



# Linguaggi formali e compilatori

UNITN - Lazzerini Thomas

Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

# Indice

<b>1 Formulario</b>	<b>3</b>
1.1 Unità di misura . . . . .	3
<b>2 Introduzione</b>	<b>3</b>
2.1 Il metodo sperimentale . . . . .	3
<b>3 Cinetica dei punti</b>	<b>3</b>
3.1 Sistema di riferimento . . . . .	3
3.2 Diagramma dello spazio . . . . .	4
3.3 Caso semplice . . . . .	4
3.4 Moto rettilineo uniforme . . . . .	5
3.5 Velocità . . . . .	5
3.5.1 Velocità istantanea . . . . .	6
3.5.2 Accelerazione . . . . .	6
3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accellerato . . . . .	6
3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule . . . . .	7
3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme) . . . . .	7
3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accellerato) . . . . .	7
3.6 Moto armonico . . . . .	9
3.6.1 Esempio di moto armonico . . . . .	10
3.7 I moti piani . . . . .	11
3.7.1 I vettori . . . . .	11
3.7.2 Sistema di riferimento . . . . .	11
3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione . . . . .	13
3.7.4 Esempio . . . . .	13
3.8 Il moto parabolico . . . . .	15
3.8.1 Sistema di riferimento . . . . .	15
3.8.2 Rappresentare spazio, gittata $\gamma$ , altezza massima $h_{max}$ e velocità . . . . .	16
3.8.2.1 Riassunto . . . . .	17
3.9 Moto circolare uniforme . . . . .	17
<b>4 Dinamica</b>	<b>19</b>
4.1 Leggi della dinamica . . . . .	19
4.2 Forze impulsive . . . . .	20
4.2.1 Esempio forze impulsive . . . . .	20
4.2.2 Esercizio su forze impulsive . . . . .	21
4.3 Esercizi sulla dinamica . . . . .	21
4.4 Forze fondamentali . . . . .	22
4.5 Forze . . . . .	23
4.5.1 Forza peso . . . . .	23
4.5.1.1 Esempio sensazione del peso . . . . .	23
4.5.2 Forza gravitazionale . . . . .	24
4.5.3 Forza elastica . . . . .	24
4.5.4 Forza di attrito (radente) . . . . .	26

# 1 Formulario

## 1.1 Unità di misura

$T$	$\Rightarrow$	$10^{12}$	$G$	$\Rightarrow$	$10^9$
$M$	$\Rightarrow$	$10^6$	$k$	$\Rightarrow$	$10^3$
$m$	$\Rightarrow$	$10^{-3}$	$\mu$	$\Rightarrow$	$10^{-6}$
$n$	$\Rightarrow$	$10^{-9}$	$p$	$\Rightarrow$	$10^{-12}$

# 2 Introduzione

## 2.1 Il metodo sperimentale

Distingue discipline sperimentali da discipline non sperimentali. Si compone di diverse fasi:

1. **formulazione ipotesi**: si fa un'**ipotesi descrittiva** (in **linguaggio matematico**) della porzione di mondo che si vuole analizzare, di conseguenza si decide di **non considerare** altre caratteristiche del mondo che non centrano con l'ipotesi che stiamo formulando;
2. **esperimento**: si va a ricreare una situazione dove l'aspetto che vogliamo analizzare è **sicuramente presente e influenzato il meno possibile da fattori esterni**;
3. **esecuzione dell'esperimento**: si verifica l'ipotesi, formulata in modo matematico, confrontando i valori ottenuti con l'esperimento con quelli che si ottengono dalla nostra ipotesi.

In base alla "verifica" dell'ipotesi possiamo fare una differenziazione:

- **teoria**: l'ipotesi **non è ancora verificata**, o è verificata **parzialmente**;
- **legge fisica**: l'ipotesi **è verificata** (in un certo ambito);

# 3 Cinetica dei punti

Describe il movimento dei corpi.

## 3.1 Sistema di riferimento

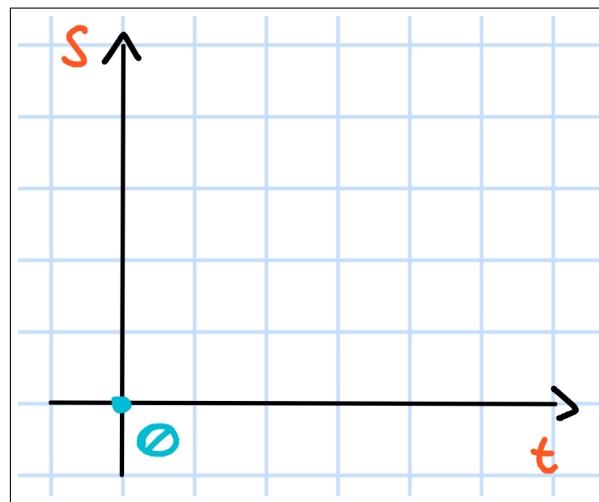
Specifichiamo un sistema di riferimento per il seguente argomento:

- origine** : punto da cui si misurano le distanze
- retta** **e** : usata per misurare gli spostamenti (la freccia indica il verso)
- origine** **e** : distinguono i vari punti
- metro** : unità di misura conv. della lunghezza (**e**).

Una cosa importante da notare è che un numero singolo può rappresentare solo cose "mono-dimensionalì" e che, soprattutto, non tutte le unità di misura possono rappresentare qualsiasi cosa (ad es.: l'età dell'universo non si può rappresentare con i metri).

### 3.2 Diagramma dello spazio

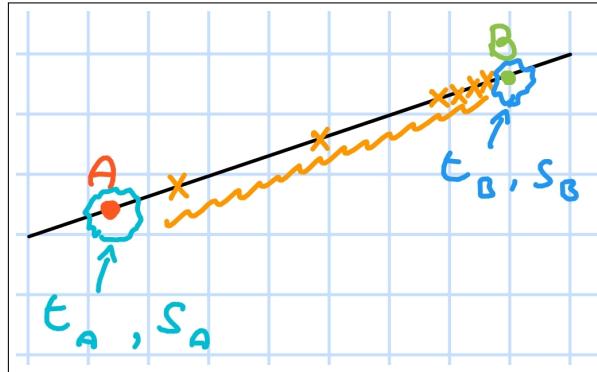
Rappresentiamo lo spostamento nel tempo tramite un "*diagramma dello spazio*":



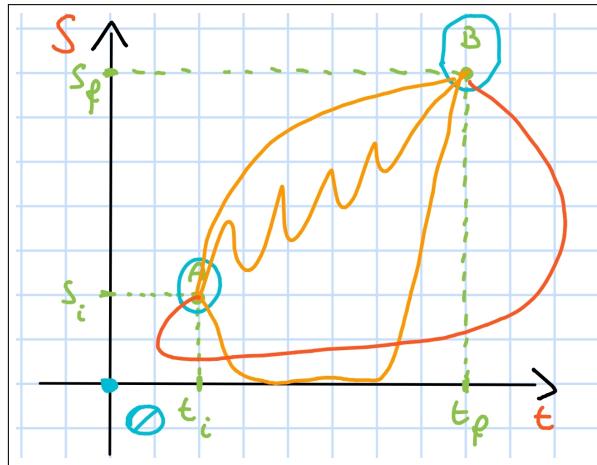
In particolare, in questo diagramma rappresentiamo sull'asse Y lo **spostamento** (s) (rappresentato come **valore uni-dimensionale**) e sull'asse X il **tempo** (t) (anche rappresentato come **valore uni-dimensionale**). **Nota che il diagramma NON RAPPRESENTA una posizione, ma lo spostamento in relazione al tempo.**

### 3.3 Caso semplice

Vediamo un semplice caso di utilizzo per capire come usare i diagrammi dello spazio:



Possiamo immaginare di avere un oggetto in movimento su una retta tra i punti A e B, come possiamo rappresentare questo movimento nel diagramma? Come prima cosa posizioniamo i "fenomeni" (*def. qualcosa che appare evidente all'osservazione*), ovvero i **punti A e B**, nota che non è detto che questi punti coincidano con dei "punti particolari" (ad esempio l'origine) nel nostro diagramma. In particolare, a questi punti associamo **un valore sull'asse del tempo** ( $t_i, t_f$ ) ed **un valore sull'asse dello spazio** ( $s_i, s_f$ ). A questo punto esistono **infiniti possibili percorsi** tra il punto A ed il punto B, ad esempio:



Importante notare che ***non tutti questi percorsi, pur avendo senso matematico, hanno senso fisico!*** Ad esempio, il percorso in rosso "torna indietro nel tempo"!

