



Fisica

UNITN - Lazzerini Thomas, Cappelletti Samuele

Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

Indice

1 Formulario	6
1.1 Unità di misura	6
2 Introduzione	6
2.1 Il metodo sperimentale	6
3 Cinetica dei punti	6
3.1 Sistema di riferimento	6
3.2 Diagramma dello spazio	7
3.3 Caso semplice	7
3.4 Moto rettilineo uniforme	8
3.5 Velocità	8
3.5.1 Velocità istantanea	9
3.5.2 Accelerazione	9
3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accellerato	9
3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule	10
3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme)	10
3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accellerato)	10
3.6 Moto armonico	12
3.6.1 Esempio di moto armonico	13
3.7 I moti piani	14
3.7.1 I vettori	14
3.7.2 Sistema di riferimento	14
3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione	16
3.7.4 Esempio	16
3.8 Il moto parabolico	18
3.8.1 Sistema di riferimento	18
3.8.2 Rappresentare spazio, gittata γ , altezza massima h_{max} e velocità	19
3.8.2.1 Riassunto	20
3.9 Moto circolare uniforme	20
4 Dinamica	22
4.1 Leggi della dinamica	22
4.2 Forze impulsive	23
4.2.1 Esempio forze impulsive	23
4.2.2 Esercizio su forze impulsive	24
4.3 Esercizi sulla dinamica	24
4.4 Forze fondamentali	25
4.5 Forze	26
4.5.1 Forza peso	26
4.5.1.1 Esempio sensazione del peso	26
4.5.2 Forza gravitazionale	27
4.5.3 Forza elastica	28
4.5.4 Forza di attrito (radente)	30
4.5.4.1 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito statico	31
4.6 Piano inclinato	31
4.6.1 Sistema di riferimento	31

4.6.2	Esempio	32
4.6.2.1	Versione senza attrito	33
4.6.2.2	Versione con attrito	34
4.6.3	Esempio di calcolo del coefficiente di attrito dinamico	35
4.7	Pendolo semplice	35
4.7.1	Sistema di riferimento sul peso	36
4.7.2	Sistema di riferimento nella posizione di equilibrio	36
4.7.2.1	Calcolare spazio, velocità e accelerazione	37
4.7.2.2	Le piccole oscillazioni	38
4.8	Esercizio sulla dinamica	39
4.8.1	Studio della dinamica del problema	41
4.8.2	Allungamento massimo	43
4.8.3	Posizione di velocità massima	43
4.8.4	Velocità massima	43
4.8.5	Calcoliamo la T	43
4.8.5.1	Il periodo	43
4.8.5.2	La tensione	44
5	Meccanica	44
5.1	Lavoro	44
5.2	Esempi di lavoro	46
5.2.1	Lavoro forza peso	46
5.2.2	Lavoro forza elastica	46
5.2.3	Lavoro forza attrito	47
5.3	Energia cinetica	47
5.3.1	Teorema delle forze vive	47
5.4	Potenza	47
5.5	Forze conservative	48
5.5.1	Energia potenziale	48
5.5.2	Energia meccanica	48
5.5.3	Principio di conservazione dell'energia meccanica	48
5.5.4	Esercizio forze conservative	49
5.6	Forze non conservative e lavoro	50
5.6.1	Esempio lavoro forze non conservative	50
5.6.2	Esempio energie	50
5.7	Gravità universale	51
5.8	Leggi di Keplero	52
5.9	Sistemi di riferimento non inerziali	53
5.9.1	Convertire una rotazione in vettore	53
5.9.2	Prodotto vettoriale	53
5.9.3	Legge di Poisson	54
5.9.4	Cambiare il sistema di riferimento	55
5.9.4.1	Spazio in un sistema non inerziale	56
5.9.4.2	Velocità in un sistema non inerziale (teorema delle velocità relative)	56
5.9.4.3	Accelerazione in un sistema non inerziale (teorema delle accelerazioni relative)	57
5.9.4.4	Riassumendo	58
5.10	Forze apparenti	58
5.10.1	Principio di relatività galileiana	58
5.10.2	Esempio 1 forze apparenti	59

5.10.3 Esempio 2 forze apparenti	59
5.11 Punto materiale	60
5.11.1 Esercizio centro di massa	61
5.11.2 Sistema isolato	61
5.11.3 Principio di conservazione della quantità di moto	61
5.12 Gli urti	61
5.12.1 Conservazione della quantità di moto	62
5.12.1.1 Esempio neutrini (oggetti che "esploscono")	63
5.12.2 Urto (puramente) anelastico	64
5.12.2.1 Energie cinetiche	65
5.12.2.2 Esercizio urto unelastico	65
5.12.3 Urto elastico	67
5.12.3.1 Esempio di esercizio	67
6 Termodinamica	71
6.1 Numero di Avogadro	71
6.2 Sistema termodinamico	71
6.3 Variabili termodinamiche	72
6.4 Equilibrio termodinamico	72
6.5 Trasformazione termodinamica	72
6.6 Temperatura	73
6.6.1 Unità di misura temperatura	73
6.6.2 Punto triplo dell' H_2O	73
6.6.3 Termometro	73
6.6.4 Contatto termico	73
6.6.5 Principio zero della termodinamica	74
6.7 Esperimento di Joule	74
6.8 Calore	75
6.8.1 Esempio di calore	75
6.9 Principio di equivalenza calore-lavoro	76
6.10 I principi della termodinamica	76
6.11 Tipi di trasformazioni termodinamiche	76
6.11.1 Trasformazione ciclica	76
6.11.2 Trasformazione quasi-statica	77
6.11.3 Trasformazione reversibile	77
6.11.3.1 Esempio trasformazione reversibile	77
6.11.3.2 Esempio trasformazione non reversibile	77
6.11.4 Lentezza	78
6.12 Calorimetria	78
6.12.1 Calore specifico	79
6.12.2 Calorimetro	79
6.12.3 Capacità termica	79
6.13 Cambi di fase	80
6.13.1 Calori latenti	81
6.13.1.1 Esempio	81
6.13.1.2 Esempio temperatura di equilibrio	82
6.14 Trasferimento di calore	82
6.14.1 Conduzione	82
6.14.1.1 La costante di conducibilità	83

6.14.2 Convezione	83
6.14.3 Irraggiamento	84
6.14.3.1 Esercizio con costante solare	85
6.14.4 Contenitore adiabatico	85
6.15 Gas ideali	86
6.15.1 Le variabili principali	86
6.15.1.1 Volume	86
6.15.1.2 Pressione	86
6.15.1.3 Temperatura	88
6.15.2 Equazione di stato dei gas ideali (o perfetti)	89
6.15.2.1 Legge isocora di Gay-Lussac	89
6.15.2.2 Legge isobara di Gay-Lussac	89
6.15.2.3 Legge isoterna di Boyle	90
6.15.2.4 Legge di Avogadro	90
6.15.2.5 Mettiamo tutte le leggi insieme	91
6.15.2.6 Esempio	92
6.15.3 Lavoro dei gas	92
6.15.4 Energia interna dei gas	93
6.15.4.1 Esperimento dell'espansione libera del gas	93
6.15.4.2 Teoria cinetica dei gas	94
6.16 Trasformazioni particolari dei gas ideali	98
6.16.1 Trasformazione isocora	99
6.16.2 Trasformazione isobara	99
6.16.2.1 Relazione di Meyer	99
6.16.3 Trasformazione isoterna	99
6.16.4 Trasformazione adiabatica	99
6.17 Trasformazioni cicliche	99
6.18 Ciclo di Carnot	99
6.19 Secondo principio della termodinamica	99
6.19.1 Veloce recap sulle macchine	99
6.19.1.1 Macchine termiche	99
6.19.1.2 Macchine frigorifere	100
6.19.2 Dimostrazione dell'uguaglianza delle 2 principi	101
6.19.2.1 Kelvin => Clausius	101
6.19.2.2 Clausius => Kelvin	102
6.20 Teorema di Carnot	103
6.20.0.1 Corollari0 e osservazioni	106

1 Formulario

1.1 Unità di misura

T	\Rightarrow	10^{12}	G	\Rightarrow	10^9
M	\Rightarrow	10^6	k	\Rightarrow	10^3
m	\Rightarrow	10^{-3}	μ	\Rightarrow	10^{-6}
n	\Rightarrow	10^{-9}	p	\Rightarrow	10^{-12}

2 Introduzione

2.1 Il metodo sperimentale

Distingue discipline sperimentali da discipline non sperimentali. Si compone di diverse fasi:

1. **formulazione ipotesi**: si fa un'**ipotesi descrittiva** (in **linguaggio matematico**) della porzione di mondo che si vuole analizzare, di conseguenza si decide di **non considerare** altre caratteristiche del mondo che non centrano con l'ipotesi che stiamo formulando;
2. **esperimento**: si va a ricreare una situazione dove l'aspetto che vogliamo analizzare è **sicuramente presente e influenzato il meno possibile da fattori esterni**;
3. **esecuzione dell'esperimento**: si verifica l'ipotesi, formulata in modo matematico, confrontando i valori ottenuti con l'esperimento con quelli che si ottengono dalla nostra ipotesi.

In base alla "verifica" dell'ipotesi possiamo fare una differenziazione:

- **teoria**: l'ipotesi **non è ancora verificata**, o è verificata **parzialmente**;
- **legge fisica**: l'ipotesi **è verificata** (in un certo ambito);

3 Cinetica dei punti

Describe il movimento dei corpi.

3.1 Sistema di riferimento

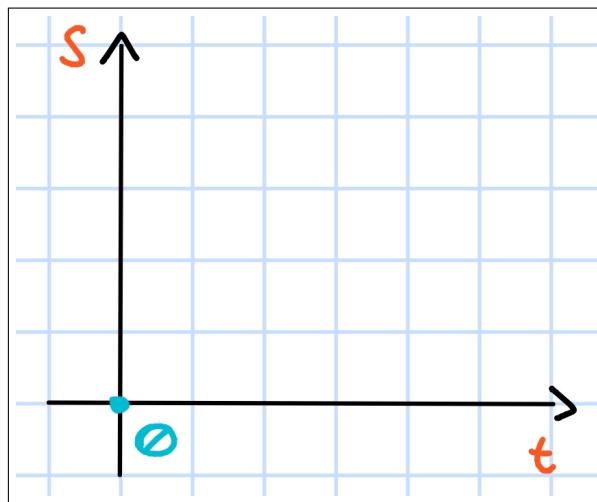
Specifichiamo un sistema di riferimento per il seguente argomento:

- origine** : punto da cui si misurano le distanze
- retta** **e** : usata per misurare gli spostamenti (la freccia indica il verso)
- origine** **e** : distinguono i vari punti
- metro** : unità di misura conv. della lunghezza (**e**).

Una cosa importante da notare è che un numero singolo può rappresentare solo cose "mono-dimensionalì" e che, soprattutto, non tutte le unità di misura possono rappresentare qualsiasi cosa (ad es.: l'età dell'universo non si può rappresentare con i metri).

3.2 Diagramma dello spazio

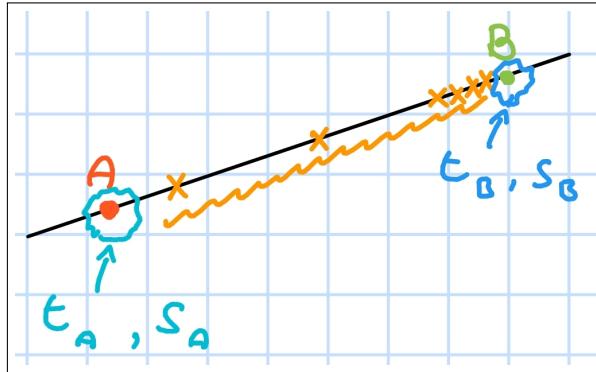
Rappresentiamo lo spostamento nel tempo tramite un "*diagramma dello spazio*":



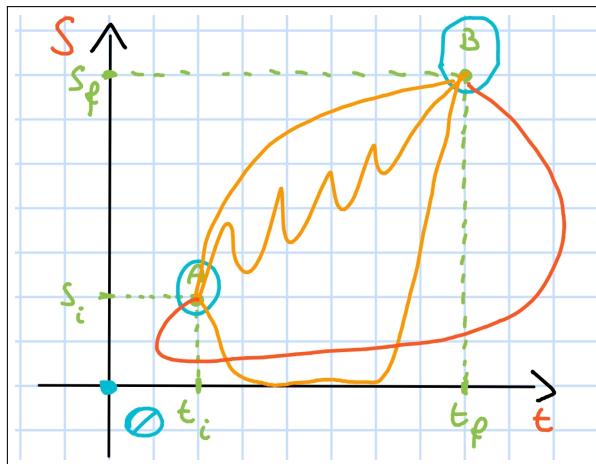
In particolare, in questo diagramma rappresentiamo sull'asse Y lo **spostamento** (s) (rappresentato come **valore uni-dimensionale**) e sull'asse X il **tempo** (t) (anche rappresentato come **valore uni-dimensionale**). **Nota che il diagramma NON RAPPRESENTA una posizione, ma lo spostamento in relazione al tempo.**

3.3 Caso semplice

Vediamo un semplice caso di utilizzo per capire come usare i diagrammi dello spazio:



Possiamo immaginare di avere un oggetto in movimento su una retta tra i punti A e B, come possiamo rappresentare questo movimento nel diagramma? Come prima cosa posizioniamo i "fenomeni" (*def. qualcosa che appare evidente all'osservazione*), ovvero i **punti A e B**, nota che non è detto che questi punti coincidano con dei "punti particolari" (ad esempio l'origine) nel nostro diagramma. In particolare, a questi punti associamo **un valore sull'asse del tempo** (t_i, t_f) ed **un valore sull'asse dello spazio** (s_i, s_f). A questo punto esistono **infiniti possibili percorsi** tra il punto A ed il punto B, ad esempio:



Importante notare che ***non tutti questi percorsi, pur avendo senso matematico, hanno senso fisico!*** Ad esempio, il percorso in rosso "torna indietro nel tempo"!

3.4 Moto rettilineo uniforme

STUB##### (In teoria lo fa dopo, controllare)

3.5 Velocità

Possiamo immaginare la velocità (v) come la "*def. variazione dello spazio rapportato al tempo impiegato per percorrerlo*", in particolare la velocità è data dalla formula:

$$v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vediamo un semplice esempio:

$$s_i = 400m, s_f = 700m, t_i = 7 : 30 = 450min, t_f = 7 : 40 = 460min$$

$$v = \frac{700m - 400m}{460min - 450min} = \frac{300m}{600s} = 0,5m/s$$

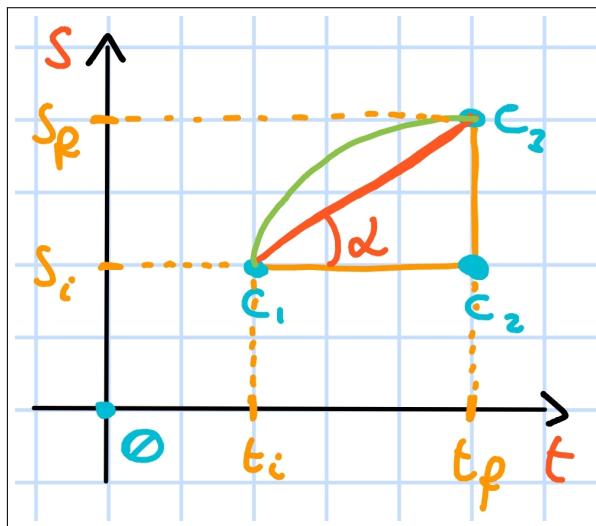
Nota che nella seconda uguaglianza nell'esempio abbiamo **convertito i minuti in secondi**, puoi immaginare che abbiamo posto " $min = (60s)$ ", quindi abbiamo fatto " $10min = 10 * (60s) = 600s$ ".

3.5.1 Velocità istantanea

Quella che abbiamo calcolato prima possiamo vederla come "velocità media" di tutto il percorso, la **velocità istantanea** invece possiamo vederla come la *def. velocità in un punto specifico del percorso*. Immagina quindi di fare la formula:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Nota che quando si usa la lettera " δ " stiamo ad indicare una **piccola** (infinitesima) **variazione**. Ora, se il valore di s viene espresso **in funzione di t** , quindi abbiamo $s(t)$, e la funzione " $s(t)$ " è **derivabile**, allora la **velocità istantanea corrisponde alla derivata prima della funzione $s(t)$** , che a sua volta corrisponde a $\frac{ds}{dt}$.



Supponendo che il **moto del nostro punto** venga identificato dalla curva in verde, il rapporto tra la lunghezza dei 2 cateti C_1C_2 (Δt) e C_2C_3 (Δs) rappresenta la **tangente α** , che in questo caso rappresenta la **velocità media**. Ora, se restringiamo l'intervallo di t in modo che tenda a 0 e calcoliamo il valore della derivata in quel punto otterremo la **velocità istantanea**.

3.5.2 Accelerazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la **velocità in un punto corrisponde al valore della derivata prima** (della funzione che rappresenta il moto del nostro corpo) **in quel punto**, per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che **l'accelerazione corrisponde al rapporto tra la derivata della velocità e la derivata del tempo**, ottenendo quindi la formula $\frac{dv}{dt}$, operativamente dobbiamo fare la **derivata seconda della funzione che rappresenta il moto del nostro punto**.

3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Cominciamo col dire che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ricorda che con dv e dt intendiamo le **derivate**. Da questa ricaviamo dv , ovvero:

$$dv = a * dt \Rightarrow \int_A^B dv = \int_A^B (a * dt) \Rightarrow v_B - v_A = a(t_B - t_A)$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Ottenuta questa formula, possiamo passare a calcolare lo **spazio in funzione del tempo**, ovvero:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{ds}{dt} &\Rightarrow ds = v * dt \Rightarrow \int_A^B ds = \int_A^B v * dt \Rightarrow s_B - s_A = \int_A^B [v_0 + a(t - t_0)] dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_B - s_A = \left[v_0 * t + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \right]_A^B \Rightarrow s_B - s_A = v_0 * t_B + a \frac{(t_B - t_0)^2}{2} - v_0 * t_A + a \frac{(t_A - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Terminiamo dicendo che in questo moto **l'accelerazione è costante**, quindi:

$$\underline{a(t) = a}$$

3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule

Vediamo alcuni esempi:

3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme) Supponiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A (t_0, s_0) ad un punto B (t_1, s_1) tramite un **moto rettilineo uniforme**, abbiamo i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} t_0 = ? & s_0 = 1,5Km & v = 36m/s \\ s_1 = 11,5Km & t_1 = 0,3h & \end{array}$$

L'obiettivo è trovare i dati mancanti (ovvero t_0). Noi sappiamo che la velocità "v" corrisponde a:

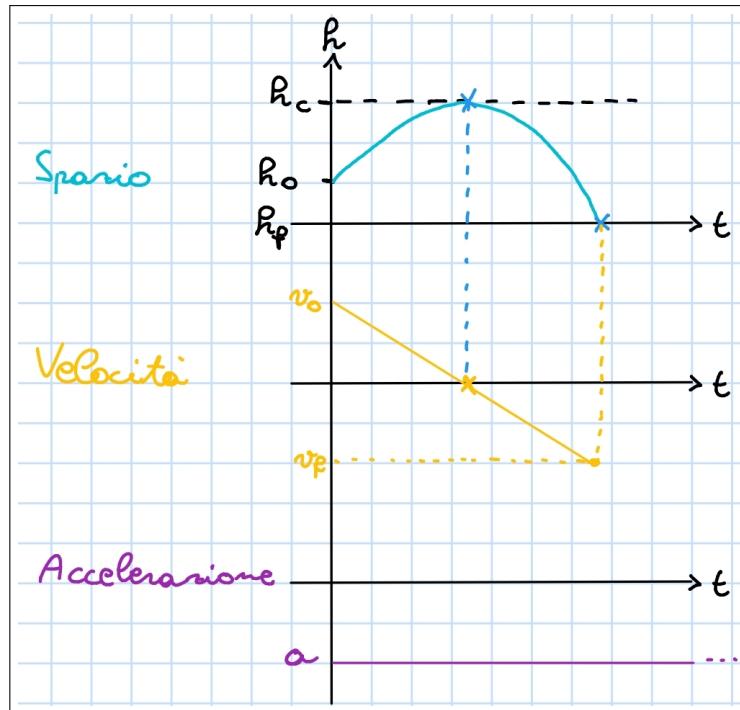
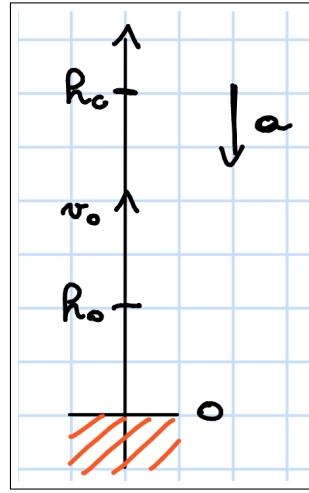
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow \dots \Rightarrow t_0 = t_1 - \frac{s_1 - s_0}{v}$$

Sostituendo i valori forniti, otteniamo che $t_0 \approx 802,22s$

3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accelerato) Supponiamo di avere un oggetto all'altezza h_0 e di lanciarlo verso l'alto con una velocità v_0 nell'istante t_0 con un'accelerazione a . Dobbiamo trovare l'altezza (h_c) ed il tempo (t_c) di culmine e, supponendo che alla fine l'oggetto raggiunga l'altezza finale " h_f ", trovare il tempo finale " t_f ". Supponiamo di avere i seguenti dati:

$$\begin{array}{llll} h_0 = 100m & t_0 = 0s & v_0 = 5m/s & a = -9,8m/s^2 \\ t_c = ? & h_c = ? & t_f = ? & h_f = 0m \end{array}$$

Includiamo delle immagini complementari:



Procediamo per punti:

1. Vogliamo trovare il tempo di culmine (t_c), quindi poniamo $v(t) = 0$ e troviamo la t che rende vera l'equazione:

$$v(t) = 0 \Rightarrow v_0 + a(t - 0) \Rightarrow t_c = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5m/s}{-9,8m/s^2} \approx 0,51s$$

2. Vogliamo calcolare l'altezza di culmine (h_c), per farlo usiamo la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} h_c &= s(t_c) = s_0 + v_0(t_c - 0) + \frac{1}{2}a(t_c - 0)^2 = \\ &= 100m + 5m/s * (0,51s) + 1/2(-9,8m/s^2) * (0,51s)^2 \approx 101,28m \end{aligned}$$

3. Vogliamo calcolare il tempo "finale" (t_f), per farlo usiamo sempre la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= h_f = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_0 + v_0(t_f - 0) + \frac{1}{2}a(t_f - 0)^2 = 0 \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo una funzione di secondo grado con $x = t_f$, quindi usiamo la formula solita:

$$t_f = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 - 2 \frac{s_0}{a}}$$

$$t_f = 0,51s + \sqrt{(0,51s)^2 - 2 * \frac{100m}{-9,8m/s^2}} \approx 5,06s$$

Nota che possiamo subito sostituire il " \pm " con un "+" dato che la radice sarà sicuramente più grande di quel 0,51 che la precede, quindi non avrebbe fisicamente senso fare altrimenti (tempo negativo).

3.6 Moto armonico

Nel moto armonico abbiamo un'**accelerazione oscillante**, nella forma $a_0 * \sin(t)$. Il problema è che il \sin (come tutte le funzioni matematiche) è adimensionale, quindi dobbiamo aggiungere delle componenti aggiuntive per **rendere il tempo "t" adimensionale**, in particolare abbiamo che:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t + \varphi)$$

dove " ω " rappresenta la **pulsazione** e " φ " la **fase**. Nota che **abbiamo già l'accelerazione**, ovvero $a_0 * \sin(t)$, quindi per calcolare velocità e spazio procediamo per **integrazioni successive**, con gli estremi di integrazione che corrispondono al **punto di inizio e di fine** della nostra misurazione.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = v_0 + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \omega a_0 \sin(\omega t + \varphi) d\tau = \\ &= v_0 + \frac{1}{\omega} \left[-\cos(\omega t + \varphi) \right]_{t_0}^t = \textcolor{red}{v_0} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Nota che il **testo in rosso sopra**, in quanto costante, viene raccolto in V , passiamo ora a calcolare lo spazio (che corrisponde all'integrazione della velocità):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \\ &= \textcolor{red}{s_0} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

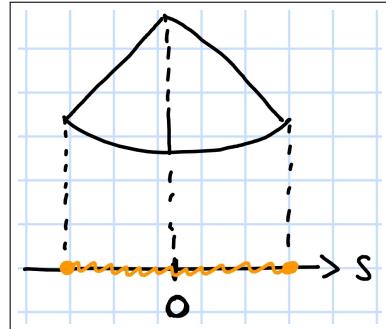
In definitiva, le formule che interessano a noi sono:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 * \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \\ s(t) &= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ricorda che **le parti in rosso** sono costanti (di solito per noi varranno 0), mentre l'accelerazione ci è stata fornita all'intizio, quindi teniamo quella. Vediamo un "esempio":

3.6.1 Esempio di moto armonico

Ipotiziamo di avere una situazione del genere: vogliamo misuare l'andamento dell'ombra di un'altalena (che va solo avanti e indietro) sulla superficie.



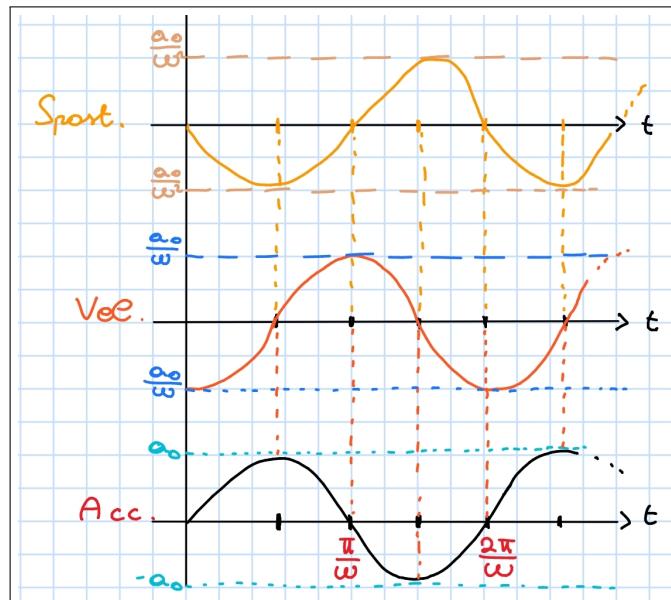
Noi **assumiamo sempre che φ (ovvero la fase) = 0** e che **cominciamo da $t_0 = 0$** , quindi le nostre formule diventano:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 * \sin(\omega t) \\ v(t) &= -\frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ s(t) &= -\frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Prima di passare al grafico dobbiamo calcolare il valore della nostra variabile t , ora noi sappiamo che ωt , dato che $\varphi = 0$, deve rappresentare una rotazione completa (2π):

$$\omega t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

Nota che il nostro T rappresenta il **periodo**. Con queste funzioni/variabili, possiamo passare al calcolo dei grafici temporali:



3.7 I moti piani

Prima di partire con i moti veri e propri, introduciamo velocemente i **vettori**.

