$

4.7.2.1 Calcolare spazio, velocità e accelerazione

Con le operazioni precedenti abbiamo scoperto che;

$$\begin{cases} a_x = -g * sin(\theta) * cos(\theta) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = -g * sin^2(\theta) = \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = R * sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * cos[\theta(t)] \end{cases}$$

Il nostro problema è "$\theta(t)$", **come varia θ in funzione del tempo?** Noi però abbiamo il valore dell'accelerazione e sappiamo che **la derivata seconda ($\frac{d^2x}{dt^2}/\frac{d^2y}{dt^2}$) dello spostamento corrisponde all'accelerazione!** Quindi deriviamo la funzione dello spostamento, ricordando però che noi **non conosciamo la derivata di** $\theta(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = R * sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * cos[\theta(t)] \end{cases} \quad => \begin{cases} x^{(1)}(t) = R * cos(\theta) * \theta^{(1)} \\ y^{(1)}(t) = R * sin(\theta) * \theta^{(1)} \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x^{(2)}(t) = R * [-sin(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + cos(\theta) * \theta^{(2)}] \\ y^{(2)}(t) = R * [cos(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + sin(\theta) * \theta^{(2)}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -g * sin(\theta) * cos(\theta) = R * [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -g * sin^2(\theta) = R * [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -g * sin(\theta) * cos(\theta) = l * [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -g * sin^2(\theta) = l * [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -\frac{g}{l} * sin(\theta) * cos(\theta) = [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\frac{g}{l} * sin^2(\theta) = [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

Adesso, prendiamo il "$\frac{g}{l}$" e lo chiamiamo "ω^2", perche? Perchè SI, lo vuole Iuppa. Di conseguenza le nostre formule diventano:

$$\begin{cases} x \to -\omega^2 * sin(\theta) * cos(\theta) = [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\omega^2 * sin^2(\theta) = [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

4.7.2.2 Le piccole oscillazioni

Il problema con questa formula è che **è un casino calcolarsi seni e coseni**, quindi noi possiamo **ragionare in termini di piccole oscillazioni**, in modo da approssimare seni e coseni con **Taylor**!

$$\begin{array}{ll} sin(\theta) \approx \theta & cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ tg(\theta) \approx \theta & (1+\theta)^\alpha \approx +\alpha\theta \\ e^{\alpha\theta} \approx 1 + \alpha\theta & \sqrt{1+\theta} \approx 1 + \frac{\theta}{2} \end{array}$$

Nota che le parti in rosso, dato che consideriamo solo θ piccoli, le possiamo togliere!

Con "piccole oscillazioni" intendiamo $\theta << 1$, ovvero "θ molto minore di 1" (inteso come radianti, in gradi possiamo immaginare che θ non superi i 4 gradi circa). Ora, considerando solo queste piccole oscillazioni, possiamo approssimare le formule in questo modo:

$$\begin{cases} x \to -\omega^2 * sin(\theta) * cos(\theta) = [cos(\theta) * \theta^{(2)} - sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\omega^2 * sin^2(\theta) = [sin(\theta) * \theta^{(2)} + cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \quad => \begin{cases} x \to -\omega^2 * \theta * 1 = [1 * \theta^{(2)} - \theta * \theta^{(1)2}] \\ y \to -\omega^2 * \theta^2 = [\theta * \theta^{(2)} + 1 * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \to -\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} \\ y \to -\omega^2 * \theta^2 = \theta^{(1)2} \end{cases}$$

Nota che le parti in rosso, in quanto **moltiplicate per** $\theta << 1$ diventano trascurabili, quindi le togliamo

Prendiamo in considerazione solo la formula per la x, abbiamo quindi che:

$$-\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 * \theta = 0$$

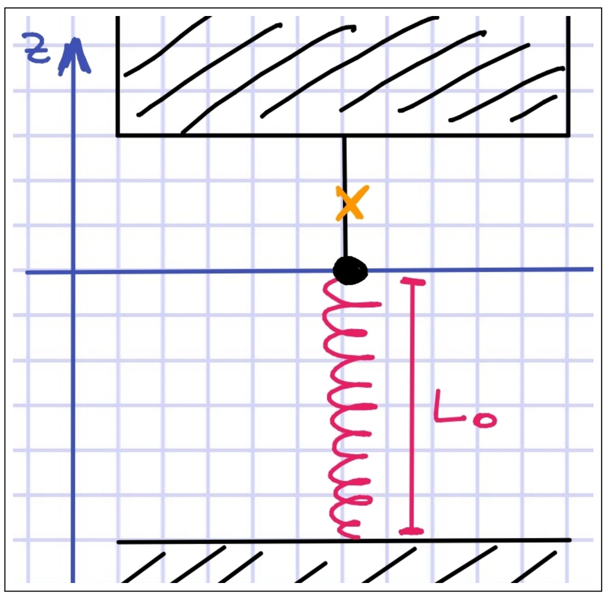
Ovvero **l'equazione del moto armonico**! Da qui possiamo dire quindi che:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad & => \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ 4 \qquad & => T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

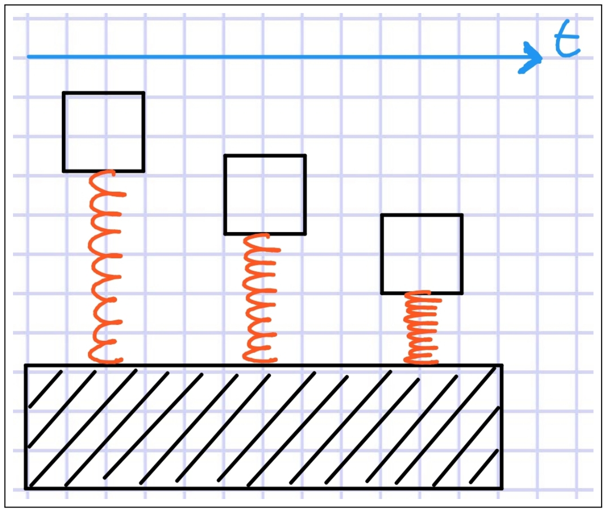
Ricorda che T in questo caso corrisponde al **periodo** e non alla forza di tensione.

4.8 Esercizio sulla dinamica

Vediamo ora un esercizio riassuntivo sulla dinamica, che cerca di raggruppare tutto quello che abbiamo visto. Supponiamo di essere in questa situazione:



Abbiamo un **peso di massa m** attaccato ad un **filo inestensibile di massa trascurabile** che poggia su una **molla in posizione di riposo con coefficiente elastico k**. Ad un certo punto, il cavo **viene tagliato**, quindi il peso verrà **sostenuto interamente dalla molla**, che **inizierà a comprimersi ed allungarsi** (come si comporta una molla normale)



Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover trovare i seguenti valori:

$k = 70N/m$ $\quad m = 0,5Kg$ $\quad T = ?$

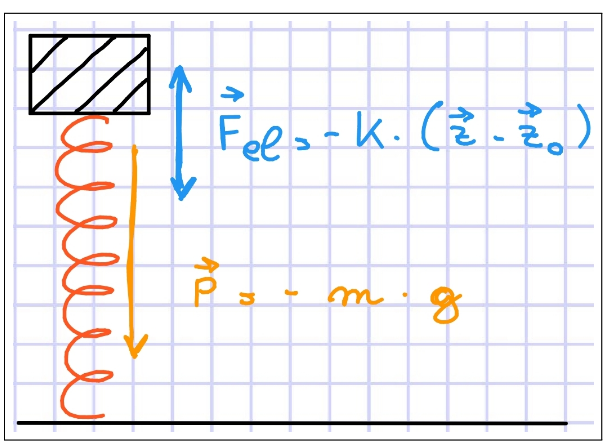
$\Delta l_{max} = ?$ $\quad z_{vMax} = ?$ $\quad v_{max} = ?$

Con:

- T periodo;
- Δl_{max} accorciamento massimo;
- z_{vMax} z dove la velocità è massima;
- v_{max} velocità massima;

Allora, come prima cosa **visualizziamo quali forze agiscono nel sistema**, in particolare abbiamo:

- la **forza peso** $\vec{P} = -m * g$;
- la **forza elastica** $\vec{F_{el}} = -k * (\vec{z} - \vec{z_0})$. La parte tra parentesi viene chiamata "**forza di richiamo**" e **dipende dal sistema di riferimento che adottiamo** (in particolare la z_0, che indica la **posizione di riposo** della nostra molla, nel nostro caso [in base al sistema di riferimento che abbiamo adottato] vale 0).



4.8.1 Studio della dinamica del problema

Iniziamo considerando le varie risultanti delle forze che agiscono sul nostro asse z (semplicemente agiscono solo forze verticali, quindi ignoriamo l'asse orizzontale). Iniziamo considerando le 2 forze che abbiamo già visto prima:

$$\begin{cases} \vec{P} = -m * g * \hat{z} \\ \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - \vec{z}_0) = \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - 0) = \vec{F}_{el} = -k * z * \hat{z} \end{cases}$$

Nota che i **versori** $\hat{z}$ servono solo per descrivere la direzione della forza, poi li possiamo togliere per semplicità. Ora, avremmo che la risultante di queste forze corrisponde alla loro somma:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{R}_{el} = -m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} = m * \vec{a} \ (per \ definizione)$$

A questo punto noi sappiamo però che l'accelerazione corrisponde alla **derivata seconda dello spazio**, quindi possiamo scrivere:

$$-m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} = m * \frac{d^2z}{dt^2} * \hat{z} \qquad => -g - \frac{k}{m} * z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$=> \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g$$

La formula in rosso sappiamo che è **l'equazione armonica**! In questo caso ponimao $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ottenendo:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 * z = -g$$

Ci sono un po' di "problemi" però, rispetto all'equazione "classica" non abbiamo $= 0$ ma $= -g$, quello viene definito **membro forzante** e semplicemente **sfasa la nostra posizione di equilibrio**, in questo caso la sposta verso il basso. Per definizione del moto armonico [pag.11] che possiamo indicare lo spostamento nel tempo in questo modo:

$$z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) + w(t)$$

In questo caso dobbiamo aggiungere questa parte in rosso perché dobbiamo **compensare in qualche modo quell' "=-g"**. Ora, per calcolare velocità ed accelerazione (quest'ultima è quella che ci interessa) ci basta semplicemente derivare la formula trovata prima:

$$z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) + w(t) \qquad => \frac{dz}{dt} = A\omega * cos(\omega t + \varphi) + \frac{dw}{dt}$$

$$=> \frac{d^2z}{dt^2} = -A\omega^2 * sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2}$$

Questa è la formula che ci interessa! Infatti ora possiamo sostituirla all'interno dell'equazione iniziale, ovvero:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g \qquad => -A\omega^2 * sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(A * sin(\omega t + \varphi) + w(t)) = -g$$

Bene, abbiamo la formula matematica che descrive la dinamica del nostro sistema. Ora dobbiamo fissare un po' di valori che non conosciamo al momento, in particolare φ, ω e $w(t)$, come facciamo? Studiamo la nostra formula, che ricordiamo essere in **funzione del tempo**, in alcuni punti (possibilmente comodi). Cominciamo considerando $t = 0$:

$$-A\omega^2 * sin(\omega * 0 + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(A * sin(\omega * 0 + \varphi) + w(0)) = -g \qquad => \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) = -g$$

Ci siamo semplificati i seni, ora dobbiamo soltanto trovare il valore della nostra $w(0)$: per toglierci la derivata (che è abbastanza scomoda) possiamo supporre che w sia **costante in funzione del tempo**, quindi otterremo:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) = -g \qquad => 0 + \omega^2 * w = -g$$

$$=> w = -\frac{g}{\omega^2}$$

Ecco fatto, ora possiamo tornare un po' di equazioni prima e **sostituire il valore che abbiamo trovato di w**:

$$z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) + w(t) \qquad => z(t) = A * sin(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega^2}$$