### 3.4 Moto rettilineo uniforme

STUB##### (In teoria lo fa dopo, controllare)

### 3.5 Velocità

Possiamo immaginare la velocità ( $v$ ) come la "*def. variazione dello spazio rapportato al tempo impiegato per percorrerlo*", in particolare la velocità è data dalla formula:

$$v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vediamo un semplice esempio:

$$s_i = 400m, s_f = 700m, t_i = 7 : 30 = 450min, t_f = 7 : 40 = 460min$$

$$v = \frac{700m - 400m}{460min - 450min} = \frac{300m}{600s} = 0,5m/s$$

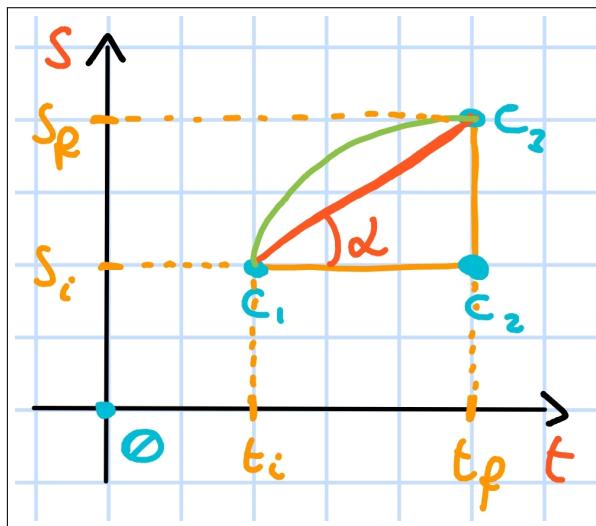
Nota che nella seconda uguaglianza nell'esempio abbiamo **convertito i minuti in secondi**, puoi immaginare che abbiamo posto " $min = (60s)$ ", quindi abbiamo fatto " $10min = 10 * (60s) = 600s$ ".

### 3.5.1 Velocità istantanea

Quella che abbiamo calcolato prima possiamo vederla come "velocità media" di tutto il percorso, la **velocità istantanea** invece possiamo vederla come la *def. velocità in un punto specifico del percorso*. Immagina quindi di fare la formula:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Nota che quando si usa la lettera " $\delta$ " stiamo ad indicare una **piccola** (infinitesima) **variazione**. Ora, se il valore di  $s$  viene espresso **in funzione di  $t$** , quindi abbiamo  $s(t)$ , e la funzione " $s(t)$ " è **derivabile**, allora la **velocità istantanea corrisponde alla derivata prima della funzione  $s(t)$** , che a sua volta corrisponde a  $\frac{ds}{dt}$ .



Supponendo che il **moto del nostro punto** venga identificato dalla curva in verde, il rapporto tra la lunghezza dei 2 cateti  $C_1C_2$  ( $\Delta t$ ) e  $C_2C_3$  ( $\Delta s$ ) rappresenta la **tangente  $\alpha$** , che in questo caso rappresenta la **velocità media**. Ora, se restringiamo l'intervallo di  $t$  in modo che tenda a 0 e calcoliamo il valore della derivata in quel punto otterremo la **velocità istantanea**.

### 3.5.2 Accelerazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la **velocità in un punto corrisponde al valore della derivata prima** (della funzione che rappresenta il moto del nostro corpo) **in quel punto**, per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che **l'accelerazione corrisponde al rapporto tra la derivata della velocità e la derivata del tempo**, ottenendo quindi la formula  $\frac{dv}{dt}$ , operativamente dobbiamo fare la **derivata seconda della funzione che rappresenta il moto del nostro punto**.

### 3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Cominciamo col dire che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ricorda che con  $dv$  e  $dt$  intendiamo le **derivate**. Da questa ricaviamo  $dv$ , ovvero:

$$dv = a * dt \Rightarrow \int_A^B dv = \int_A^B (a * dt) \Rightarrow v_B - v_A = a(t_B - t_A)$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Ottenuta questa formula, possiamo passare a calcolare lo **spazio in funzione del tempo**, ovvero:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{ds}{dt} &\Rightarrow ds = v * dt \Rightarrow \int_A^B ds = \int_A^B v * dt \Rightarrow s_B - s_A = \int_A^B [v_0 + a(t - t_0)] dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_B - s_A = \left[ v_0 * t + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \right]_A^B \Rightarrow s_B - s_A = v_0 * t_B + a \frac{(t_B - t_0)^2}{2} - v_0 * t_A + a \frac{(t_A - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Terminiamo dicendo che in questo moto **l'accelerazione è costante**, quindi:

$$\underline{a(t) = a}$$

### 3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule

Vediamo alcuni esempi:

**3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme)** Supponiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A ( $t_0, s_0$ ) ad un punto B ( $t_1, s_1$ ) tramite un **moto rettilineo uniforme**, abbiamo i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} t_0 = ? & s_0 = 1,5Km & v = 36m/s \\ s_1 = 11,5Km & t_1 = 0,3h & \end{array}$$

L'obiettivo è trovare i dati mancanti (ovvero  $t_0$ ). Noi sappiamo che la velocità "v" corrisponde a:

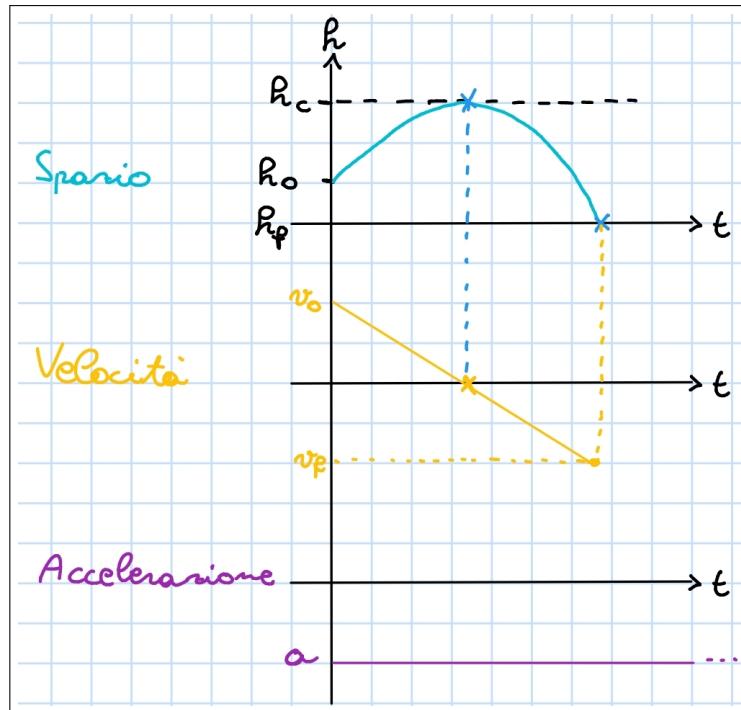
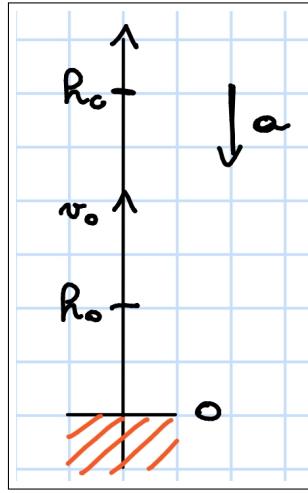
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow \dots \Rightarrow t_0 = t_1 - \frac{s_1 - s_0}{v}$$

Sostituendo i valori forniti, otteniamo che  $t_0 \approx 802,22s$

**3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accelerato)** Supponiamo di avere un oggetto all'altezza  $h_0$  e di lanciarlo verso l'alto con una velocità  $v_0$  nell'istante  $t_0$  con un'accelerazione  $a$ . Dobbiamo trovare l'altezza ( $h_c$ ) ed il tempo ( $t_c$ ) di culmine e, supponendo che alla fine l'oggetto raggiunga l'altezza finale " $h_f$ ", trovare il tempo finale " $t_f$ ". Supponiamo di avere i seguenti dati:

$$\begin{array}{llll} h_0 = 100m & t_0 = 0s & v_0 = 5m/s & a = -9,8m/s^2 \\ t_c = ? & h_c = ? & t_f = ? & h_f = 0m \end{array}$$

Includiamo delle immagini complementari:



Procediamo per punti:

1. Vogliamo trovare il tempo di culmine ( $t_c$ ), quindi poniamo  $v(t) = 0$  e troviamo la  $t$  che rende vera l'equazione:

$$v(t) = 0 \Rightarrow v_0 + a(t - 0) \Rightarrow t_c = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5m/s}{-9,8m/s^2} \approx 0,51s$$

2. Vogliamo calcolare l'altezza di culmine ( $h_c$ ), per farlo usiamo la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} h_c &= s(t_c) = s_0 + v_0(t_c - 0) + \frac{1}{2}a(t_c - 0)^2 = \\ &= 100m + 5m/s * (0,51s) + 1/2(-9,8m/s^2) * (0,51s)^2 \approx 101,28m \end{aligned}$$

3. Vogliamo calcolare il tempo "finale" ( $t_f$ ), per farlo usiamo sempre la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= h_f = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_0 + v_0(t_f - 0) + \frac{1}{2}a(t_f - 0)^2 = 0 \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo una funzione di secondo grado con  $x = t_f$ , quindi usiamo la formula solita:

$$t_f \approx -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 - 2 \frac{s_0}{a}}$$

$$t_f = 0,51s + \sqrt{(0,51s)^2 - 2 * \frac{100m}{-9,8m/s^2}} \approx 5,06s$$

Nota che possiamo subito sostituire il " $\pm$ " con un "+" dato che la radice sarà sicuramente più grande di quel 0,51 che la precede, quindi non avrebbe fisicamente senso fare altrimenti (tempo negativo).