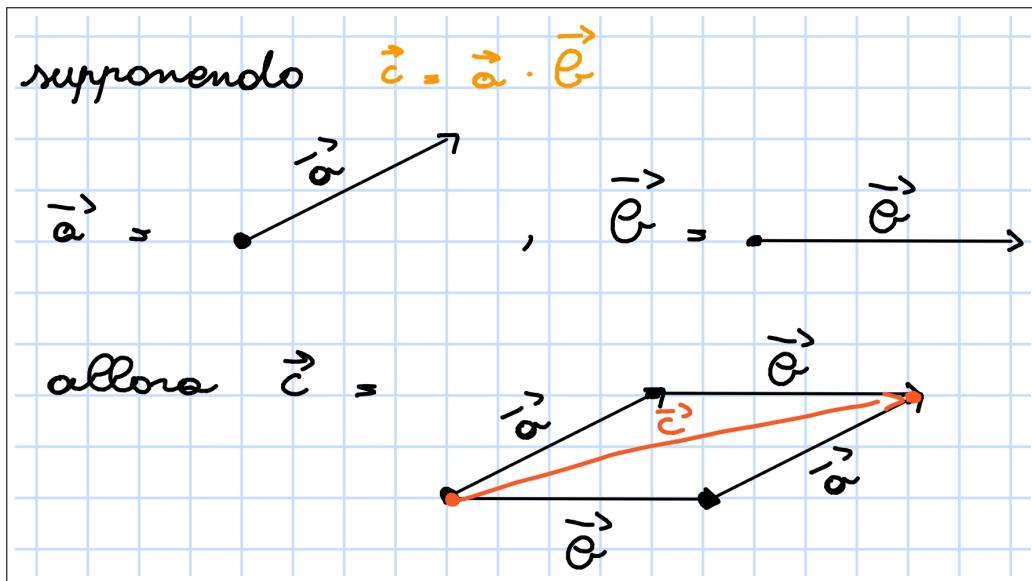
3.7.1 I vettori

Passiamo ora a considerare i **moti con 2 dimensioni**, per questo motivo dobbiamo introdurre i **vettori** composti da:

- punto di inizio;
- verso;
- modulo (la lunghezza del vettore);
- direzione (la retta su cui giace il vettore);

I vettori, si comportano in modi leggermente diversi rispetto ai numeri "normali", in particolare a noi interessa:

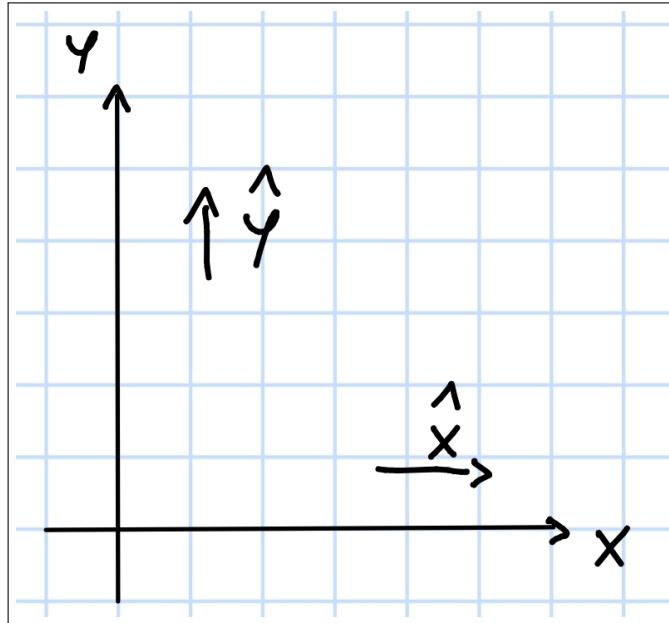
- somma: si fa con la **regola del parallelogramma**, ovvero:



- prodotto per scalare: quando si moltiplica un vettore per uno scalare, semplicemente si va a **moltiplicare il modulo del vettore**, in particolare " $\vec{a} = b * \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = b * |\vec{c}|$ "

3.7.2 Sistema di riferimento

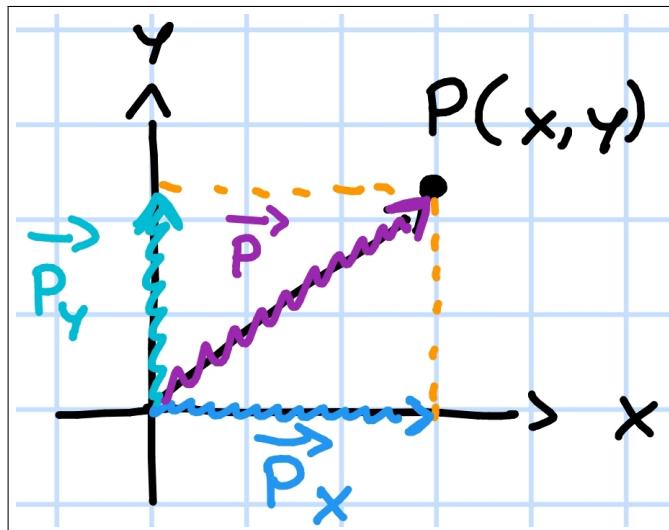
Introduciamo ora il sistema di riferimento per questo moto:



Da questo punto in poi, rappresentiamo il moto sul **piano cartesiano**: rappresenteremo quindi il **movimento "fisico"** del moto in quanto **non più unidimensionale!** Per quanto riguarda gli assi, si usano quelli che vengono definiti **versori** che matematicamente si rappresentano come $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$. In questo modo otteniamo qualcosa di **adimensionale** e che ha **modulo 1 per definizione**.

Quando vogliamo rappresentare un punto, possiamo farlo **attraverso un vettore**, che a sua volta si può rappresentare come la **somma di 2 vettori "unidimensionali"** (uno per ogni asse) che a loro volta si possono rappresentare come **spostamenti sui vari assi moltiplicati per il versore associato**:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}$$



Allo stesso modo possiamo rappresentare velocità ed accelerazione!

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x * \hat{x} + a_y * \hat{y}$$

Ora, possiamo anche rappresentare un vettore sottoforma di "matrice", in questo modo:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Ovvero lo spostamento, ad esempio, è composto dalla somma dello spostamento sull'asse x S_x e di quello sull'asse y S_y

3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione

Partiamo con la velocità: sappiamo che la velocità per il moto unidimensionale è data dalla **derivata dello spostamento**, per quanto riguarda il moto piano non cambia molto: dobbiamo soltanto **derivare una somma di 2 componenti!** Ovvero:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d[S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}]}{dt} = \frac{dS_x}{dt} * \hat{x} + S_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{dS_y}{dt} * \hat{y} + S_y * \frac{d\hat{y}}{dt}$$

Quelle 2 parti evidenziate in **rosso** sono speciali: rappresentano il possibile movimento degli assi. Per il momento, le considereremo **sempre nulle** in quanto i **nostri assi non si muoveranno!** Quindi, in soldoni, otteremmo che la nostra velocità equivale a:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS_x/dt \\ dS_y/dt \end{bmatrix}$$

Nota però che questo ragionamento possiamo farlo **solo se gli assi restano fermi**, altrimenti dovremmo fare delle considerazioni in più. Allo stesso modo, possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione, ottenendo anche qui:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \end{bmatrix}$$

3.7.4 Esempio

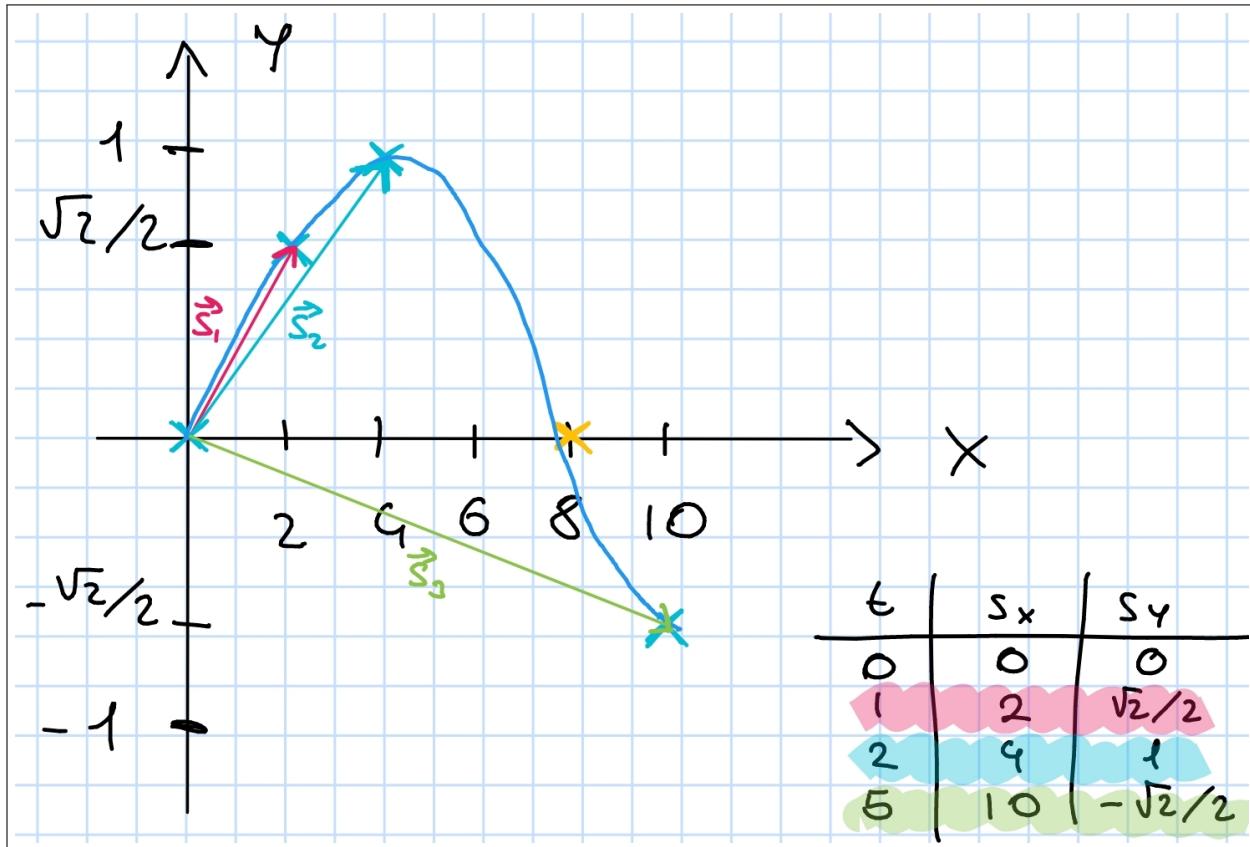
Vediamo un esempio, dobbiamo calcolare velocità e accelerazione sapendo che:

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m/s \\ 1m * \sin(\pi/4 Hz) \end{bmatrix}$$

Nota che $Hz = s^{-1}$, la prima cosa da fare ora è **rappresentare qualche punto**, possiamo farlo in una tabella:

t	S_x	S_y
0	0	0
1	2	$\sqrt{2}/2$
2	4	1
5	10	$-\sqrt{2}/2$

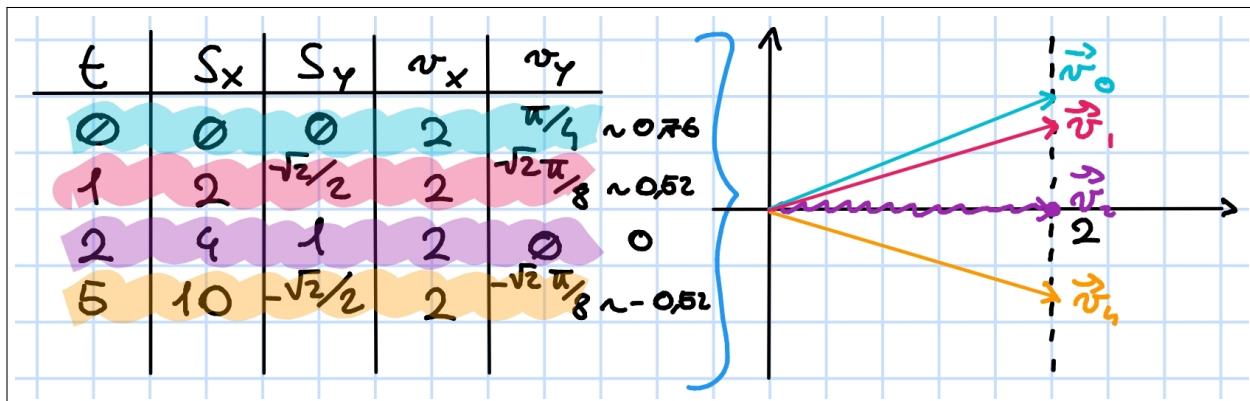
Rappresentiamo ora questi punti sul piano cartesiano (aggiungendo anche i vettori che rappresentano i punti), ricorda inoltre che il piano ora **rappresenta la traiettoria e NON più lo spazio/tempo**:



Ora calcoliamo la velocità, per farlo ci basta derivare per t:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4} \cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Rifacciamo la tabella e rappresentiamo il tutto sul grafico:



Terminiamo con l'accelerazione, che corrisponde semplicemente alla **derivata della velocità**, otterremo quindi:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Ricapitolando i risultati ottenuti, abbiamo che:

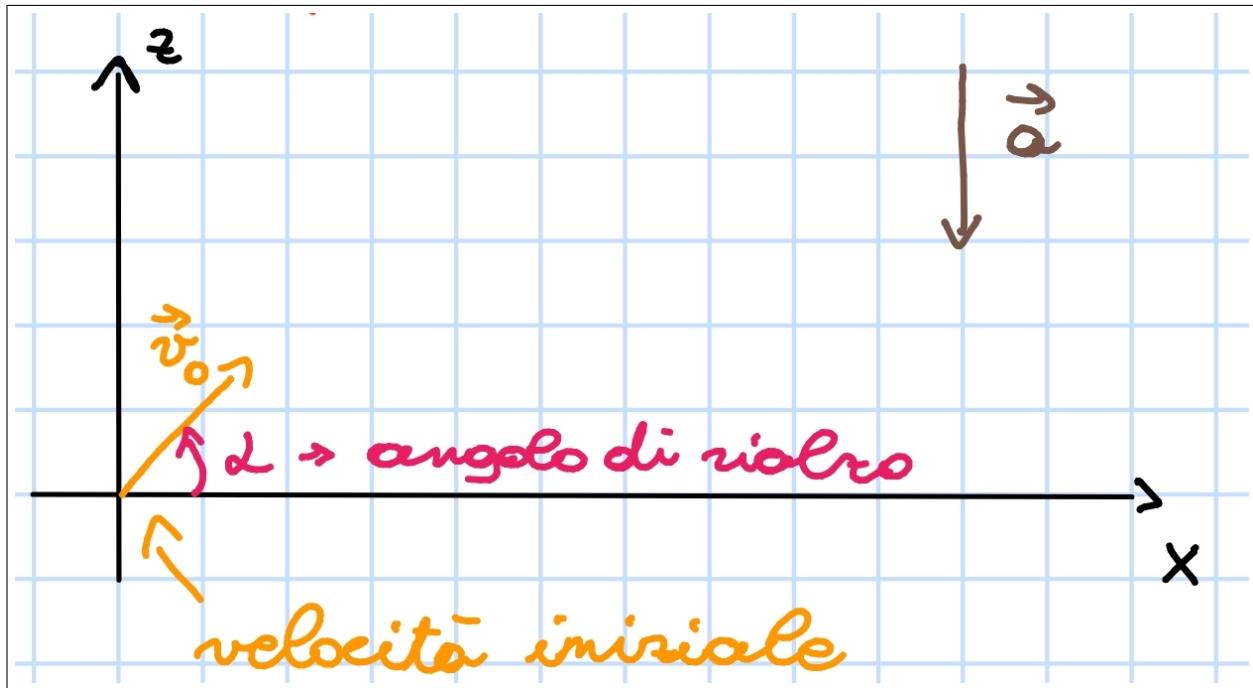
$$\begin{aligned}\vec{S}(t) &= \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4} \cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.8 Il moto parabolico

Iniziamo introducendo il sistema di riferimento che andremo ad utilizzare.

3.8.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito un grafico:



Avremmo quindi un oggetto che parte da **un punto iniziale**, che per convenzione supponiamo **(0, 0)**, con una **certa velocità iniziale** \vec{v}_0 ed un certo **angolo di rialzo** α . Inoltre sarà presente una **certa accelerazione "a" = -g** che punterà verso il basso (suppongo che $-g$ indichi l'accelerazione gravitazionale terrestre). In questa sezione assumiam questa convenzione:

$$|\vec{v}_0| = v_0$$

Quindi possiamo riscrivere il vettore della velocità in questo modo:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha) \\ v_0 * \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

3.8.2 Rappresentare spazio, gittata γ , altezza massima h_{max} e velocità

Ora, come facciamo a rappresentare i grafici di spazio e velocità? Nota che l'accelerazione non serve, in quanto ci viene fornita in questo caso. Per quanto riguarda lo spazio, possiamo "spezzare" il problema in 2:

- spazio percorso in "larghezza" (x): lo trattiamo come un semplice problema di **moto rettilineo uniforme**, infatti l'accelerazione va solo verso il basso, non avanti o indietro;
- spazio percorso in "altezza" (z): in questo caso lo consideriamo un problema di **moto uniformemente accelerato**, infatti abbiamo un'accelerazione costante che preme verso il basso.

Quindi otterremo le formule:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0 \cos(\alpha)t = \underline{v_0 * \cos(\alpha)t}$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z}{2}t^2 = v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

In definitiva, abbiamo che lo spazio corrisponde al vettore:

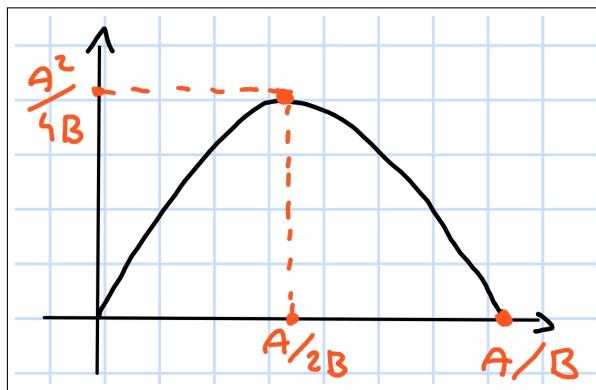
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha)t \\ v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Ora proviamo a mettere insieme le 2 formule in modo da ottenere una funzione da poter rappresentare facilmente sul grafico:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$z = v_{0z} * t - \frac{g}{2} * t^2 \Rightarrow \frac{v_{0z}}{v_{0x}} * x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2} \right) * x^2 \Rightarrow Ax - Bx^2$$

Abbiamo ottenuto l'**equazione di una parabola!** In particolare, avremmo queste proporzioni:



Ora che abbiamo un grafico disegnato, ci risulta particolarmente semplice trovare altre 2 componenti importanti:

- **gittata γ** : ovvero la massima distanza percorsa in orizzontale. Possiamo ottenerla tramite la formula:

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{v_0}{v_{0x}} * \frac{2v_{0x}^2}{g} = \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}}{g} = \frac{v_0^2}{g} * 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) = \underline{\frac{v_0^2}{g} * \sin(2\alpha)}$$

- **altezza massima** h_{max} : ovvero l'altezza di culmine della nostra parabola. Guardando il grafico possiamo vedere che corrisponde a:

$$h_{max} = \frac{A^2}{4B} = \frac{A}{4} * \frac{A}{B} = \frac{v_0 z}{4v_{0x}} * \frac{2 * v_{0z} * v_{0x}^2}{v_{0x} g} = \frac{v_0 z}{4} * \frac{2 * v_{0z}}{g} = \frac{2v_{0z}^2}{4g} = \frac{1}{2} * \frac{v_{0z}^2}{g} = \frac{v_0^2 * \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Terminiamo velocemente con la velocità che, ricordiamo, è la **derivata dello spazio percorso**:

$$v_x(t) = \frac{d(v_0 * \cos(\alpha)t)}{dt} = v_0 \cos(\alpha) = v_{0x}$$

$$v_z(t) = \frac{dS_z}{dt} = v_0 * \sin(\alpha) - gt = v_{0z} - gt$$

3.8.2.1 Riassunto

Ricapitolando tutte le formule che abbiamo visto:

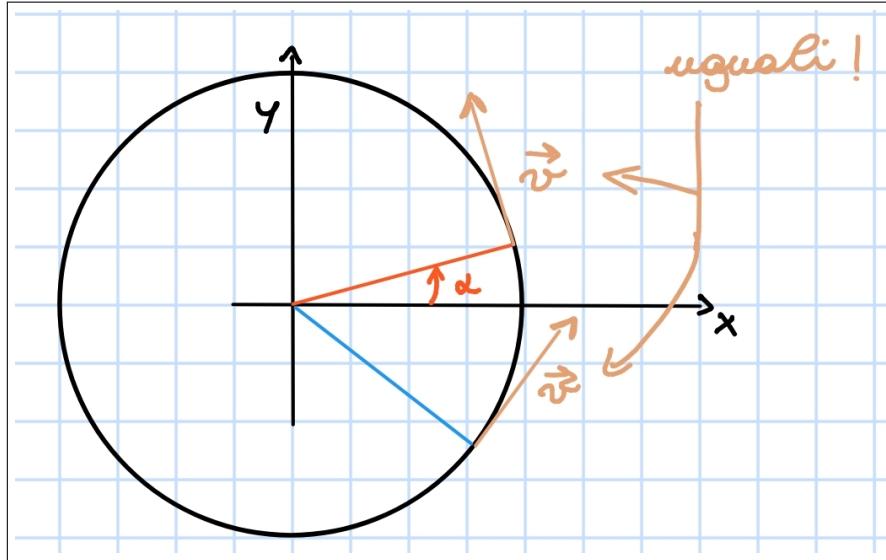
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} v_0 * \cos(\alpha)t \\ v_0 * \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{v_0^2}{g} * \sin(2\alpha)$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 * \sin^2(\alpha)}{2g}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - gt \end{bmatrix}$$

3.9 Moto circolare uniforme



Nel moto circolare uniforme la velocità è **costante**, infatti in tutti i punti la velocità **non** cambia lunghezza, cambia solo la sua direzione. La velocità in un punto, inoltre, è **sempre tangente** alla traiettoria in quel punto. Si hanno le seguenti formule:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$$

$$r(t) = R$$

dove R è il raggio della circonferenza e ω è la velocità angolare, definita come $\omega = \frac{2\pi}{T}$ con T periodo. La **frequenza** è definita come $f = \frac{1}{T}$ e la **velocità** come:

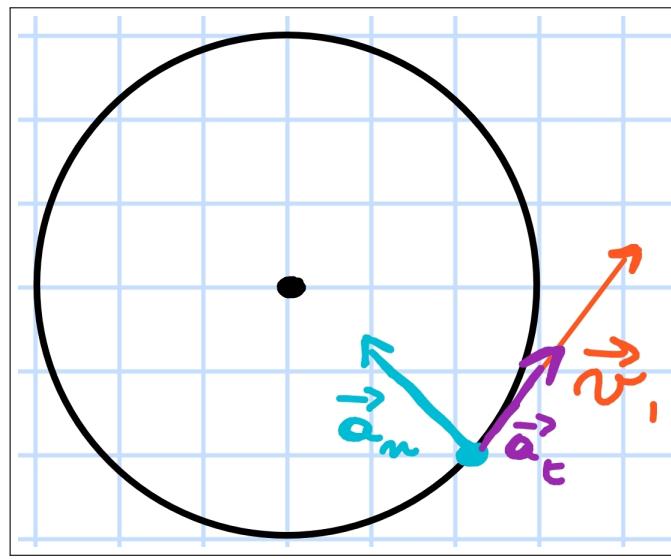
$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

Osservando la formula qui sopra, possiamo notare che a meno che il raggio R non cambi, la velocità sarà costante, nel caso in cui cambia, invece, cambierà anche la velocità. Ora, ponendo l'origine del piano cartesiano come il centro della circonferenza, calcoliamo lo **spazio**, la **velocità** e l'**accelerazione** in funzione del tempo come segue:

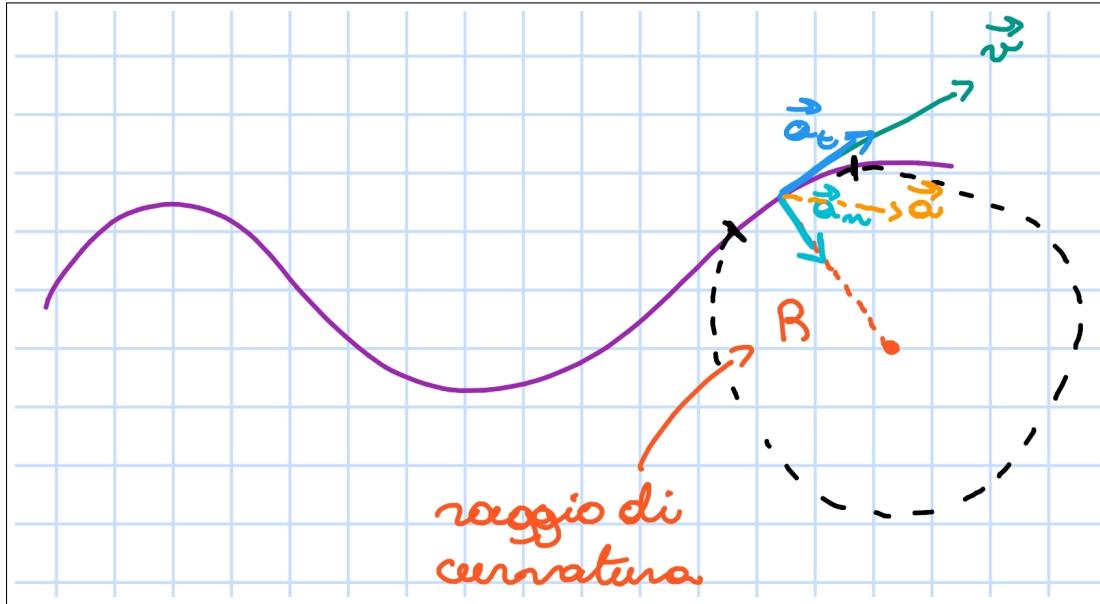
$$\vec{s}(t) = \begin{cases} x(t) = R\cos(\alpha(t)) \\ y(t) = R\sin(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -R \frac{d\alpha}{dt} \sin(\alpha(t)) = -\omega R \sin(\alpha(t)) \\ v_y(t) = R \frac{d\alpha}{dt} \cos(\alpha(t)) = \omega R \cos(\alpha(t)) \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\alpha(t)) \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\alpha(t)) \end{cases}$$



Ora l'accelerazione si divide in due componenti, \vec{a}_t (**accelerazione tangente**) e \vec{a}_n (**accelerazione normale o centripeta**). La prima è parallela alla tangente nel punto e modifica il **modulo della velocità**, mentre la seconda è ortogonale alla tangente nel punto e modifica la **traiettoria(direzione)**. Dato un qualsiasi **moto piano**, se prendo una piccola parte di questo, allora può essere immaginato come un arco di circonferenza. Più il tratto è **grande** e più l'arco di circonferenza sembrerà **rettilineo**, più il tratto è **piccolo** e più l'arco di circonferenza sembrerà **curvo** e avrà corrispondentemente una circonferenza **grande** e una **piccola**.



In questo caso avrò quindi che le due componenti dell'accelerazione varranno:

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$$

$$|\vec{a}_t| = \vec{a} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{a} \hat{v}$$

dove \hat{v} è il **versore velocità**.

4 Dinamica

4.1 Leggi della dinamica

La **dinamica** si occupa dello studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause(**forze**), ovvero delle circostanze che lo determinano e lo modificano nel **tempo** e nello **spazio** del suo sistema di riferimento. Wikipedia Le leggi della dinamica sono 3 e sono le seguenti:

1. **Legge di Inerzia (I legge)**: un corpo rimane nel suo stato di quiete finché non intervengono agenti esterni a modificarne questo stato. Questa legge vale solo in sistemi di riferimento inerziali;
2. **Legge di Newton (II legge)**: Viene definita la **quantità di moto** come $\vec{p} = m\vec{v}$, ovvero massa per velocità. Successivamente viene definita la forza (\vec{F}) come segue:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove m è la **massa inerziale**, ovvero la capacità di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto, questa mette in relazione la velocità alla forza.

Nel caso in cui la massa non varia, allora la forza può essere definita come $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

L'unità di misura della **forza** è il **Newton (N)** definito come $\frac{kg \cdot m}{s^2}$.