Ora ci manca solo da trovare il valore di A e di φ, per trovarli possiamo usare il fatto che **sia lo spazio che la velocità in t=0 valgono 0**! Vediamo:

$$\begin{cases} z(t) = A * sin(\omega * 0 + \varphi) + -\frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * cos(\omega * 0 + \varphi) = 0 \end{cases} \qquad => \begin{cases} z(t) = A * sin(\varphi) + -\frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

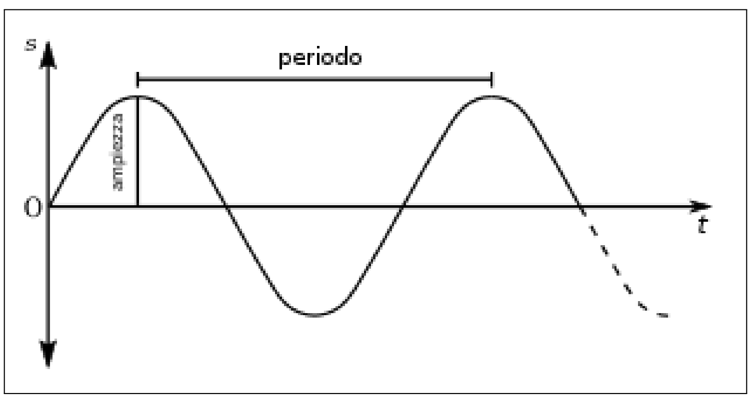
$$=> \begin{cases} A = \frac{g}{\omega^2} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi arriviamo alla fine con questa formula che descrive il nostro moto:

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} * sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2}$$

Come la interpretiamo? Sostanzialmente come un normalissimo **moto armonico**, con:

- $a = \frac{g}{\omega^2}$ →ampiezza, il valore massimo (o minimo) della curva;
- $\omega = \frac{2\pi}{T} => T = \frac{2\pi}{\omega}$ →periodo, misurato in secondi;
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ →fase, indica da che punto parte il grafico, nel caso di questo esercizio l'abbiamo tolta trasformando il sin in cos;



Ora che abbiamo questa formula, abbiamo tutto! Possiamo facilmente calcolare tutti i punti richiesti dal problema, vediamo come.

4.8.2 Allungamento massimo

Come possiamo vedere dall'immagine precedente, l'ampiezza è la distanza massima dal punto di equilibrio, quindi ci basta prendere **2 volte l'ampiezza** (nota che il "-" è dovuto al sistema di riferimento adottato):

$$\Delta l_{max} = -2\frac{g}{\omega^2} = -2 * \frac{m * g}{K} \approx -14cm$$

4.8.3 Posizione di velocità massima

All'istante 0, anche la velocità vale 0. Successivamente la velocità inizierà ad aumentare finché non raggiungerà il massimo. Per capire dove si trova il massimo possiamo **studiare la derivata associata e vedere dove questa vale 0**, quindi:

$$\frac{dz}{dt} = v(t) = -\frac{g}{\omega^2} * \omega * sin(\omega t) + 0 \qquad => \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\omega^2} * \omega^2 * cos(\omega t)$$
$$=> \frac{dv}{dt} = -g * cos(\omega t)$$

Quando questa equazione vale 0? Dobbiamo **annullare il coseno**, quindi porre $\omega t = \frac{\pi}{2} => t = \frac{\pi}{2\omega}$. In che posizione ci troviamo con $t = \frac{\pi}{2\omega}$? Vediamo:

$$z(\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{g}{\omega^2} * cos(\omega * \frac{\pi}{2\omega}) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * 0 - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{g}{\omega^2}$$

Come si può facilmente notare, abbiamo la velocità nella **posizione di equilibro della molla**! Potevamo anche arrivarci osservando il disegno, infatti nel punto di equilibrio il peso **smette di prendere velocità ed inizia a rallentare in seguito alla forza elastica**! Calcoliamo il numero:

$$z_{vMax} = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{g * m}{k} \approx -7cm$$

4.8.4 Velocità massima

Prima abbiamo scoperto che la velocità massima si ottiene nella z_{eq}, che si raggiunge in $t = \frac{\pi}{2*\omega^2}$

$$v(\frac{\pi}{2 * \omega^2}) = -\frac{g}{\omega} * sin(\omega\frac{\pi}{2 * \omega^2}) = -\frac{g}{\omega} * 1 = -\frac{g}{\omega} = -g * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx -0,84m/s$$

Di nuovo, il "-" della velocità è sempre dovuto al sitema di riferimento che abbiamo adottato.

4.8.5 Calcoliamo la T

C'è un problema: nella lezione Iuppa considera T come **il periodo** mentre nel video di Youtube la considera come **forza di tensione del cavo iniziale**. Calcoliamo entrambe.

4.8.5.1 Il periodo

Nulla di complesso, noi sappiamo che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad => T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$=> T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,52s$$

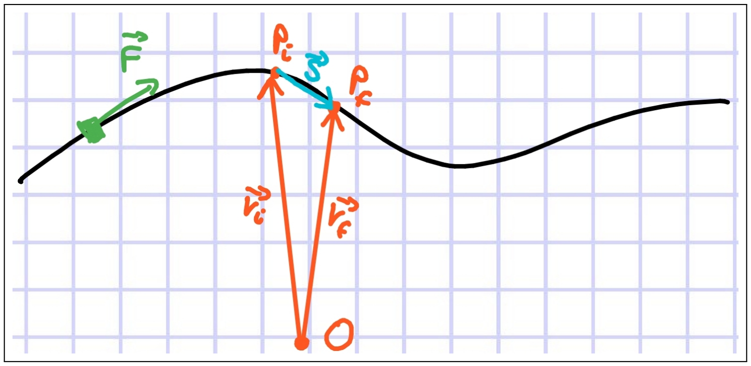
4.8.5.2 La tensione

Ancora, niente di particolare. Sappiamo semplicemente che la **tensione è uguale ed opposta alla forza peso**, quindi:

$$\vec{T} = -\vec{P} \qquad => \vec{T} = -m * g \approx 4,9N$$

5 Meccanica

5.1 Lavoro



Supponiamo che ci sia un corpo che si muove lungo una traiettoria. Ora prendiamo un punto d'origine del sistema di riferimento e descriviamo il movimento del corpo con dei raggi vettore dall'origine. Ora consideriamo un punto iniziale p_i ed uno finale p_f molto vicini tra loro e quindi otteniamo uno spostamento infinitesimale, $d\vec{s} = \vec{r_f} - \vec{r_i}$.
Sul corpo inoltre agisce una forza $\vec{F}$ che è quella che lo fa spostare. Osserviamo ora che a seconda del valore di questa forza, potrebbe variare la velocità dell'oggetto. Se $d\vec{s} \perp \vec{F}$, allora il corpo non rallenta, quindi se l'angolo è $90_\circ$, l'effetto sarà minimo, mentre se l'angolo è $0_\circ$ l'effetto sarà massimo e infine se l'angolo è $180_\circ$ l'effetto sarà massimo ma in senso opposto.
In conclusione quindi l'effetto che la forza ha sul corpo è descritta dal coseno ed è definito come **lavoro infinitesimo**, in formula:

$$dW = |\vec{F}||d\vec{s}|cos\alpha_{F,ds}$$

Se il lavoro infinitesimo è positivo, allora il corpo accellera, se è negativo invece, il corpo rallenta. L'iterazione quindi tra il corpo e l'agente esterno, ovvero quello che applica la forza, è definita come energia. In questo caso,l'agente esterno perde energia.

Osserviamo ora che:

$$|\vec{v}||\vec{w}|cos(\alpha_{v,w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

dove "$\cdot$" rappresenta il prodotto scalare tra due vettori. Spesso questo viene detto $v_T w$, ovvero la componente di v tangente a w, quindi:

$$|\vec{v}|cos(\alpha_{v,w}) = v_T$$
$$|\vec{w}|cos(\alpha_{v,w}) = w_T$$

Ora usiamo quindi questa osservazione e otteniamo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che l'unità di misura del lavoro è il Joule, $J = 1Nm$. Una caloria sono, $1cal = 4.18J$
. Ora calcoliamo il **lavoro medio** come segue:

$$\overline{W} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

Osserviamo che il lavoro è una quantità scalare, dato che il prodotto scalare prende due vettori e li trasforma in uno scalare.

Facciamo ora un'esempio molto semplice:

$$|\vec{F}| = 10N |\Delta\vec{s}| = 100m$$

Ora in base all'angolo $\alpha_{F,ds}$ abbiamo dei diversi valori di lavoro:

$\alpha_{F,ds}$	W
0	$1000J$
π	$-1000J$
$\pi/2$	$0J$
$\pi/4$	$707J$

Ora consideriamo tutti gli spostamenti infinitesimi e supponiamo che ogni spostamento infinitesimo abbia un valore di forza diversa (ovviamente la forza è esercitata sempre dallo stesso agente esterno, ma in istanti diversi). Abbiamo quindi per ogni spostamento infinitesimale un lavoro infinitesimale diverso. Rappresentiamo questa cosa come segue:

$$\begin{aligned}
&d\vec{s_1}, d\vec{s_2}, d\vec{s_3}, ..., d\vec{s_n} \\
&\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, ..., \vec{F_n} \\
&dW_1, dW_2, dW_3, ..., dW_n
\end{aligned}$$

Il **lavoro** quindi sarà la somma di tutti questi lavori infinitesimi:

$$W_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} dW_i$$

però considerando che la n tende a infinito, $n \to \infty$, otteniamo:

$$W_{i\to f} = \int_i^n dW_i = \int_i^n \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che la $\vec{F}$ si può tirare fuori dall'integrale solo se non varia per nessun spostamento infinitesimale.

Ora consideriamo il lavoro $W > 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[0, \pi/2]$, ovvero in cui la forza sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro motore**.
Se invece il lavoro $W < 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[\pi/2, \pi]$, ovvero in cui la forza non sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro resistente**.

5.2 Esempi di lavoro

5.2.1 Lavoro forza peso

Data l'equazione della forza peso:

$$\vec{F_p} = -mh\hat{h}$$

abbiamo lavoro infinitesimo:

$$dW = \vec{F_p} \cdot d\vec{h} = -mh\hat{h} \cdot dh\hat{h} = -mgdh$$

Osserviamo che $\hat{h} \cdot \hat{h} = 1$. Ora quindi sommando tutti questi lavori infinitesimi otteniamo il lavoro W_p:

$$W_p = \int_i^f dW = \int_i^f -mgdh = -mg(h_f - h_i) = -mg\Delta h$$

Osserviamo ora che se $\Delta h > 0$, ovvero $h_f > h_i$, avremo $W_p < 0$, quindi lavoro resistente, mentre se $\Delta h < 0$, ovvero $h_f < h_i$, avremo $W_p > 0$, quindi lavoro motore.
Questo era il caso di spostamento verticale, se invece lo spostamento non è verticale il lavoro è comunque lo stesso.
Osserviamo ora che $\vec{F}$ e $d\vec{s}$ non dipendono dal sistema di riferimento, se però consideriamo la forma $\vec{F_p} = -mg\hat{h}$, questa dipende dal sistema di riferimento dato che c'è $\hat{h}$.
Osserviamo inoltre che il lavoro della forza peso dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

Facciamo ora un'esercizio molto semplice:

$$\begin{aligned} &m = 100kg \\ &\Delta h = 1000m \\ &W_p = -9.8\frac{m}{s^2} \cdot 100kg \cdot 1000m = -9.8 \cdot 10^5 kg\frac{m^2}{s^2} = -9.8 \cdot 10^5 J = -9.8 \cdot 10^2 KJ \end{aligned}$$

5.2.2 Lavoro forza elastica

Data l'equazione della forza elastica:

$$\vec{F_{el}} = -K\vec{x}$$

abbiamo lavoro:

$$W_{el} = \int_i^f F_{el}dx = \int_i^f -Kxdx = -\frac{K}{2}({x_f}^2 - {x_i}^2)$$

Osserviamo ora che se ${x_f}^2 > {x_i}^2$, avremo $W_{el} < 0$, infatti allungo la molla che si oppone, mentre se ${x_f}^2 < {x_i}^2$, avremo $W_{el} > 0$, infatti accorcio la molla che aiuta.
Osserviamo inoltre che il lavoro della forza elastica dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

5.2.3 Lavoro forza attrito

Data l'equazione della forza d'attrito:

$$\vec{F_{att}} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

abbiamo lavoro:

$$W_{att} = \int_i^f F_{att}dx = F_{att}\int_i^f dx = -\mu_d mg \int_i^f dx = -\mu_d mgL$$

dove L è la lunghezza dello spostamento $(x_f - x_i)$.
Osserviamo che l'attrito si oppone sempre al movimento, quindi non vale quello che valeva per il lavoro della forza peso e della forza elastica, ovvero che a seconda del punto finale e del punto iniziale il lavoro poteva essere positivo o negativo.