### 3.6 Moto armonico

Nel moto armonico abbiamo un'**accelerazione oscillante**, nella forma  $a_0 * \sin(t)$ . Il problema è che il  $\sin$  (come tutte le funzioni matematiche) è adimensionale, quindi dobbiamo aggiungere delle componenti aggiuntive per **rendere il tempo "t" adimensionale**, in particolare abbiamo che:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t + \varphi)$$

dove " $\omega$ " rappresenta la **pulsazione** e " $\varphi$ " la **fase**. Nota che **abbiamo già l'accelerazione**, ovvero  $a_0 * \sin(t)$ , quindi per calcolare velocità e spazio procediamo per **integrazioni successive**, con gli estremi di integrazione che corrispondono al **punto di inizio e di fine** della nostra misurazione.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = v_0 + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \omega a_0 \sin(\omega t + \varphi) d\tau = \\ &= v_0 + \frac{1}{\omega} \left[ -\cos(\omega t + \varphi) \right]_{t_0}^t = \textcolor{red}{v_0} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Nota che il **testo in rosso sopra**, in quanto costante, viene raccolto in  $V$ , passiamo ora a calcolare lo spazio (che corrisponde all'integrazione della velocità):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \\ &= \textcolor{red}{s_0} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

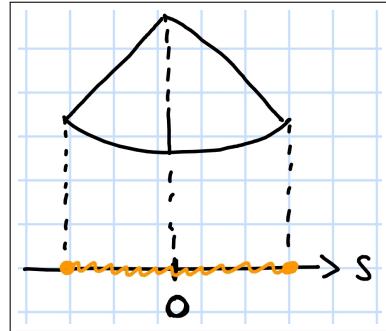
In definitiva, le formule che interessano a noi sono:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 * \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \\ s(t) &= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ricorda che **le parti in rosso** sono costanti (di solito per noi varranno 0), mentre l'accelerazione ci è stata fornita all'intizio, quindi teniamo quella. Vediamo un "esempio":

### 3.6.1 Esempio di moto armonico

Ipotiziamo di avere una situazione del genere: vogliamo misuare l'andamento dell'ombra di un'altalena (che va solo avanti e indietro) sulla superficie.



Noi **assumiamo sempre che  $\varphi$  (ovvero la fase) = 0** e che **cominciamo da  $t_0 = 0$** , quindi le nostre formule diventano:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t)$$

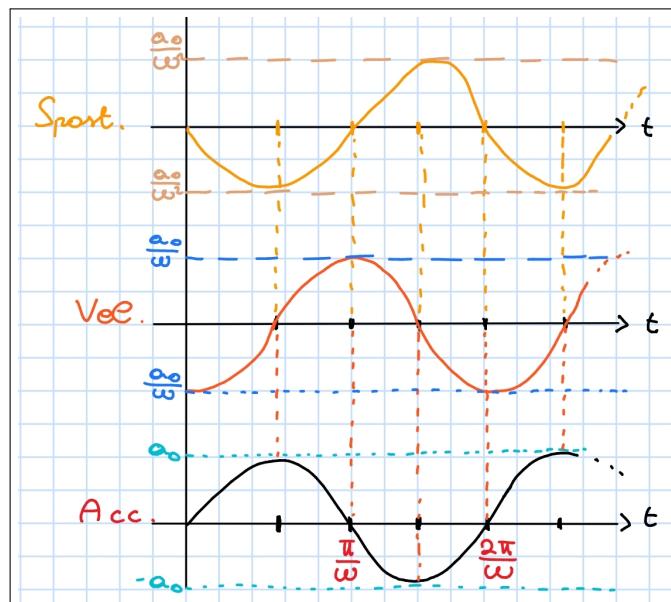
$$v(t) = -\frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$s(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

Prima di passare al grafico dobbiamo calcolare il valore della nostra variabile  $t$ , ora noi sappiamo che  $\omega t$ , dato che  $\varphi = 0$ , deve rappresentare una rotazione completa ( $2\pi$ ):

$$\omega t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

Nota che il nostro  $T$  rappresenta il **periodo**. Con queste funzioni/variabili, possiamo passare al calcolo dei grafici temporali:



## 3.7 I moti piani

Prima di partire con i moti veri e propri, introduciamo velocemente i **vettori**.

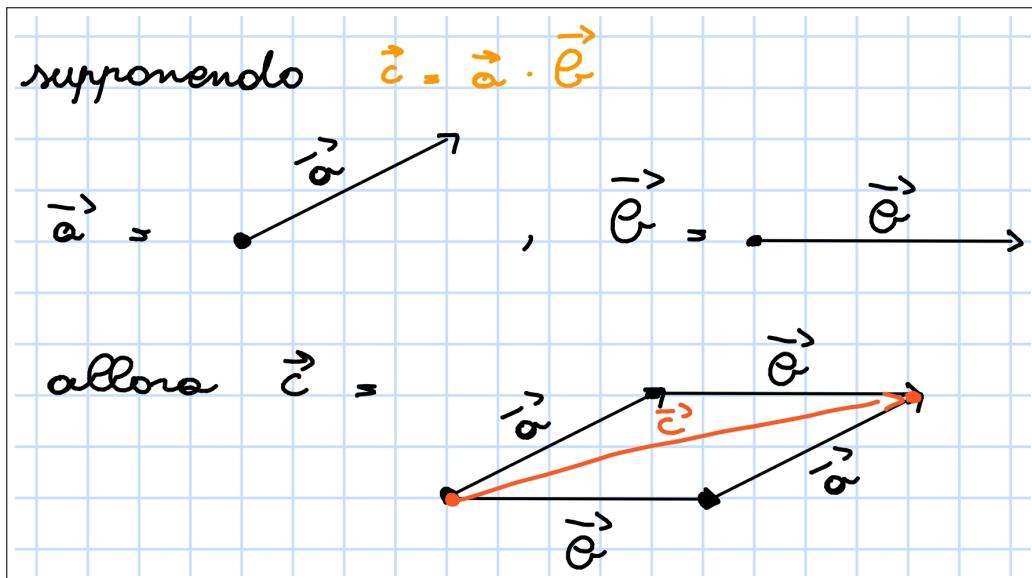
### 3.7.1 I vettori

Passiamo ora a considerare i **moti con 2 dimensioni**, per questo motivo dobbiamo introdurre i **vettori** composti da:

- punto di inizio;
- verso;
- modulo (la lunghezza del vettore);
- direzione (la retta su cui giace il vettore);

I vettori, si comportano in modi leggermente diversi rispetto ai numeri "normali", in particolare a noi interessa:

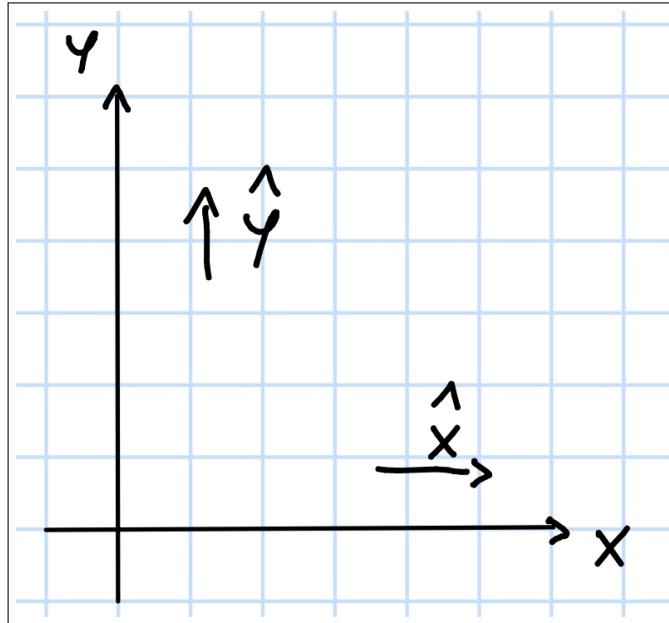
- somma: si fa con la **regola del parallelogramma**, ovvero:



- prodotto per scalare: quando si moltiplica un vettore per uno scalare, semplicemente si va a **moltiplicare il modulo del vettore**, in particolare " $\vec{a} = b * \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = b * |\vec{c}|$ "

### 3.7.2 Sistema di riferimento

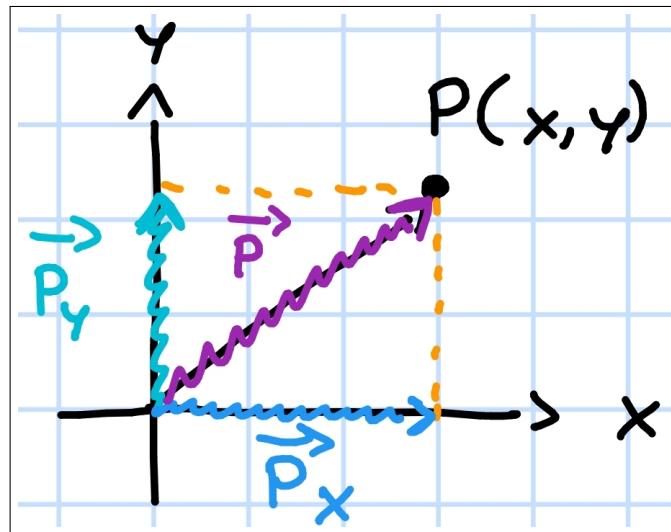
Introduciamo ora il sistema di riferimento per questo moto:



Da questo punto in poi, rappresentiamo il moto sul **piano cartesiano**: rappresenteremo quindi il **movimento "fisico"** del moto in quanto **non più unidimensionale!** Per quanto riguarda gli assi, si usano quelli che vengono definiti **versori** che matematicamente si rappresentano come  $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$ . In questo modo otteniamo qualcosa di **adimensionale** e che ha **modulo 1 per definizione**.

Quando vogliamo rappresentare un punto, possiamo farlo **attraverso un vettore**, che a sua volta si può rappresentare come la **somma di 2 vettori "unidimensionali"** (uno per ogni asse) che a loro volta si possono rappresentare come **spostamenti sui vari assi moltiplicati per il versore associato**:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}$$



Allo stesso modo possiamo rappresentare velocità ed accelerazione!

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x * \hat{x} + a_y * \hat{y}$$

Ora, possiamo anche rappresentare un vettore sottoforma di "matrice", in questo modo:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Ovvero lo spostamento, ad esempio, è composto dalla somma dello spostamento sull'asse x  $S_x$  e di quello sull'asse y  $S_y$

### 3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione

Partiamo con la velocità: sappiamo che la velocità per il moto unidimensionale è data dalla **derivata dello spostamento**, per quanto riguarda il moto piano non cambia molto: dobbiamo soltanto **derivare una somma di 2 componenti!** Ovvvero:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d[S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}]}{dt} = \frac{dS_x}{dt} * \hat{x} + S_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{dS_y}{dt} * \hat{y} + S_y * \frac{d\hat{y}}{dt}$$

Quelle 2 parti evidenziate in **rosso** sono speciali: rappresentano il possibile movimento degli assi. Per il momento, le considereremo **sempre nulle** in quanto i **nostri assi non si muoveranno!** Quindi, in soldoni, otteremmo che la nostra velocità equivale a:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS_x/dt \\ dS_y/dt \end{bmatrix}$$

Nota però che questo ragionamento possiamo farlo **solo se gli assi restano fermi**, altrimenti dovremmo fare delle considerazioni in più. Allo stesso modo, possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione, ottenendo anche qui:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \end{bmatrix}$$

### 3.7.4 Esempio

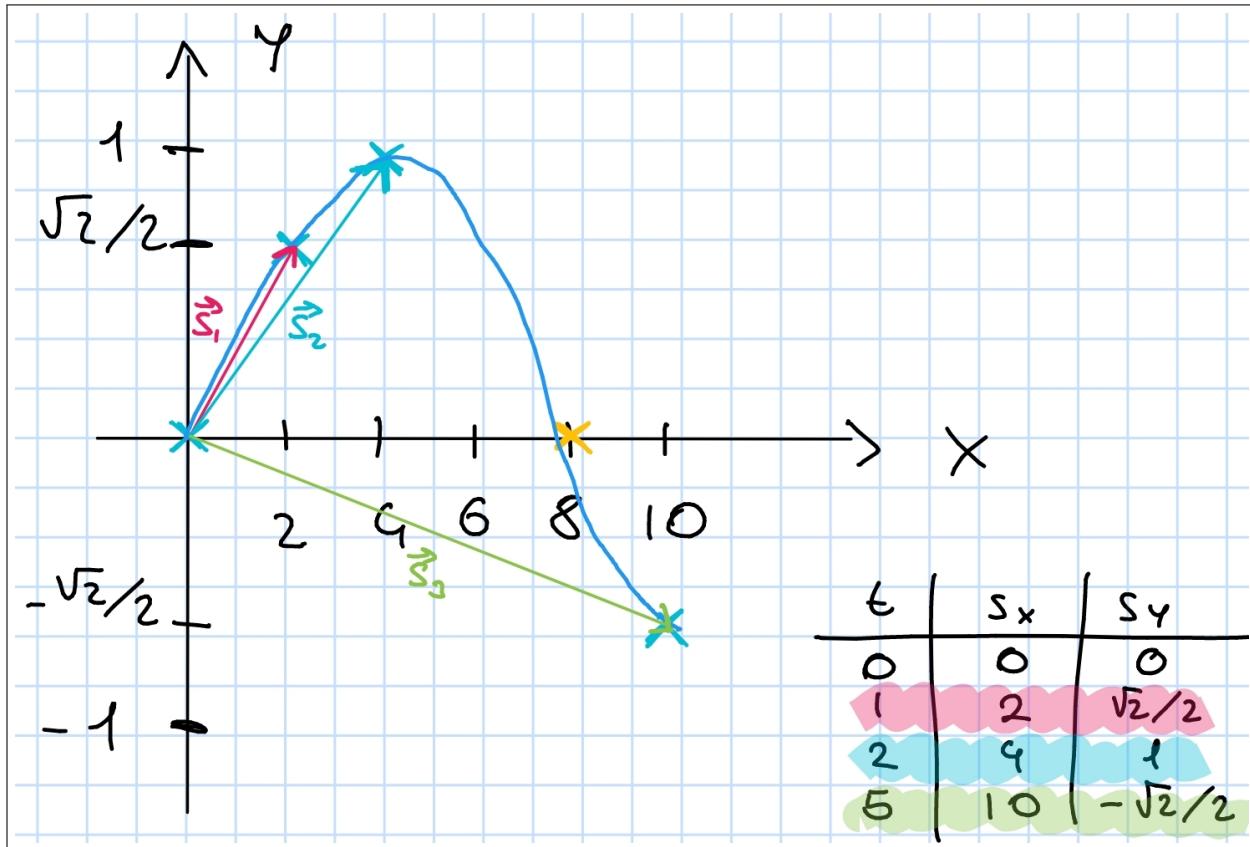
Vediamo un esempio, dobbiamo calcolare velocità e accelerazione sapendo che:

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m/s \\ 1m * \sin(\pi/4 Hz) \end{bmatrix}$$

Nota che  $Hz = s^{-1}$ , la prima cosa da fare ora è **rappresentare qualche punto**, possiamo farlo in una tabella:

$t$	$S_x$	$S_y$
0	0	0
1	2	$\sqrt{2}/2$
2	4	1
5	10	$-\sqrt{2}/2$

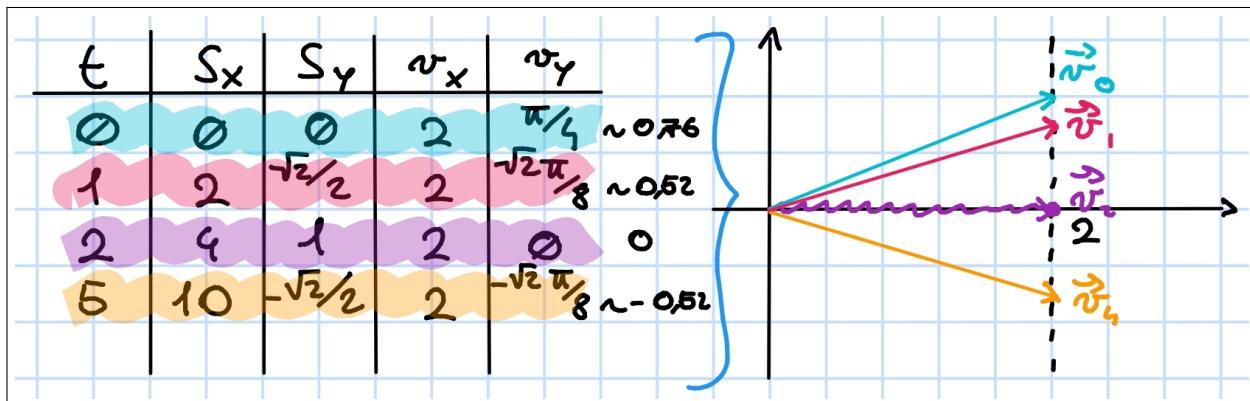
Rappresentiamo ora questi punti sul piano cartesiano (aggiungendo anche i vettori che rappresentano i punti), ricorda inoltre che il piano ora **rappresenta la traiettoria e NON più lo spazio/tempo**:



Ora calcoliamo la velocità, per farlo ci basta derivare per  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4} \cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Rifacciamo la tabella e rappresentiamo il tutto sul grafico:



Terminiamo con l'accelerazione, che corrisponde semplicemente alla **derivata della velocità**, otterremo quindi:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\frac{\pi}{4})^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Ricapitolando i risultati ottenuti,abbiamo che:

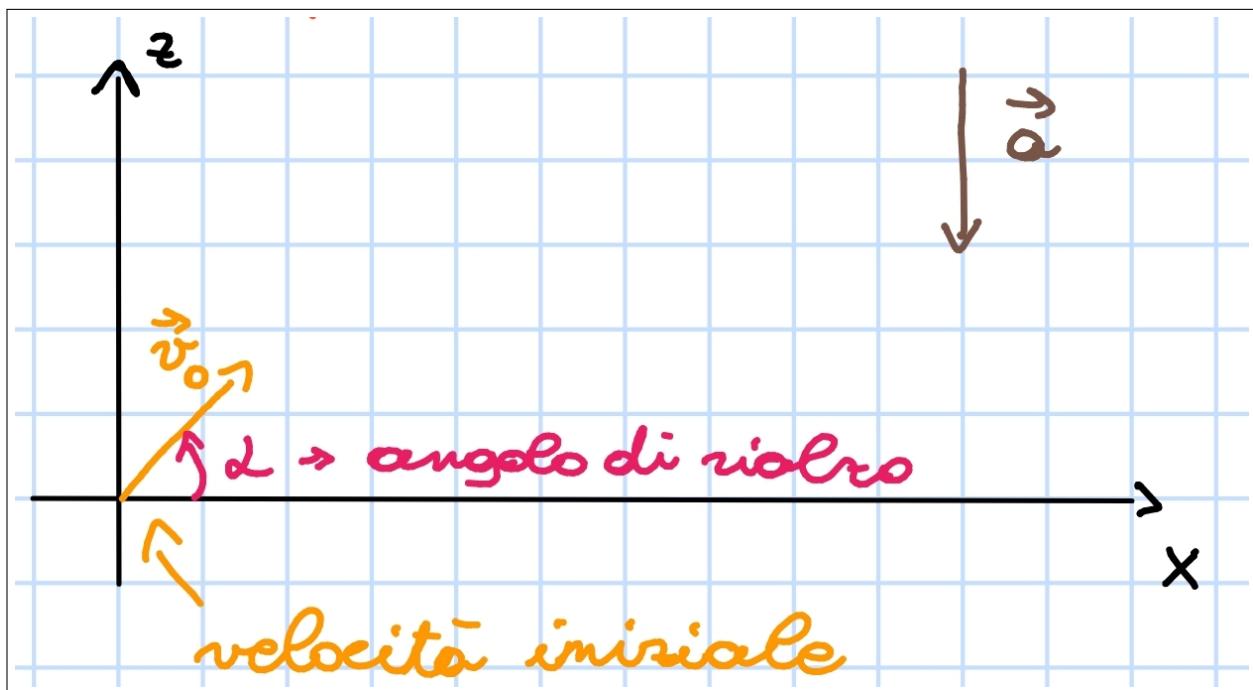
$$\begin{aligned}\vec{S}(t) &= \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4} \cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 3.8 Il moto parabolico

Iniziamo introducendo il sistema di riferimento che andremo ad utilizzare.

### 3.8.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito un grafico:



Avremmo quindi un oggetto che parte da **un punto iniziale**, che per convenzione supponiamo **(0, 0)**, con una **certa velocità iniziale**  $\vec{v}_0$  ed un certo **angolo di rialzo**  $\alpha$ . Inoltre sarà presente una **certa accelerazione "a" = -g** che punterà verso il basso (suppongo che  $-g$  indichi l'accelerazione gravitazionale terrestre). In questa sezione assumiam questa convenzione:

$$|\vec{v}_0| = v_0$$

Quindi possiamo riscrivere il vettore della velocità in questo modo:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha) \\ v_0 * \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

### 3.8.2 Rappresentare spazio, gittata $\gamma$ , altezza massima $h_{max}$ e velocità

Ora, come facciamo a rappresentare i grafici di spazio e velocità? Nota che l'accelerazione non serve, in quanto ci viene fornita in questo caso. Per quanto riguarda lo spazio, possiamo "spezzare" il problema in 2:

- spazio percorso in "larghezza" (x): lo trattiamo come un semplice problema di **moto rettilineo uniforme**, infatti l'accelerazione va solo verso il basso, non avanti o indietro;
- spazio percorso in "altezza" (z): in questo caso lo consideriamo un problema di **moto uniformemente accelerato**, infatti abbiamo un'accelerazione costante che preme verso il basso.

Quindi otterremo le formule:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0 \cos(\alpha)t = \underline{v_0 * \cos(\alpha)t}$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z}{2}t^2 = v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

In definitiva, abbiamo che lo spazio corrisponde al vettore:

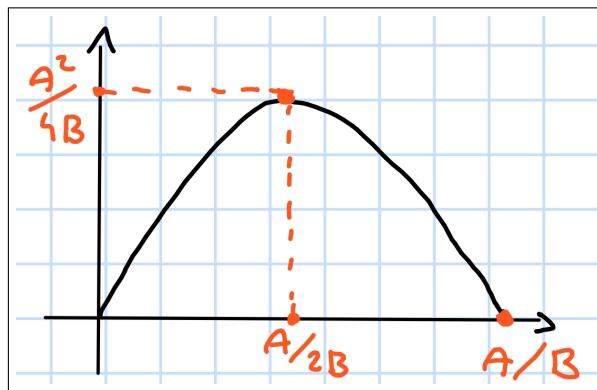
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha)t \\ v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Ora proviamo a mettere insieme le 2 formule in modo da ottenere una funzione da poter rappresentare facilmente sul grafico:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$z = v_{0z} * t - \frac{g}{2} * t^2 \Rightarrow \frac{v_{0z}}{v_{0x}} * x - \left( \frac{g}{2v_{0x}^2} \right) * x^2 \Rightarrow Ax - Bx^2$$

Abbiamo ottenuto l'**equazione di una parabola!** In particolare, avremmo queste proporzioni:



Ora che abbiamo un grafico disegnato, ci risulta particolarmente semplice trovare altre 2 componenti importanti:

- **gittata  $\gamma$** : ovvero la massima distanza percorsa in orizzontale. Possiamo ottenerla tramite la formula:

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{v_0}{v_{0x}} * \frac{2v_{0x}^2}{g} = \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}}{g} = \frac{v_0^2}{g} * 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) = \underline{\frac{v_0^2}{g} * \sin(2\alpha)}$$