3. **Principio di azione e reazione (III legge):** Quando il corpo 1 esercita una forza \vec{F} sul corpo 2, quest'ultimo esercita sul corpo 1 una forza $-\vec{F}$, uguale e opposta.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Osserviamo che la **prima legge** potrebbe sembrare un caso particolare della **seconda legge**, con $\vec{F} = \vec{0}$, ma in realtà non è così, infatti la seconda e la terza legge sono valide solo all'interno di sistemi di riferimento inerziali, che sono definiti dalla prima legge.

4.2 Forze impulsive

L'**impulso** \vec{P} è definito come la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}$ in un Δt piccolo, ovvero:

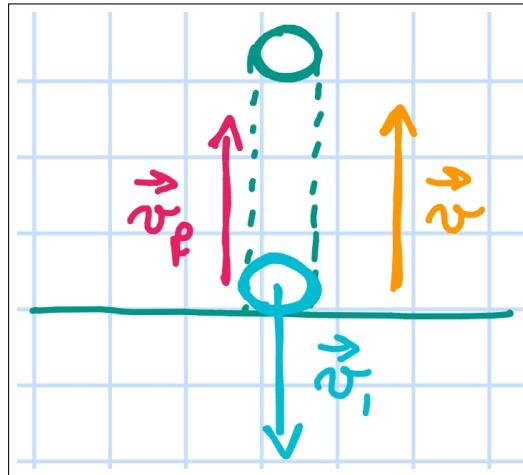
$$\vec{P} = \Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

E la **forza impulsiva** come:

$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

4.2.1 Esempio forze impulsive

Supponiamo di avere un pavimento ed una palla che viene lasciata in aria. Questa palla cadrà verso il pavimento fino a raggiungerlo, rimbalzare su esso e tornare in su (assumiamo che la velocità con cui torna in su sia la stessa con cui cade, quindi non agiscono fattori esterni come attriti, ecc.).



Se ho un vettore velocità \vec{v} , allora ho che:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= m\vec{v}_i = -m\vec{v} \\ \vec{p}_f &= m\vec{v}_f = m\vec{v} \\ \Delta\vec{p} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m\vec{v}\end{aligned}$$

4.2.2 Esercizio su forze impulsive

Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover calcolare \vec{F}_{imp} (forza impulsiva):

$$m = 98g$$

$$v = 10.2 \frac{m}{s}$$

$$\Delta t = 100ms$$

Procediamo ora quindi con calcolare $\Delta\vec{p}$ usando la formula appena calcolata sopra e una volta ottenuto il valore calcoliamo la \vec{F}_{imp} :

$$\Delta\vec{p} = 2m\vec{v} = 2 \cdot 10.2 \frac{m}{s} \cdot 0.098kg = 0.99 \frac{kg \cdot m}{s}$$

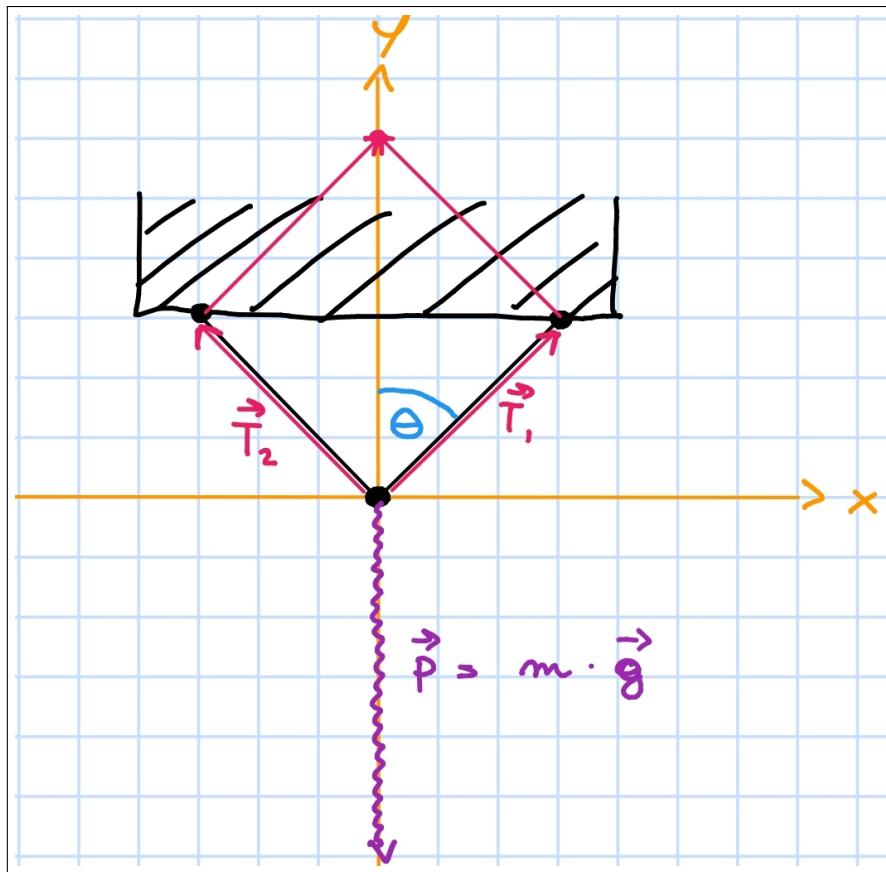
$$\vec{F}_{imp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0.99 \frac{kg \cdot m}{s}}{0.1s} = 9.99 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 9.99N$$

4.3 Esercizi sulla dinamica

Supponiamo di avere un oggetto appeso a due fili, che sono appesi al tetto, alla stessa distanza dall'oggetto e vogliamo trovare T_1 e T_2 tensioni dei fili, avendo i seguenti dati:

$$m = 100g$$

$$\theta = 60^\circ$$



Notiamo che l'oggetto resta fermo, quindi oltre a \vec{p} (forza peso), su esso agiscono altre forze la cui somma è uguale e opposta a \vec{p} . Abbiamo quindi che la **risultante delle forze** $\vec{R} = \vec{0}$.

Ora possiamo notare che $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ e abbiamo le seguenti forze:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -mg\hat{y} \\ \vec{T}_1 &= T_x\hat{x} + T_y\hat{x} = T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y} \\ \vec{T}_2 &= -T_x\hat{x} + T_y\hat{y} = -T\sin\theta\hat{x} + T\cos\theta\hat{y}\end{aligned}$$

Ora ci ricordiamo che $\vec{R} = \vec{0}$ quindi:

$$\begin{aligned}\vec{R} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 = T\sin\theta - T\sin\theta \\ R_y = 0 = -mg + T\cos\theta + T\cos\theta = -mg + 2T\cos\theta \end{cases}\end{aligned}$$

La prima equazione del sistema vale zero, ora dalla seconda ricaviamo T :

$$mg = 2T\cos\theta \Rightarrow T = \frac{mg}{2T\cos\theta} = \frac{0.1kg \cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0.98N$$

4.4 Forze fondamentali

Le forze fondamentali sono le seguenti (scritte in ordine di intensità, dalla più debole alla più intensa):

- **Forza gravitazionale:** descrive l'interazione tra le masse gravitazionali. È una forza onnipresente, non esiste quindi nessuna componente di materia che ha massa, che non la risente;
- **Forza debole:** è la forza responsabile dell'interazione per cui i nuclei cambiano di natura (e.g. decadimento dei nuclei);
- **Forza elettromagnetica:** deriva dall'unificazione di forza elettrica e forza magnetica. È la forza responsabile della trazione della ripulsione di cariche ed è alla base delle forze che aggregano la materia;
- **Forza forte/nucleare:** è la forza responsabile della stabilità dei nuclei. Inizialmente si è definita come **forza nucleare**, ovvero che descrive un'interazione nucleare, tra protoni e neutroni, tra neutroni e neutroni e tra protoni e protoni. Poi è stato scoperto che i protoni e i neutroni non sono particelle fondamentali ma sono fatti di quark, e l'interazione è sentita dai quark, quindi è stata definita **forza forte**.

La forza elettromagnetica e la forza debole unificate formano la **forza elettrodebole**. Osserviamo che il quadro precedente, ovvero l'ordine di intensità, è **attuale**, era diverso nel passato e lo sarà anche nel futuro.

Quando due corpi/sistemi fisici interagiscono tra loro per una delle forze fondamentali, lo fanno perché hanno una sensibilità a quel tipo di forza, che è detta **carica** ed è rappresentata dalla lettera q . Per la forza gravitazionale per esempio, un corpo/sistema fisico subisce una trazione gravitazionale se ha una **massa** (**carica gravitazionale**, q_G), ovvero la misura dell'inclinazione del corpo ad interagire con questa gravitazione. Per la forza elettromagnetica è uguale, se due oggetti sono neutri, non c'è trazione né repulsione. E la stessa cosa vale per forza debole e forza forte.

Quella che chiamiamo carica in senso comune, in realtà è la **carica elettrica** (q_E).

4.5 Forze

4.5.1 Forza peso

La **forza peso** è descritta come segue, dato $\vec{g} = -g\hat{z}$:

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g}$$

Ora applico la seconda legge della dinamica [pag.22] e ottengo:

$$\vec{F}_p = -cost \cdot \vec{g} = -m_G \cdot \vec{g}$$

dove m_G è la **massa gravitazionale**.

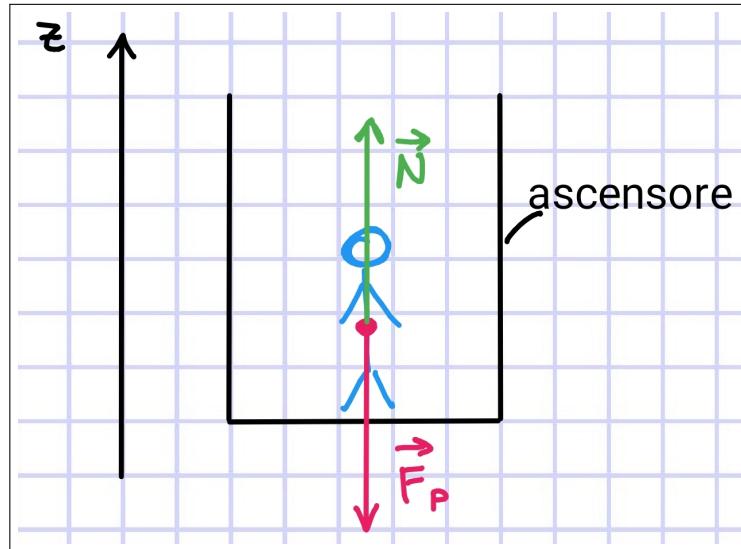
Ora calcolo le forze esterne (\vec{F}_{EXT}):

$$\vec{F}_{EXT} = m_i \cdot \vec{a}$$

dove m_i è la **massa inerziale**, e posso assumere che $\vec{a} = \vec{g}$, e quindi di conseguenza, $m_i = m_G$.

Osserviamo che m_i e m_G sono uguali dal punto di vista quantitativo, ma non dal punto di vista concettuale. Infatti il primo è la capacità del corpo di opporsi al movimento, mentre il secondo è la carica dell'interazione gravitazionale che il corpo ha.

4.5.1.1 Esempio sensazione del peso Supponiamo di avere un'ascensore che ha 100 piani. La sensazione che si ha è di essere più "pesanti" quando l'ascensore parte per salire e più "leggeri" quando si ferma in alto.



Ora studiamo in particolare alcuni casi interessanti per vedere le differenze che ci sono:

- **CASO INTERMEDI** (e.g. da piano 25 a piano 75):

Supponiamo che l'ascensore sia ben isolata dall'ambiente, quindi che non ci siano vibrazioni, rumori, indicatore del piano, ecc., allora non si ha la percezione se ci si sta muovendo o se si è fermi. In questo

caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= cost \\ \vec{a} &= \vec{0} \\ \vec{R} &= \vec{0} \\ |\vec{F}_p| &= |\vec{N}| = N_0\end{aligned}$$

- **CASO PARTENZA IN SALITA:**

Se siamo fermi in un piano inferiore al piano 100 e premiamo un piano più alto di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di più. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a\hat{z} \\ \vec{g} &= -g\hat{z} \\ \vec{R} &\neq \vec{0} \\ \vec{F}_p + \vec{N} &= m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} \Rightarrow -mg + N = ma \Rightarrow N = ma + mg = N_0 + ma\end{aligned}$$

con $ma > 0$.

- **CASO PARTENZA IN DISCESA:**

Se siamo fermi in un piano superiore al piano 0 e premiamo un piano più basso di quello in cui siamo, quando l'ascensore parte si ha la sensazione di pesare di meno. Questo caso è uguale a quello della **partenza in salita** solo che c'è una decelerazione. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &< 0 \\ \vec{F}_p + \vec{N} &= m\vec{a} \Rightarrow -mg\hat{z} + N\hat{z} = ma\hat{z} \Rightarrow -mg + N = ma \Rightarrow N = ma + mg = N_0 + ma\end{aligned}$$

con $ma < 0$.

- **CASO PARTICOLARE:**

Nel caso in cui si tagli in cavo dell'ascensore, sarà in caduta libera. Non si percepisce nessun effetto di reazione vincolare da parte del suolo/pavimento dell'ascensore. In caduta libera non si percepisce il peso. In questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &< 0 \\ |\vec{a}| &= |\vec{g}| \\ N &= N_0 + ma = mg - mg = 0\end{aligned}$$

4.5.2 Forza gravitazionale

la **forza gravitazionale** ci dice che c'è un'attrazione con una certa costante di proporzionalità G , e l'intensità dell'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due masse e direttamente proporzionale al prodotto delle due masse, ovvero come descritto nella seguente formula:

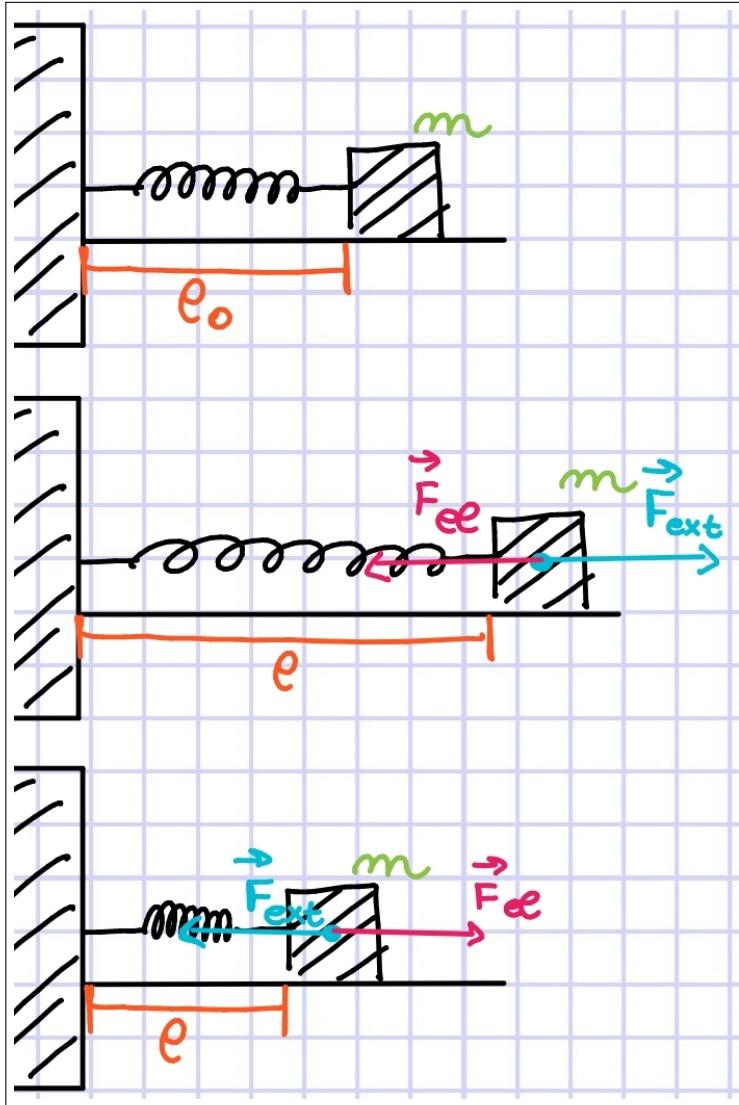
$$\vec{F}_G = \frac{m_g M}{r^2} \hat{r}$$

Assumendo ora che $M = M_E$ e $r = r_E$, ovvero consideriamo massa e raggio della Terra, allora \vec{F}_G è una costante uguale a \vec{g} .

4.5.3 Forza elastica

Supponiamo di avere una molla vincolata ad un supporto non movibile e fermo e all'altra estremità della molla attaccata una massa m . Assumiamo che non ci siano attriti.

Quando ci allontaniamo dalla **lunghezza di riposo**, l_0 , della molla, quest'ultima si allunga o accorcia tramite una **sollecitazione esterna**.



Supponendo ora di avere una forza \vec{F}_{ext} che agisce sulla massa, per far sì che la massa rimanga ferma, vorrà dire che sulla massa agisce un'altra forza uguale e opposta esercitata dalla molla chiamata **forza elastica** \vec{F}_{el} .

Osserviamo che se la molla si allunga, allora \vec{F}_{ext} e \vec{F}_{el} avranno un verso, se invece la molla si accorcia, avranno verso opposto.

Osserviamo che la forza elastica è sempre opposta a $\Delta\vec{l} = \vec{l} - \vec{l}_0$, quindi se il verso di $\Delta\vec{l}$ è positivo, allora il verso di \vec{F}_{el} è negativo, e viceversa.

La \vec{F}_{el} e $\Delta\vec{l}$ sono proporzionali, infatti la formula della \vec{F}_{el} è la seguente:

$$\vec{F}_{el} = -K(\vec{l} - \vec{l}_0) = -K\Delta\vec{l}$$

Dove K è detta **costante elastica** e la sua unità di misura è quindi $\frac{N}{m}$ (Newton/metro).

Osservando la formula precedente si può facilmente notare che la costante elastica è indipendente dalla

massa del corpo, infatti indica solo la durezza della molla.

Le **forze di richiamo**, non solo la forza elastica, sono proporzionali allo spostamento, ovvero quando il corpo si allontana dal suo equilibrio viene richiamato verso di esso tramite una forza di richiamo che è sempre direttamente proporzionale allo spostamento, cioè a quanto il corpo si allontana dall'equilibrio.

Ora consideriamo la massa m e abbiamo:

$$F = -K \cdot x$$

ovvero la forza è inversamente proporzionale allo spostamento.

Ora considerando la seconda legge della dinamica [pag.22], sostituendo la definizione di forza e otteniamo:

$$-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ora definiamo $\omega^2 = \frac{K}{m}$ e otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

da cui ci ricaviamo $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Per dimostrare come abbiamo ricavato $x(t)$, osserviamo la sua derivata seconda, ovvero $a(t)$, e notiamo che togliendo $-\omega^2$ abbiamo esattamente $x(t)$ quindi sostituendo quella con x , otteniamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Ovvero l'ipotesi iniziale.

Osserviamo ora quindi che se applico una forza esterna sulla molla e poi la lascio andare, essa si muove in moto armonico intorno al punto di riposo. Questo moto dato che compare \sin nella formula sarà periodico, e il periodo è il seguente:

$$\begin{aligned} \omega t + \varphi &= \omega(t + T) + \varphi + 2k\pi \Rightarrow \omega t = \omega t + \omega T + 2k\pi \\ \Rightarrow \omega T &= 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che se fisso i valori di $x(t)$ e $v(t)$, riesco a ricavare φ e A . Quindi se per esempio fisso:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_M \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove v_M è la velocità massima, mi ricavo:

$$\begin{aligned} A\omega \cos(\varphi) &= v_M \\ A \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

e da qui mi ricavo:

$$\begin{aligned} A\omega &= v_M \Rightarrow A = \frac{v_M}{\omega} \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

e quindi ottengo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_M}{\omega} \sin(\omega t) \\ v(t) &= v_M \cos(\omega t) \end{aligned}$$

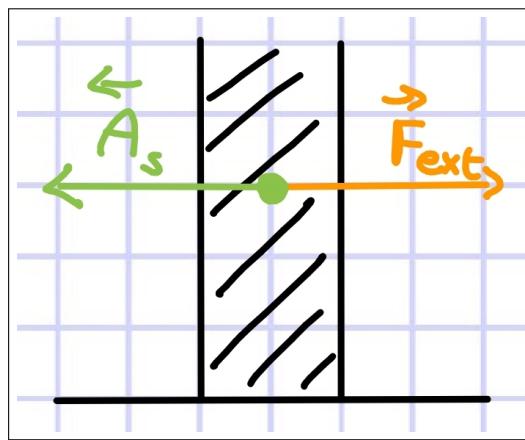
4.5.4 Forza di attrito (radente)

Iniziamo col dire che esistono molti tipi diversi di attrito, noi però ci concentriamo sul'**attrito radente**, ovvero quello che si ottiene con **2 superfici a contatto**. In genere, l'attrito si comporta in 2 modi diversi, facciamo un esempio con una sedia sul pavimento:

- **attrito statico:** se applichiamo una certa forza \vec{F}_{ext} alla sedia e quella **resta ferma** abbiamo una forza di **attrito statico** (\vec{A}_s) **che bilancia** la forza che applichiamo noi. In particolare:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_{ext} * \hat{x} \\ \vec{A}_s = -|\vec{A}_s| * \hat{x} = -|F_{ext}| * \hat{x} \end{array} \right\} \vec{A}_s = -|\vec{F}_{ext}| * \hat{x} \text{## NON SICURO SU HAT!!!}$$

Da quest'ultimo pezzo possiamo capire che l'attrito, finché resta statico, è una **uguale ed opposta** alla forza che applichiamo noi sulla sedia, quindi quest'ultima resta ferma!



L'attrito statico esiste fino ad un certo punto, identificato con la **soglia** " $\vec{A}_{s,max}$ ", che possiamo calcolare con la formula:

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext}$$

In particolare μ_s rappresenta il **coefficiente di attrito statico** (dipende dalle 2 superfici a contatto), \vec{N} è la **forza vincolante** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto** (in questo caso il "moto" è rappresentato dalla forza esterna che applichiamo noi alla sedia). Una volta che la forza esterna supera questa soglia, subentra l'**attrito dinamico**;

- **attrito dinamico:** ad un certo punto, la forza che applichiamo noi sarà tale da **muovere** la sedia, a questo punto entriamo in una fase di **attrito dinamico**. Possiamo calcolarlo con la formula:

$$\vec{A}_D = -\mu_D * |\vec{N}| * \hat{v}$$

Anche qui μ_D rappresenta il **coefficiente di attrito dinamico** (dipende dalle 2 superfici a contatto), \vec{N} è la **forza vincolante** mentre il segno - è dato dal fatto che **l'attrito è sempre opposto al moto dell'oggetto**.

Ora, all'intersezione tra attrito statico e dinamico succede una cosa particolare: la forza dell'attrito **diminuisce**. Vediamo un grafico:



Il distacco tra $A_{s,max}$ e A_D dipende dal distacco tra μ_s e μ_D

4.5.4.1 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito statico Vediamo un esempio per il calcolo del coefficiente di attrito statico, supponiamo di avere una sedia con **massa** m_s e un'**attrito statico massimo** $A_{s,max}$ calcolato usando una molla con **allungamento** Δx e **coefficiente elastico** K , quanto vale il **coefficiente di attrito statico**?

$$m_s = 6Kg \quad |A_{s,max}| = \begin{cases} \Delta x = 6cm \\ K = 1,2N/m \end{cases} \quad \mu_s = ?$$

$$\vec{A}_{s,max} = -\mu_s * |\vec{N}| * \hat{F}_{ext} \implies \mu_s = \frac{|\vec{A}_{s,max}|}{|\vec{N}|} = \frac{K * \Delta x}{m_s * g} = \frac{7,2 * 10^{-2}N}{5,9 * 10^1N} = 1,2 * 10^{-3}$$

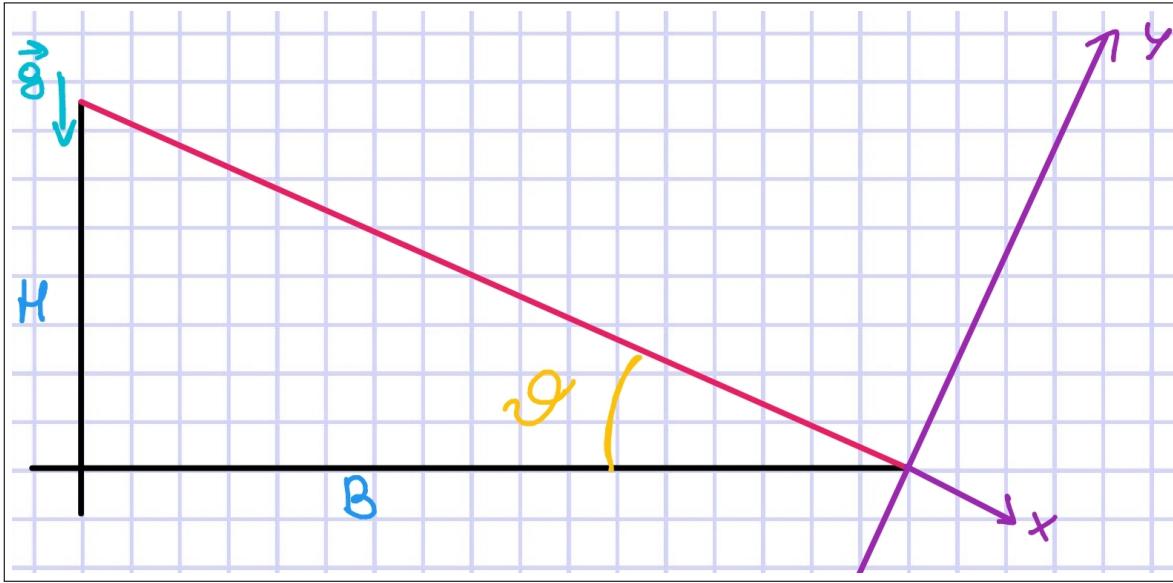
Nota che g corrisponde all'accelerazione di gravità terrestre ($9,8m/s^2$) o di qualsiasi altro pianeta su cui facciamo le misurazioni.

4.6 Piano inclinato

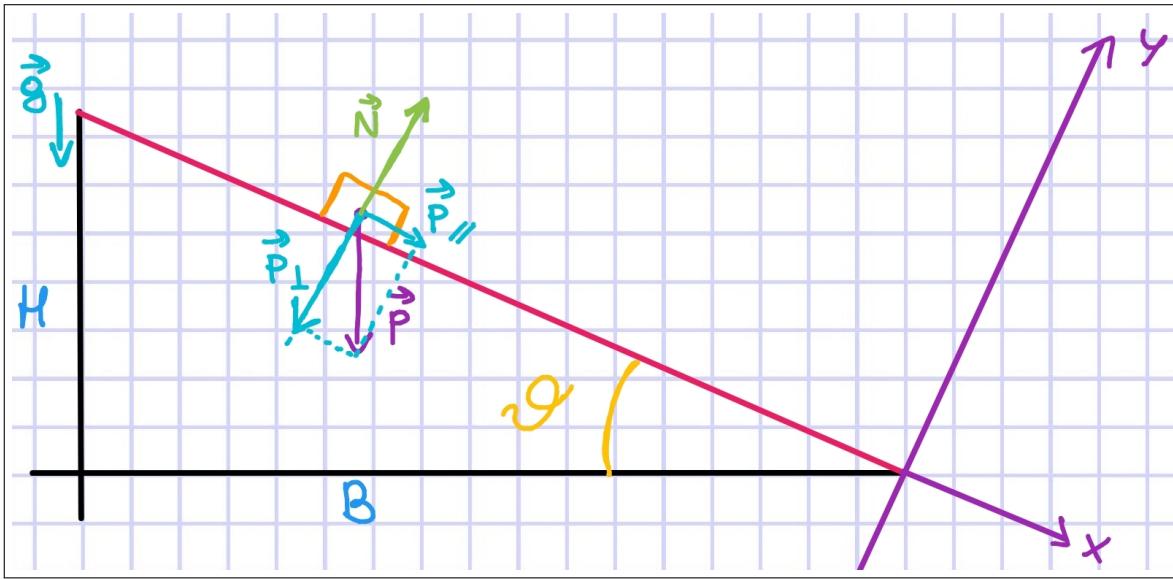
Introduciamo ora il concetto di **piano inclinato rispetto alla verticale** (con verticale intendiamo l'asse su cui giace la gravità).