5.3 Energia cinetica

Consideriamo ora il lavoro infinitesimo,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = md\vec{v}\frac{d\vec{s}}{dt} = md\vec{v} \cdot \vec{v}$$

e quindi,

$$dW = d[\frac{1}{2}mv^2]$$

L'**energia cinetica** è la seguente quantità:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi ho che:

$$dW = d[E_k]$$

5.3.1 Teorema delle forze vive

Il **Teorema delle forze vive** afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto. In formula:

$$E_{k,f} = W_{i \to f} + E_{k,i} => W_{i \to f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

Osserviamo ora che se $v_i = 0$ e $v_f = 0$, allora per come è formulata E_k, vorrà dire che $E_{k,i} = 0$ e $E_{k,f} = 0$ e quindi $W_{i \to f} = 0$.

5.4 Potenza

La **potenza** è definita come:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt, $W = 1\frac{J}{s}$.

5.5 Forze conservative

Una **forza conservativa** è una forza per cui il lavoro dipende solamente dal punto iniziale, p_i, e dal punto finale, p_f.
Se vado quindi da p_i a p_f seguendo due percorsi diversi il lavoro sarà lo stesso.
Se invece vado da p_f a p_i, il lavoro sarà sempre uguale ma avrà segno opposto, indipendentemente dal percorso. Questo è descritto come segue,

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

ovvero l'integrale chiuso.

5.5.1 Energia potenziale

L'**energia potenziale** di un corpo è l'energia che esso possiede a causa della sua posizione o del suo orientamento rispetto ad un campo di forze ed è denotata con U.

5.5.2 Energia meccanica

L'**energia meccanica** è la somma di energia cinetica ed energia potenziale ovvero,

$$E = E_k + U$$

5.5.3 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo il caso 1-DIM,

$$\int_{p_i}^{p_f} F dx = U(p_f) - U(p_i) = W_{p_i \to p_f}$$

Ora per il teorema delle forze vive ho che,

$$W_{p_i \to p_f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

e quindi, usando una notazione semplificata, ovvero per esempio invece che $U(p_f)$ uso U_f, ottengo che,

$$U_f - U_i = E_{k,f} - E_{k,i} => U_f - E_{k,f} = U_i - E_{k,i} => E_f = E_i$$

ovvero l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale, e quindi

$$\Delta E = 0$$

ovvero la variazione di energia meccanica è 0, quindi nel caso in cui si hanno solo forze conservative, l'energia meccanica non varia, si conserva.
Se ora consideriamo,

$$-(U(p_f) - U(p_i)) = W_{p_i \to p_f}$$

ed deriviamo, otteniamo che,

$$F = -\frac{dU}{ds}$$

Nel caso a più dimensioni invece, per esempio consideriamo 3-DIM, abbiamo che,

$$F = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z})$$

5.5.4 Esercizio forze conservative

Consideriamo ora l'esercizio fatto in passato [pag.38].
Tutte le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica e risolverlo in modo molto più semplice.
Ora abbiamo quindi che le forze che agiscono sul sistema sono,

$$\vec{F_p} = -mg\hat{z}\vec{F_e}l = -k(z - z_i)\hat{z}$$

e considerando la conservazione dell'energia meccanica abbiamo che,

$$E_k + U = cost => E_k + U_p + U_{el} = cost$$

Calcoliamo ora quindi le energie potenziali,

$$U_p = -W_p = mg(z - z_0)$$
$$U_{el} = \frac{k}{2}(z^2 - z_0^2)$$

e quindi ora sostituisco nella formula precedente e ottengo,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{k}{2}z^2 = cost$$

Ora considerando il sistema di riferimento scelto, nel punto iniziale abbiamo $v_i = 0$ e $z = 0$ e quindi, la formula precedente è $= 0$.
Considerando il punto z_{max}, ho sempre che $v = 0$, e ottengo che,

$$mgz_{max} + \frac{k}{2}{z_{max}}^2 = 0 => z_{max}(\frac{k}{2}z_{max} + mg) = 0$$

Le due soluzioni sono quindi $z_{max} = 0$, che non viene considerata, e

$$z_{max} = -\frac{2mg}{k} = \Delta z_{max}$$

Ora osserviamo che $z_{v_{max}}$ è z_{eq}, ovvero la z nel punto di equilibrio, e quindi,

$$z_{v_{max}} = z_{eq} = \frac{z_{max}}{2} = -\frac{mg}{k}$$

Per calcolare la v_{max} ora, consideriamo sempre il fatto che essa è in z_{eq} e quindi,

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgz_{eq} + \frac{k}{2}z_{eq}^2 = 0 \qquad => \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{(mg)^2}{2K} = 0$$
$$=> \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{2K} = 0$$
$$=> \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{(mg)^2}{2K}$$
$$=> v_{max}^2 = \frac{mg^2}{K}$$
$$=> v_{max} = \sqrt{\frac{mg^2}{K}}$$

5.6 Forze non conservative e lavoro

Consideriamo ora il fatto in cui sul sistema agiscono anche forze non conservative e ne calcoliamo il lavoro.
Abbiamo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{R}_{nc}$$
$$W_{TOT} = \int_i^f \vec{R}d\vec{s} = \int_i^f \vec{R}_c d\vec{s} + \int_i^f \vec{R}_{nc} d\vec{s} = W_c + W_{nc}$$

Ora però sappiamo che,

$$W_{TOT} = \Delta E_k => W_c + W_{nc} = \Delta E_k => W_{nc} = \Delta E_k - W_c$$

ma ora ci ricordiamo che $W_c = -\Delta U$ e quindi,

$$W_{nc} = \Delta E_k + \Delta U => W_{nc} = \Delta E$$

Quindi se sul sistema agiscono delle forze non conservative, il lavoro di queste sarà uguale alla variazione di energia meccanica.
Osserviamo ora quindi che se $W_{nc} < 0$, vuol dire che $E_f - E_i < 0$ e quindi $E_f < E_i$. Allo stesso modo, se $W_{nc} > 0$, vuol dire che $E_f - E_i > 0$ e quindi $E_f > E_i$, e inoltre $E_f = E_i + W_{nc}$.

5.6.1 Esempio lavoro forze non conservative

Supponiamo che un corpo di massa m scali una montagna di altezza h_{max} partendo da $h_0 = 0$. Ora non considerando gli attriti, abbiamo solo la forza peso che agisce sulla massa. Calcoliamo quindi,

$$\Delta U_p = mgh_{max} + mg0 = mgh_{max}$$
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{1}{2}m{v_i}^2 = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}m0^2 = 0$$
$$\Delta E = mgh_{max} = W_{nc}$$

L'energia cinetica è $= 0$ dato che sia la velocità iniziale che quella finale sono $= 0$ e quindi l'energia meccanica sarà uguale all'energia potenziale, quest'ultima è uguale all'energia potenziale finale dato che, essendo l'altezza iniziale $= 0$, anche l'energia potenziale iniziale $= 0$.

5.6.2 Esempio energie

5.7 Gravità universale

La **forza gravitazionale** è quella forza che esiste tra 2 corpi. Possiamo rappresentarla con questa formula:

$$\vec{F} = -\gamma * \frac{m_1 * m_2}{r_{1,2}^2} * \hat{r}_{1,2}$$

Dove:

- G è la **costante di gravitazione universale**, calcolata scientificamente e vale $\gamma = G = 6,67 * 10^{-11} \frac{N*m^2}{Kg^2}$. Nota che G è γ per la Terra;
- m_1, m_2 sono le masse dei 2 corpi;
- $r1,2$ è la distanza tra i 2 corpi;

Perché ci serve la costante di gravitazione? Se **controlliamo le unità di misura senza questa costante** otterremo una $\frac{M^2}{L^2}$ (M -> massa, L -> lunghezza), ma noi **vogliamo una forza**! Per questo motivo introduciamo la costante di gravitazione, espressa proprio come $N * \frac{L^2}{M^2}$, se mettiamo tutto insieme le masse e le lunghezze si semplificano **lasciando solo una forza** (in Newton)! Se immaginiamo di avere la Terra e la Luna, la forza gravitazionale è proprio **la forza normale che permette alla luna di restare sulla sua orbita** (che immaginiamo essere perfettamente circolare per semplicità). Questa forza corrisponderebbe proprio a:

$$\vec{F} = -G * \frac{m_L * m_T}{d^2}$$

Ora, noi sappiamo che, per la II legge di Newton, che $\vec{F} = m * \vec{a}$. Possiamo mettere a confronto i **moduli di queste 2 forze**:

$$m_{I,L} * \frac{v^2}{d_{T,L}} = G * \frac{m_{G,L} * m_{GT}}{d_{T,L}^2}$$

Alcune osservazioni:

1. il "$-G$" diventa "G" perché **stiamo paragonando i moduli**, quindi il segno non importa;
2. la forza a sinistra dell'$=$ corrisponde alla **forza normale del moto circolare**;
3. a sinistra dell'$=$, la massa $m_{I,L}$ è la **massa INERZIALE** (*capacità di un corpo di opporsi al moto*) della luna, mentre a destra la massa $m_{G,L}$ è la **massa GRAVITAZIONALE** (*carica gravitazionale del corpo*) della luna. Sono 2 valori **concettualmente diversi**, ma **hanno valori uguali**!