- **altezza massima**  $h_{max}$ : ovvero l'altezza di culmine della nostra parabola. Guardando il grafico possiamo vedere che corrisponde a:

$$h_{max} = \frac{A^2}{4B} = \frac{A}{4} * \frac{A}{B} = \frac{v_0 z}{4v_{0x}} * \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}^2}{v_{0x} g} = \frac{v_0 z}{4} * \frac{2 * v_{0z}}{g} = \frac{2v_{0z}^2}{4g} = \frac{1}{2} * \frac{v_{0z}^2}{g} = \frac{v_0^2 * \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Terminiamo velocemente con la velocità che, ricordiamo, è la **derivata dello spazio percorso**:

$$v_x(t) = \frac{d(v_0 * \cos(\alpha)t)}{dt} = v_0 \cos(\alpha) = v_{0x}$$

$$v_z(t) = \frac{dS_z}{dt} = v_0 * \sin(\alpha) - gt = v_{0z} - gt$$

### 3.8.2.1 Riassunto

Ricapitolando tutte le formule che abbiamo visto:

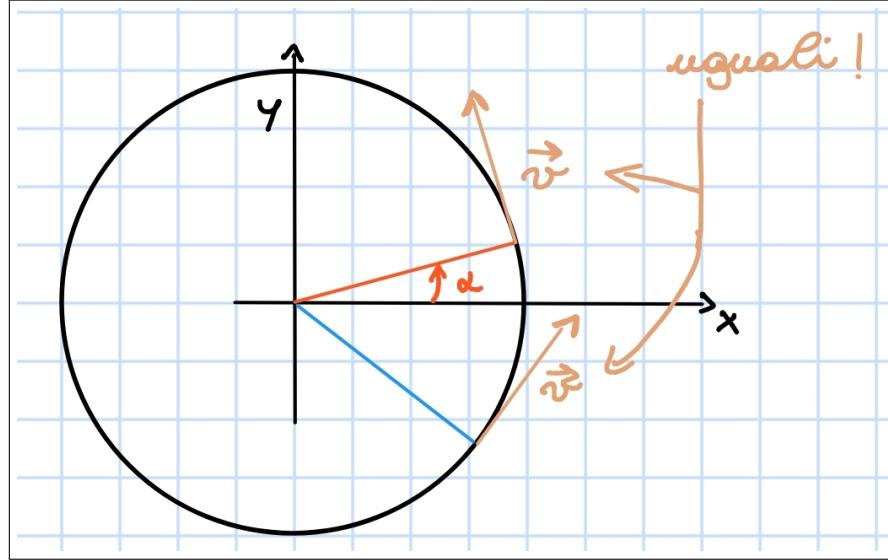
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha)t \\ v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{v_0^2}{g} * \sin(2\alpha)$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 * \sin^2(\alpha)}{2g}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - gt \end{bmatrix}$$

## 3.9 Moto circolare uniforme



Nel moto circolare uniforme la velocità è **costante**, infatti in tutti i punti la velocità **non** cambia lunghezza, cambia solo la sua direzione. La velocità in un punto, inoltre, è **sempre tangente** alla traiettoria in quel punto. Si hanno le seguenti formule:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$$

$$r(t) = R$$

dove  $R$  è il raggio della circonferenza e  $\omega$  è la velocità angolare, definita come  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  con  $T$  periodo. La **frequenza** è definita come  $f = \frac{1}{T}$  e la **velocità** come:

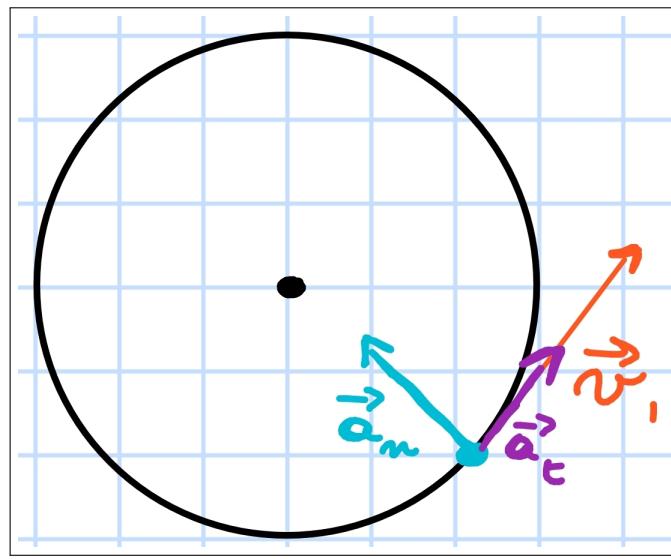
$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Osservando la formula qui sopra, possiamo notare che a meno che il raggio  $R$  non cambi, la velocità sarà costante, nel caso in cui cambia, invece, cambierà anche la velocità. Ora, ponendo l'origine del piano cartesiano come il centro della circonferenza, calcoliamo lo **spazio**, la **velocità** e l'**accelerazione** in funzione del tempo come segue:

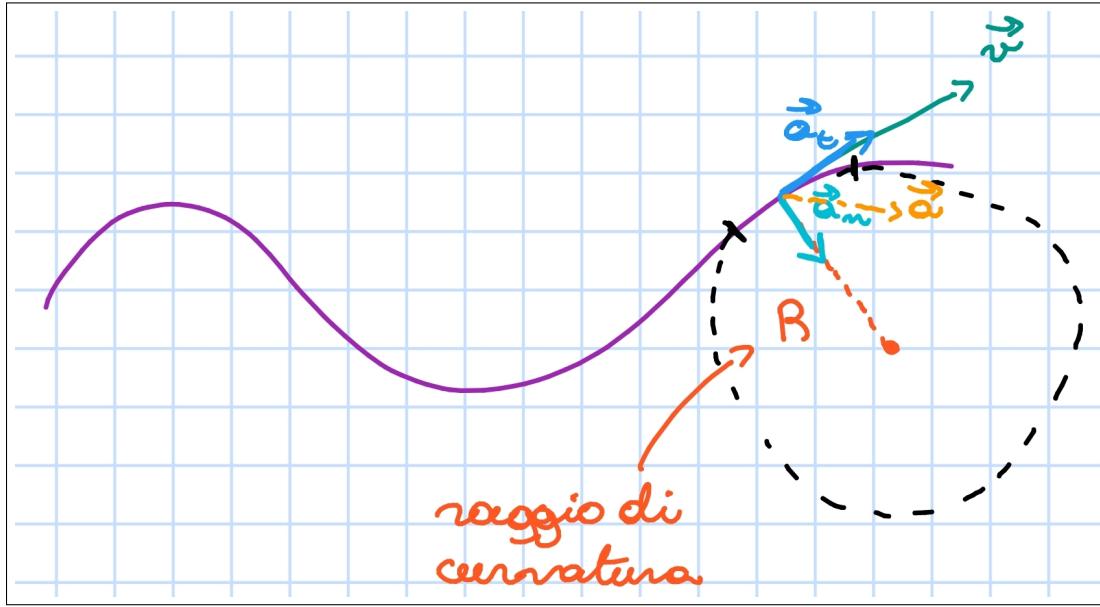
$$\vec{s}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos(\alpha(t)) \\ y(t) = R\sin(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -R \frac{d\alpha}{dt} \sin(\alpha(t)) = -\omega R \sin(\alpha(t)) \\ v_y(t) = R \frac{d\alpha}{dt} \cos(\alpha(t)) = \omega R \cos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\alpha(t)) \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\alpha(t)) \end{cases}$$



Ora l'accelerazione si divide in due componenti,  $\vec{a}_t$  (**accelerazione tangente**) e  $\vec{a}_n$  (**accelerazione normale o centripeta**). La prima è parallela alla tangente nel punto e modifica il **modulo della velocità**, mentre la seconda è ortogonale alla tangente nel punto e modifica la **traiettoria(direzione)**. Dato un qualsiasi **moto piano**, se prendo una piccola parte di questo, allora può essere immaginato come un arco di circonferenza. Più il tratto è **grande** e più l'arco di circonferenza sembrerà **rettilineo**, più il tratto è **piccolo** e più l'arco di circonferenza sembrerà **curvo** e avrà corrispondentemente una circonferenza **grande** e una **piccola**.



In questo caso avrò quindi che le due componenti dell'accelerazione varranno:

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a}_t| = \vec{a} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{a} \hat{v}$$

dove  $\hat{v}$  è il **versore velocità**.

## 4 Dinamica

### 4.1 Leggi della dinamica

La **dinamica** si occupa dello studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause(**forze**), ovvero delle circostanze che lo determinano e lo modificano nel **tempo** e nello **spazio** del suo sistema di riferimento. Wikipedia Le leggi della dinamica sono 3 e sono le seguenti:

1. **Legge di Inerzia (I legge)**: un corpo rimane nel suo stato di quiete finché non intervengono agenti esterni a modificarne questo stato. Questa legge vale solo in sistemi di riferimento inerziali;
2. **Legge di Newton (II legge)**: Viene definita la **quantità di moto** come  $\vec{p} = m\vec{v}$ , ovvero massa per velocità. Successivamente viene definita la forza ( $\vec{F}$ ) come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove  $m$  è la **massa inerziale**, ovvero la capacità di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto, questa mette in relazione la velocità alla forza.