4.6.1 Sistema di riferimento

Vediamo subito il sistema di riferimento:



Come asse x usiamo la **retta su cui giace il piano inclinato** mentre l'asse y è rappresentato dalla **normale all'asse x**. Nota inoltre che $\frac{H}{B} = \tan(\theta)$. Ora posizioniamo sul piano inclinato un qualche oggetto: questo avrà una **forza peso** con verso che giace sulla retta parallela alla verticale. Possiamo scomporre questa forza come proiezione sugli assi che abbiamo stabilito prima, in particolare \vec{P}_{\parallel} per l'asse x e \vec{P}_{\perp} per l'asse y. A questo punto, ora che abbiamo comoda la forza \vec{P}_{\perp} possiamo anche stabilire la **forza vincolante** \vec{N} che il piano oppone a questo oggetto (ricorda che la forza vincolante **può solo essere ortogonale al piano**). Vediamo un grafico:



L'obiettivo ora è calcolare le **risultanti delle forze** per gli assi x e y (con risultanti intendiamo la somma di tutte le forze "parallele" ad un certo asse), in particolare:

$$\vec{F}_{ext} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} = m * g * \sin(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P}_{\perp} + \vec{N} = m * g * \cos(\theta) - N = 0 \end{cases}$$

4.6.2 Esempio

Vediamo ora un esempio: abbiamo un bambino di **massa** m e uno scivolo di **lunghezza** L e con **inclinazione** θ . Quanto **tempo** impiega il bambino a scivolare sullo scivolo? Faremo 2 versioni di questo problema,

la prima utilizzando un normale **moto uniformemente accelerato** e la seconda **introducendo anche l'attrito**. Vediamo una rappresentazione grafica del problema:



4.6.2.1 Versione senza attrito Se proviamo a risolvere il problema senza considerare l'attrito, ci troviamo in presenza di un "semplice" **moto uniformemente accelerato**. Come prima cosa, **analizziamo le forze in campo** e calcoliamo le forze risultanti parallele agli assi. Iniziamo col dire che quella sull'asse y (che ricordo essere inclinato!) non ci interessa, infatti abbiamo la forza vincolante che bilancia, concentriamoci quindi solo sulla forza sull'asse x. Ricordiamo, per la *seconda legge della dinamica* [pag. 22] che:

$$\vec{F}_x = m * a_x$$

A questo punto a noi interessa trovare l'accelerazione a_x , quindi rigiriamo un po' questa formula ed "**espandiamo**" la nostra \vec{F}_x utilizzando le formule viste prima [pag. 32]:

$$\vec{F}_x = m * a_x \Rightarrow a_x = \frac{\vec{F}_x}{m} = \frac{m * g * \sin(\theta)}{m} = g * \sin(\theta)$$

Ora che abbiamo l'accelerazione, possiamo recuperare le formule viste per il moto uniformemente accelerato [pag. 10]. In questo caso ci interessa la formula dello **spazio percorso** (dato che sappiamo che il nostro scivolo è lungo L), ovvero:

$$L = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

A questa formula possiamo fare delle semplificazioni, in particolare togliere il I ($s_0 = 0$) e il II ($v_0 = 0$) termine, ottenendo:

$$L = \frac{1}{2} * a * (t - t_0)^2$$

Che sostituendo l'accelerazione e, per comodità, il tempo diventa:

$$L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2$$

A noi interessa calcolare Δt , quindi ci rigiriamo la formula in questo modo:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * \sin(\theta)}}$$

Introduciamo ora un po' di numeri, supponendo:

$$m = 20Kg \quad \theta = 30^\circ \quad L = 4m \quad \Delta t = ?$$

Otteniamo il tempo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2L}{g * \sin(\theta)}} = \sqrt{\frac{2 * 4m}{9,8m/s^2 * \sin(30^\circ)}} = \sqrt{\frac{8s^2}{9,8 * 1/2}} \approx 1,27s$$

4.6.2.2 Versione con attrito Se aggiungiamo l'attrito, dobbiamo modificare un po' le nostre formule in modo da considerare l'attrito statico e dinamico:

- **attrito statico:**

$$\begin{cases} R_x = m * g * \sin(\theta_{max}) - A_{s,max} & \Rightarrow m * g * \sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 \\ R_y = m * g * \cos(\theta_{max}) - N & \Rightarrow N = m * g * \cos(\theta_{max}) = 0 \end{cases}$$

Da qui otteniamo che

$$\begin{aligned} m * g * \sin(\theta_{max}) - \mu_s * N = 0 &\Rightarrow m * g * \sin(\theta_{max}) - \mu_s * m * g * \cos(\theta_{max}) = 0 \\ &\Rightarrow m * g * [\sin(\theta_{max}) - \mu_s * \cos(\theta_{max})] = 0 \end{aligned}$$

Ora, dato che sappiamo che $m * g$ non è nullo, possiamo dedurre che sia la seconda parte ad annullarsi, quindi:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{max}) - \mu_s * \cos(\theta_{max}) = 0 &\Rightarrow \mu_s * \cos(\theta_{max}) = \sin(\theta_{max}) \\ &\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin(\theta_{max})}{\cos(\theta_{max})} \\ &\Rightarrow \mu_s = \tan(\theta_{max}) \end{aligned}$$

Nota che con " θ_{max} " indica l'angolo massimo oltre al quale il nostro oggetto sul piano inclinato inizia a muoversi, superando la soglia di attrito statico, senza l'applicazione di forze esterne;

- **attrito dinamico:** in questo caso, la componente che ci interessa trovare è l'accelerazione sull'asse x (a_x). Partiamo quindi da quello che conosciamo e cerchiamo di rigirarlo un po' per ottenere l'accelerazione:

$$\begin{cases} R_x = m * g * \sin(\theta) - A_d & \Rightarrow m * g * \sin(\theta) - \mu_d * N = m * a_x \\ R_y = m * g * \cos(\theta) - N = 0 & \Rightarrow N = m * g * \cos(\theta) \end{cases}$$

Da qui otteniamo che:

$$\begin{aligned} m * g * \sin(\theta) - \mu_d * m * g * \cos(\theta) = m * a_x &\Rightarrow g * \sin(\theta) - \mu_d * g * \cos(\theta) = a_x \\ &\Rightarrow a_x = g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta)) \end{aligned}$$

4.6.3 Esempio di calcolo del coefficiente di attrito dinamico

Supponiamo di avere lo stesso identico esercizio di prima, però ora **entra in gioco anche l'attrito**. Supponendo che l'oggetto impieghi Δt_{att} secondi a percorrere tutto il piano, a quanto corrisponde il coefficiente di attrito dinamico?

Iniziamo con **l'equazione dello spazio per il moto uniformemente accelerato** e la rigiriamo un po':

$$\begin{aligned} s = s_0 + v_0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \\ => L = 0 + 0 * \Delta t + \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \\ => L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \\ => L = \frac{1}{2} * a * (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Ora, sappiamo che, in un contesto di moto con attrito dinamico, $\vec{R}_x = \vec{P}_{\parallel} - \vec{A}_D = m * a_x$, utilizzando i calcoli visti prima otteniamo che l'accelerazione vale:

$$a = g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta))$$

Mettiamo tutti insieme e otteniamo:

$$L = \frac{1}{2} * g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta)) * (\Delta t)^2$$

La modifichiamo per ottenere il valore di μ_d :

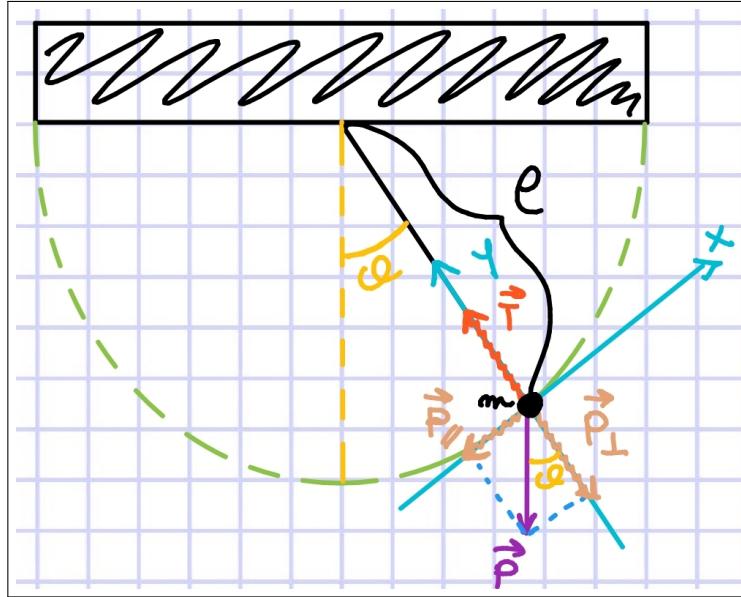
$$L = \frac{1}{2} * g * (\sin(\theta) - \mu_d * \cos(\theta)) * (\Delta t)^2 \quad \mu_d = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{2L}{g * \Delta t^2 * \cos(\theta)}$$

Ora ci basta semplicemente inserire i valori (li puoi ritrovare all'esercizio prima, [pag. 34]) ed otteniamo il nostro risultato $\mu_d \approx 0,28$.

4.7 Pendolo semplice

Introduciamo il pendolo, ovvero una **massa** agganciata ad un punto di ancoraggio tramite una **fune inestensibile**. Supponiamo che **non ci sia alcun attrito**, quindi il nostro pendolo continuerà ad oscillare tramite un **moto perpetuo**. Cominciamo introducendo i 2 sistemi di riferimento: il primo ci servirà per specificare delle cose nel secondo.

4.7.1 Sistema di riferimento sul peso



Nota che questo sistema di riferimento **si muove assieme al peso**, in particolare abbiamo che l'asse y che è **normale alla traiettoria** e l'asse x che è **tangente alla traiettoria**. Iniziamo analizzando le forze in gioco. In questo caso abbiamo solo la **forza peso** che può essere scomposta in questo modo:

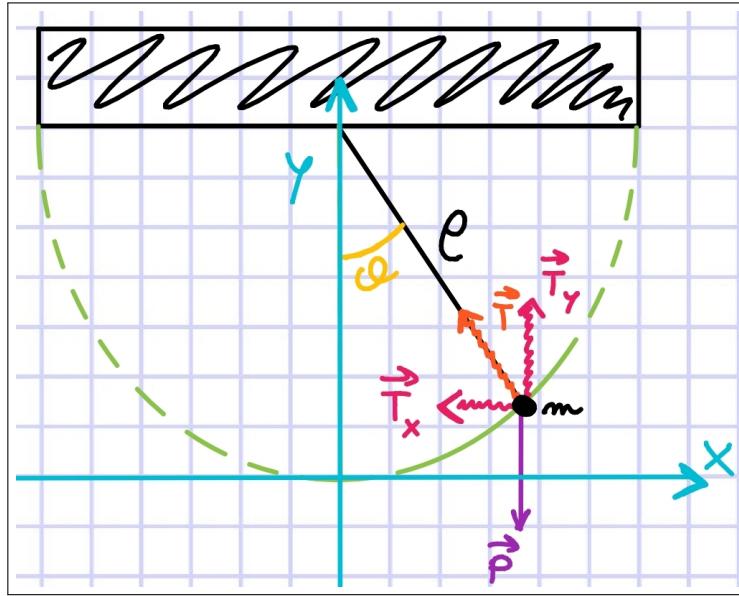
$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_{\parallel} & = -m * g * \sin(\theta) \\ \vec{P}_{\perp} & = m * g * \cos(\theta) \end{cases}$$

Inoltre, dato che consideriamo **il cavo inestensibile**, abbiamo una **forza di tensione** (\vec{T}) uguale e opposta a \vec{P}_{bot} che la bilancia. A questo punto possiamo analizzare **le risultanti**:

$$\begin{aligned} \vec{R}_x &= \vec{P}_{\parallel} = -m * g * \sin(\theta) \\ \vec{R}_y &= \vec{P}_{\perp} + \vec{T} = m * g * \cos(\theta) - T = 0 \end{aligned}$$

4.7.2 Sistema di riferimento nella posizione di equilibrio

Ora, cambiamo sistema di riferimento e utilizziamo quello "cartesiano" con centro nella posizione di equilibrio del nostro pendolo:



Con questo nuovo riferimento, possiamo trovare facilmente la posizione (x, y) del nostro peso:

$$\begin{aligned} x(t) &= R * \sin[\theta(t)] \\ y(t) &= R - R * \cos[\theta(t)] \end{aligned}$$

Supponendo che R sia la lunghezza del nostro cavo. Nota anche che le coordinate dipendono dal tempo, infatti **sarà l'angolo θ a variare col tempo**. Il problema è **in che modo?** Ci torneremo in seguito. Questo sistema di riferimento ci permette inoltre di scomporre le nostre 2 forze (peso e tensione) in questo modo:

$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{P}_x = 0 \\ \vec{P}_y = -m * g \end{cases} \quad \vec{T} = \begin{cases} \vec{T}_x = -T \sin(\theta) = -m * g * \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \vec{T}_y = T \cos(\theta) = m * g * \cos(\theta) * \cos(\theta) \end{cases}$$

Nella scomposizione della tensione possiamo usare la formula che abbiamo trovato prima, ovvero " $m * g * \cos(\theta) - T = 0$ " (prima dobbiamo rigirarla un po'). Con queste "nuove" scomposizioni, possiamo calcolare le forze risultanti sugli assi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = \vec{T}_x = -m * g * \sin(\theta) * \cos(\theta) \\ \vec{R}_y = \vec{P} + \vec{T}_y = -m * g + m * g * \cos^2(\theta) = -m * g * (1 - \cos^2(\theta)) = -m * g * \sin^2(\theta) \end{cases}$$

A questo punto, per la **II legge della dinamica**, sappiamo per definizione che $R = m * a$, quindi:

$$\vec{R} = \begin{cases} \vec{R}_x = m * a_x = -m * g * \sin(\theta) * \cos(\theta) \Rightarrow a_x = -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) \\ \vec{R}_y = m * a_y = -m * g * \sin^2(\theta) \Rightarrow a_y = -g * \sin^2(\theta) \end{cases}$$

4.7.2.1 Calcolare spazio, velocità e accelerazione Con le operazioni precedenti abbiamo scoperto che;

$$\begin{cases} a_x = -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = -g * \sin^2(\theta) = \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = R * \sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * \cos[\theta(t)] \end{cases}$$

Il nostro problema è " $\theta(t)$ ", come varia θ in funzione del tempo? Noi però abbiamo il valore dell'accelerazione e sappiamo che la derivata seconda ($\frac{d^2x}{dt^2} / \frac{d^2y}{dt^2}$) dello spostamento corrisponde all'accelerazione! Quindi deriviamo la funzione dello spostamento, ricordando però che noi non conosciamo la derivata di $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = R * \sin[\theta(t)] \\ y(t) = R - R * \cos[\theta(t)] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^{(1)}(t) = R * \cos(\theta) * \theta^{(1)} \\ y^{(1)}(t) = R * \sin(\theta) * \theta^{(1)} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^{(2)}(t) = R * [-\sin(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + \cos(\theta) * \theta^{(2)}] \\ y^{(2)}(t) = R * [\cos(\theta) * \theta^{(1)} * \theta^{(1)} + \sin(\theta) * \theta^{(2)}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) = R * [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -g * \sin^2(\theta) = R * [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -g * \sin(\theta) * \cos(\theta) = l * [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -g * \sin^2(\theta) = l * [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\frac{g}{l} * \sin(\theta) * \cos(\theta) = [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\frac{g}{l} * \sin^2(\theta) = [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} \end{aligned}$$

Adesso, prendiamo il " $\frac{g}{l}$ " e lo chiamiamo " ω^2 ", perche? Perchè SI, lo vuole Iuppa. Di conseguenza le nostre formule diventano:

$$\begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \sin(\theta) * \cos(\theta) = [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\omega^2 * \sin^2(\theta) = [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases}$$

4.7.2.2 Le piccole oscillazioni Il problema con questa formula è che è un casino calcolarsi seni e coseni, quindi noi possiamo ragionare in termini di piccole oscillazioni, in modo da approssimare seni e coseni con Taylor!

$\sin(\theta) \approx \theta$	$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$
$\tan(\theta) \approx \theta$	$(1 + \theta)^\alpha \approx +\alpha\theta$
$e^{\alpha\theta} \approx 1 + \alpha\theta$	$\sqrt{1 + \theta} \approx 1 + \frac{\theta}{2}$

Nota che le parti in rosso, dato che consideriamo solo θ piccoli, le possiamo togliere!

Con "piccole oscillazioni" intendiamo $\theta \ll 1$, ovvero " θ molto minore di 1" (inteso come radienti, in gradi possiamo immaginare che θ non superi i 4 gradi circa). Ora, considerando solo queste piccole oscillazioni, possiamo approssimare le formule in questo modo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \sin(\theta) * \cos(\theta) = [\cos(\theta) * \theta^{(2)} - \sin(\theta) * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\omega^2 * \sin^2(\theta) = [\sin(\theta) * \theta^{(2)} + \cos(\theta) * \theta^{(1)2}] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \theta * 1 = [1 * \theta^{(2)} - \theta * \theta^{(1)2}] \\ y \rightarrow -\omega^2 * \theta^2 = [\theta * \theta^{(2)} + 1 * \theta^{(1)2}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} \\ y \rightarrow -\omega^2 * \theta^2 = \theta^{(1)2} \end{cases} \end{aligned}$$

Nota che le parti in rosso, in quanto moltiplicate per $\theta \ll 1$ diventano trascurabili, quindi le togliamo

Prendiamo in considerazione solo la formula per la x, abbiamo quindi che:

$$-\omega^2 * \theta = \theta^{(2)} = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 * \theta = 0$$

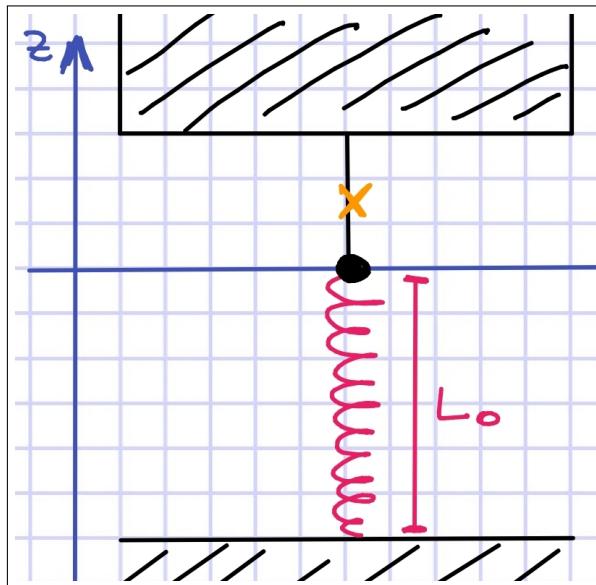
Ovvero **l'equazione del moto armonico!** Da qui possiamo dire quindi che:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} & \Rightarrow \frac{2\pi}{T} &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ 4 & & \Rightarrow T &= 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

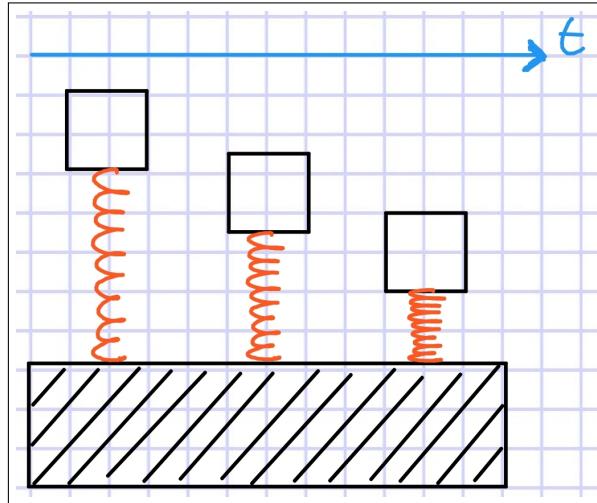
Ricorda che T in questo caso corrisponde al **periodo** e non alla forza di tensione.

4.8 Esercizio sulla dinamica

Vediamo ora un esercizio riassuntivo sulla dinamica, che cerca di raggruppare tutto quello che abbiamo visto. Supponiamo di essere in questa situazione:



Abbiamo un **peso di massa m** attaccato ad un **filo inestensibile di massa trascurabile** che poggia su una **molla in posizione di riposo con coefficiente elastico k** . Ad un certo punto, il cavo viene tagliato, quindi il peso verrà **sostenuto interamente dalla molla**, che **inizierà a comprimersi ed allungarsi** (come si comporta una molla normale)



Supponiamo di avere i seguenti dati e di dover trovare i seguenti valori:

$$k = 70 \text{ N/m}$$

$$m = 0,5 \text{ Kg}$$

$$T = ?$$

$$\Delta l_{max} = ?$$

$$z_{vMax} = ?$$

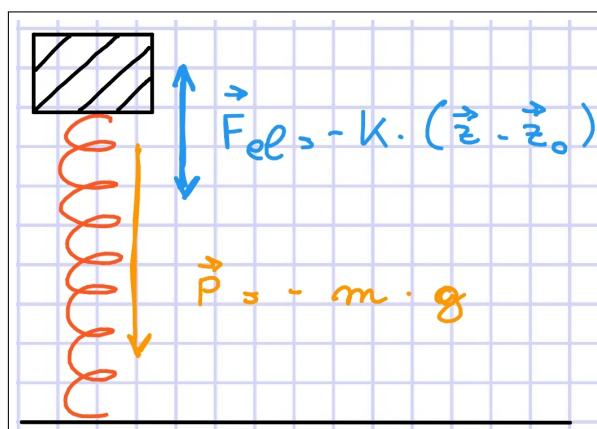
$$v_{max} = ?$$

Con:

- T periodo;
- Δl_{max} accorciamento massimo;
- z_{vMax} z dove la velocità è massima;
- v_{max} velocità massima;

Allora, come prima cosa **visualizziamo quali forze agiscono nel sistema**, in particolare abbiamo:

- la **forza peso** $\vec{P} = -m * g$;
- la **forza elastica** $\vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - \vec{z}_0)$. La parte tra parentesi viene chiamata "**forza di richiamo**" e dipende dal **sistema di riferimento che adottiamo** (in particolare la z_0 , che indica la **posizione di riposo** della nostra molla, nel nostro caso [in base al sistema di riferimento che abbiamo adottato] vale 0).



4.8.1 Studio della dinamica del problema

Iniziamo considerando le varie risultanti delle forze che agiscono sul nostro asse z (semplicemente agiscono solo forze verticali, quindi ignoriamo l'asse orizzontale). Iniziamo considerando le 2 forze che abbiamo già visto prima:

$$\begin{cases} \vec{P} = -m * g * \hat{z} \\ \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - \vec{z}_0) = \vec{F}_{el} = -k * (\vec{z} - 0) = \vec{F}_{el} = -k * z * \hat{z} \end{cases}$$

Nota che i **versori** \hat{z} servono solo per descrivere la direzione della forza, poi li possiamo togliere per semplicità. Ora, avremmo che la risultante di queste forze corrisponde alla loro somma:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_{el} = -m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} = m * \vec{a} \text{ (per definizione)}$$

A questo punto noi sappiamo però che l'accelerazione corrisponde alla **derivata seconda dello spazio**, quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} -m * g * \hat{z} - k * z * \hat{z} &= m * \frac{d^2 z}{dt^2} * \hat{z} \\ &\Rightarrow -g - \frac{k}{m} * z = \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g \end{aligned}$$

La formula **in rosso** sappiamo che è l'**equazione armonica**! In questo caso poniamo $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ottenendo:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 * z = -g$$

Ci sono un po' di "problemi" però, rispetto all'equazione "classica" non abbiamo = 0 ma = $-g$, quello viene definito **membro forzante** e semplicemente **sfasa la nostra posizione di equilibrio**, in questo caso la sposta verso il basso. Per definizione del moto armonico [pag.12] che possiamo indicare lo spostamento nel tempo in questo modo:

$$z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t)$$

In questo caso dobbiamo **aggiungere questa parte in rosso** perché dobbiamo **compensare in qualche modo quell' $=-g$** . Ora, per calcolare velocità ed accelerazione (quest'ultima è quella che ci interessa) ci basta semplicemente derivare la formula trovata prima:

$$\begin{aligned} z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t) &\Rightarrow \frac{dz}{dt} = A\omega * \cos(\omega t + \varphi) + \frac{dw}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega^2 * \sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned}$$

Questa è la formula che ci interessa! Infatti ora possiamo sostituirla all'interno dell'equazione iniziale, ovvero:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} * z = -g \quad \Rightarrow -A\omega^2 * \sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2(A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t)) = -g$$

Bene, abbiamo la formula matematica che descrive la dinamica del nostro sistema. Ora dobbiamo fissare un po' di valori che non conosciamo al momento, in particolare φ, ω e $w(t)$, come facciamo? Studiamo

la nostra formula, che ricordiamo essere in **funzione del tempo**, in alcuni punti (possibilmente comodi). Cominciamo considerando $t = 0$:

$$-A\omega^2 * \sin(\omega * 0 + \varphi) + \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2(A * \sin(\omega * 0 + \varphi) + w(0)) = -g \quad \Rightarrow \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) = -g$$

Ci siamo semplificati i seni, ora dobbiamo soltanto trovare il valore della nostra $w(0)$: per toglierci la derivata (che è abbastanza scomoda) possiamo supporre che w sia **costante in funzione del tempo**, quindi otterremo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dt^2} + \omega^2 * w(0) &= -g \\ &\Rightarrow 0 + \omega^2 * w = -g \\ &\Rightarrow w = -\frac{g}{\omega^2} \end{aligned}$$

Ecco fatto, ora possiamo tornare un po' di equazioni prima e **sostituire il valore che abbiamo trovato di w**:

$$z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) + w(t) \quad \Rightarrow z(t) = A * \sin(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega^2}$$

Ora ci manca solo da trovare il valore di A e di φ , per trovarli possiamo usare il fatto che **sia lo spazio che la velocità in t=0 valgono 0!** Vediamo:

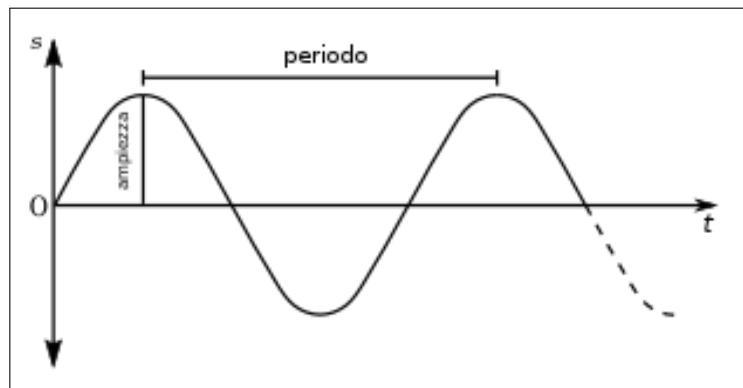
$$\begin{aligned} \begin{cases} z(t) = A * \sin(\omega * 0 + \varphi) - \frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * \cos(\omega * 0 + \varphi) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z(t) = A * \sin(\varphi) - \frac{g}{\omega^2} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v(t) = A\omega * \cos(\varphi) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{g}{\omega^2} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi arriviamo alla fine con questa formula che descrive il nostro moto:

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} * \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * \cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2}$$

Come la interpretiamo? Sostanzialmente come un normalissimo **moto armonico**, con:

- $a = \frac{g}{\omega^2} \rightarrow$ ampiezza, il valore massimo (o minimo) della curva;
- $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow$ periodo, misurato in secondi;
- $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ fase, indica da che punto parte il grafico, nel caso di questo esercizio l'abbiamo tolta trasformando il \sin in \cos ;



Ora che abbiamo questa formula, abbiamo tutto! Possiamo facilmente calcolare tutti i punti richiesti dal problema, vediamo come.