Detto ciò, soprattutto facendo riferimento al terzo punto, possiamo applicare una serie di semplificazioni:

$$\begin{aligned}
m_{I,L} * \frac{v^2}{d} = G * \frac{m_{G,L} * m_{G,T}}{d^2} \qquad & => \frac{v^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\
conversione\ vel.\ moto\ circolare \qquad & => \frac{(\omega * d)^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\
& => \omega^2 * d^2 = G * \frac{m_{G,T}}{d} \\
& => \omega^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\
definizione\ \omega \qquad & => (\frac{2\pi}{T})^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\
& => \frac{d^3}{T^2} = G * \frac{m_{G,T}}{(2\pi)^2}
\end{aligned}$$

Ok, con l'ultima equazione siamo arrivati al punto in cui abbiamo **tutto quello che riguarda il satellite** (la Luna) **è da una parte** e **tutto quello che riguarda la Terra è dall'altra**. In particolare, notiamo che la parte che riguarda la Terra **è costante**! Ciò ci permette di, ad esempio, i scegliere una nuova distanza e, di conseguenza, il periodo T si "aggiusterà" di conseguenza per mantenere la costante "costante".

$$\frac{d^3}{T^2} = const.$$

Nota come **la massa del satellite non influisce sulla distanza o sul periodo**, quindi possiamo usare la **stessa formula** per **qualsiasi satellite che orbita la terra** (con un moto circolare uniforme). Immaginiamo di considerare l'ISS che orbita la terra ad una distanza di 500Km, la formula diventerebbe:

$$\frac{d_L^3}{T_L^2} = const. = \frac{d_{ISS}^3}{T_{ISS}^2}$$

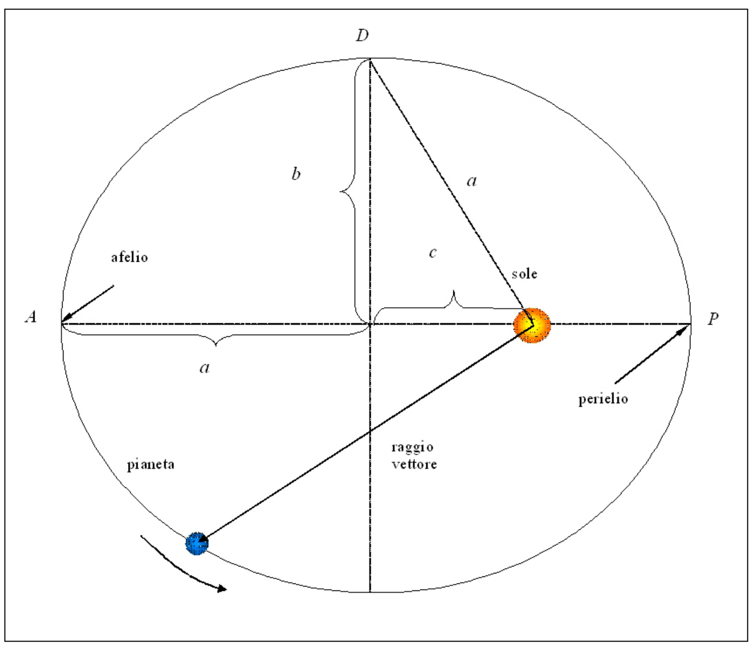
$$\frac{(300000Km)^3}{(28gg)^2} = const. = \frac{(500Km)^3}{(?)^2}$$

Come detto prima, se variamo il raggio dell'orbita, il periodo varia di conseguenza per mantenere il valore della costante uguale!

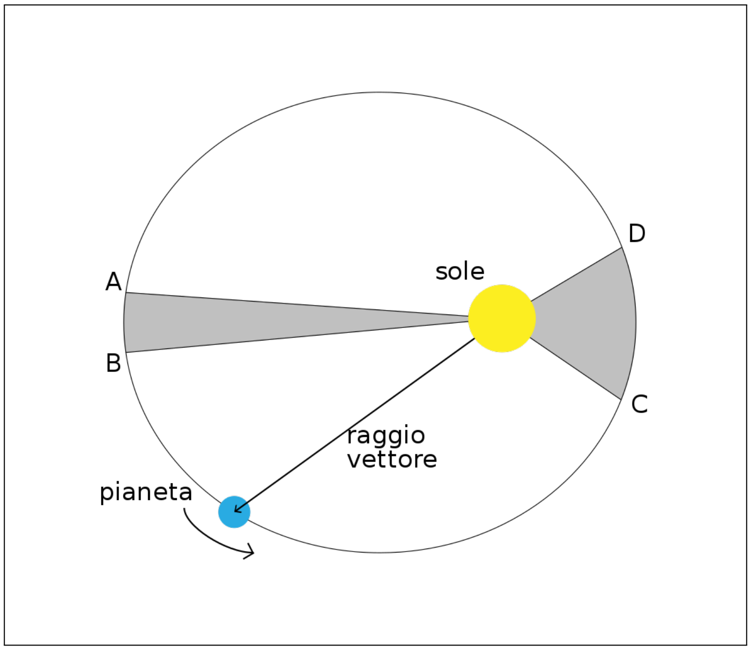
5.8 Leggi di Keplero

La legge di gravità universale è stata "creata" come **"unificazione" delle 3 leggi di Keplero**. Nota che queste leggi descrivono il moto, ellittico, dei pianeti attorno al Sole. Citiamole per completezza:

1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi*;



2. *Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali*;



3. *I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore.* Questa legge può essere scritta in forma matematica in questo modo:

$$T^2 = k * a^3$$

In particolare, k è una costante (detta anche Keplero) che dipende dal corpo attorno al quale si orbita.

5.9 Sistemi di riferimento non inerziali

Prima di cominciare con i sistemi di riferimento non inerziali, sostanzialmente quei **sistemi di riferimento soggetti ad una qualche accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale**, dobbiamo introdurre alcuni concetti fondamentali.

5.9.1 Convertire una rotazione in vettore

Come facciamo a rappresentare una rotazione utilizzando un vettore? Vediamo punto per punto:

- **direzione**: corrisponde all'asse su cui viene eseguita la rotazione;
- **verso**: applichiamo la "regola della vite destrorsa", ovvero immaginiamo di posizionare una vite sull'asse di rotazione ed applichiamo suddetta rotazione: il verso di avanzamento/arretramento della vite ci indica il verso del vettore (ricorda che le viti "entrano" se vengono ruotate in senso orario);
- **modulo**: come abbiamo già visto, possiamo rappresentare la rotazione con una **velocità angolare** ω, prendiamo come modulo del vettore il **valore numerico di** ω;

5.9.2 Prodotto vettoriale

Dobbiamo ridordare il concetto di **prodotto vettoriale**, in particolare è un'operazione binaria tra 2 vettori 3-dimensionali che restituisce un vettore 3-dimensionale. Matematicamente potremmo scrivere:

$$\times : R^3 \times R^3 \to R^3$$

Supponiamo di avere:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{k}$$

Ora, il vettore $\vec{k}$ ha 3 componenti principali, come le calcoliamo? Vediamo:

- **modulo**: corrisponde a

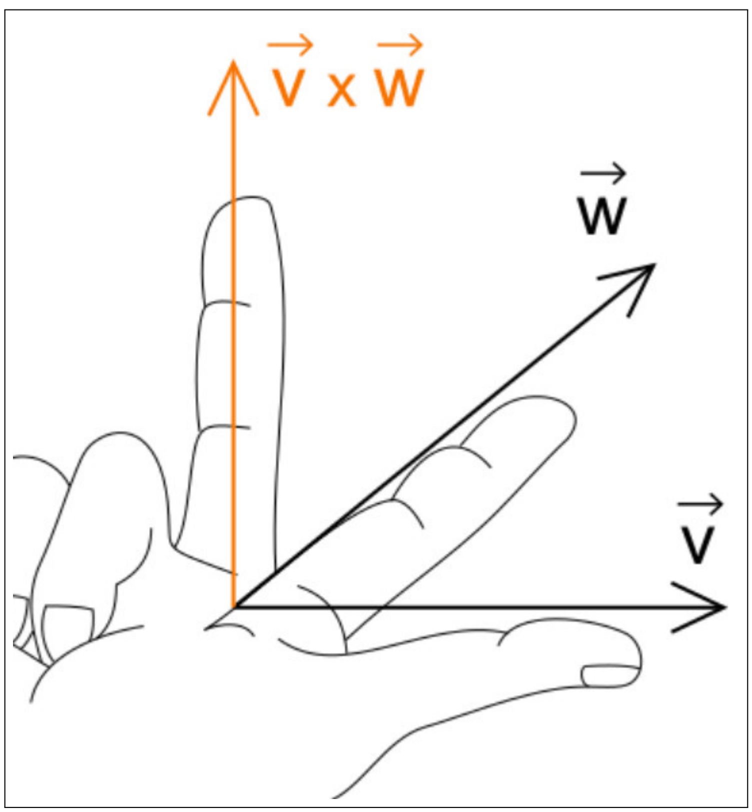
$$||\vec{v}|| * ||\vec{w}|| * sin(\theta)$$

  dove $||\vec{v}||$ e $||\vec{w}||$ rappresentano la **norma euclidea** dei rispettivi vettori (sostanzialmente si fa la radice della somma dei quadrati delle componenti del vettore), mentre $\theta \in [0, \pi]$ rappresenta **l'angolo convesso tra i vettori**;

- **direzione**: la direzione **ortogonale** al piano che contiene $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

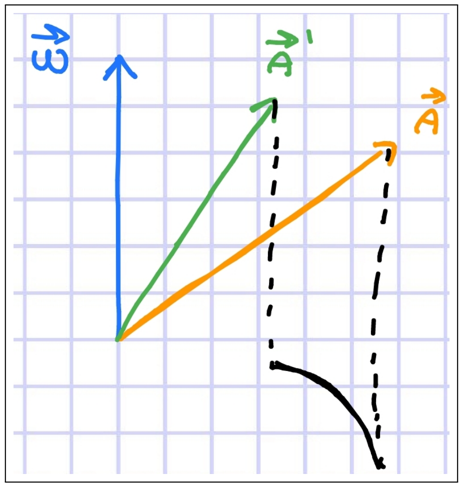
- **verso**: per quanto riguarda il verso, includo la regola generale della mano destra:

> - il verso di $\vec{v} \times \vec{w}$ si ricava con la regola della mano destra: si dispone il pollice della mano destra nella direzione e nel verso del vettore $\vec{v}$, e l'indice nella direzione e nel verso di $\vec{w}$. Distendendo il dito medio perpendicolarmente al palmo della mano, si ha la direzione e il verso in cui punta il prodotto $\vec{v} \times \vec{w}$.

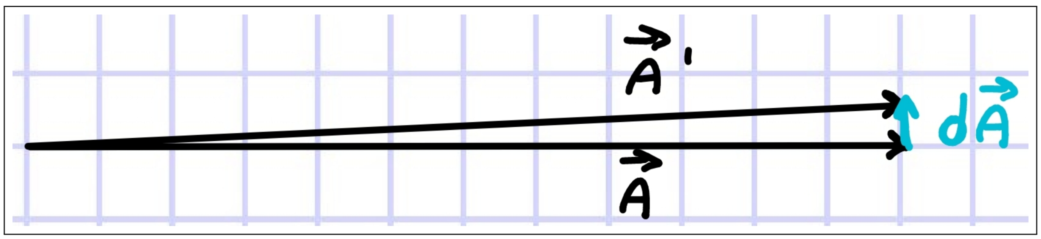


5.9.3 Legge di Poisson

L'ultimo concetto da introdurre, ci permette di "ridurre" la derivata di un vettore ad un prodotto vettoriale. Supponiamo di avere un cono gelato e di **disegnare un vettore sul lato di questo cono**. Ora, immaginiamo di applicare una rotazione sull'asse di questo cono, otterremo qualcosa del genere:



Ora, se lo spostamento di $\vec{A}$ verso $\vec{A}'$ è **infinitesimale**, ovvero



possiamo "approssimare" dA nell'intervallo di temo dt (dA/dt, ovvero la derivata) come il **prodotto vettoriale tra il vettore rotazione** $\vec{\omega}$ **ed il vettore** $\vec{A}$:

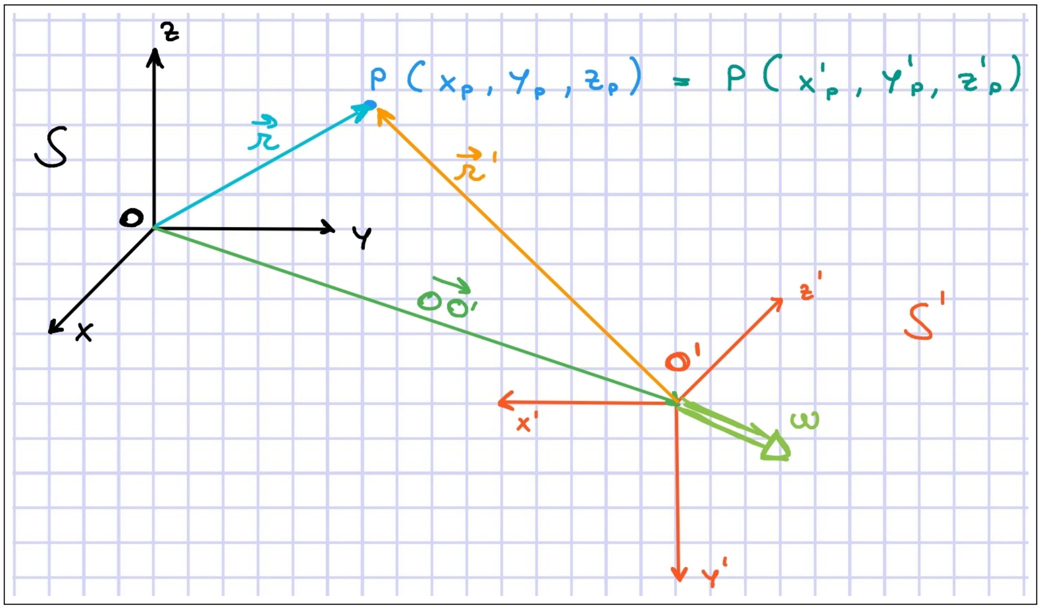
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

5.9.4 Cambiare il sistema di riferimento

Supponiamo di avere **2 sistemi di riferimento**:

- S: sistema di riferimento **inerziale**, **FISSO**;
- S': sistema di riferimento **non inerziale**, che **rispetto ad S NON è FISSO**;

Vediamo un disegno:



Come si vede dall'immagine, abbiamo un **sistema inerziale fisso** (S) ed un **sistema non inerziale non fisso** (S'). Nota che **conosciamo il vettore** $\vec{oo'}$ (che rappresenta lo spostamento dell'origine di S') e **il vettore** $\vec{\omega}$ (che rappresenta una rotazione di S'). Ora, dato **un punto P** vogliamo sapere la relazione tra spazio, velocità ed accelerazione nei 2 sistemi di riferimento. Vediamo punto per punto.

5.9.4.1 Spazio in un sistema non inerziale

Ci basta controllare il disegno, risulta abbastanza ovvio che:

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r'}$$

Ricorda che $\vec{r'}$ corrisponde allo spazio di P visto da S'.

5.9.4.2 Velocità in un sistema non inerziale (teorema delle velocità relative)

Sappiamo per definizione che la velocità è la derivata dello spazio, quindi **deriviamo lo spazio**! Cominciamo da S:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r_x * \hat{x} + [y] + [z]) \\ &= \frac{dr_x}{dt} * \hat{x} + r_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + [y] + [z] \\ &= v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} + v_z * \hat{z} \end{aligned}$$

Per semplicità "omettiamo" la y ([y]) e la z ([z]) dato che sono uguali alla x. Nota che la parte in verde si annulla in quanto il nostro sistema di riferimento resta immutato!

Proviamo ora a calcolare la velocità per S':

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{oo'} + \vec{r'}) = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

Arriviamo a questo punto: per quanto riguarda $\vec{oo'}$, possiamo notare che il punto o (origine di S) è fisso, pertanto è come se calcolassimo semplicemente la velocità di o' (l'unico punto in movimento dei 2). Otteniamo quindi:

$$\frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{v}_{o'} + (\frac{dr_x}{dt} * \hat{x'} + r_x * \frac{d\hat{x'}}{dt} + [y] + [z])$$

Il problema ora è che la parte in verde **questa volta non si annulla**! Il sistema S' infatti è in movimento. Come lo gestiamo? **Usiamo le formule di Poisson** [pag.53]!

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{o'} + (\frac{dr_x}{dt} * \hat{x'} + r_x * \frac{d\hat{x'}}{dt} + [y] + [z]) &= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + x' * \vec{\omega} \times \hat{x'}] + [y] + [z] \\
&= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + \vec{\omega} \times (x' * \hat{x'})] + [y] + [z] \\
per\ definizione \qquad &= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'})] + [y] + [z] \\
espandi\ [y]\ [z]\ e\ raccogli \qquad &= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{y'} * \hat{y'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{z'} * \hat{z'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{z'})] \\
&= \vec{v}_{o'} + (v_{x'} * \hat{x'} + v_{y'} * \hat{y'} + v_{z'} * \hat{z'}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'} + \vec{r}_{y'} + \vec{r}_{z'}) \\
per\ definizione \qquad &= \vec{v}_{o'} + \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}
\end{aligned}$$

Finiamo con l'ottenere quello che viene definito **teorema delle velocità relative**, ovvero:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

Dove:

- $\vec{v'}$ rappresenta la velocità del punto P nel sistema di riferimento S';
- $\vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$ è quella che viene detta **velocità di trascinamento**, ovvero la velocità imposta dal sistema di riferimento che si muove e "trascina" il punto P.

Un po' di casistica Vediamo un po' di casi particolari:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$: il S.R. S' **non ruota**, per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dallo spostamento dell'origine di S' (immagina ad esempio un treno su un tratto rettilino). In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{o'}$$

- $\vec{v}_{0'} = \vec{0}$: il S.R. S' **non si sposta** (nota che ciò non garantisce che l'origine di S' coincide con quella di S), per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dal prodotto vettoriale di $om\vec{e}ga$ con $\vec{r'}$ (immagina ad esempio un peso poggiato su un giradischi). In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

- $\vec{v}_{0'} = \vec{0}, \vec{\omega} = \vec{0}$: il S.R. S' **non ruota e non si sposta** (anche qui, ciò non garantisce che l'origine di S' coincide con quella di S), per questo la velocità di trascinamento è **nulla**. In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v'}$$

5.9.4.3 Accelerazione in un sistema non inerziale (teorema delle accelerazioni relative)

Per quanto riguarda l'accelerazione, il procedimento è **sempre lo stesso**: **dobbiamo derivare la velocità**! Non è nulla di nuovo, è solo un po' lungo, si deve fare attenzione a fare i giusti raccoglimenti ed utilizzare le formule di Poisson [pag.53]. Sostanzialmente, il risultato finale, detto **teorema delle accelerazioni relative**, è:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \vec{r'}) + 2\omega \vec{\times} \vec{v'}$$

Dove:

- $\vec{a'}$ corrisponde all'accelerazione del corpo in S';
- $\vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \vec{r'})$ è l'accelerazione di trascinamento;
- $2\omega \vec{\times} \vec{v'}$ è la **forza di Coriolis**, una **forza apparente** (trattiamo in seguito) che esiste solo se S' ruota rispetto ad S.

5.9.4.4 Riassumendo

Riassumendo rapidamente, le formule che interessano a noi sono:

1. **spazio**:

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r'}$$

2. **velocità**:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

3. **accelerazione**:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \vec{r'}) + 2\omega \vec{\times} \vec{v'}$$

5.10 Forze apparenti

Consideriamo ora le forze esterne nel sistema di riferimento S,

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

e nel sistema di riferimento S',

$$\vec{F}_{ext} = m(\vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_C})$$

In S' ottengo quindi che,

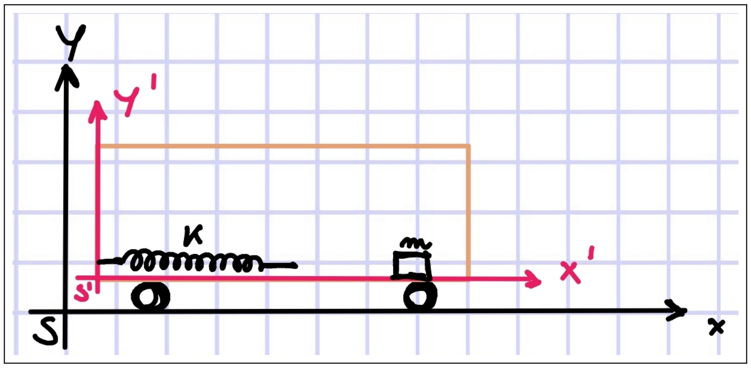
$$\vec{F}_{ext} - m\vec{a_T} - m\vec{a_C} = m\vec{a'} => \vec{a'} = \frac{\vec{F}_{ext} - m\vec{a_T} - m\vec{a_C}}{m}$$

Le forze $-m\vec{a_T} - m\vec{a_C}$ sono dette **forze apparenti**. Apparenti perchè sono legate al sistema di riferimento, infatti queste forze sono dovute al moto del sistema di riferimento non inerziale.

5.10.1 Principio di relatività galileiana

Il **principio di relatività galileiana** dice che è sempre possibile mantenere la formulazione delle leggi della fisica se ci si sposta da un sistema di riferimento ad un'altro, purchè la differenza di moto tra i due sistemi di riferimento sia esprimibile come una velocità.
La Terra non è un sistema di riferimento inerziale, dato che ruota intorno a se stessa e attorno al sole. Come sistema di riferimento inerziale di solito si usa quello delle **stelle fisse**, si prende il sole come origine e si puntano gli assi verso delle costellazioni che si vede che non si muovono.

5.10.2 Esempio 1 forze apparenti



Supponiamo di avere un sistema di riferimento S che sono i binari ed un sistema di riferimento S' che è un vagone. Nel vagone c'è una molla di costante elastica K e una massa m e trascuriamo gli attriti. Consideriamo anche $\vec{\omega} = \vec{0}$, quindi il sistema S' non ruota.
Quando il vagone parte con una certa accelerazione, la massa si sposterà verso la molla, quindi con accelerazione uguale ed opposta a quella del vagone, finchè non la raggiunge e poi comincia a contrarla. Se il vagone continua ad accelerare ad un certo punto la massa smetterà di contrarre la molla, questo si ha quando la forza elastica è bilanciata dalla forza apparente,

$$\vec{F_a} = -m\vec{a_T}$$

Ho quindi ora che,

$$\vec{R} - m\vec{a_T} - m\vec{a_C} = m\vec{a'}$$

Ora se il vagone smette di accelerare quando la massa deve ancora raggiungere la molla, la massa continuerà in moto rettilineo uniforme verso la molla, se invece il vagone smette di accelerare quando la massa ha compresso la molla, la forza elastica della molla spingerà la massa nel senso opposto e quest'ultima continuerà di moto rettilineo uniforme fino a raggiungere la parete del vagone opposta a quella dove è attaccata la molla. Nel caso in cui il vagone smette di accelerare si ha quindi che,

$$\vec{R} = m\vec{a_T} => m\vec{a_T} = -k\vec{x} => \vec{a_T} - \frac{k\vec{x}}{m}$$

Osserviamo che si riesce a capire se ci si trova in un sistema di riferimento inerziale o meno osservando lo stato della molla (allungata, accorciata, a riposo).
Per il principio di relatività galileiana non riesco a distinguere un sistema di riferimento inerziale da un'altro, ma invece se sono in un sistema di riferimento non inerziale riesco ad accorgermene. Se il vagone è ben schermato e vedo le molle che si muovono, vuol dire che il movimento della molla ha a che vedere con il movimento del sistema di riferimento, che non è quindi inerziale.