Nel caso in cui la massa non varia, allora la forza può essere definita come  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ .

L'unità di misura della **forza** è il **Newton (N)** definito come  $\frac{kg \cdot m}{s^2}$ .

3. **Principio di azione e reazione (III legge):** Quando il corpo 1 esercita una forza  $\vec{F}$  sul corpo 2, quest'ultimo esercita sul corpo 1 una forza  $-\vec{F}$ , uguale e opposta.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Osserviamo che la **prima legge** potrebbe sembrare un caso particolare della **seconda legge**, con  $\vec{F} = \vec{0}$ , ma in realtà non è così, infatti la seconda e la terza legge sono valide solo all'interno di sistemi di riferimento inerziali, che sono definiti dalla prima legge.

## 4.2 Forze impulsive

L'**impulso**  $\vec{P}$  è definito come la variazione di quantità di moto  $\Delta\vec{p}$  in un  $\Delta t$  piccolo, ovvero:

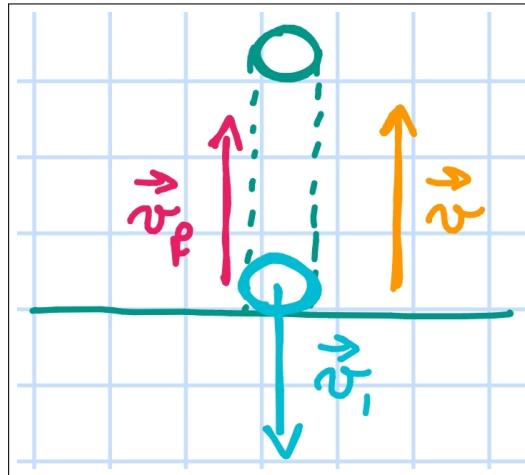
$$\vec{P} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

E la **forza impulsiva** come:

$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

### 4.2.1 Esempio forze impulsive

Supponiamo di avere un pavimento ed una palla che viene lasciata in aria. Questa palla cadrà verso il pavimento fino a raggiungerlo, rimbalzare su esso e tornare in sù (assumiamo che la velocità con cui torna in sù sia la stessa con cui cade, quindi non agiscono fattori esterni come attriti, ecc.).



Se ho un vettore velocità  $\vec{v}$ , allora ho che:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= m\vec{v}_i = -m\vec{v} \\ \vec{p}_f &= m\vec{v}_f = m\vec{v} \\ \Delta\vec{p} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m\vec{v}\end{aligned}$$

#### 4.2.2 Esercizio su forze impulsive

Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover calcolare  $\vec{F}_{imp}$  (forza impulsiva):

$$m = 98g$$

$$v = 10.2 \frac{m}{s}$$

$$\Delta t = 100ms$$

Procediamo ora quindi con calcolare  $\Delta\vec{p}$  usando la formula appena calcolata sopra e una volta ottenuto il valore calcoliamo la  $\vec{F}_{imp}$ :

$$\Delta\vec{p} = 2m\vec{v} = 2 \cdot 10.2 \frac{m}{s} \cdot 0.098kg = 0.99 \frac{kg \cdot m}{s}$$

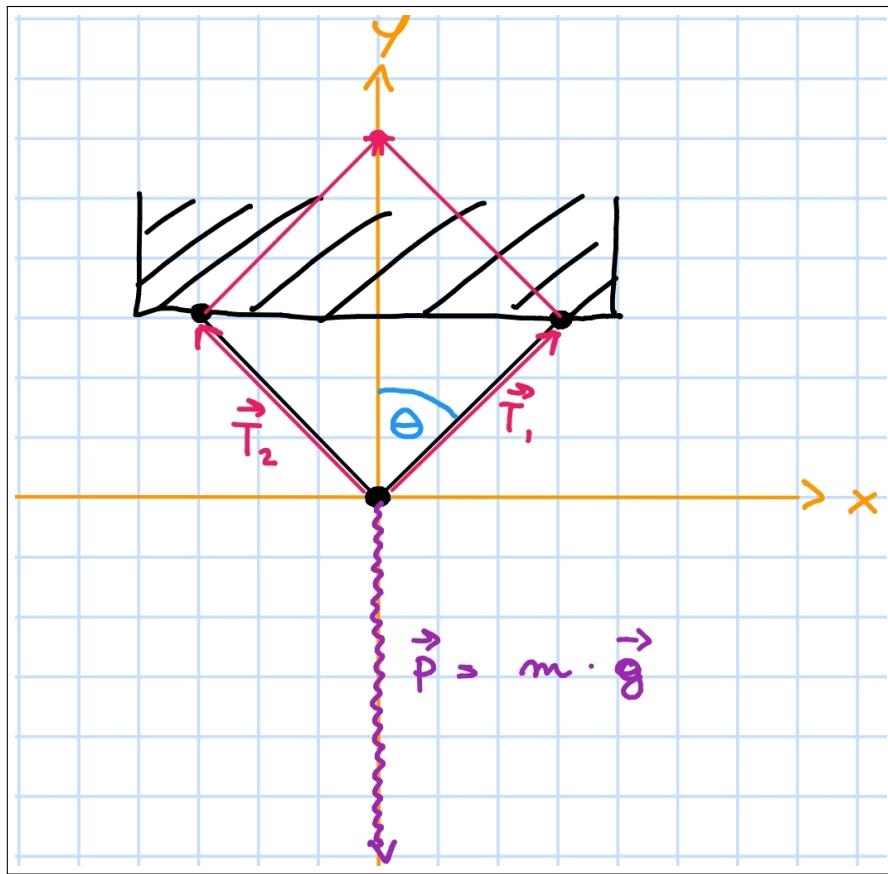
$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0.99 \frac{kg \cdot m}{s}}{0.1s} = 9.99 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 9.99N$$

#### 4.3 Esercizi sulla dinamica

Supponiamo di avere un'oggetto appeso a due fili, che sono appesi al tetto, alla stessa distanza dall'oggetto e vogliamo trovare  $T_1$  e  $T_2$  tensioni dei fili, avendo i seguenti dati:

$$m = 100g$$

$$\theta = 60^\circ$$



Notiamo che l'oggetto resta fermo, quindi oltre a  $\vec{p}$  (forza peso), su esso agiscono altre forze la cui somma è uguale e opposta a  $\vec{p}$ . Abbiamo quindi che la risultante delle forze  $\vec{R} = \vec{0}$ .

Ora possiamo notare che  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$  e abbiamo le seguenti forze:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -mg\hat{y} \\ \vec{T}_1 &= T_x\hat{x} + T_y\hat{x} = T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y} \\ \vec{T}_2 &= -T_x\hat{x} + T_y\hat{y} = -T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y}\end{aligned}$$

Ora ci ricordiamo che  $\vec{R} = \vec{0}$  quindi:

$$\begin{aligned}\vec{R} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 = T\sin\theta - T\sin\theta \\ R_y = 0 = -mg + T\cos\theta + T\cos\theta = -mg + 2T\cos\theta \end{cases}\end{aligned}$$

La prima equazione del sistema vale zero, ora dalla seconda ricaviamo  $T$ :

$$mg = 2T\cos\theta \Rightarrow T = \frac{mg}{2T\cos\theta} = \frac{0.1kg \cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0.98N$$

## 4.4 Forze fondamentali

Le forze fondamentali sono le seguenti (scritte in ordine di intensità, dalla più debole alla più intensa):

- **Forza gravitazionale:** descrive l'interazione tra le masse gravitazionali. È una forza onnipresente, non esiste quindi nessuna componente di materia che ha massa, che non la risente;
- **Forza debole:** è la forza responsabile dell'interazione per cui i nuclei cambiano di natura (e.g. decadimento dei nuclei);
- **Forza elettromagnetica:** deriva dall'unificazione di forza elettrica e forza magnetica. È la forza responsabile della trazione della ripulsione di cariche ed è alla base delle forze che aggregano la materia;
- **Forza forte/nucleare:** è la forza responsabile della stabilità dei nuclei. Inizialmente si è definita come **forza nucleare**, ovvero che descrive un'interazione nucleare, tra protoni e neutroni, tra neutroni e neutroni e tra protoni e protoni. Poi è stato scoperto che i protoni e i neutroni non sono particelle fondamentali ma sono fatti di quark, e l'interazione è sentita dai quark, quindi è stata definita **forza forte**.