4.8.2 Allungamento massimo

Come possiamo vedere dall'immagine precedente, l'ampiezza è la distanza massima dal punto di equilibrio, quindi ci basta prendere **2 volte l'ampiezza** (nota che il "-" è dovuto al sistema di riferimento adottato):

$$\Delta l_{max} = -2 \frac{g}{\omega^2} = -2 * \frac{m * g}{K} \approx -14cm$$

4.8.3 Posizione di velocità massima

All'istante 0, anche la velocità vale 0. Successivamente la velocità inizierà ad aumentare finché non raggiungerà il massimo. Per capire dove si trova il massimo possiamo **studiare la derivata associata e vedere dove questa vale 0**, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = v(t) &= -\frac{g}{\omega^2} * \omega * \sin(\omega t) + 0 \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\omega^2} * \omega^2 * \cos(\omega t) \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g * \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Quando **questa** equazione vale 0? Dobbiamo **annullare il coseno**, quindi porre $\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$. In che posizione ci troviamo con $t = \frac{\pi}{2\omega}$? Vediamo:

$$z\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{g}{\omega^2} * \cos\left(\omega * \frac{\pi}{2\omega}\right) - \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} * 0 - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{g}{\omega^2}$$

Come si può facilmente notare, abbiamo la velocità nella **posizione di equilibrio della molla!** Potevamo anche arrivarci osservando il disegno, infatti nel punto di equilibrio il peso **smette di prendere velocità ed inizia a rallentare in seguito alla forza elastica!** Calcoliamo il numero:

$$z_{vMax} = -\frac{g}{\omega^2} = -\frac{g * m}{k} \approx -7cm$$

4.8.4 Velocità massima

Prima abbiamo scoperto che la velocità massima si ottiene nella z_{eq} , che si raggiunge in $t = \frac{\pi}{2*\omega^2}$

$$v\left(\frac{\pi}{2*\omega^2}\right) = -\frac{g}{\omega} * \sin\left(\omega \frac{\pi}{2*\omega^2}\right) = -\frac{g}{\omega} * 1 = -\frac{g}{\omega} = -g * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx -0,84m/s$$

Di nuovo, il "-" della velocità è sempre dovuto al sistema di riferimento che abbiamo adottato.

4.8.5 Calcoliamo la T

C'è un problema: nella lezione Iuppa considera T come **il periodo** mentre nel video di Youtube la considera come **forza di tensione del cavo iniziale**. Calcoliamo entrambe.

4.8.5.1 Il periodo Nulla di complesso, noi sappiamo che:

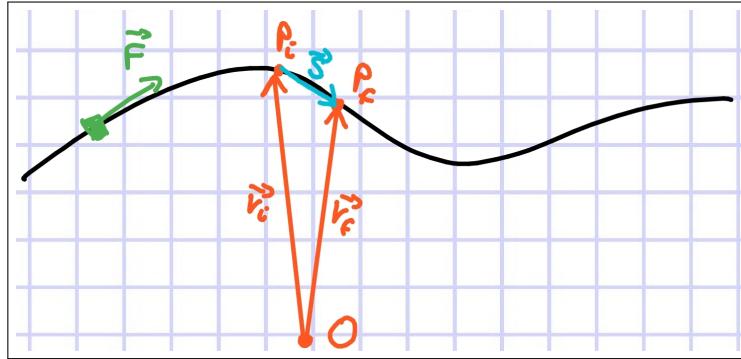
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} && \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &&& \Rightarrow T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,52s \end{aligned}$$

4.8.5.2 La tensione Ancora, niente di particolare. Sappiamo semplicemente che la **tensione è uguale ed opposta alla forza peso**, quindi:

$$\vec{T} = -\vec{P} \quad \Rightarrow \vec{T} = -m * g \approx 4,9N$$

5 Meccanica

5.1 Lavoro



Supponiamo che ci sia un corpo che si muove lungo una traiettoria. Ora prendiamo un punto d'origine del sistema di riferimento e descriviamo il movimento del corpo con dei raggi vettore dall'origine. Ora consideriamo un punto iniziale p_i ed uno finale p_f molto vicini tra loro e quindi otteniamo uno spostamento infinitesimale, $d\vec{s} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$.

Sul corpo inoltre agisce una forza \vec{F} che è quella che lo fa spostare. Osserviamo ora che a seconda del valore di questa forza, potrebbe variare la velocità dell'oggetto. Se $d\vec{s} \perp \vec{F}$, allora il corpo non rallenta, quindi se l'angolo è 90° , l'effetto sarà minimo, mentre se l'angolo è 0° l'effetto sarà massimo e infine se l'angolo è 180° l'effetto sarà massimo ma in senso opposto.

In conclusione quindi l'effetto che la forza ha sul corpo è descritta dal coseno ed è definito come **lavoro infinitesimo**, in formula:

$$dW = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \alpha_{F,ds}$$

Se il lavoro infinitesimo è positivo, allora il corpo accelera, se è negativo invece, il corpo rallenta. L'interazione quindi tra il corpo e l'agente esterno, ovvero quello che applica la forza, è definita come energia. In questo caso, l'agente esterno perde energia.

Osserviamo ora che:

$$|\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\alpha_{v,w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

dove " \cdot " rappresenta il prodotto scalare tra due vettori. Spesso questo viene detto v_{Tw} , ovvero la componente di v tangente a w , quindi:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| \cos(\alpha_{v,w}) &= v_T \\ |\vec{w}| \cos(\alpha_{v,w}) &= w_T \end{aligned}$$

Ora usiamo quindi questa osservazione e otteniamo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che l'unità di misura del lavoro è il Joule, $J = 1Nm$. Una caloria sono, $1cal = 4.18J$. Ora calcoliamo il **lavoro medio** come segue:

$$\bar{W} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

Osserviamo che il lavoro è una quantità scalare, dato che il prodotto scalare prende due vettori e li trasforma in uno scalare.

Facciamo ora un'esempio molto semplice:

$$|\vec{F}| = 10N |\Delta \vec{s}| = 100m$$

Ora in base all'angolo $\alpha_{F,ds}$ abbiamo dei diversi valori di lavoro:

$\alpha_{F,ds}$	W
0	$1000J$
π	$-1000J$
$\pi/2$	$0J$
$\pi/4$	$707J$

Ora consideriamo tutti gli spostamenti infinitesimi e supponiamo che ogni spostamento infinitesimo abbia un valore di forza diversa (ovviamente la forza è esercitata sempre dallo stesso agente esterno, ma in istanti diversi). Abbiamo quindi per ogni spostamento infinitesimale un lavoro infinitesimale diverso. Rappresentiamo questa cosa come segue:

$$\begin{aligned} & d\vec{s}_1, d\vec{s}_2, d\vec{s}_3, \dots, d\vec{s}_n \\ & \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n \\ & dW_1, dW_2, dW_3, \dots, dW_n \end{aligned}$$

Il **lavoro** quindi sarà la somma di tutti questi lavori infinitesimi:

$$W_{TOT} = \sum_{i=1}^n dW_i$$

però considerando che la n tende a infinito, $n \rightarrow \infty$, otteniamo:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^n dW_i = \int_i^n \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che la \vec{F} si può tirare fuori dall'integrale solo se non varia per nessun spostamento infinitesimale.

Ora consideriamo il lavoro $W > 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[0, \pi/2]$, ovvero in cui la forza sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro motore**.

Se invece il lavoro $W < 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[\pi/2, \pi]$, ovvero in cui la forza non sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro resistente**.

5.2 Esempi di lavoro

5.2.1 Lavoro forza peso

Data l'equazione della forza peso:

$$\vec{F}_p = -mh\hat{h}$$

abbiamo lavoro infinitesimo:

$$dW = \vec{F}_p \cdot d\vec{h} = -mh\hat{h} \cdot dh\hat{h} = -mgdh$$

Osserviamo che $\hat{h} \cdot \hat{h} = 1$. Ora quindi sommando tutti questi lavori infinitesimi otteniamo il lavoro W_p :

$$W_p = \int_i^f dW = \int_i^f -mgdh = -mg(h_f - h_i) = -mg\Delta h$$

Osserviamo ora che se $\Delta h > 0$, ovvero $h_f > h_i$, avremo $W_p < 0$, quindi lavoro resistente, mentre se $\Delta h < 0$, ovvero $h_f < h_i$, avremo $W_p > 0$, quindi lavoro motore.

Questo era il caso di spostamento verticale, se invece lo spostamento non è verticale il lavoro è comunque lo stesso.

Osserviamo ora che \vec{F} e $d\vec{s}$ non dipendono dal sistema di riferimento, se però consideriamo la forma $\vec{F}_p = -mgh$, questa dipende dal sistema di riferimento dato che c'è \hat{h} .

Osserviamo inoltre che il lavoro della forza peso dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

Facciamo ora un'esercizio molto semplice:

$$m = 100kg$$

$$\Delta h = 1000m$$

$$W_p = -9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 100kg \cdot 1000m = -9.8 \cdot 10^5 kg \frac{m^2}{s^2} = -9.8 \cdot 10^5 J = -9.8 \cdot 10^2 KJ$$

5.2.2 Lavoro forza elastica

Data l'equazione della forza elastica:

$$\vec{F}_{el} = -K\vec{x}$$

abbiamo lavoro:

$$W_{el} = \int_i^f F_{el} dx = \int_i^f -Kx dx = -\frac{K}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Osserviamo ora che se $x_f^2 > x_i^2$, avremo $W_{el} < 0$, infatti allunga la molla che si oppone, mentre se $x_f^2 < x_i^2$, avremo $W_{el} > 0$, infatti accorcia la molla che aiuta.

Osserviamo inoltre che il lavoro della forza elastica dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

5.2.3 Lavoro forza attrito

Data l'equazione della forza d'attrito:

$$\vec{F}_{att} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

abbiamo lavoro:

$$W_{att} = \int_i^f F_{att} dx = F_{att} \int_i^f dx = -\mu_d mg \int_i^f dx = -\mu_d mg L$$

dove L è la lunghezza dello spostamento ($x_f - x_i$).

Osserviamo che l'attrito si oppone sempre al movimento, quindi non vale quello che valeva per il lavoro della forza peso e della forza elastica, ovvero che a seconda del punto finale e del punto iniziale il lavoro poteva essere positivo o negativo.

5.3 Energia cinetica

Consideriamo ora il lavoro infinitesimo,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = md\vec{v} \frac{d\vec{s}}{dt} = md\vec{v} \cdot \vec{v}$$

e quindi,

$$dW = d\left[\frac{1}{2}mv^2\right]$$

L'energia cinetica è la seguente quantità:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi ho che:

$$dW = d[E_k]$$

5.3.1 Teorema delle forze vive

Il **Teorema delle forze vive** afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto. In formula:

$$E_{k,f} = W_{i \rightarrow f} + E_{k,i} \Rightarrow W_{i \rightarrow f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

Osserviamo ora che se $v_i = 0$ e $v_f = 0$, allora per come è formulata E_k , vorrà dire che $E_{k,i} = 0$ e $E_{k,f} = 0$ e quindi $W_{i \rightarrow f} = 0$.

5.4 Potenza

La **potenza** è definita come:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt, $W = 1 \frac{J}{s}$.

5.5 Forze conservative

Una **forza conservativa** è una forza per cui il lavoro dipende solamente dal punto iniziale, p_i , e dal punto finale, p_f .

Se vado quindi da p_i a p_f seguendo due percorsi diversi il lavoro sarà lo stesso.

Se invece vado da p_f a p_i , il lavoro sarà sempre uguale ma avrà segno opposto, indipendentemente dal percorso. Questo è descritto come segue,

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

ovvero l'integrale chiuso.

5.5.1 Energia potenziale

L'**energia potenziale** di un corpo è l'energia che esso possiede a causa della sua posizione o del suo orientamento rispetto ad un campo di forze ed è denotata con U .

5.5.2 Energia meccanica

L'**energia meccanica** è la somma di energia cinetica ed energia potenziale ovvero,

$$E = E_k + U$$

5.5.3 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo il caso 1-DIM,

$$\int_{p_i}^{p_f} F dx = U(p_f) - U(p_i) = W_{p_i \rightarrow p_f}$$

Ora per il teorema delle forze vive ho che,

$$W_{p_i \rightarrow p_f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

e quindi, usando una notazione semplificata, ovvero per esempio invece che $U(p_f)$ uso U_f , ottengo che,

$$U_f - U_i = E_{k,f} - E_{k,i} \Rightarrow U_f - E_{k,f} = U_i - E_{k,i} \Rightarrow E_f = E_i$$

ovvero l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale, e quindi

$$\Delta E = 0$$

ovvero la variazione di energia meccanica è 0, quindi nel caso in cui si hanno solo forze conservative, l'energia meccanica non varia, si conserva.

Se ora consideriamo,

$$-(U(p_f) - U(p_i)) = W_{p_i \rightarrow p_f}$$

ed deriviamo, otteniamo che,

$$F = -\frac{dU}{ds}$$

Nel caso a più dimensioni invece, per esempio consideriamo 3-DIM, abbiamo che,

$$F = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

5.5.4 Esercizio forze conservative

Consideriamo ora l'esercizio fatto in passato [pag.39].

Tutte le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica e risolverlo in modo molto più semplice.

Ora abbiamo quindi che le forze che agiscono sul sistema sono,

$$\vec{F}_p = -mg\hat{z}\vec{F}_e l = -k(z - z_i)\hat{z}$$

e considerando la conservazione dell'energia meccanica abbiamo che,

$$E_k + U = \text{cost} \Rightarrow E_k + U_p + U_{el} = \text{cost}$$

Calcoliamo ora quindi le energie potenziali,

$$\begin{aligned} U_p &= -W_p = mg(z - z_0) \\ U_{el} &= \frac{k}{2}(z^2 - z_0^2) \end{aligned}$$

e quindi ora sostituisco nella formula precedente e ottengo,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{k}{2}z^2 = \text{cost}$$

Ora considerando il sistema di riferimento scelto, nel punto iniziale abbiamo $v_i = 0$ e $z = 0$ e quindi, la formula precedente è $= 0$.

Considerando il punto z_{max} , ho sempre che $v = 0$, e ottengo che,

$$mgz_{max} + \frac{k}{2}z_{max}^2 = 0 \Rightarrow z_{max}(\frac{k}{2}z_{max} + mg) = 0$$

Le due soluzioni sono quindi $z_{max} = 0$, che non viene considerata, e

$$z_{max} = -\frac{2mg}{k} = \Delta z_{max}$$

Ora osserviamo che $z_{v_{max}}$ è z_{eq} , ovvero la z nel punto di equilibrio, e quindi,

$$z_{v_{max}} = z_{eq} = \frac{z_{max}}{2} = -\frac{mg}{k}$$

Per calcolare la v_{max} ora, consideriamo sempre il fatto che essa è in z_{eq} e quindi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgz_{eq} + \frac{k}{2}z_{eq}^2 &= 0 & \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{(mg)^2}{2K} &= 0 \\ & & \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{2K} &= 0 \\ & & \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 &= \frac{(mg)^2}{2K} \\ & & \Rightarrow v_{max}^2 &= \frac{mg^2}{K} \\ & & \Rightarrow v_{max} &= \sqrt{\frac{mg^2}{K}} \end{aligned}$$

5.6 Forze non conservative e lavoro

Consideriamo ora il fatto in cui sul sistema agiscono anche forze non conservative e ne calcoliamo il lavoro. Abbiamo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{R}_{nc}$$

$$W_{TOT} = \int_i^f \vec{R} d\vec{s} = \int_i^f \vec{R}_c d\vec{s} + \int_i^f \vec{R}_{nc} d\vec{s} = W_c + W_{nc}$$

Ora però sappiamo che,

$$W_{TOT} = \Delta E_k \Rightarrow W_c + W_{nc} = \Delta E_k \Rightarrow W_{nc} = \Delta E_k - W_c$$

ma ora ci ricordiamo che $W_c = -\Delta U$ e quindi,

$$W_{nc} = \Delta E_k + \Delta U \Rightarrow W_{nc} = \Delta E$$

Quindi se sul sistema agiscono delle forze non conservative, il lavoro di queste sarà uguale alla variazione di energia meccanica.

Osserviamo ora quindi che se $W_{nc} < 0$, vuol dire che $E_f - E_i < 0$ e quindi $E_f < E_i$. Allo stesso modo, se $W_{nc} > 0$, vuol dire che $E_f - E_i > 0$ e quindi $E_f > E_i$, e inoltre $E_f = E_i + W_{nc}$.

5.6.1 Esempio lavoro forze non conservative

Supponiamo che un corpo di massa m scali una montagna di altezza h_{max} partendo da $h_0 = 0$. Ora non considerando gli attriti, abbiamo solo la forza peso che agisce sulla massa. Calcoliamo quindi,

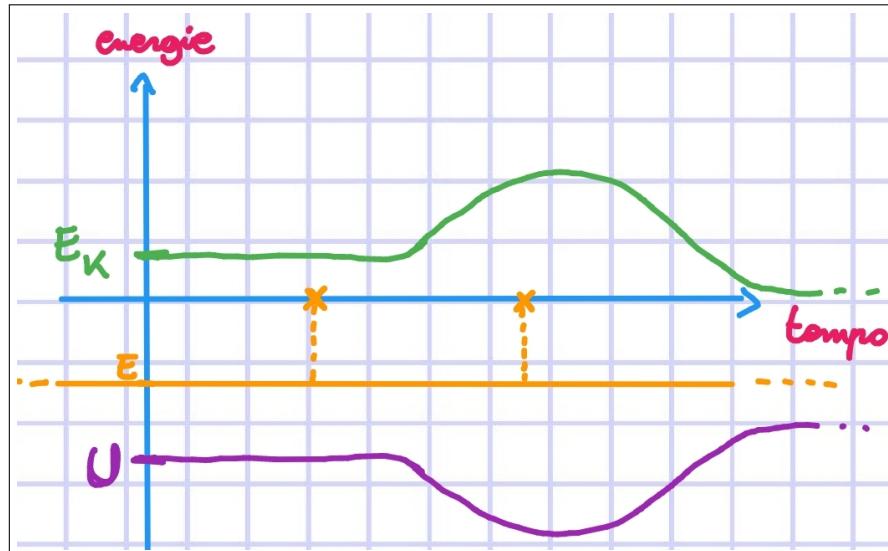
$$\Delta U_p = mgh_{max} + mg0 = mgh_{max}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}m0^2 = 0$$

$$\Delta E = mgh_{max} = W_{nc}$$

L'energia cinetica è = 0 dato che sia la velocità iniziale che quella finale sono = 0 e quindi l'energia meccanica sarà uguale all'energia potenziale, quest'ultima è uguale all'energia potenziale finale dato che, essendo l'altezza iniziale = 0, anche l'energia potenziale iniziale = 0.

5.6.2 Esempio energie



5.7 Gravità universale

La **forza gravitazionale** è quella forza che esiste tra 2 corpi. Possiamo rappresentarla con questa formula:

$$\vec{F} = -\gamma * \frac{m_1 * m_2}{r_{1,2}^2} * \hat{r}_{1,2}$$

Dove:

- G è la **costante di gravitazione universale**, calcolata scientificamente e vale $\gamma = G = 6,67 * 10^{-11} \frac{N*m^2}{Kg^2}$. Nota che G è γ per la Terra;
- m_1, m_2 sono le masse dei 2 corpi;
- $r_{1,2}$ è la distanza tra i 2 corpi;

Perché ci serve la costante di gravitazione? Se **controlliamo le unità di misura senza questa costante** otterremo una $\frac{M^2}{L^2}$ ($M \rightarrow$ massa, $L \rightarrow$ lunghezza), ma noi **vogliamo una forza!** Per questo motivo introduciamo la costante di gravitazione, espressa proprio come $N * \frac{L^2}{M^2}$, se mettiamo tutto insieme le masse e le lunghezze si semplificano **lasciando solo una forza** (in Newton)! Se immaginiamo di avere la Terra e la Luna, la forza gravitazionale è proprio **la forza normale che permette alla luna di restare sulla sua orbita** (che immaginiamo essere perfettamente circolare per semplicità). Questa forza corrisponderebbe proprio a:

$$\vec{F} = -G * \frac{m_L * m_T}{d^2}$$

Ora, noi sappiamo che, per la II legge di Newton, che $\vec{F} = m * \vec{a}$. Possiamo mettere a confronto i **moduli di queste 2 forze**:

$$m_{I,L} * \frac{v^2}{d_{T,L}} = G * \frac{m_{G,L} * m_{GT}}{d_{T,L}^2}$$

Alcune osservazioni:

1. il $"-G"$ diventa $"G"$ perché **stiamo paragonando i moduli**, quindi il segno non importa;
2. la forza a sinistra dell'= $=$ corrisponde alla **forza normale del moto circolare**;
3. a sinistra dell'= $=$, la massa $m_{I,L}$ è la **massa INERZIALE** (*capacità di un corpo di opporsi al moto*) della luna, mentre a destra la massa $m_{G,L}$ è la **massa GRAVITAZIONALE** (*carica gravitazionale del corpo*) della luna. Sono 2 valori **concettualmente diversi**, ma **hanno valori uguali!**

Detto ciò, soprattutto facendo riferimento al terzo punto, possiamo applicare una serie di semplificazioni:

$$\begin{aligned} m_{I,L} * \frac{v^2}{d} &= G * \frac{m_{G,L} * m_{G,T}}{d^2} && \Rightarrow \frac{v^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\ &\text{conversione vel. moto circolare} && \Rightarrow \frac{(\omega * d)^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\ &&& \Rightarrow \omega^2 * d^2 = G * \frac{m_{G,T}}{d} \\ &\text{definizione } \omega && \Rightarrow \omega^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\ &&& \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\ &&& \Rightarrow \frac{d^3}{T^2} = G * \frac{m_{G,T}}{(2\pi)^2} \end{aligned}$$

Ok, con l'ultima equazione siamo arrivati al punto in cui abbiamo **tutto quello che riguarda il satellite** (la Luna) è **da una parte** e **tutto quello che riguarda la Terra è dall'altra**. In particolare, notiamo che la parte che riguarda la Terra è **costante!** Ciò ci permette di, ad esempio, scegliere una nuova distanza e , di conseguenza, il periodo T si "aggiusterà" di conseguenza per mantenere la costante "costante".

$$\frac{d^3}{T^2} = \text{const.}$$

Nota come **la massa del satellite non influisce sulla distanza o sul periodo**, quindi possiamo usare la stessa formula per qualsiasi satellite che orbita la terra (con un moto circolare uniforme). Immaginiamo di considerare l'ISS che orbita la terra ad una distanza di 500Km, la formula diventerebbe:

$$\frac{d_L^3}{T_L^2} = \text{const.} = \frac{d_{ISS}^3}{T_{ISS}^2}$$

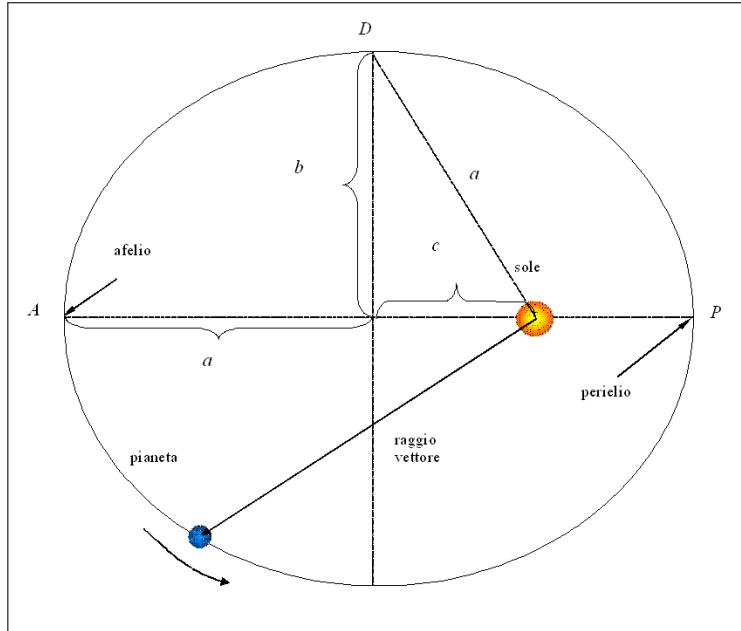
$$\frac{(300000\text{Km})^3}{(28gg)^2} = \text{const.} = \frac{(500\text{Km})^3}{(?)^2}$$

Come detto prima, se variamo il raggio dell'orbita, il periodo varia di conseguenza per mantenere il valore della costante uguale!

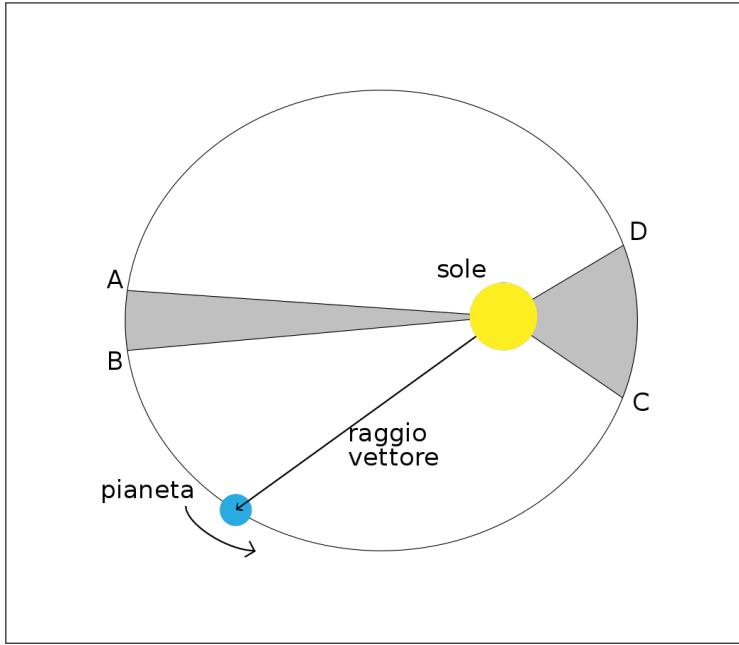
5.8 Leggi di Keplero

La legge di gravità universale è stata "creata" come **"unificazione"** delle **3 leggi di Keplero**. Nota che queste leggi descrivono il moto, ellittico, dei pianeti attorno al Sole. Citiamole per completezza:

1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;*



2. *Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali;*



3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore. Questa legge può essere scritta in forma matematica in questo modo:

$$T^2 = k * a^3$$

In particolare, k è una costante (detta anche Keplero) che dipende dal corpo attorno al quale si orbita.

5.9 Sistemi di riferimento non inerziali

Prima di cominciare con i sistemi di riferimento non inerziali, sostanzialmente quei **sistemi di riferimento soggetti ad una qualche accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale**, dobbiamo introdurre alcuni concetti fondamentali.