5.10.3 Esempio 2 forze apparenti

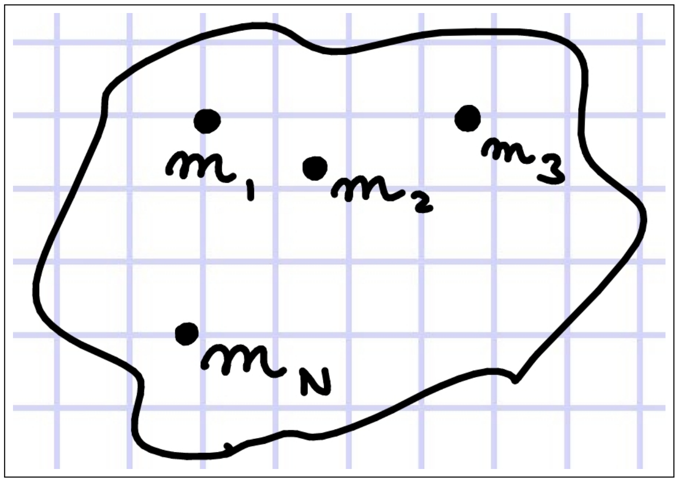
Supponiamo che in un ascensore che è in caduta libera ci sia un omino, nel sistema di riferimento ascensore l'omino è fermo, mentre nel sistema di riferimento esterno all'ascensore l'omino ha un'accelerazione di trascinamento che è,

$$\vec{R} - m\vec{a_T} - m\vec{a_C} = m\vec{a'} => m\vec{g} - m\vec{a_T} = 0 => \vec{a_T} = \vec{g}$$

Osserviamo che l'accelerazione di Coriolis è $= 0$ dato che non c'è rotazione e che $\vec{a'} = 0$ perchè l'omino per il sistema di riferimento ascensore è fermo.
Osserviamo quindi che la forza peso non è una forza apparente.

5.11 Punto materiale

Un **punto materiale** è un punto nel quale è concentrata tutta la massa del corpo, quindi rappresento il corpo come un punto materiale. Il punto materiale è un'astrazione/idealizzazione e non ha quindi dimensioni.
Se il movimento del corpo è molto più grande delle sue dimensioni infatti, si può trascurare il volume del corpo e considerarlo come un punto materiale.



Ora se considero un sistema di punti materiali, ogni punto avrà massa m_i per $1 \leq i \leq n$. Su ogni m_i agiscono delle **forze esterne** e delle **forze interne**. Ora quest'ultime saranno la somma di tutte le forze esercitate dalle altre masse su m_i, però considerando la III legge della dinamica [pag.22], abbiamo che la somma delle forze interne è 0.
Ora calcoliamo quindi la risultante delle forze per ogni m_i,

$$\vec{R_i} = m_i \vec{a_i} = \vec{R_i^I} + \vec{R_i^E}$$

$$\vec{R_i^E} = \sum_{k=1}^{M} \vec{F_{k,i}^E}$$

$$\vec{R_i^I} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F_{j\to i}^I}$$

Ed ora otteniamo la risultante di queste,

$$\vec{R^E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R_i^E}$$

$$\vec{R^I} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R_i^I} = \vec{0}$$

Ora otteniamo che,

$$\vec{R} = \vec{R^E} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a_i}$$

Ora possiamo fare il passaggio seguente,

$$\vec{R^E} = \sum_i^N m_i \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{a_i}}{\sum_i^N m_i} = M\sum_{i=1}^N \frac{m_i\vec{a_i}}{M} = M\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M}\frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = M\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^N \frac{m_i\vec{r_i}}{M}$$

Nota che la parte in rosso, ovvero la **sommatoria di tutte le masse del nostro sistema di punti materiali** (che andiamo poi a chiamare M), la **moltiplichiamo e dividiamo** (moltiplicando effettivamente per 1). Lo facciamo perché "vogliamo noi", ci servirà per definire il **centro di massa** come la media pesata per la massa, di tutte le posizioni dei costituenti del sistema. Ovvero la media pesata delle posizioni, dando come peso la frazione totale di massa che gli oggetti hanno. Il centro di massa è il seguente,

$$\vec{r}_{C.M.} = \sum_i^N \frac{m_i\vec{r_i}}{M}$$

Ora ottengo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R^E} = M\frac{d^2\vec{r}_{C.M.}}{dt^2} = M\frac{d\vec{v}_{C.M.}}{dt} = M\vec{a}_{C.M.}$$

Da questa formula possiamo capire che la **risultante delle forze esterne**, qualora non fosse nulla, **può essere applicata come una forza solo sul centro di massa** del nostro sistema! Possiamo immaginare il sistema come un corpo unico tutto condensato nel centro di massa.

5.11.1 Esercizio centro di massa

Supponiamo di avere ora tre punti come nell'immagine e di dover calcolare il centro di massa del sistema,

$$\vec{r}_{C.M.} = \begin{pmatrix} x_{C.M.} \\ y_{C.M.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1*2+2*5+3*6}{6} \\ \frac{1*3+2*2+3*6}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{25}{6} \end{pmatrix}$$

5.11.2 Sistema isolato

Un **sistema** è **isolato** se non agiscono forze esterne su di esso, quindi la risultante delle forze esterne è nulla.
Nei sistemi isolati ho quindi che,

$$\vec{R^E} = M\vec{a}_{C.M.} = \vec{0} => \vec{a}_{C.M.} = \vec{0} => \vec{v}_{C.M.} = cost$$

5.11.3 Principio di conservazione della quantità di moto

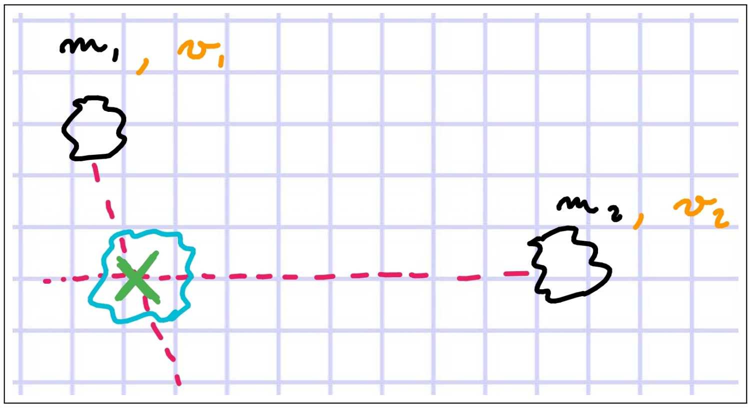
Il **principio di conservazione della quantità di moto** dice che in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva nel tempo.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

5.12 Gli urti

Quando 2 oggetti si **scontrano tra di loro** abbiamo quello che viene definito "**urto**": durante questo urto, i 2 corpi hanno una **qualche interazione tra di loro**. Prendiamo ad esempio 2 biglie indeformabili (di acciaio) che si scontrano tra di loro: in questo esempio **cambiano direzione**, questo vuol dire che c'è stata qualche interazione tra i corpi che ha comportato il cambio di direzione! Il concetto di urto è molto importante perché, in esperimenti seri, potrebbe essere l'unico mezzo con cui possiamo accorgerci della presenza di una qualche interazione tra corpi "invisibili" (molto piccoli) non osservabili altrimenti.

Introduciamo la situazione generica in cui ci troviamo:



Abbiamo 2 corpi distinti con le rispettive masse e velocità, supponendo che le loro traiettorie si incrocino avremmo effettivamente un impatto solo se:

$$\exists t | r_1(t) = r_2(t)$$

Ovvero se esiste un istante di tempo in cui la posizione dei 2 oggetti è la stessa. Se ciò avviene abbiamo un impatto localizzato in quella che viene chiamata **regione d'urto (d)**, tornando all'esempio delle biglie possiamo pensare alle zone delle biglie che entrano effettivamente in contatto. Affinché possiamo applicare le nostre solite approssimazioni, questa regione d deve essere **molto minore di qualsiasi altra distanza che entra in gioco** ($d << r_j$).

5.12.1 Conservazione della quantità di moto

Supponendo che il sistema che rappresenta i nostri corpi sia **un sistema isolato**, abbiamo che l'accelerazione del centro di massa è nulla, quindi la sua velocità **è costante** (potrebbe essere nulla, ma non è detto). Facciamo ora un po' di passaggi algebrici:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...}) = \frac{d}{dt}(\frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2 + ...}{M}) = co\vec{n}st$$

Da qui, possiamo fare altri passaggi algebrici che ci portano ad ottenere un risultato interessante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\sum_j m_j * \vec{r}_j}{M} = co\vec{n}st \qquad => \frac{d}{dt}\sum_j m_j * \vec{r}_j = co\vec{n}st * M = co\vec{n}st$$

$$=> \frac{d}{dt}\sum_j m_j * \vec{r}_j = co\vec{n}st$$

$$=> \frac{d}{dt}\sum_j P_j = co\vec{n}st$$

Ovvero, abbiamo che la somma delle varie quantità di moto **resta costante**! Questo è il concetto importante:

Negli urti la quantità di moto resta sempre costante!

Abbiamo quindi che:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Ora, possiamo scomporre queste quantità di moto nelle loro componenti base, ovvero (supponendo un caso 3-D):

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \begin{cases} P_{x,i} = P_{x,f} \\ P_{y,i} = P_{y,f} \\ P_{z,i} = P_{z,f} \end{cases}$$

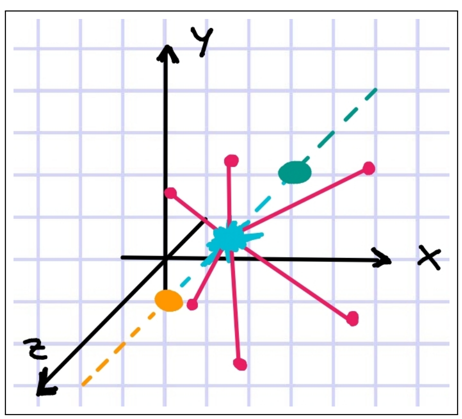
Tornando ora al sistema isolato che abbiamo visto prima, possiamo introdurre il concetto di conservazione delle quantità di moto in questo modo:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} + m_B * \vec{v}_{B,f} + ... + m_N * \vec{v}_{N,f}$$

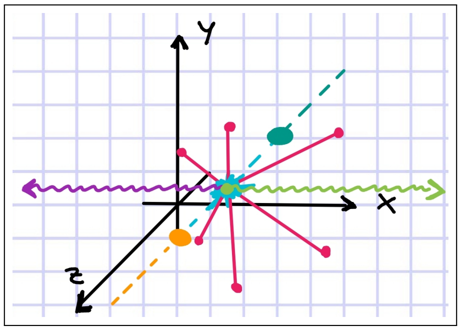
Nota come **cominciamo con 2 corpi** che vanno in urto tra loro (questo succederà sempre, semplicemente perché l'urto contemporaneo tra 3 corpi è un problema estremamente complesso) ma finiamo con **un numero N di quantità di moto finali**. Perché facciamo così? Durante l'urto può succedere che **i 2 corpi che si scontrano NON mantengano la loro natura**: potrebbero **fondersi in un corpo unico**, oppure potrebbero **esplodere in tanti corpi che vanno in tutte le direzioni**! Ovviamente, può anche succedere che i 2 corpi restino loro stessi e semplicemente cambino traiettoria (come succede con le biglie d'acciaio).