La forza elettromagnetica e la forza debole unificate formano la **forza elettrodebole**. Osserviamo che il quadro precedente, ovvero l'ordine di intensità, è **attuale**, era diverso nel passato e lo sarà anche nel futuro.

Quando due corpi/sistemi fisici interagiscono tra loro per una delle forze fondamentali, lo fanno perché hanno una sensibilità a quel tipo di forza, che è detta **carica** ed è rappresentata dalla lettera  $q$ . Per la forza gravitazionale per esempio, un corpo/sistema fisico subisce una trazione gravitazionale se ha una **massa** (**carica gravitazionale**,  $q_G$ ), ovvero la misura dell'inclinazione del corpo ad interagire con questa gravitazione. Per la forza elettromagnetica è uguale, se due oggetti sono neutri, non c'è trazione né repulsione. E la stessa cosa vale per forza debole e forza forte.

Quella che chiamiamo carica in senso comune, in realtà è la **carica elettrica** ( $q_E$ ).

## 4.5 Forze

### 4.5.1 Forza peso

La **forza peso** è descritta come segue, dato  $\vec{g} = -g\hat{z}$ :

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g}$$

Ora applico la seconda legge della dinamica [pag.19] e ottengo:

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g} = -m_G \cdot \vec{g}$$

dove  $m_G$  è la **massa gravitazionale**.

Ora calcolo le forze esterne ( $\vec{F}_{EXT}$ ):

$$\vec{F}_{EXT} = m_i \cdot \vec{a}$$

dove  $m_i$  è la **massa inerziale**, e posso assumere che  $\vec{a} = \vec{g}$ , e quindi di conseguenza,  $m_i = m_G$ .

Osserviamo che  $m_i$  e  $m_G$  sono uguali dal punto di vista quantitativo, ma non dal punto di vista concettuale. Infatti il primo è la capacità del corpo di opporsi al movimento, mentre il secondo è la carica dell'interazione gravitazionale che il corpo ha.

**4.5.1.1 Esempio sensazione del peso** Supponiamo di avere un'ascensore che ha 100 piani. La sensazione che si ha è di essere più "pesanti" quando l'ascensore parte per salire e più "leggeri" quando si ferma in alto.

Ora studiamo in particolare alcuni casi interessanti per vedere le differenze che ci sono:

- **CASO INTERMEDI** (e.g. da piano 25 a piano 75):

Supponiamo che l'ascensore sia ben isolata dall'ambiente, quindi che non ci siano vibrazioni, rumori, indicatore del piano, ecc., allora non si ha la percezione se ci si sta muovendo o se si è fermi. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= cost \\ \vec{a} &= \vec{0} \\ \vec{R} &= \vec{0} \\ |\vec{F}_p| &= |\vec{N}| = N_0\end{aligned}$$

- **CASO PARTENZA IN SALITA:**

Se siamo fermi in un piano inferiore al piano 100 e premiamo un piano più alto di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di più. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} = a\hat{z}$$

$$\vec{g} = -g\hat{z}$$

$$\vec{R} \neq \vec{0}$$

$$\vec{F}_p + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} \Rightarrow -mg + N = ma \Rightarrow N = ma + mg = N_0 + ma$$

con  $ma > 0$ .

- **CASO PARTENZA IN DISCESA:**

Se siamo fermi in un piano superiore al piano 0 e premiamo un piano più basso di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di meno. Questo caso è uguale a quello della **partenza in salita** solo che c'è una decelerazione. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} < 0$$

$$\vec{F}_p + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} \Rightarrow -mg + N = ma \Rightarrow N = ma + mg = N_0 + ma$$

con  $ma < 0$ .

- **CASO PARTICOLARE:**

Nel caso in cui si tagli in cavo dell'ascensore, sarà in caduta libera. Non si percepisce nessun effetto di reazione vincolare da parte del suolo/pavimento dell'ascensore. In caduta libera non si percepisce il peso. In questo caso abbiamo:

$$\vec{a} < 0$$

$$|\vec{a}| = |\vec{g}|$$

$$N = N_0 + ma = mg - mg = 0$$

#### 4.5.2 Forza gravitazionale

la **forza gravitazionale** ci dice che c'è un'attrazione con una certa costante di proporzionalità  $G$ , e l'intensità dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due masse e direttamente proporzionale al prodotto delle due masse, ovvero come descritto nella seguente formula:

$$\vec{F}_G = \frac{m_g M}{r^2} \hat{r}$$

Assumendo ora che  $M = M_E$  e  $r = r_E$ , ovvero consideriamo massa e raggio della Terra, allora  $\vec{F}_G$  è una costante uguale a  $\vec{g}$ .

#### 4.5.3 Forza elastica

Supponiamo di avere una molla vincolata ad un supporto non movibile e fermo e all'altra estremità della molla attaccata una massa  $m$ . Assumiamo che non ci siano attriti.

Quando ci allontaniamo dalla **lunghezza di riposo**,  $l_0$ , della molla, quest'ultima si allunga o accorcia tramite una **sollecitazione esterna**.

Supponendo ora di avere una forza  $\vec{F}_{ext}$  che agisce sulla massa, per far sì che la massa rimanga ferma, vorrà dire che sulla massa agisce un'altra forza uguale e opposta esercitata dalla molla chiamata **forza elastica**  $\vec{F}_{el}$ .

Osserviamo che se la molla si allunga, allora  $\vec{F}_{ext}$  e  $\vec{F}_{el}$  avranno un verso, se invece la molla si accorcia, avranno verso opposto.

Osserviamo che la forza elastica è sempre opposta a  $\Delta\vec{l} = \vec{l} - \vec{l}_0$ , quindi se il verso di  $\Delta\vec{l}$  è positivo, allora il verso di  $\vec{F}_{el}$  è negativo, e viceversa.

La  $\vec{F}_{el}$  e  $\Delta\vec{l}$  sono proporzionali, infatti la formula della  $\vec{F}_{el}$  è la seguente:

$$\vec{F}_{el} = -K(\vec{l} - \vec{l}_0) = -K\Delta\vec{l}$$

Dove  $K$  è detta **costante elastica** e la sua unità di misura è quindi  $\frac{N}{m}$  (Newton/metro).

Osservando la formula precedente si può facilmente notare che la costante elastica è indipendente dalla massa del corpo, infatti indica solo la durezza della molla.

Le **forze di richiamo**, non solo la forza elastica, sono proporzionali allo spostamento, ovvero quando il corpo si allontana dal suo equilibrio viene richiamato verso di esso tramite una forza di richiamo che è sempre direttamente proporzionale allo spostamento, cioè a quanto il corpo si allontana dall'equilibrio.

Ora consideriamo la massa  $m$  e abbiamo:

$$F = -K \cdot x$$

ovvero la forza è inversamente proporzionale allo spostamento.

Ora considerando la seconda legge della dinamica [pag.19], sostituendo la definizione di forza e otteniamo:

$$-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ora definiamo  $\omega^2 = \frac{K}{m}$  e otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

da cui ci ricaviamo  $x(t)$ ,  $v(t)$  e  $a(t)$  come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Per dimostrare come abbiamo ricavato  $x(t)$ , osserviamo la sua derivata seconda, ovvero  $a(t)$ , e notiamo che togliendo  $-\omega^2$  abbiamo esattamente  $x(t)$  quindi sostituendo quella con  $x$ , otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Ovvero l'ipotesi iniziale.

Osserviamo ora quindi che se applico una forza esterna sulla molla e poi la lascio andare, essa si muove in moto armonico intorno al punto di riposo. Questo moto dato che compare  $\sin$  nella formula sarà periodico, e il periodo è il seguente:

$$\begin{aligned} \omega t + \varphi &= \omega(t + T) + \varphi + 2k\pi \Rightarrow \omega t = \omega t + \omega T + 2k\pi \\ \Rightarrow \omega T &= 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che se fisso i valori di  $x(t)$  e  $v(t)$ , riesco a ricavare  $\varphi$  e  $A$ . Quindi se per esempio fisso:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_M \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove  $v_M$  è la velocità massima, mi ricavo:

$$\begin{aligned} A\omega \cos(\varphi) &= v_M \\ A \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

e da qui mi ricavo:

$$\begin{aligned} A\omega &= v_M \Rightarrow A = \frac{v_M}{\omega} \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

e quindi ottengo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_M}{\omega} \sin(\omega t) \\ v(t) &= v_M \cos(\omega t) \end{aligned}$$

#### 4.5.4 Forza di attrito (radente)