5.9.1 Convertire una rotazione in vettore

Come facciamo a rappresentare una rotazione utilizzando un vettore? Vediamo punto per punto:

- **direzione:** corrisponde all'asse su cui viene eseguita la rotazione;
- **verso:** applichiamo la "regola della vite destrorsa", ovvero immaginiamo di posizionare una vite sull'asse di rotazione ed applichiamo suddetta rotazione: il verso di avanzamento/arretramento della vite ci indica il verso del vettore (ricorda che le viti "entrano" se vengono ruotate in senso orario);
- **modulo:** come abbiamo già visto, possiamo rappresentare la rotazione con una **velocità angolare** ω , prendiamo come modulo del vettore il **valore numerico di ω** ;

5.9.2 Prodotto vettoriale

Dobbiamo ridordare il concetto di **prodotto vettoriale**, in particolare è un'operazione binaria tra 2 vettori 3-dimensionali che restituisce un vettore 3-dimensionale. Matematicamente potremmo scrivere:

$$\times : R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$$

Supponiamo di avere:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{k}$$

Ora, il vettore \vec{k} ha 3 componenti principali, come le calcoliamo? Vediamo:

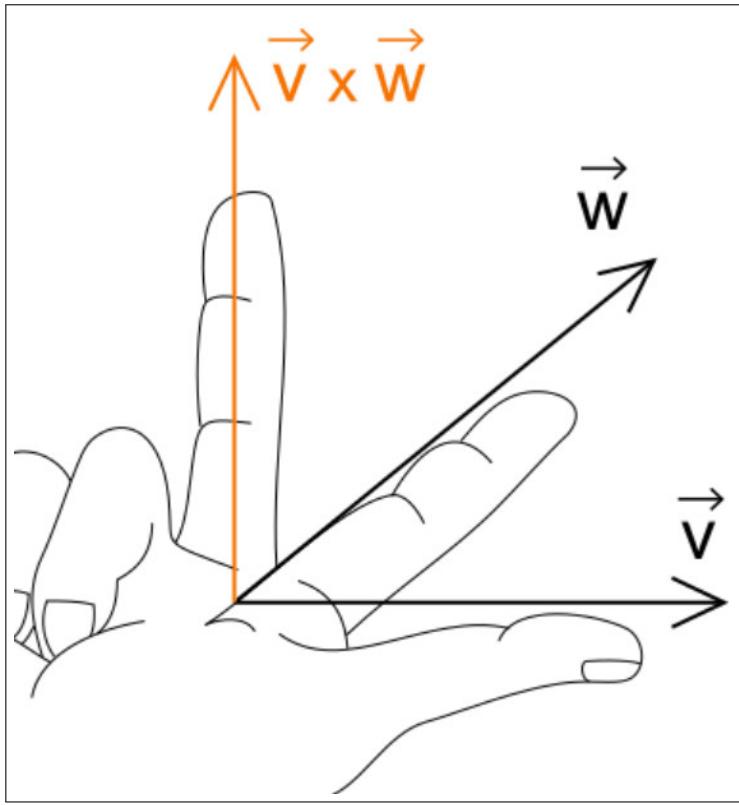
- **modulo:** corrisponde a

$$||\vec{v}|| * ||\vec{w}|| * \sin(\theta)$$

dove $||\vec{v}||$ e $||\vec{w}||$ rappresentano la **norma euclidea** dei rispettivi vettori (sostanzialmente si fa la radice della somma dei quadrati delle componenti del vettore), mentre $\theta \in [0, \pi]$ rappresenta l'**angolo convesso tra i vettori**;

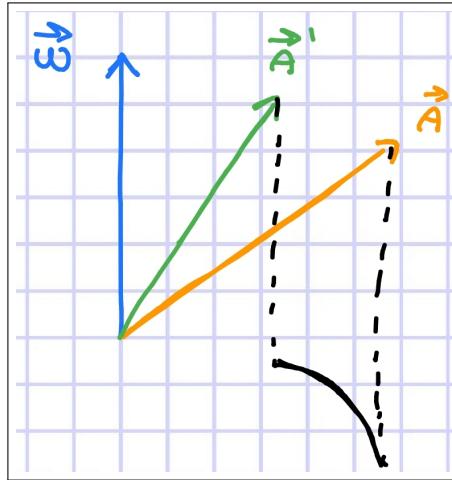
- **direzione:** la direzione **ortogonale** al piano che contiene \vec{v} e \vec{w} ;
- **verso:** per quanto riguarda il verso, includo la regola generale della mano destra:

- il verso di $\vec{v} \times \vec{w}$ si ricava con la **regola della mano destra**: si dispone il pollice della mano destra nella direzione e nel verso del vettore \vec{v} , e l'indice nella direzione e nel verso di \vec{w} . Distendendo il dito medio perpendicolarmente al palmo della mano, si ha la direzione e il verso in cui punta il prodotto $\vec{v} \times \vec{w}$.

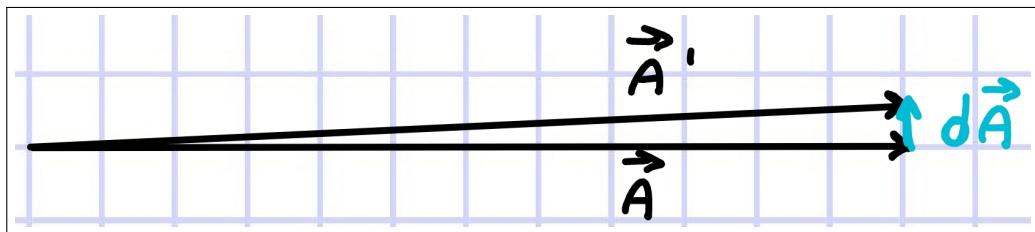


5.9.3 Legge di Poisson

L'ultimo concetto da introdurre, ci permette di "ridurre" la derivata di un vettore ad un prodotto vettoriale. Supponiamo di avere un cono gelato e di **disegnare un vettore sul lato di questo cono**. Ora, immaginiamo di applicare una rotazione sull'asse di questo cono, otterremo qualcosa del genere:



Ora, se lo spostamento di \vec{A} verso \vec{A}' è **infinitesimale**, ovvero



possiamo "approssimare" dA nell'intervallo di tempo dt (dA/dt , ovvero la derivata) come il **prodotto vettoriale tra il vettore rotazione $\vec{\omega}$ ed il vettore \vec{A}** :

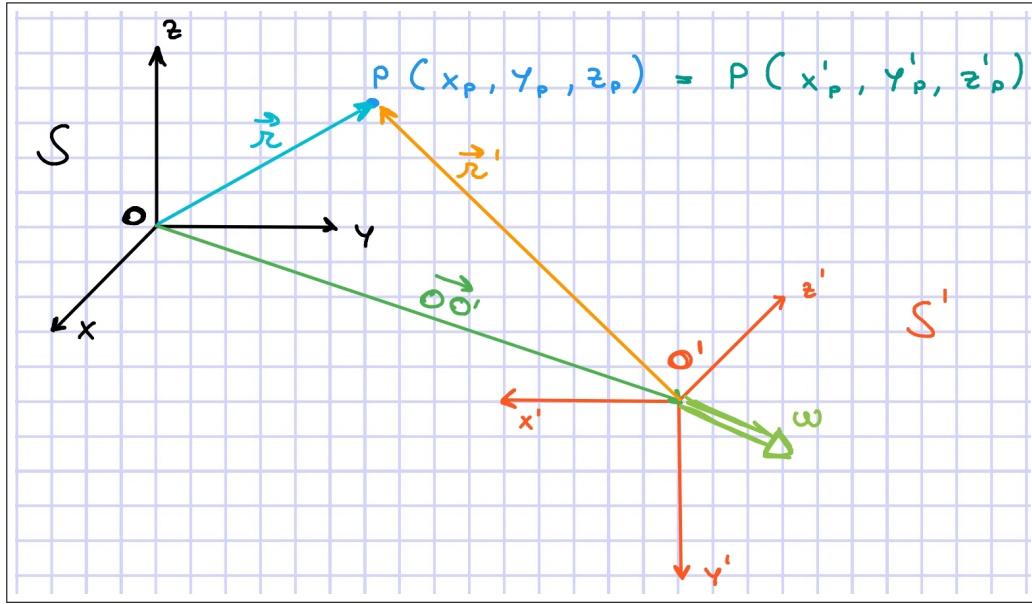
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

5.9.4 Cambiare il sistema di riferimento

Supponiamo di avere **2 sistemi di riferimento**:

- S : sistema di riferimento **inerziale, FISSO**;
- S' : sistema di riferimento **non inerziale**, che **rispetto ad S NON è FISSO**;

Vediamo un disegno:



Come si vede dall'immagine, abbiamo un **sistema inerziale fisso** (S) ed un **sistema non inerziale non fisso** (S'). Nota che **conosciamo il vettore $\vec{oo'}$** (che rappresenta lo spostamento dell'origine di S') e **il vettore $\vec{\omega}$** (che rappresenta una rotazione di S'). Ora, dato **un punto P** vogliamo sapere la relazione tra spazio, velocità ed accelerazione nei 2 sistemi di riferimento. Vediamo punto per punto.

5.9.4.1 Spazio in un sistema non inerziale Ci basta controllare il disegno, risulta abbastanza ovvio che:

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r}'$$

Ricorda che \vec{r}' corrisponde allo spazio di P visto da S' .

5.9.4.2 Velocità in un sistema non inerziale (teorema delle velocità relative) Sappiamo per definizione che la velocità è la derivata dello spazio, quindi **deriviamo lo spazio!** Cominciamo da S :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(r_x * \hat{x} + [y] + [z]) \\ &= \frac{dr_x}{dt} * \hat{x} + \vec{r}_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + [y] + [z] \\ &= v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} + v_z * \hat{z} \end{aligned}$$

Per semplicità "omettiamo" la y ($[y]$) e la z ($[z]$) dato che sono uguali alla x . Nota che la parte in verde si annulla in quanto il nostro sistema di riferimento resta immutato!

Proviamo ora a calcolare la velocità per S' :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{oo'} + \vec{r}') \\ &= \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \end{aligned}$$

Arriviamo a questo punto: per quanto riguarda $\vec{oo'}$, possiamo notare che il punto o (origine di S) è fisso, pertanto è come se calcolassimo semplicemente la velocità di o' (l'unico punto in movimento dei 2). Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \vec{v}_{o'} + \left(\frac{dr_x}{dt} * \hat{x}' + r_x * \frac{d\hat{x}'}{dt} + [y] + [z] \right) \end{aligned}$$

Il problema ora è che la parte in verde questa volta non si annulla! Il sistema S' infatti è in movimento. Come lo gestiamo? **Usiamo le formule di Poisson** [pag.54]!

$$\vec{v}_{o'} + \left(\frac{dr_x}{dt} * \hat{x}' + r_x * \frac{dx'}{dt} + [y] + [z] \right) = \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + x' * \vec{\omega} \times \hat{x}'] + [y] + [z]$$

$$= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + \vec{\omega} \times (x' * \hat{x}')] + [y] + [z]$$

per definizione

$$= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'})] + [y] + [z]$$

espandi $[y]$ $[z]$ e raccogli

$$= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{y'} * \hat{y}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{z'} * \hat{z}' + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{z'})]$$

$$= \vec{v}_{o'} + (v_{x'} * \hat{x}' + v_{y'} * \hat{y}' + v_{z'} * \hat{z}') + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'} + \vec{r}_{y'} + \vec{r}_{z'})$$

per definizione

$$= \vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Finiamo con l'ottenere quello che viene definito **teorema delle velocità relative**, ovvero:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Dove:

- \vec{v}' rappresenta la velocità del punto P nel sistema di riferimento S' ;
- $\vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ è quella che viene detta **velocità di trascinamento**, ovvero la velocità imposta dal sistema di riferimento che si muove e "trascina" il punto P.

Un po' di casistica Vediamo un po' di casi particolari:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$: il S.R. S' **non ruota**, per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dallo spostamento dell'origine di S' (immagina ad esempio un treno su un tratto rettilino). In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'}$$

- $\vec{v}_{o'} = \vec{0}$: il S.R. S' **non si sposta** (nota che ciò non garantisce che l'origine di S' coincide con quella di S), per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dal prodotto vettoriale di *omēga* con \vec{r}' (immagina ad esempio un peso poggiato su un giradischi). In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

- $\vec{v}_{o'} = \vec{0}, \vec{\omega} = \vec{0}$: il S.R. S' **non ruota e non si sposta** (anche qui, ciò non garantisce che l'origine di S' coincide con quella di S), per questo la velocità di trascinamento è **nulla**. In particolare abbiamo che:

$$\vec{v} = \vec{v}'$$

5.9.4.3 Accelerazione in un sistema non inerziale (teorema delle accelerazioni relative) Per quanto riguarda l'accelerazione, il procedimento è **sempre lo stesso: dobbiamo derivare la velocità**! Non è nulla di nuovo, è solo un po' lungo, si deve fare attenzione a fare i giusti raccoglimenti ed utilizzare le formule di Poisson [pag.54]. Sostanzialmente, il risultato finale, detto **teorema delle accelerazioni relative**, è:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Dove:

- \vec{a}' corrisponde all'accelerazione del corpo in S' ;
- $\vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ è l'accelerazione di trascinamento;
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ è la **forza di Coriolis**, una **forza apparente** (trattiamo in seguito) che esiste solo se S' ruota rispetto ad S .

5.9.4.4 Riassumendo

Riassumendo rapidamente, le formule che interessano a noi sono:

1. **spazio:**

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r}'$$

2. **velocità:**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

3. **accelerazione:**

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

5.10 Forze apparenti

Consideriamo ora le forze esterne nel sistema di riferimento S ,

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

e nel sistema di riferimento S' ,

$$\vec{F}_{ext} = m(\vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C)$$

In S' ottengo quindi che,

$$\vec{F}_{ext} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}' \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{F}_{ext} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C}{m}$$

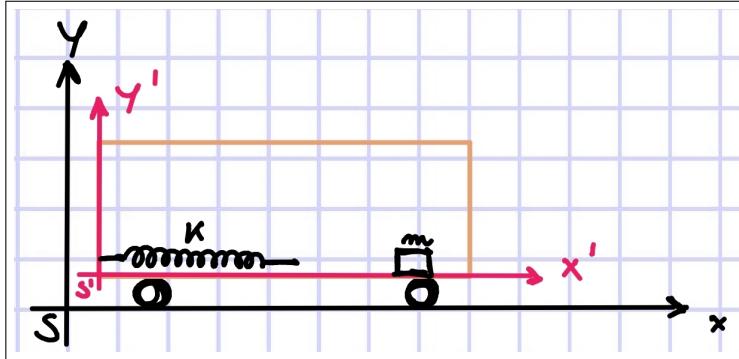
Le forze $-m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$ sono dette **forze apparenti**. Apparenti perché sono legate al sistema di riferimento, infatti queste forze sono dovute al moto del sistema di riferimento non inerziale.

5.10.1 Principio di relatività galileiana

Il **principio di relatività galileiana** dice che è sempre possibile mantenere la formulazione delle leggi della fisica se ci si sposta da un sistema di riferimento ad un'altro, purchè la differenza di moto tra i due sistemi di riferimento sia esprimibile come una velocità.

La Terra non è un sistema di riferimento inerziale, dato che ruota intorno a se stessa e attorno al sole. Come sistema di riferimento inerziale di solito si usa quello delle **stelle fisse**, si prende il sole come origine e si puntano gli assi verso delle costellazioni che si vede che non si muovono.

5.10.2 Esempio 1 forze apparenti



Supponiamo di avere un sistema di riferimento S che sono i binari ed un sistema di riferimento S' che è un vagone. Nel vagone c'è una molla di costante elastica K e una massa m e trascuriamo gli attriti. Consideriamo anche $\vec{\omega} = \vec{0}$, quindi il sistema S' non ruota.

Quando il vagone parte con una certa accelerazione, la massa si sposterà verso la molla, quindi con accelerazione uguale ed opposta a quella del vagone, finché non la raggiunge e poi comincia a contrarla. Se il vagone continua ad accelerare ad un certo punto la massa smetterà di contrarre la molla, questo si ha quando la forza elastica è bilanciata dalla forza apparente,

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}_T$$

Ho quindi ora che,

$$\vec{R} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}'$$

Ora se il vagone smette di accelerare quando la massa deve ancora raggiungere la molla, la massa continuerà in moto rettilineo uniforme verso la molla, se invece il vagone smette di accelerare quando la massa ha compresso la molla, la forza elastica della molla spingerà la massa nel senso opposto e quest'ultima continuerà di moto rettilineo uniforme fino a raggiungere la parete del vagone opposta a quella dove è attaccata la molla. Nel caso in cui il vagone smette di accelerare si ha quindi che,

$$\vec{R} = m\vec{a}_T \Rightarrow m\vec{a}_T = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{a}_T = -\frac{k\vec{x}}{m}$$

Osserviamo che si riesce a capire se ci si trova in un sistema di riferimento inerziale o meno osservando lo stato della molla (allungata, accorciata, a riposo).

Per il principio di relatività galileiana non riesco a distinguere un sistema di riferimento inerziale da un'altro, ma invece se sono in un sistema di riferimento non inerziale riesco ad accorgermene. Se il vagone è ben schermato e vedo le molle che si muovono, vuol dire che il movimento della molla ha a che vedere con il movimento del sistema di riferimento, che non è quindi inerziale.

5.10.3 Esempio 2 forze apparenti

Supponiamo che in un ascensore che è in caduta libera ci sia un omino, nel sistema di riferimento ascensore l'omino è fermo, mentre nel sistema di riferimento esterno all'ascensore l'omino ha un'accelerazione di trascinamento che è,

$$\vec{R} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C = m\vec{a}' \Rightarrow m\vec{g} - m\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \vec{a}_T = \vec{g}$$

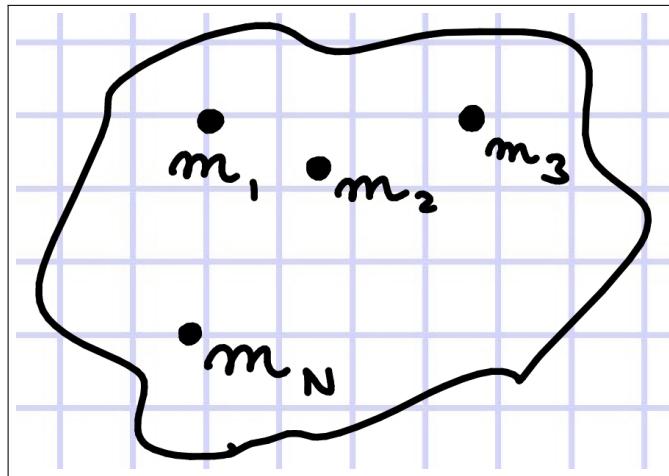
Osserviamo che l'accelerazione di Coriolis è $= 0$ dato che non c'è rotazione e che $\vec{a}' = 0$ perché l'omino per il sistema di riferimento ascensore è fermo.

Osserviamo quindi che la forza peso non è una forza apparente.

5.11 Punto materiale

Un **punto materiale** è un punto nel quale è concentrata tutta la massa del corpo, quindi rappresento il corpo come un punto materiale. Il punto materiale è un'astrazione/idealizzazione e non ha quindi dimensioni.

Se il movimento del corpo è molto più grande delle sue dimensioni infatti, si può trascurare il volume del corpo e considerarlo come un punto materiale.



Ora se considero un sistema di punti materiali, ogni punto avrà massa m_i per $1 \leq i \leq n$. Su ogni m_i agiscono delle **forze esterne** e delle **forze interne**. Ora quest'ultime saranno la somma di tutte le forze esercitate dalle altre masse su m_i , però considerando la III legge della dinamica [pag.23], abbiamo che la somma delle forze interne è 0.

Ora calcoliamo quindi la risultante delle forze per ogni m_i ,

$$\begin{aligned}\vec{R}_i &= m_i \vec{a}_i = \vec{R}_i^I + \vec{R}_i^E \\ \vec{R}_i^E &= \sum_{k=1}^M \vec{F}_{k,i}^E \\ \vec{R}_i^I &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j \rightarrow i}^I\end{aligned}$$

Ed ora otteniamo la risultante di queste,

$$\begin{aligned}\vec{R}^E &= \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^E \\ \vec{R}^I &= \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^I = \vec{0}\end{aligned}$$

Ora otteniamo che,

$$\vec{R} = \vec{R}^E = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

Ora possiamo fare il passaggio seguente,

$$\vec{R}^E = \sum_i^N m_i \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{\sum_i^N m_i} = M \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{a}_i}{M} = M \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

Nota che la parte in rosso, ovvero la sommatoria di tutte le masse del nostro sistema di punti materiali (che andiamo poi a chiamare M), la moltiplichiamo e dividiamo (moltiplicando effettivamente per 1). Lo facciamo perché "vogliamo noi", ci servirà per definire il centro di massa come la media pesata per la massa, di tutte le posizioni dei costituenti del sistema. Ovvero la media pesata delle posizioni, dando come peso la frazione totale di massa che gli oggetti hanno. Il centro di massa è il seguente,

$$\vec{r}_{C.M.} = \sum_i^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

Ora ottengo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R}^E = M \frac{d^2 \vec{r}_{C.M.}}{dt^2} = M \frac{d \vec{v}_{C.M.}}{dt} = M \vec{a}_{C.M.}$$

Da questa formula possiamo capire che la risultante delle forze esterne, qualora non fosse nulla, può essere applicata come una forza solo sul centro di massa del nostro sistema! Possiamo immaginare il sistema come un corpo unico tutto condensato nel centro di massa.

5.11.1 Esercizio centro di massa

Supponiamo di avere ora tre punti come nell'immagine e di dover calcolare il centro di massa del sistema,

$$\vec{r}_{C.M.} = \begin{pmatrix} x_{C.M.} \\ y_{C.M.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1*2+2*5+3*6}{6} \\ \frac{1*3+2*2+3*6}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{25}{6} \end{pmatrix}$$

5.11.2 Sistema isolato

Un sistema è isolato se non agiscono forze esterne su di esso, quindi la risultante delle forze esterne è nulla.

Nei sistemi isolati ho quindi che,

$$\vec{R}^E = M \vec{a}_{C.M.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{C.M.} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{C.M.} = \text{cost}$$

5.11.3 Principio di conservazione della quantità di moto

Il principio di conservazione della quantità di moto dice che in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva nel tempo.

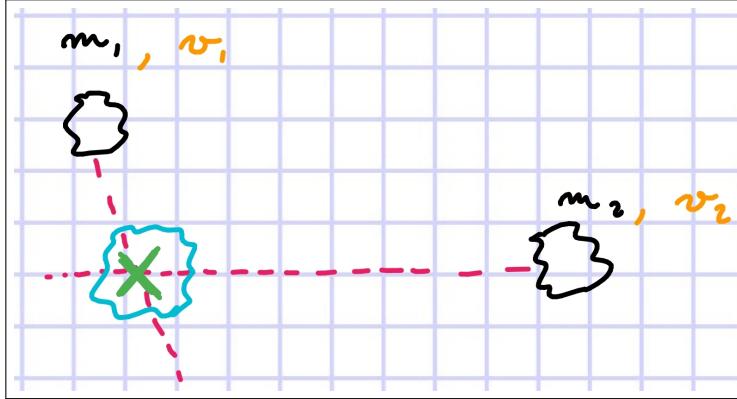
$$\frac{d \vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

5.12 Gli urti

Quando 2 oggetti si scontrano tra di loro abbiamo quello che viene definito "urto": durante questo urto, i 2 corpi hanno una qualche interazione tra di loro. Prendiamo ad esempio 2 biglie indeformabili (di acciaio) che si scontrano tra di loro: in questo esempio cambiano direzione, questo vuol dire che c'è stata qualche interazione tra i corpi che ha comportato il cambio di direzione! Il concetto di urto è molto

importante perché, in esperimenti seri, potrebbe essere l'unico mezzo con cui possiamo accorgerci della presenza di una qualche interazione tra corpi "invisibili" (molto piccoli) non osservabili altrimenti.

Introduciamo la situazione generica in cui ci troviamo:



Abbiamo 2 corpi distinti con le rispettive masse e velocità, supponendo che le loro traiettorie si incrocino avremmo effettivamente un impatto solo se:

$$\exists t | r_1(t) = r_2(t)$$

Ovvero se esiste un istante di tempo in cui la posizione dei 2 oggetti è la stessa. Se ciò avviene abbiamo un impatto localizzato in quella che viene chiamata **regione d'urto (d)**, tornando all'esempio delle biglie possiamo pensare alle zone delle biglie che entrano effettivamente in contatto. Affinché possiamo applicare le nostre solite approssimazioni, questa regione d deve essere **molto minore di qualsiasi altra distanza che entra in gioco** ($d \ll r_j$).

5.12.1 Conservazione della quantità di moto

Supponendo che il sistema che rappresenta i nostri corpi sia **un sistema isolato**, abbiamo che l'accelerazione del centro di massa è nulla, quindi la sua velocità è **costante** (potrebbe essere nulla, ma non è detto). Facciamo ora un po' di passaggi algebrici:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 * v_1 + m_2 * v_2 + \dots}{M} \right) = \vec{const}$$

Da qui, possiamo fare altri passaggi algebrici che ci portano ad ottenere un risultato interessante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\sum_j m_j * \vec{r}_j}{M} &= \vec{const} & \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j m_j * \vec{r}_j &= \vec{const} * M = \vec{const} \\ && \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j m_j * \vec{r}_j &= \vec{const} \\ && \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_j P_j &= \vec{const} \end{aligned}$$

Ovvero, abbiamo che la somma delle varie quantità di moto **resta costante!** Questo è il concetto importante:

Negli urti la quantità di moto resta sempre costante!

Abbiamo quindi che:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Ora, possiamo scomporre queste quantità di moto nelle loro componenti base, ovvero (supponendo un caso 3-D):

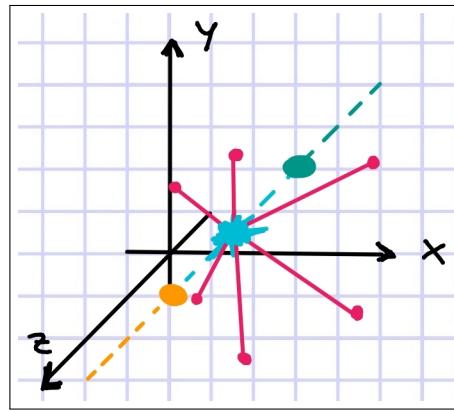
$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \begin{cases} P_{x,i} = P_{x,f} \\ P_{y,i} = P_{y,f} \\ P_{z,i} = P_{z,f} \end{cases}$$

Tornando ora al sistema isolato che abbiamo visto prima, possiamo introdurre il concetto di conservazione delle quantità di moto in questo modo:

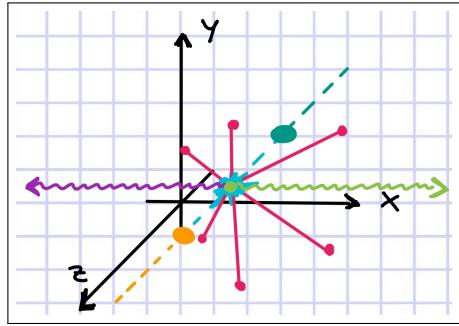
$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} + m_B * \vec{v}_{B,f} + \dots + m_N * \vec{v}_{N,f}$$

Nota come **cominciamo con 2 corpi** che vanno in urto tra loro (questo succederà sempre, semplicemente perché l'urto contemporaneo tra 3 corpi è un problema estremamente complesso) ma finiamo con **un numero N di quantità di moto finali**. Perché facciamo così? Durante l'urto può succedere che **i 2 corpi che si scontrano NON mantengano la loro natura**: potrebbero **fondersi in un corpo unico**, oppure potrebbero **esplodere in tanti corpi che vanno in tutte le direzioni!** Ovviamente, può anche succedere che i 2 corpi restino loro stessi e semplicemente cambino traiettoria (come succede con le biglie d'acciaio).

5.12.1.1 Esempio neutrini (oggetti che "esplodono") Al CERN di Ginevra si fanno questi esperimenti, si prendono 2 particelle e si fanno scontrare tra di loro a gran velocità: all'impatto queste "esplodono" sparando numerose componenti in tutte le direzioni:



Se ora noi prendiamo e sommiamo tutte le quantità di moto di questi nuovi oggetti dovremmo ottenere **ESATTAMENTE** la stessa quantità di moto iniziale che, nel caso di 2 particelle uguali sparate alla stessa velocità ma in senso opposto, dovrebbe essere 0. Spesso però questo non accade e ci ritroviamo con un vettore del genere (**in verde**, nel disegno ho tracciato un vettore casuale):



Però, ciò non è possibile, infatti noi sappiamo per definizione che la quantità di moto iniziale deve essere uguale a quella finale, che in questo caso deve essere 0. Allora DEVE esserci una quantità di moto uguale e contraria che però non abbiamo visto: quello (molto probabilmente) è un neutrino che è scappato in direzione del **vettore viola** e che bilancia il tutto portando la somma delle varie quantità di moto a 0.