5.12.1.1 Esempio neutrini (oggetti che "esplodono")

Al CERN di Ginevra si fanno questi esperimenti, si prendono 2 particelle e si fanno scontrare tra di loro a gran velocità: all'impatto queste "esplodono" sparando numerose componenti in tutte le direzioni:



Se ora noi prendiamo e sommiamo tutte le quantità di moto di questi nuovi oggetti dovremmo ottenere ESATTAMENTE la stessa quantità di moto iniziale che, nel caso di 2 particelle uguali sparate alla stessa velocità ma in senso opposto, dovrebbe essere 0. Spesso però questo non accade e ci ritroviamo con un vettore del genere (in verde, nel disegno ho tracciato un vettore casuale):



Però, ciò non è possibile, infatti noi sappiamo per definizione che la quantità di moto iniziale deve essere uguale a quella finale, che in questo caso deve essere 0. Allora DEVE esserci una quantità di moto uguale e contraria che però non abbiamo visto: quello (molto probabilmente) è un neutrino che è scappato in direzione del vettore viola e che bilancia il tutto portando la somma delle varie quantità di moto a 0.

Ecco, tornando alla nostra teoria precedente, questo è il tipico esempio in cui la formula della quantità di moto iniziale/finale corrisponde proprio a:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} + m_B * \vec{v}_{B,f} + ... + m_N * \vec{v}_{N,f}$$

Però, come detto prima, esistono anche altri casi.

5.12.2 Urto (puramente) anelastico

Esistono 2 tipi di urti, il primo che vediamo è quello che viene detto **urto puramente anelastico**, ovvero quello dove i 2 corpi che si scontrano si **fondono tra loro creando un corpo unico** che, essendo appunto un corpo unico, corrisponderà anche al centro di massa del sistema. Ora, in questo caso è molto interessante **spostarsi in un sistema di riferimento che corrisponde al centro di massa**, è come se mettessimo l'origine a cavallo del centro di massa. Nota che, non trovandoci più in un sistema inerziale, **dobbiamo anche "modificare" la composizione delle velocità dei nostri corpi**, in particolare abbiamo:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} = m_A * \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v'}_1$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{v'}_2$$

Ora, dato che abbiamo posto che il nostro sistema di riferimento si trova a cavallo del CM, possiamo subito dite che $\vec{v}_{CM} = 0$, da qui otteniamo che:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} = m_A * \vec{v}_{CM} = m_A * 0 \qquad => m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = 0$$

.

5.12.2.1 Energie cinetiche

In questo caso è molto interessante controllare cosa succede a livello di energie cinetiche:

$$\begin{aligned}
E_{k,i} = E_{k,i,1} + E_{k,i,1} \quad & = \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_2^2 \\
\text{Usiamo il sys di ref del CM} \quad & = \frac{1}{2} * m_1 * (v_{CM} + v_1')^2 + \frac{1}{2} * m_2 * (v_{CM} + v_2')^2 \\
\text{Sviluppiamo i quadrati} \quad & = \frac{1}{2} * [m_1 * (v_{CM}^2 + 2v_{CM} * v_1' + v_1'^2) + m_2 * (v_{CM}^2 + 2v_{CM} * v_2' + v_2'^2)] \\
\text{Un po' di passaggi algebrici} \quad & = \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * v_{CM}^2 + \frac{2}{2} * (m_1 * v_1' + m_2 * v_2') * v_{CM} + \\
& + \frac{1}{2} * m_1 * v_1'^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_2'^2 \\
& = \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * v_{CM}^2 + \frac{1}{2} * m_1 * v_1'^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_2'^2 \\
& = E_{k,f} + E_{k,i}'
\end{aligned}$$

Ora, nota che la parte in verde **vale 0 per definizione**, dato che ci troviamo nel sistema di riferimento del CM (lo abbiamo definito prima). Otteniamo quindi che l'energia cietica iniziale corrisponde all'**energia cinetica finale (quella del CM) + l'energia cinetica iniziale presa però nel sys di ref del CM**. Fin qui niente di particolarmente strano, però se rigiriamo la formula per trovare l'energia cinetica finale:

$$E_{k,f} = E_{k,i} - E_{k,i}'$$

Abbiamo che $\mathbf{E_{k,f}} < \mathbf{E_{k,i}}$, infatti sappiamo che le **energie cinetiche sono sempre valori positivi**! Abbiamo quindi che l'energia cinetica finale è **minore** di quella iniziale, ma dove va quell'energia mancante? Sostanzialmente, l'energia persa viene **usata per "fondere" i 2 oggetti tra di loro**!

5.12.3 Urto elastico

Il secondo tipo di urto che vediamo è quello **elastico**, ovvero quello dove **i 2 corpi restano tali e "rimbalzano"**. A differenza dell'urto anelastico, in questo caso **l'energia cinetica si conserva** ($E_{k,i} = E_{k,f}$). Ovviamente, anche la **quantità di moto si conserva**. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \quad => \begin{cases} P_{x,i} = P_{x,f} \\ P_{y,i} = P_{y,f} \\ P_{z,i} = P_{z,f} \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases}$$

Questa "scomposizione" della quantità di molto è molto importante, perché ci permette di fare un ragionamento sui **gradi di libertà**:

Dim.	Eq. Moto	Eq. Cinetica	Eq. Tot	Incognite	Grad. Libertà
3	3	1	4	6	6-4 = 2
2	2	1	3	4	4-3 = 1
1	1	1	2	2	2-2 = 0

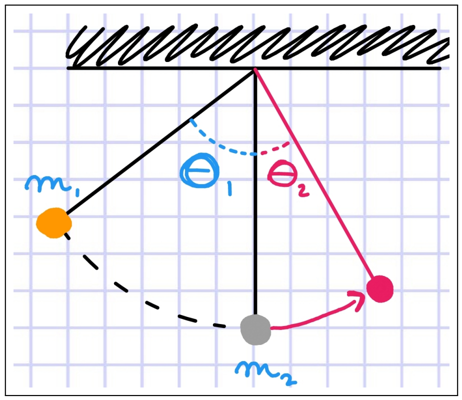
Prendiamo ad esempio le 3 dimensioni: con tre dimensioni abbiamo **3 assi**, quindi abbiamo **3 equazioni per la quantità di moto**, e **1 equazione per l'energia cinetica**. Espandiamo queste equazioni ("comprimendo" la quantità di moto, solo per risparmiare spazio):

$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \quad => \begin{cases} m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_1 * \vec{v}_{1,f} + m_2 * \vec{v}_{2,f} \\ \frac{1}{2} m_1 * \vec{v}_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 * \vec{v}_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 * \vec{v}_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 * \vec{v}_{2,f}^2 \end{cases}$$

Da questa espansione, possiamo notare che **non conosciamo le velocità finali dei 2 corpi**! Espandando il moto sui 3 assi avrebbo**6 incognite**: 3 per la velocità finale del primo corpo e 3 per quella del secondo corpo. Il "problema" è che abbiamo **un sistema di 4 equazioni con 6 incognite**: avessimo soltanto 4 incognite, potremmo risolverlo "matematicamente", in questo caso però dobbiamo **introdurre 2 gradi di libertà** (che possono essere angoli di entrata, velocità fissate su 2 assi, ...) per poter risolvere matematicamente le altre incognite rimanenti.

Per quanto riguarda il caso **unidimensionale** invece è **tutto fissato**! Se l'evento si sviluppa su un solo asse possiamo calcolare tutto usando soltanto il principio di conservazione della quantità di moto.

5.12.3.1 Esempio di esercizio Vediamo un esempio:



In particolare, abbiamo una biglia di massa m_1 sostenuta da un cavo inestensibile lungo l con un angolo θ_1 rispetto alla posizione a riposo del pendolo. Ad un certo punto, questa biglia inizierà a cadere scontrandosi con l'altra biglia di massa m_2, sempre sostenuta allo stesso modo ma in posizione di equilibrio. Nota che **le 2 masse non sono uguali**! Vediamo velocemente un po' di casistica al momento dell'urto:

- $m_1 > m_2$: la biglia 2 inizia a dondolare, la biglia 1 continua a dondolare "di meno" seguendo il percorso iniziale (è come se trascinasse la biglia 2);
- $m_1 < m_2$: la bilia 2 inizia a dondolare, la biglia 1 continua a dondolare "di meno" però nel verso opposto (è come se rimbalzasse sulla bilia 2);
- $m_1 = m_2$: la biglia 1 trasferisce tutto il suo moto alla biglia 2, la quale compirà lo stesso moto della biglia 1 (è come uno di quei giochini da ufficio con le biglie);

Tornando al nostro esercizio, **date le 2 masse e l'angolo iniziale della biglia 1, trovare l'angolo massimo della biglia 2**. Nota che, come visto nella casistica, dato che le masse sono diverse la biglia 1 compirà un qualche movimento dopo l'urto, ma a noi non interessa!

Ora, possiamo vedere questo problema come la **composizione di 2 diversi problemi**:

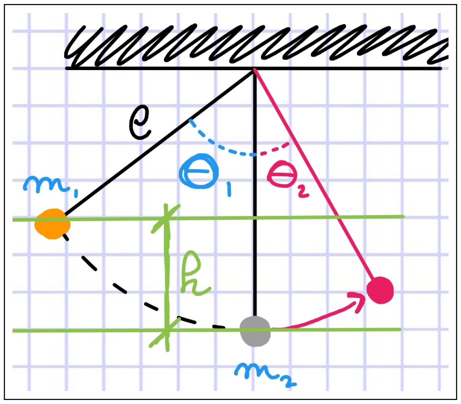
1. **pendolo**: calcolo dell'angolo θ e della velocità che la biglia 1 acquisisce appena prima di urtare la biglia 2;
2. **urto**: urto vero e proprio, principalmente ci chiediamo quanta velocità viene passata alla biglia 2 dopo l'impatto;

Continuiamo a piccoli passi:

Velocità pre-impatto Il primo passo è **calcolare la velocità della biglia 1 prima dell'impatto con la 2**. Come facciamo? Possiamo avvalerci del **principio di conservazione dell'energia meccanica**: in questo caso possiamo notare che **non ci sono forze dissipative** (come sempre supponiamo di fare tutti i nostri esperimenti nel vuoto, evitando l'attrito dell'aria), quindi **l'energia potenziale della biglia 1 (U) verrà completamente convertita in energia cinetica (E_k)**! Noi sappiamo che:

$$U = m * a * \Delta h$$

In particolare, abbiamo che l'accelerazione corrisponde a quella di gravità terrestre, mentre il Δh è questo piccolo segmento qui:



Per calcolarla possiamo sfruttare un po' di trigonometria, in particolare:

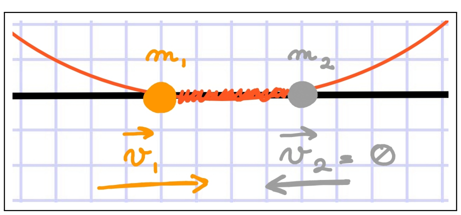
$$\Delta h = l - l * cos(\theta_1) = l(1 - cos(\theta_1))$$

Ora che abbiamo le 2 componenti che ci servono, semplicemente le **mettiamo in uguaglianza** (data la conservazione delle energie) e ci troviamo la nostra velocità:

$$\begin{aligned}
U = E_k \qquad & => m * g * \Delta h = \frac{1}{2} * m * v^2 \\
& => g * \Delta h = \frac{1}{2} * v^2 \\
& => 2 * g * \Delta h = v^2 \\
& => \sqrt{2 * g * \Delta h} = v \\
& => \sqrt{2 * g * l(1 - cos(\theta_1))} = v_{i,1}
\end{aligned}$$

Ricorda però che nella formula "vera" sia l'energia cinetica iniziale (quella che abbiamo in posizione θ) che l'energia potenziale finale (quella che abbiamo in posizione $\theta = 0$) sono importanti! In questo caso possiamo ignorarle dato che sono entrambe nulle (la biglia parte da ferma e finisce nella posizione più bassa possibile).