Ecco, tornando alla nostra teoria precedente, questo è il tipico esempio in cui la formula della quantità di moto iniziale/finale corrisponde proprio a:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} + m_B * \vec{v}_{B,f} + \dots + m_N * \vec{v}_{N,f}$$

Però, come detto prima, esistono anche altri casi.

5.12.2 Urto (puramente) anelastico

Esistono 2 tipi di urti, il primo che vediamo è quello che viene detto **urto puramente anelastico**, ovvero quello dove i 2 corpi che si scontrano si **fondono tra loro creando un corpo unico** che, essendo appunto un corpo unico, corrisponderà anche al centro di massa del sistema. Ora, in questo caso è molto interessante **spostarsi in un sistema di riferimento che corrisponde al centro di massa**, è come se mettessimo l'origine a cavallo del centro di massa. Nota che, non trovandoci più in un sistema inerziale, **dobbiamo anche "modificare" la composizione delle velocità dei nostri corpi**, in particolare abbiamo:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} = m_A * \vec{v}_{CM}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_2\end{aligned}$$

Ora, dato che abbiamo posto che il nostro sistema di riferimento si trova a cavallo del CM, possiamo subito dite che $\vec{v}_{CM} = 0$, da qui otteniamo che:

$$m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_A * \vec{v}_{A,f} = m_A * \vec{v}_{CM} = m_A * 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = 0$$

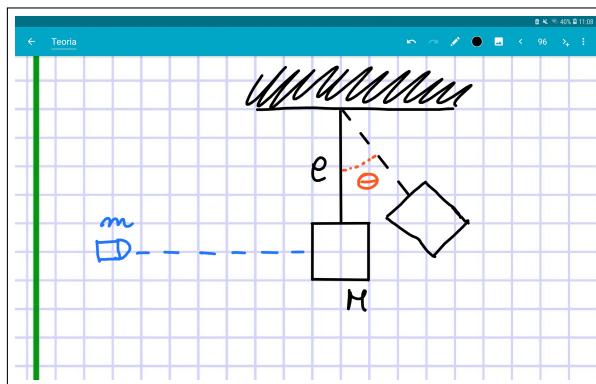
5.12.2.1 Energie cinetiche In questo caso è molto interessante controllare cosa succede a livello di energie cinetiche:

$$\begin{aligned}
 E_{k,i} &= E_{k,i,1} + E_{k,i,1} \\
 &= \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_2^2 \\
 \text{Usiamo il sys di ref del CM} &= \frac{1}{2} * m_1 * (v_{CM} + v'_1)^2 + \frac{1}{2} * m_2 * (v_{CM} + v'_2)^2 \\
 \text{Sviluppiamo i quadrati} &= \frac{1}{2} * [m_1 * (v_{CM}^2 + 2v_{CM} * v'_1 + v'^2_1) + m_2 * (v_{CM}^2 + 2v_{CM} * v'_2 + v'^2_2)] \\
 \text{Un po' di passaggi algebrici} &= \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * v_{CM}^2 + \frac{2}{2} * (\text{verde } m_1 * v'_1 + m_2 * v'_2) * v_{CM} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} * m_1 * v'^2_1 + \frac{1}{2} * m_2 * v'^2_2 \\
 &= \frac{1}{2} * (m_1 + m_2) * v_{CM}^2 + \frac{1}{2} * m_1 * v'^2_1 + \frac{1}{2} * m_2 * v'^2_2 \\
 &= \textcolor{red}{E_{k,f}} + \textcolor{red}{E'_{k,i}}
 \end{aligned}$$

Ora, nota che la parte in verde vale 0 per definizione, dato che ci troviamo nel sistema di riferimento del CM (lo abbiamo definito prima). Otteniamo quindi che l'energia cinetica iniziale corrisponde all'**energia cinetica finale (quella del CM)** + l'**energia cinetica iniziale presa però nel sys di ref del CM**. Fin qui niente di particolarmente strano, però se rigiriamo la formula per trovare l'energia cinetica finale:

$$E_{k,f} = E_{k,i} - E'_{k,i}$$

Abbiamo che $E_{k,f} < E_{k,i}$, infatti sappiamo che le **energie cinetiche sono sempre valori positivi!** Abbiamo quindi che l'energia cinetica finale è **minore** di quella iniziale, ma dove va quell'energia mancante? Sostanzialmente, l'energia persa viene **usata per "fondere" i 2 oggetti tra di loro!**



5.12.2.2 Esercizio urto unelastico Supponiamo di avere un sacco di sabbia di massa M appesa ad un filo di lunghezza l e di avere un proiettile di massa m che spariamo contro il sacco. Dobbiamo calcolare l'angolo θ che oscilla il sacco dopo che l'urto è avvenuto.

Quando sparo il proiettile abbiamo che,

$$\begin{aligned}
 p_p &= wv \\
 E_{k,i,p} &= \frac{1}{2}mv^2
 \end{aligned}$$

e per il sacco,

$$\begin{aligned}
 p_s &= 0 \\
 E_{k,i,s} &= 0
 \end{aligned}$$

dato che il sacco deve ancora essere colpito dal proiettile, è fermo.

Ora per la conservazione della quantità di moto abbiamo che,

$$P_{TOT,i} = P_{TOT,f} \Rightarrow mv = (M+m)v_f$$

Ora per risolvere l'esercizio, possiamo considerare che dopo che avviene l'urto, ovvero durante l'oscillazione, l'energia meccanica si conserva, quindi abbiamo che,

$$E_{k,i,(M+m)} + U_{i,(M+m)} = E_{k,f,(M+m)} + U_{f,(M+m)}$$

e notiamo che l'energia potenziale iniziale si annulla dato che non c'è variazione dell'altezza e anche l'energia cinetica finale si annulla dato che la velocità finale è nulla, ovvero nel punto di oscillazione massima. Sostituendo otteniamo quindi,

$$E_{k,i,(M+m)} = U_{f,(M+m)} \Rightarrow \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = (M+m)g\Delta h$$

Osserviamo ora che v_f è la stessa che c'è sopra nella conservazione della quantità di moto, quindi possiamo ricavarla da quella e sostituirla qui. Questo perchè consideriamo che la quantità di moto finale (nella formula della conservazione della quantità di moto) e l'energia cinetica iniziale (nella formula della conservazione dell'energia) sono prese allo stesso istante di tempo.

Sostituendo e facendo un po di calcoli arriviamo al risultato finale. Osserviamo che il Δh si calcola prendendo l , ovvero la lunghezza del filo, e sottraendogli $l * \cos\theta$, come segue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 &= (M+m)g\Delta h & \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 &= gl(1 - \cos\theta) \\ && \Rightarrow \cos\theta &= 1 - \frac{1}{2gl}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 \\ && \Rightarrow \cos\theta &= 1 - \frac{m^2v^2}{2gl(M+m)^2} \\ && \Rightarrow \theta &= \arccos\left(1 - \frac{m^2v^2}{2gl(M+m)^2}\right) \end{aligned}$$

Questo risultato può essere scritto anche dividendo numeratore e denominatore per M come segue,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2}{2gl\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}$$

e con questo possiamo osservare che se la massa m del proiettile è molto piccola (quasi nulla), rispetto alla massa M del sacco di sabbia ho che $\cos\theta \simeq 1$, ciò significa che $\theta = 0$ e quindi il sacco non si muove. Osserviamo ora che per $\theta \ll 1$, per Taylor si ha $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ e quindi ho che,

$$\theta = \frac{mv}{\sqrt{gl}(M+m)}$$

5.12.3 Urto elastico

Il secondo tipo di urto che vediamo è quello **elastico**, ovvero quello dove i **2 corpi restano tali e "rimbalzano"**. A differenza dell'urto anelastico, in questo caso l'**energia cinetica si conserva** ($E_{k,i} = E_{k,f}$). Ovviamente, anche la **quantità di moto si conserva**. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{x,i} = P_{x,f} \\ P_{y,i} = P_{y,f} \\ P_{z,i} = P_{z,f} \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases}$$

Questa "scomposizione" della quantità di moto è molto importante, perché ci permette di fare un ragionamento sui **gradi di libertà**:

Dim.	Eq. Moto	Eq. Cinetica	Eq. Tot	Incognite	Grad. Libertà
3	3	1	4	6	6-4 = 2
2	2	1	3	4	4-3 = 1
1	1	1	2	2	2-2 = 0

Prendiamo ad esempio le 3 dimensioni: con tre dimensioni abbiamo **3 assi**, quindi abbiamo **3 equazioni per la quantità di moto**, e **1 equazione per l'energia cinetica**. Espandiamo queste equazioni ("comprimendo" la quantità di moto, solo per risparmiare spazio):

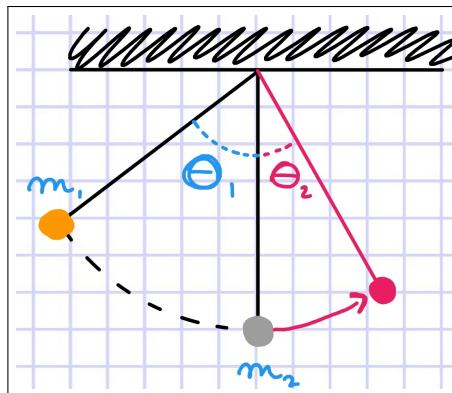
$$\begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 * \vec{v}_{1,i} + m_2 * \vec{v}_{2,i} = m_1 * \vec{v}_{1,f} + m_2 * \vec{v}_{2,f} \\ \frac{1}{2}m_1 * \vec{v}_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 * \vec{v}_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 * \vec{v}_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 * \vec{v}_{2,f}^2 \end{cases}$$

Da questa espansione, possiamo notare che **non conosciamo le velocità finali dei 2 corpi!** Espandendo il moto sui 3 assi avrebbe **6 incognite**: 3 per la velocità finale del primo corpo e 3 per quella del secondo corpo. Il "problema" è che abbiamo **un sistema di 4 equazioni con 6 incognite**: avessimo soltanto 4 incognite, potremmo risolverlo "matematicamente", in questo caso però dobbiamo **introdurre 2 gradi di libertà** (che possono essere angoli di entrata, velocità fissate su 2 assi, ...) per poter risolvere matematicamente le altre incognite rimanenti.

Per quanto riguarda il caso **unidimensionale** invece è **tutto fissato!** Se l'evento si sviluppa su un solo asse possiamo calcolare tutto usando soltanto il principio di conservazione della quantità di moto.

5.12.3.1 Esempio di esercizio

Vediamo un esempio:



In particolare, abbiamo una biglia di massa m_1 sostenuta da un cavo inestensibile lungo l con un angolo θ_1 rispetto alla posizione a riposo del pendolo. Ad un certo punto, questa biglia inizierà a cadere scontrandosi

con l'altra biglia di massa m_2 , sempre sostenuta allo stesso modo ma in posizione di equilibrio. Nota che **le 2 masse non sono uguali!** Vediamo velocemente un po' di casistica al momento dell'urto:

- $m_1 > m_2$: la biglia 2 inizia a dondolare, la biglia 1 continua a dondolare "di meno" seguendo il percorso iniziale (è come se trascinasse la biglia 2);
- $m_1 < m_2$: la biglia 2 inizia a dondolare, la biglia 1 continua a dondolare "di meno" però nel verso opposto (è come se rimbalzasse sulla biglia 2);
- $m_1 = m_2$: la biglia 1 trasferisce tutto il suo moto alla biglia 2, la quale compirà lo stesso moto della biglia 1 (è come uno di quei giochi da ufficio con le biglie);

Tornando al nostro esercizio, **date le 2 masse e l'angolo iniziale della biglia 1, trovare l'angolo massimo della biglia 2**. Nota che, come visto nella casistica, dato che le masse sono diverse la biglia 1 compirà un qualche movimento dopo l'urto, ma a noi non interessa!

Ora, possiamo vedere questo problema come la **composizione di 2 diversi problemi**:

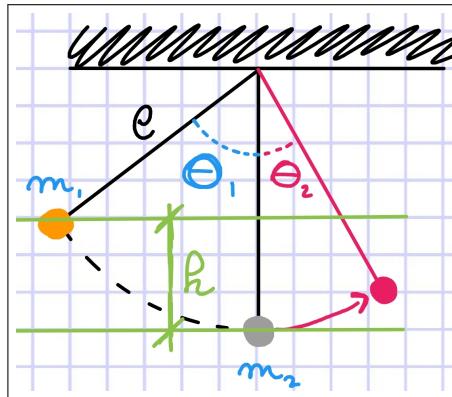
1. **pendolo**: calcolo dell'angolo θ e della velocità che la biglia 1 acquisisce appena prima di urtare la biglia 2;
2. **urto**: urto vero e proprio, principalmente ci chiediamo quanta velocità viene passata alla biglia 2 dopo l'impatto;

Continuiamo a piccoli passi:

Velocità pre-impatto Il primo passo è **calcolare la velocità della biglia 1 prima dell'impatto con la 2**. Come facciamo? Possiamo avvalerci del **principio di conservazione dell'energia meccanica**: in questo caso possiamo notare che **non ci sono forze dissipative** (come sempre supponiamo di fare tutti i nostri esperimenti nel vuoto, evitando l'attrito dell'aria), quindi **l'energia potenziale della biglia 1 (U) verrà completamente convertita in energia cinetica (E_k)**! Noi sappiamo che:

$$U = m * a * \Delta h$$

In particolare, abbiamo che l'accelerazione corrisponde a quella di gravità terrestre, mentre il Δh è questo piccolo segmento qui:



Per calcolarla possiamo sfruttare un po' di trigonometria, in particolare:

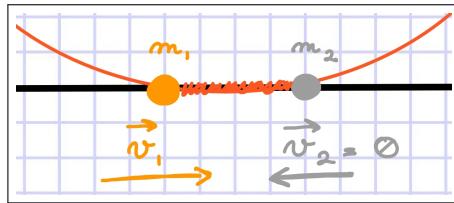
$$\Delta h = l - l * \cos(\theta_1) = l(1 - \cos(\theta_1))$$

Ora che abbiamo le 2 componenti che ci servono, semplicemente le **mettiamo in uguaglianza** (data la conservazione delle energie) e ci troviamo la nostra velocità:

$$\begin{aligned}
 U &= E_k \\
 &\Rightarrow m * g * \Delta h = \frac{1}{2} * m * v^2 \\
 &\Rightarrow g * \Delta h = \frac{1}{2} * v^2 \\
 &\Rightarrow 2 * g * \Delta h = v^2 \\
 &\Rightarrow \sqrt{2 * g * \Delta h} = v \\
 &\Rightarrow \sqrt{2 * g * l(1 - \cos(\theta_1))} = v_{i,1}
 \end{aligned}$$

Ricorda però che nella formula "vera" sia l'energia cinetica iniziale (quella che abbiamo in posizione θ) che l'energia potenziale finale (quella che abbiamo in posizione $\theta = 0$) sono importanti! In questo caso possiamo ignorarle dato che sono entrambe nulle (la biglia parte da ferma e finisce nella posizione più bassa possibile).

Trasferimento di energia nell'urto Ora ci troviamo nella "fase di urto", dobbiamo capire **come viene trasmessa l'energia tra le 2 biglie**, in particolare **quanto sarà veloce alla fine la biglia 2**. In questa fase, possiamo **approssimare l'urto come un urto unidimensionale**:



Aprendo una piccola parentesi, concentrando solo sulle forze orizzontali presenti in quel piccolissimo istante in cui c'è l'urto effettivo possiamo **ignorare di fatto la forza peso** che spinge verso il basso, pertanto il sistema "biglie" **può essere considerato un sistema isolato!** Tornando a noi, partendo dal principio di conservazione del moto e dell'energia cinetica, possiamo fare un po' di operazioni algebriche in modo da ricavarci effettivamente la velocità della biglia 2 (possiamo farlo perché ci siamo ricondotti al caso monodimensionale):

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} P_i = P_f \\ E_{k,i} = E_{k,f} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m_1 * v_{1,i} + m_2 * v_{2,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} \\
 v_{2,1} \text{ nulla, togliamo} &\Rightarrow \begin{cases} m_1 * v_{1,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A questo punto possiamo identificare **2 incognite**: $v_{1,f}$ e $v_{2,f}$. Dato che a noi interessa solo conoscere θ_2 ,

ci concentriamo solo sulla risoluzione di $v_{2,f}$, quindi ci rigiriamo un po' le formule di prima:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m_1 * v_{1,i} = m_1 * v_{1,f} + m_2 * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f} \\ \frac{1}{2} * m_1 * v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} * m_1 * (v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f})^2 + \frac{1}{2} * m_2 * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = (v_{1,i} - \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f})^2 + \frac{m_2}{m_1} * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = (v_{1,i} - \rho * v_{2,f})^2 + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ v_{1,i}^2 = v_{1,i}^2 + \rho^2 * v_{2,f}^2 - 2 * v_{1,i} * \rho * v_{2,f} + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = \rho^2 * v_{2,f}^2 - 2 * v_{1,i} * \rho * v_{2,f} + \rho * v_{2,f}^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = v_{2,f} * [\rho * (1 + \rho) * v_{2,f} - 2 * \rho * v_{1,i}] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{1,f} = v_{1,i} - \rho * v_{2,f} \\ 0 = v_{2,f} * [(1 + \rho) * v_{2,f} - 2 * v_{1,i}] \end{cases} \end{aligned}$$

Da quest'ultima equazione in **rosso** otteniamo che la velocità di uscita della seconda biglia può assumere 2 valori distinti:

- $v_{2,f} = 0$, questo potrebbe succedere **qualora non ci fosse interazione tra le 2 biglie**, questo caso a noi non interessa;
- $v_{2,f} = \frac{2*v_{1,i}}{1+\rho} = \frac{2*v_{1,i}}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{2*m_1*v_{1,i}}{m_1+m_2}$, quest'ultima soluzione è molto più interessante per noi!

Calcolo finale dell'angolo Nella fase precedente ci siamo calcolati la **velocità di uscita della biglia 2 dall'urto**, ora dobbiamo calcolare l'angolo di oscillazione massimo. Come facciamo? Allora, prima abbiamo stabilito che:

$$v_{i,1} = \sqrt{(2 * g * \Delta h_1)} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_1))}$$

Allo stesso modo, possiamo dire praticamente la stessa cosa per la velocità finale della biglia 2! Ovvvero:

$$v_{2,f} = \sqrt{(2 * g * \Delta h_f)} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_2))}$$

PERO', al punto prima abbiamo stabilito che:

$$v_{2,f} = \frac{2 * m_1 * v_{1,i}}{m_1 + m_2}$$

A questo punto ci basta mettere questi 2 punti insieme e rigirare un po' il tutto, in modo da **trovare l'angolo che ci interessa!**

$$\frac{2 * m_1 * v_{1,i}}{m_1 + m_2} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_2)))} \Rightarrow \frac{2 * m_1}{m_1 + m_2} * \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_1)))} = \sqrt{(2 * g * l(1 - \cos(\theta_2)))}$$

$$\begin{aligned} \text{Questa costante la chiamiamo "A" noi} &\Rightarrow A * \sqrt{2 * g * l(1 - \cos(\theta_1))} = \sqrt{2 * g * l(1 - \cos(\theta_2))} \\ &\Rightarrow A * \sqrt{1 - \cos(\theta_1)} = \sqrt{1 - \cos(\theta_2)} \end{aligned}$$

A questo punto, abbiamo le radici che rompono, quindi possiamo **moltiplicare da entrambe le parti per 2 ed applicare la formula di bisezione del seno** (nota che si riesce a fare anche senza, semplicemente viene più comodo):

$$\begin{aligned}
 A * \sqrt{1 - \cos(\theta_1)} &= \sqrt{1 - \cos(\theta_2)} \\
 \text{Bisezione del seno} &\Rightarrow A * \sqrt{2 * \frac{1 - \cos(\theta_1)}{2}} = \sqrt{2 * \frac{1 - \cos(\theta_2)}{2}} \\
 &\Rightarrow A * \sqrt[4]{2} * \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \sqrt[4]{2} * \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\
 &\Rightarrow \frac{\theta_2}{2} = \arcsin(A * \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)) \\
 &\Rightarrow \theta_2 = 2 * \arcsin(A * \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right))
 \end{aligned}$$

6 Termodinamica

La **termodinamica** è il ramo della fisica classica e della chimica che studia e descrive le trasformazioni termodinamiche indotte da calore a lavoro e viceversa in un sistema termodinamico, in seguito a processi che coinvolgono cambiamenti delle variabili di stato temperatura ed energia.

Ci ricordiamo ora che il lavoro delle forze non conservative è la variazione di energia meccanica, ovvero come segue,

$$W_{N.C.} = E_f - E_i$$

6.1 Numero di Avogadro

Consideriamo ora un numero molto alto di costituenti del sistema. Le relazioni che ci sono tra di essi sono espresse in un'unità di misura che è il **numero di Avogadro**,

$$N_A = 6,022 * 10^{23} = 1 mol$$

esso indica quanti costituenti fondamentali sono contenuti in una certa quantità di sostanza detta **mole**.

6.2 Sistema termodinamico

Nella termodinamica vediamo l'universo composto da due parti, il **sistema termodinamico** e l'**ambiente**. Tra questi due c'è un'iterazione/scambio continuo ed in base a questo scambio definiamo i diversi tipi di sistemi termodinamici:

	ENERGIA	MATERIA	ESEMPIO
APERTO	si	si	pentola d'acqua che bolle senza coperchio
CHIUSO	si	no	pentola d'acqua che bolle con coperchio
ISOLATO	no	no	contenitore isolato che contiene acqua
IMPOSSIBILE	no	si	impossibile, scambio materia => scambio energia

6.3 Variabili termodinamiche

Le **variabili termodinamiche**, anche dette **coordinate termodinamiche**, si distinguono in **grandezze estensive**, ovvero quelle che dipendono dall'estensione del sistema termodinamico (eg. volume, massa), e **grandezze intensive**, ovvero quelle che non dipendono dall'estensione del sistema termodinamico (eg. pressione, temperatura, densità).

Queste variabili sono anche distinte in **variabili globali**, ovvero quelle che sono riferibili a tutto il sistema (come la temperatura, nel caso in cui si lasci abbastanza tempo ad un corpo di scaldarsi/raffreddarsi), e **variabili locali**, ovvero quelle che sono riferibili ad una parte del sistema (come la densità, se si pensa ad una torta con crema e frutta, queste due avranno densità diversa).

Il loro numero dipende dal sistema che sto considerando e le più famose sono **pressione, temperatura, volume, densità, massa,...**

Osserviamo che per i sistemi di gas useremo pressione, volume e temperatura ed inoltre il numero di moli e di componenti.

6.4 Equilibrio termodinamico

L'**equilibrio termodinamico** di un sistema termodinamico si ha quando tutte le suoi corpi/componenti sono in:

- **equilibrio meccanico**: ovvero quando non ci sono momenti delle forze che agiscono tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.
- **equilibrio termico**: ovvero quando non c'è nessuna differenza di temperatura tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.
- **equilibrio chimico**: ovvero quando non c'è nessuna reazione chimica tra i suoi corpi/componenti, qualsiasi questi siano.

6.5 Trasformazione termodinamica

Una **trasformazione termodinamica** è il passaggio del sistema termodinamico da uno stato termodinamico ad un altro.

Un esempio è il passaggio da caldo a freddo, in esso ci sono tanti passaggi/variazioni:

- **espansione/contrazione** di liquidi e gas

- variazione resistenza elettrica

- variazione differenza di potenziale

- variazione di riflettività/trasmittanza

È utile rappresentare le trasformazioni come spostamenti in un piano di coordinate. Per i gas di solito si usa il piano V, p .

6.6 Temperatura

La **temperatura** si misura su una scala e corrisponde alla media dell'energia cinetica dei componenti del sistema, ovvero quanto i componenti "sono agitati".

6.6.1 Unità di misura temperatura

La temperatura si misura con diverse unità di misura, **Celsius** ($^{\circ}\text{C}$), **Fahrenheit** ($^{\circ}\text{F}$) e **Kelvin** (K). Osserviamo che il simbolo della temperatura, per il Kelvin è **T**, mentre per le altre unità di misura è **t**, quindi la maiuscola è solo per il Kelvin.

Per passare da una u.d.m. all'altra le formule sono le seguenti,

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.16$$

$$t(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5}t(^{\circ}\text{C}) + 32$$

e le restanti si possono ricavare da queste.

6.6.2 Punto triplo dell' H_2O

Il **punto triplo dell'** H_2O è il punto in cui coesistono i 3 stati della materia, che nel caso dell' H_2O sono ghiaccio, acqua e vapore acqueo, e corrisponde a

$$T_0 = 273.16\text{K} = 0^{\circ}\text{C}$$

6.6.3 Termometro

Un **termometro** è un sistema fisico, usato come strumento, che ci permette di esprimere le variazioni di temperatura in funzione di una grandezza fisica,

$$\begin{aligned}\Delta T &\rightarrow \Delta X \\ T &= T(x)\end{aligned}$$

Nel caso di termometro a mercurio, la grandezza fisica è la lunghezza della colonnina di mercurio che leggiamo.

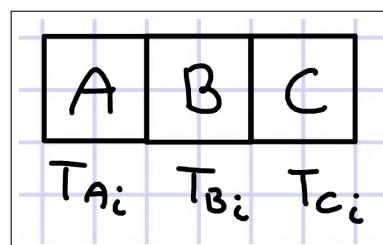
Si cerca di far sì che questa lunghezza sia lineare, ovvero che cresca linearmente con la temperatura, in modo che,

$$T = T(X) = \beta X$$

Quando si costruisce un termometro si deve calibrarlo, per farlo si prende una temperatura di riferimento (T_0) e si misura la lunghezza (X_0), poi con questi due dati si calcola,

$$\beta = \frac{T_0}{X_0}$$

6.6.4 Contatto termico



Supponiamo di avere tre corpi, A, B e C a contatto tra loro come in figura, con temperature iniziali $T_{A,i}$, $T_{B,i}$ e $T_{C,i}$ corrispondentemente, diverse tra di loro.

Dopo un periodo di tempo abbastanza lungo, le tre temperature, $T_{A,f}$, $T_{B,f}$ e $T_{C,f}$, saranno uguali. Se invece aspettiamo poco tempo, ci si può trovare in diverse situazioni a seconda del tipo di contatto tra i corpi.

Le pareti si dividono quindi in:

- **pareti diatermiche**: permettono lo scambio di calore grazie all'ottimo contatto
- **pareti adiabatiche**: non permettono scambio di calore, sono quindi "isolanti"

Il **contenitore adiabatico** è un contenitore isolante termicamente.

Osserviamo che in pratica, se si aspetta un tempo sufficientemente lungo, niente è perfettamente isolante.

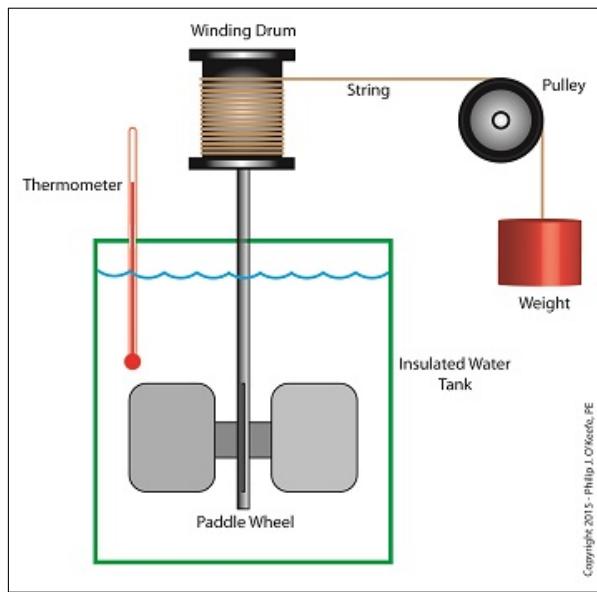
6.6.5 Principio zero della termodinamica

Il principio zero della termodinamica dice che se due corpi sono entrambi in equilibrio termico con un terzo corpo, allora lo sono anche fra loro, ovvero se A e B sono in equilibrio termico e B e C sono in equilibrio termico, allora anche A e C sono in equilibrio termico.