Trasferimento di energia nell'urto Ora ci troviamo nella "fase di urto", dobbiamo capire **come viene trasmessa l'energia tra le 2 biglie**, in particolare **quanto sarà veloce alla fine la biglia 2**. In questa fase, possiamo **approssimare l'urto come un urto unidimensionale**:



Aprendo una piccola parentesi, concentrandoci solo sulle forze orizzontali presenti in quel piccolissimo istante in cui c'è l'urto effettivo possiamo **ignorare di fatto la forza peso** che spinge verso il basso, pertanto il sistema "biglie" **può essere considerato un sistema isolato!** Tornando a noi, partendo dal principio di conservazione del moto e dell'energia cinetica, possiamo fare un po' di operazioni algebriche in modo da ricavarci effettivamente la velocità della biglia 2 (possiamo farlo perché ci siamo ricondotti al caso monodimensionale):

$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \quad => \begin{cases} m_1 * v_{1,i} + m_2 * v_{2,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$v_{2,1} \text{ nulla, togliamo} \quad => \begin{cases} m_1 * v_{1,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

A questo punto possiamo identificare **2 incognite**: $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$. Dato che a noi interessa solo conoscere θ_2, ci concentriamo solo sulla risoluzione di $v_{2,f}$, quindi ci rigiriamo un po' le formule di prima:

$$\begin{cases} m_1 * v_{1,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} \quad => \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * (v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f})^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = (v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f})^2 + \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$\text{Per comodità nostra, questi li chiamiamo } \rho \quad => \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = (v_{1,i} - \rho * v_{2,f})^2 + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$\text{Sviluppiamo il quadrato} \quad => \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ \cancel{v_{1,i}^2} = \cancel{v_{1,i}^2} + \rho^2 * v_{2,f}^2 - 2 * v_{1,i} * \rho * v_{2,f} + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = \rho^2 * v_{2,f}^2 - 2 * v_{1,i} * \rho * v_{2,f} + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = v_{2,f} * [\cancel{\rho} * (1 + \rho) * v_{2,f} - 2 * \cancel{\rho} * v_{1,i}] \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = v_{2,f} * [(1 + \rho) * v_{2,f} - 2 * v_{1,i}] \end{cases}$$

Da quest'ultima equazione in rosso otteniamo che la velocità di uscita della seconda biglia può assumere 2 valori distinti:

- $v_{2,f} = 0$, questo potrebbe succedere **qualora non ci fosse interazione tra le 2 biglie**, questo caso a noi non interessa;
- $v_{2,f} = \frac{2*v_{1,i}}{1+\rho} = \frac{2*v_{1,i}}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{2*m_1*v_{1,i}}{m_1+m_2}$, quest'ultima soluzione è molto più interessante per noi!

Calcolo finale dell'angolo Nella fase precedente ci siamo calcolati la **velocità di uscita della biglia 2 dall'urto**, ora dobbiamo calcolare l'angolo di oscillazione massimo. Come facciamo? Allora, prima abbiamo stabilito che:

$$v_{i,1} = \sqrt{(2 * g * \Delta h_1)} = \sqrt{(2 * g * l(1 - cos(\theta_1))}$$

Allo stesso modo, possiamo dire praticamente la stessa cosa per la velocità finale della biglia 2! Ovvero:

$$v_{2,f} = \sqrt{(2 * g * \Delta h_f)} = \sqrt{(2 * g * l(1 - cos(\theta_2))}$$

PERO', al punto prima abbiamo stabilito che:

$$v_{2,f} = \frac{2 * m_1 * v_{1,i}}{m_1 + m_2}$$

A questo punto ci basta mettere questi 2 punti insieme e rigirare un po' il tutto, in modo da **trovare l'angolo che ci interessa!**

$$\frac{2 * m_1 * v_{1,i}}{m_1 + m_2} = \sqrt{(2 * g * l(1 - cos(\theta_2))} \quad => \frac{2 * m_1}{m_1 + m_2} * \sqrt{(2 * g * l(1 - cos(\theta_1))} = \sqrt{(2 * g * l(1 - cos(\theta_2))}$$

Questa costante la chiamiamo "A" noi

$$=> A * \sqrt{\cancel{2 * g * l}(1 - cos(\theta_1))} = \sqrt{\cancel{2 * g * l}(1 - cos(\theta_2))}$$

$$=> A * \sqrt{1 - cos(\theta_1)} = \sqrt{1 - cos(\theta_2)}$$

A questo punto, abbiamo le radici che rompono, quindi possiamo **moltiplicare da entrambe le parti per 2 ed applicare la formula di bisezione del seno** (nota che si riesce a fare anche senza, semplicemente viene più comodo):

$$A * \sqrt{1 - cos(\theta_1)} = \sqrt{1 - cos(\theta_2)} \qquad => A * \sqrt{2 * \frac{1 - cos(\theta_1)}{2}} = \sqrt{2 * \frac{1 - cos(\theta_2)}{2}}$$

Bisezione del seno

$$=> A * \cancel{\sqrt{2}} * sin(\frac{\theta_1}{2}) = \cancel{\sqrt{2}} * sin(\frac{\theta_2}{2})$$

$$=> \frac{\theta_2}{2} = arcsin(A * sin(\frac{\theta_1}{2}))$$

$$=> \theta_2 = 2 * arcsin(A * sin(\frac{\theta_1}{2}))$$

6 Termodinamica

La **termodinamica** è il ramo della fisica classica e della chimica che studia e descrive le trasformazioni termodinamiche indotte da calore a lavoro e viceversa in un sistema termodinamico, in seguito a processi che coinvolgono cambiamenti delle variabili di stato temperatura ed energia.
Ci ricordiamo ora che il lavoro delle forze non conservative è la variazione di energia meccanica, ovvero come segue,

$$W_{N.C.} = E_f - E_i$$

6.1 Numero di Avogadro

Consideriamo ora un numero molto alto di di costituenti del sistema. Le relazioni che ci sono tra di essi sono espresse in un'unità di misura che è il **numero di Avogadro**,

$$N_A = 6,022 * 10^{23} = 1mol$$

esso indica quanti costituenti fondamentali sono contenuti in una certa quantità di sostanza detta **mole**.

6.2 Sistema termodinamico

Nella termodinamica vediamo l'universo composto da due parti, il **sistema termodinamico** e l'**ambiente**. Tra questi due c'è un'iterazione/scambio continuo ed in base a questo scambio definiamo i diversi tipi di sistemi termodinamici:

	ENERGIA	MATERIA	ESEMPIO
APERTO	si	si	pentola d'acqua che bolle senza coperchio
CHIUSO	si	no	pentola d'acqua che bolle con coperchio
ISOLATO	no	no	contenitore isolato che contiene acqua
IMPOSSIBILE	no	si	impossibile, scambio materia => scambio energia

6.3 Variabili termodinamiche

Le **variabili termodinamiche**, anche dette **coordinate termodinamiche**, si distinguono in **grandezze estensive**, ovvero quelle che dipendono dall'estensione del sistema termodinamico (eg. volume, massa), e **grandezze intensive**, ovvero quelle che non dipendono dall'estensione del sistema termodinamico (eg. pressione, temperatura, densità).

Queste variabili sono anche distinte in **variabili globali**, ovvero quelle che sono riferibili a tutto il sistema (come la temperatura, nel caso in cui si lasci abbastanza tempo ad un corpo di scaldarsi/raffreddarsi), e **variabili locali**, ovvero quelle che sono riferibili ad una parte del sistema (come la densità, se si pensa ad una torta con crema e frutta, queste due avranno densità diversa).

Il loro numero dipende dal sistema che sto considerando e le più famose sono **pressione**, **temperatura**, **volume**, **densità**, **massa**,...

Osserviamo che per i sistemi di gas useremo pressione, volume e temperatura ed inoltre il numero di moli e di componenti.

6.4 Equilibrio termodinamico

L'**equilibrio termodinamico** di un sistema termodinamico si ha quando tutte le suoi corpi/componenti sono in:

- **equilibrio meccanico**: ovvero quando non ci sono momenti delle forze che agiscono tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.

- **equilibrio termico**: ovvero quando non c'è nessuna differenza di temperatura tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.

- **equilibrio chimico**: ovvero quando non c'è nessuna reazione chimica tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.

6.5 Trasformazione termodinamica

Una **trasformazione termodinamica** è il passaggio del sistema termodinamico da uno stato termodinamico ad un altro.
Un esempio è il passaggio da caldo a freddo, in esso ci sono tanti passaggi/variazioni:

- **espansione/contrazione** di liquidi e gas

- variazione resistenza elettrica

- variazione differenza di potenziale

- variazione di riflettività/trasmittanza

6.6 Temperatura

La **temperatura** si misura su una scala e corrisponde alla media dell'energia cinetica dei componenti del sistema, ovvero quanto i componenti "sono agitati".

6.6.1 Unità di misura temperatura

La temperatura si misura con diverse unità di misura, **Celsius** (°C), **Fahrenheit** (°F) e **Kelvin** (K).
Osserviamo che il simbolo della temperatura, per il Kelvin è **T**, mentre per le altre unità di misura è **t**, quindi la maiuscola è solo per il Kelvin.
Per passare da una u.d.m. all'altra le formule sono le seguenti,

$$t(°C) = T(K) - 273.16$$
$$t(°F) = \frac{9}{5}t(°C) + 32$$

e le restanti si possono ricavare da queste.

6.6.2 Punto triplo dell'H_2O

Il **punto triplo dell'**H_2O è il punto in cui coesistono i 3 stati della materia, che nel caso dell'H_2O sono ghiaccio, acqua e vapore acqueo, e corrisponde a

$$T_0 = 273.16K = 0°C$$

6.6.3 Termometro

Un **termometro** è un sistema fisico, usato come strumento, che ci permette di esprimere le variazioni di temperatura in funzione di una grandezza fisica,

$$\Delta T \rightarrow \Delta X$$
$$T = T(x)$$

Nel caso di termometro a mercurio, la grandezza fisica è la lunghezza della colonnina di mercurio che leggiamo.
Si cerca di far si che questa lunghezza sia lineare, ovvero che cresca linearmente con la temperatura, in modo che,

$$T = T(X) = \beta X$$

Quando si costruisce un termometro si deve calibrarlo, per farlo si prende una temperatura di riferimento (T_0) e si misura la lunghezza (X_0), poi con questi due dati si calcola,

$$\beta = \frac{T_0}{X_0}$$

6.6.4 Contatto termico

Supponiamo di avere tre corpi, A, B e C a contatto tra loro come in figura, con temperature iniziali $T_{A,i}$, $T_{B,i}$ e $T_{C,i}$ corrispondentemente, diverse tra di loro.
Dopo un periodo di tempo abbastanza lungo, le tre temperature, $T_{A,f}$, $T_{B,f}$ e $T_{C,f}$, saranno uguali. Se invece aspettiamo poco tempo, ci si può trovare in diverse situazioni a seconda del tipo di contatto tra i corpi.
Le pareti si dividono quindi in:

- **pareti diatermiche**: permettono lo scambio di calore grazie all'ottimo contatto

- **pareti adiabatiche**: non permettono scambio di calore, sono quindi "isolanti"

Il **contenitore adiabatico** è un contenitore isolante termicamente.
Osserviamo che in pratica, se si aspetta un tempo sufficientemente lungo, niente è perfettamente isolante.

6.6.5 Principio zero della termodinamica

Il principio zero della termodinamica dice che se due corpi sono entrambi in equilibrio termico con un terzo corpo, allora lo sono anche fra loro, ovvero se A e B sono in equilibrio termico e B e C sono in equilibrio termico, allora anche A e C sono in equilibrio termico.
Questo si traduce nel fatto che se,

$$T_A = T_B \quad AND \quad T_B = T_C \quad => \quad T_A = T_C$$