Questo si traduce nel fatto che se,

$$T_A = T_B \quad AND \quad T_B = T_C \quad \Rightarrow \quad T_A = T_C$$

6.7 Esperimento di Joule



Supponiamo di avere un contenitore con pareti adiabatiche, riempito di un fluido al cui interno è inserito un **mulinello** agganciato ad una puleggia a cui è appesa una massa m . La massa andando su e giù fa girare il mulinello, che a sua volta fa scaldare l'acqua.

Ora si può legare Δh a ΔT . Il lavoro che compio è il seguente,

$$W = mg\Delta h$$

Analogamente al mulinello posso immergere una **resistenza** nell'acqua e in questo caso ottengo lavoro,

$$W = \frac{\Delta V^2}{R} \Delta t$$

Stessa cosa se immergo in acqua un'**elica** e la faccio muovere su e giù, o due **piastre** che faccio sfregare tra loro producendo attrito.

Posso anche immergere un **pallone** nell'acqua e far variare il suo volume.

In conclusione quindi se faccio lavoro (o casino) dentro ad un sistema termodinamico, la temperatura (o agitazione) aumenta, infatti il lavoro è legato alla variazione di temperatura, a lavori uguali corrispondono variazioni di temperatura uguali,

$$W = -\Delta U_{int}$$

Osserviamo che il segno "-" è una convenzione adottata in termodinamica, dato che quello che interessa della macchina termica è il lavoro che "l'acqua" può compiere. Se il sistema da energia, il lavoro sarà > 0 , se invece il sistema riceve energia, il lavoro sarà < 0 .

Con questo esperimento abbiamo appreso che l'energia interna dipende solo dalla temperatura ovvero,

$$U = U(T)$$

6.8 Calore

Il **calore** è quindi ciò che determina la variazione di temperatura,

$$\Delta T = \gamma Q \Rightarrow Q = \frac{1}{\gamma} \Delta T = \frac{1}{\gamma} (T_f - T_i) = \frac{1}{\gamma} (U_f - U_i) = \frac{1}{\gamma} \Delta U = \eta \Delta U$$

con $\eta = \frac{1}{\gamma}$. Ora quindi se confrontiamo due differenze di temperature,

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= \gamma Q_1 \\ \Delta T_2 &= \gamma Q_2\end{aligned}$$

otteniamo,

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{\gamma Q_2}{\gamma Q_1}$$

Ora sperimentalmente si prova che $\eta = 1$ e quindi ottengo che,

$$Q = \Delta U_{int}$$

Ovvero il calore è tutto energia interna.

Osserviamo che introducendo il calore abbiamo generalizzato il principio di conservazione dell'energia, infatti il calore è un modo per scambiare l'energia.

6.8.1 Esempio di calore

La massa (e.g. carbone) che brucio per scaldare una pentola d'acqua darà un certo calore che, a parità di massa, dipende da tante cose come l'umidità, la qualità del carbone, il tipo di pentola che uso,... Tutte queste sono delle costanti quindi ho,

$$Q = c_p c_h c_q \dots m$$

Facendo un po' di esperimenti in condizioni diverse si potranno osservare delle variazioni di temperatura diverse, quello che però osservo sempre è che se raddoppio la massa che brucio, raddoppia anche la variazione di temperatura, la costante γ tiene conto di queste costanti.

6.9 Principio di equivalenza calore-lavoro

Dato ora quindi che il calore è $Q = \Delta U_{int}$ e ricordandoci da prima che $W = -\Delta U_{int}$ possiamo ricavare che,

$$Q = -W \Leftrightarrow W = -Q$$

Il calore e il lavoro quindi sono energia in trasferimento/movimento, identificano una differenza tra lo stato iniziale e lo stato finale.

6.10 I principio della termodinamica

Tornando ora a parlare della variazione d'energia interna, essa è causata in parte dal lavoro che il sistema compie/subisce e in parte dal calore che il sistema assorbe/cede, ovvero

$$\begin{aligned}\Delta U_{int} &= \Delta U_{int}^{(W)} + \Delta U_{int}^{(Q)} \\ \Delta U_{int}^{(W)} &= -W \\ \Delta U_{int}^{(Q)} &= Q\end{aligned}$$

La variazione di energia interna dovuta al lavoro è $-W$ dato che se il sistema compie lavoro, questo viene a "danno" della sua energia interna. Per la variazione di energia dovuta al calore invece è Q dato che se ricevo calore questo si "trasforma" in energia interna.

In conclusione quindi ho che la variazione di energia interna è la differenza tra il calore e il lavoro,

$$\Delta U_{int} = Q - W$$

Osserviamo ora che per passare dallo stato iniziale a quello finale ci sono tanti modi/traiettorie, ognuna delle quali ha il suo Q_i e il suo W_i , la ΔU però è sempre uguale, indipendentemente dalla traiettoria.

Ora posso concentrarmi sulle quantità infinitesimali, quindi mi verrebbe da scrivere,

$$dU = dQ - dW$$

La parte sinistra all'"=" è corretta, infatti la variazione di energia dipende solo dallo stato iniziale e da quello finale, è differenziabile. La parte destra invece, quindi la variazione di calore e di lavoro dipende anche dal percorso e non è un differenziale esatto, quindi si usa δ come segue,

$$dU = \delta Q - \delta W$$

La variazione infinitesima di calore e di lavoro dipende quindi dalla trasformazione γ che effettuo sul piano,

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta Q_\gamma(p, V, T) \\ \delta W &= \delta W_\gamma(p, V, T)\end{aligned}$$

6.11 Tipi di trasformazioni termodinamiche

6.11.1 Trasformazione ciclica

Una **trasformazione ciclica** è una trasformazione per cui lo stato iniziale e quello finale coincidono. Dato quindi che $i \equiv f$ ho che,

$$\begin{aligned}T_i &= T_f \\ U_i &= U_f\end{aligned}$$

e quindi,

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

Infatti se ho incamerato energia, devo in qualche modo restituirla all'ambiente esterno, per far si stato iniziale e finale coincidano.

I motori per esempio fanno trasformazioni cicliche.

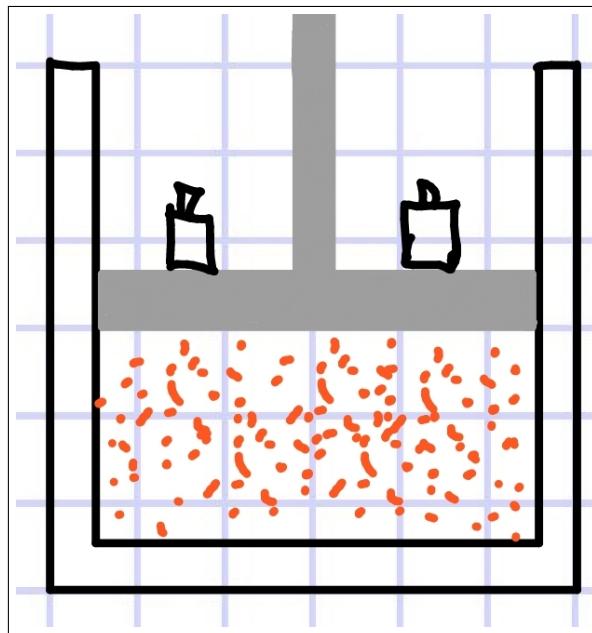
6.11.2 Trasformazione quasi-statica

Una **trasformazione quasi-statica** è una trasformazione in cui ogni stato intermedio è uno stato di equilibrio, dove le "cose" sono fatte con "dolcezza" tale da non perturbare ne il sistema ne l'ambiente esterno.

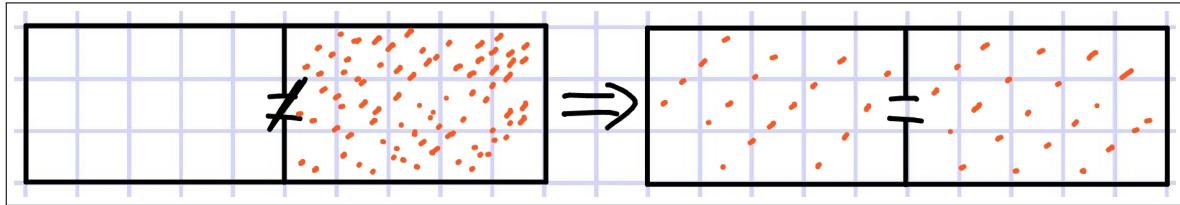
6.11.3 Trasformazione reversibile

Una **trasformazione reversibile** è una trasformazione in cui si "può tornare indietro". Per essere reversibile, una trasformazione deve essere quasi statica e non ci devono essere dissipazioni.

6.11.3.1 Esempio trasformazione reversibile Supponiamo di avere un contenitore, con del gas all'interno, aperto sopra e nell'apertura è inserito un pistone, supponiamo anche che tra il pistone e le pareti non ci siano perdite. Se ora metto dei pesetti sopra il pistone, riesco a farlo abbassare. Posso assumere che gli infiniti stati intermedi infinitesimi sono in equilibrio, quindi la trasformazione è quasi-statica. Inoltre è una trasformazione reversibile, infatti togliendo i pesetti che ho messo sopra il pistone, il sistema ritorna allo stato in cui era prima di metterci i pesetti.



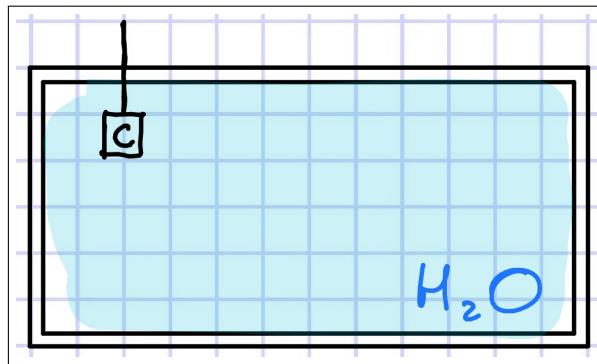
6.11.3.2 Esempio trasformazione non reversibile Questo esempio riguarda l'espansione libera dei gas, infatti ho un contenitore adiabatico separato all'interno in due camere con un rubinetto che le collega. All'inizio il rubinetto è chiuso e nella camera destra c'è gas, mentre in quella sinistra il vuoto. Se ora apro il rubinetto ed aspetto un certo tempo, finisco nella situazione in cui il gas si è distribuito nelle due camere. Ora per far si che il gas torni tutto nella camera destra (situazione iniziale) devo aspettare tempo infinito.



6.11.4 Lentezza

Ci riferiamo alla **lentezza** come la caratteristica/velocità di un processo (trasformazione termodinamica) che ci consente di trattare tutti gli stati intermedi come stati di equilibrio e che ci consente di raffigurare la trasformazione come passaggi su infiniti stati intermedi tutti di equilibrio.

6.12 Calorimetria



Consideriamo un sistema termodinamico composto da un contenitore adiabatico con all'interno H_2O a $T_{H_2O,i}$ ed un corpo c immerso nell'acqua a $T_{c,i}$ (analogamente se considero due masse solide a contatto tra loro in un contenitore adiabatico ottengo gli stessi risultati). Aspettando un istante di tempo abbastanza lungo passo dal sistema descritto sopra, ad un sistema in cui l' H_2O e c hanno la stessa temperatura T_* , quindi ipotizzando che l' H_2O abbia temperatura inferiore a c abbiamo che $T_{H_2O,i} < T_* < T_{c,i}$. Ora essendo il sistema isolato abbiamo che,

$$Q = 0 \quad AND \quad W = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$$

e quindi,

$$0 = \Delta U = \Delta U_{H_2O} + \Delta U_c \Rightarrow \Delta U_{H_2O} = -\Delta U_c$$

ovvero l'energia interna che l' H_2O "guadagna" la "toglie" dal corpo c . Osserviamo ora che $\Delta V = 0$, ovvero il volume non cambia, e quindi $\Delta W = 0$ sia per l' H_2O che per c e quindi ho che,

$$\begin{aligned}\Delta U_{H_2O} &= Q_{H_2O} - W_{H_2O} \\ \Delta U_c &= Q_c - W_c\end{aligned}$$

La variazione di energia interna avviene tutta per cambio di calore, e quindi ora ottengo,

$$\Delta U_{H_2O} = -\Delta U_c \Rightarrow Q_{H_2O} = -Q_c$$

Ora devo capire a che energia corrisponde la variazione di temperatura, questa mi consente di calcolare il lavoro che mi serve per fare aumentare la temperatura dell' H_2O . Questo sarà il calore Q_{H_2O} , che sarà $-Q_c$. Ora ottengo che

$$Q = c_\gamma m \Delta T$$

dove c_γ è il calore specifico.

Osserviamo che questa è una trasformazione non reversibile, infatti devo aspettare infinito tempo per far si che le due temperature tornino ai valori iniziali.

6.12.1 Calore specifico

Il **calore specifico** di un corpo è una costante definita come segue,

$$c = \frac{1}{m} \left[\frac{dQ}{dT} \right]_\gamma$$

La sua unità di misura è quindi $\frac{J}{kgK}$.

Osserviamo ora che il calore specifico si cita per una particolare trasformazione, infatti scrivere,

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

oppure,

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}$$

sarebbe sbagliato.

Osserviamo ora che il fatto di scambiare calore con l'esterno non implica che ci sia una variazione di temperatura, infatti quest'ultima si ha solo quando varia l'energia interna.

Il calore specifico è utile solo nel caso in cui c'è variazione di temperatura. Per esempio quando l'acqua nel freezer diventa ghiaccio (passaggio di fase), non c'è variazione di temperatura anche se il frigo ha spento energia per ghiacciare l'acqua, quindi c'è scambio di calore ma non ha senso parlare di calore specifico.

Per una qualsiasi trasformazione quasi-statica, da P_i a P_f , il calore è definito come segue,

$$Q = \int_{P_i}^{P_f} \delta Q = \int_{P_i}^{P_f} mc_\gamma dT$$

ed in alternativa,

$$Q = C(T_f - T_i)$$

dove C è la capacità termica.

6.12.2 Calorimetro

Il **calorimetro** è un sistema controllato per il quale so connettere la variazione di temperatura al calore ricevuto. Quello dell'esempio precedente (contenitore adiabatico contenente acqua ed un oggetto immerso), è un calorimetro a bagno.

6.12.3 Capacità termica

La **capacità termica** è il prodotto tra massa e calore specifico della trasformazione che stiamo considerando, ovvero come segue,

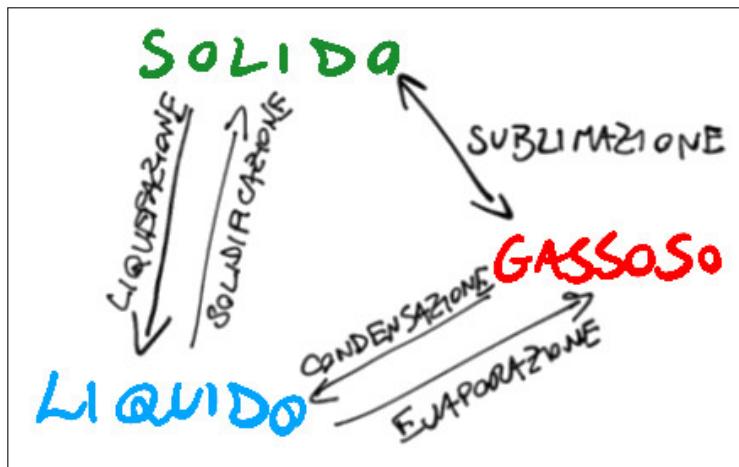
$$C = mc_\gamma$$

6.13 Cambi di fase

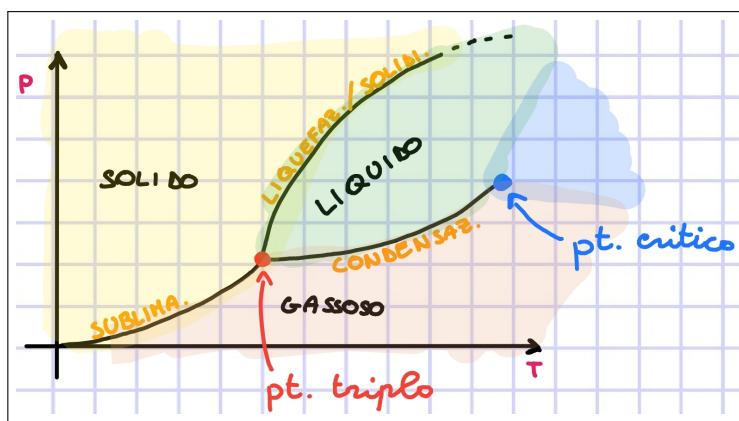
La materia può trovarsi in **3 diversi stati**:

- solido: il corpo ha forma e volume propri;
- liquido: il corpo ha un volume proprio ma assume la forma del recipiente che lo contiene;
- gassoso: il corpo, molto spesso aeroforme, assume forma e volume del recipiente che lo contiene;

Sotto certe condizioni, un corpo può passare da uno stato all'altro, questo passaggio, in base agli stati iniziale e finale, ha doversi nomi:



Quando si parla di termodinamica, le "scale di misura" importanti sono volume, **pressione** e **temperatura**, se prendiamo le ultime 2 e le rappresentiamo su un piano cartesiano otteniamo quello che viene detto **diagramma di fase**:



Ovviamente varia da materiale a materiale, ma sostanzialmente la forma è quella. Prendendo ad esempio l'acqua, in corrispondenza di $T = 273,16\text{K}$ e $P = 611\text{Pa}$ abbiamo quello che si definisce **punto triplo**, ovvero quel punto in cui le **3 linee di demarcazione si intersecano**. In questo punto, i 3 stati possono coesistere contemporaneamente (in rosso nell'immagine)! È particolarmente importante perché **definisce la scala di temperatura**. Un altro punto particolarmente importante è quello che viene definito **punto critico**, ovvero il punto in cui **finisce la linea di demarcazione tra liquido e gas**. In particolare, oltre quel punto, gli stati gassoso e liquido non sono più distinguibili (fluido supercritico).

6.13.1 Calori latenti

Immaginiamo di voler far passare dell'acqua dallo stato liquido a quello gassoso: osservando il diagramma di fase, possiamo notare che per farlo potremmo far variare la pressione, mantenendo la temperatura stabile, oppure modificare la temperatura mantenendo la pressione stabile (oppure anche modificare entrambe ovviamente). Se decidessimo di mantenere la temperatura stabile, e quindi spostarci solo sull'asse P, potremmo notare che per mantenere la temperatura effettivamente stabile **dobbiamo fornire calore al sistema!** Il passaggio da liquido a gassoso, in genere, **ha bisogno di assorbire calore dall'ambiente circostante per effettuare il cambio di fase.** Allo stesso modo, se passassimo da gassoso a liquido dovremmo **assorbire noi calore** per poter mantenere la temperatura stabile.

In particolare, questo "calore che non fa variare la temperatura", definito **calore latente di fusione/evaporazione/...**, è proporzionale alla massa dell'oggetto sottoposto al cambio di fase, in particolare la formula è:

$$Q_\lambda = \lambda * m$$

Il parametro importante di questa formula è il λ , ovvero la **costante di calore latente** e varia da materiale a materiale e, soprattutto, in base alla temperatura alla quale si trova il corpo sottoposto al cambio di fase. Facciamo alcuni esempi con l'acqua:

$$\lambda_{fusione} = 3,3 * 10^5 \frac{J}{Kg} \iff 273,16K \quad \lambda_{evaporazione} = 22,6 * 10^5 \frac{J}{Kg} \iff 373,16K$$

Idealmente, se andiamo verso lo stato solido (nel diagramma di fase saliamo verso l'alto sull'asse della pressione) è **il cambio di fase a darci calore** (siamo noi che dobbiamo assorbirlo), quindi abbiamo:

$$Q_\lambda = -\lambda * m$$

Se invece andiamo verso lo stato gassoso (nel diagramma di fase sceniamo verso il basso sull'asse della pressione) siamo **noi che dobbiamo dare calore al cambio di fase** (è il cambio di fase che lo assorbe), quindi abbiamo:

$$Q_\lambda = +\lambda * m$$

Nota che facciamo questo discorso (noi che forniamo calore, noi che assorbiamo calore). I **calori latenti** sono molto interessanti in quanto sono uno dei pochi casi in cui **abbiamo uno scambio di calore senza un'effettiva variazione di temperatura**.

6.13.1.1 Esempio Facciamo un veloce esercizio: *abbiamo 1 litro di acqua liquida ad una temperatura di 273,16 K, quanto calore dobbiamo fornire/sottrarre dal sistema per solidificare l'acqua mantenendo la temperatura costante?*

Allora, la prima cosa da notare è che **da liquido vogliamo passare a solido**, quindi la costante che ci interessa sarà **quella della fusione "al contrario"**. Avremmo allora:

$$Q_\lambda = \lambda_{solidificazione} * m = -\lambda_{fusione} * m$$

Ora, un altro problema è che noi abbiamo **litri** di acqua, non chili. Ricorda che i **i litri sono un'unità di misura del volume**, quindi ci basta semplicemente **moltiplicare il volume per la densità dell'acqua** (in particolare $1 \frac{Kg}{dm^3}$, aka. $1 \frac{Kg}{l}$, infatti $1litro = 1dm^3$). Tornando a noi, avremmo:

$$\begin{aligned} Q_\lambda &= -\lambda_{fusione} * m \\ &= -\lambda_{fusione} * \delta_{H2O} * V_{H2O} \\ &= -3,3 * 10^5 \frac{J}{Kg} * 1 \frac{Kg}{l} * 1l \\ &= -3,3 * 10^5 J = -330KJ \end{aligned}$$

6.13.1.2 Esempio temperatura di equilibrio

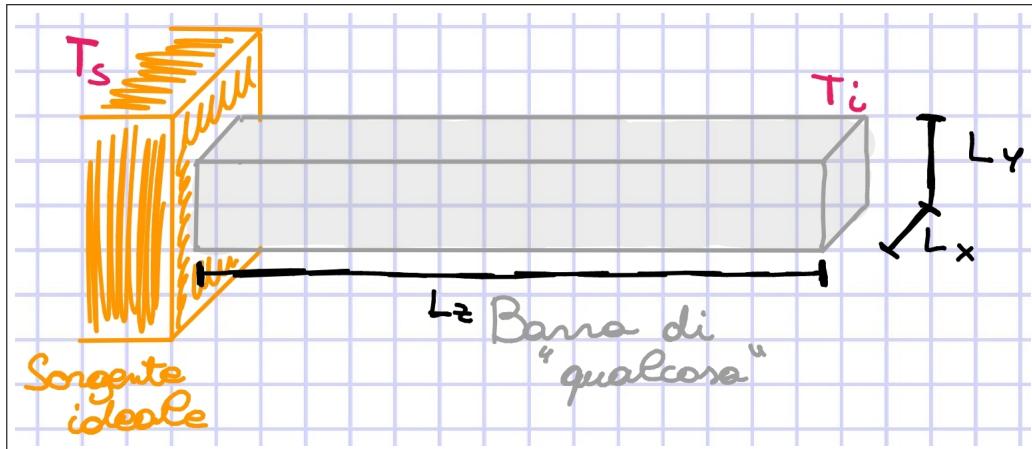
6.14 Trasferimento di calore

Iniziamo col ricordare che il calore non è altro che "*energia in movimento*": fisicamente parlando, un corpo **non ha calore**, ma **ha energia** (ricordalo per l'orale :P). Detto ciò, introduciamo i 3 principali metodi per il trasferimento del calore:

- conduzione;
- convezione;
- irraggiamento;

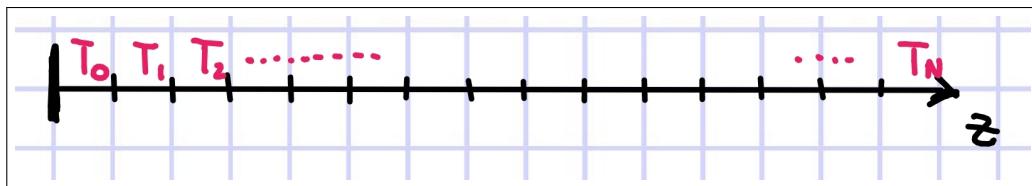
6.14.1 Conduzione

Ovvero il **trasferimento di energia tramite contatto**, immaginamo di avere una barra di "*qualsiasi cosa*" collegata ad una **sorgente di calore ideale** (definiamo sorgente di calore ideale un *corpo ideale capace di fornire/assorbire calore all'infinito*):



La barra inizialmente si trova ad una sua **temperatura iniziale** T_i , mentre la sorgente si trova costantemente ad una **temperatura** T_s . Supponendo che le dimensioni L_x ed L_y della barra (la sua sezione trasversale) siano **trascurabili**, possiamo immaginarla di **dividerla in tratti infinitesimali** per lunghezza. Se lasciamo scorrere il tempo, i **tratti vicini alla sorgente cambieranno la loro temperatura**, avvicinandosi (fino a raggiungere) T_s . Dopo un certo tempo, avremmo che **tutta la barra raggiungerà la temperatura** T_2 .

Come facciamo a quantificare il tutto? Come detto prima, immaginiamo di dividere la barra in molte sezioni trasversali:



Ora, possiamo notare diverse "proporzionalità":

- $Q \propto \Delta T$: il calore assorbito dalla barra è **proporzionale alla differenza di temperatura tra le sue sezioni trasversali**;
- $Q \propto \Delta t$: il calore assorbito dalla barra è **proporzionale al tempo per cui resta a contatto con la sorgente ideale** (più tempo resto a contatto e più calore assorbo);
- $Q \propto S$: il calore assorbito dalla barra è **proporzionale alla superficie di contatto tra la barra e la sorgente** (più superficie ho a contatto con la sorgente e più calore assorbo);

Se consideriamo tratti infinitesimi possiamo ricavare la **legge di Fourier**, ovvero:

$$dQ = -K * \frac{dT}{dz} * dS * dt$$

Analizziamola un po': sostanzialmente ci sta dicendo che la *quantità infinitesima di calore assorbito dalla barra* (e quindi sottratto alla sorgente, per quello il segno -) è *proporzionale alla differenza di temperatura per unità di lunghezza* ($\frac{\Delta T}{dz}$), *alla superficie trasversale della barra* (dS) e *al tempo di contatto* (dt). Tutto ciò è regolato da una costante di proporzionalità (K , nota che è DIVERSA dal Kelvin) che rappresenta la **conducibilità del materiale**.

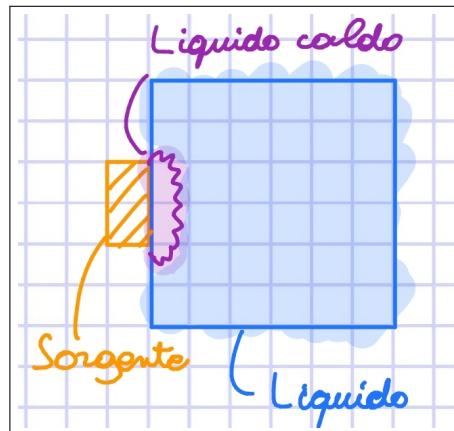
6.14.1.1 La costante di conducibilità Se ci rigiriamo un po' la formula di Fourier, possiamo facilmente notare che l'unità di misura di questa costante corrisponde a $\frac{[energ]}{[lung]*[temp]*[temperat]}$, in particolare avremmo $\frac{J}{ms^2K}$. Più è grande questa costante e più facilmente il nostro materiale condurrà calore, vediamo qualche esempio:

- alluminio: $200 \frac{J}{ms^2K}$, buon conduttore di calore;
- sughero: $0,04 \frac{J}{ms^2K}$, cattivo conduttore di calore

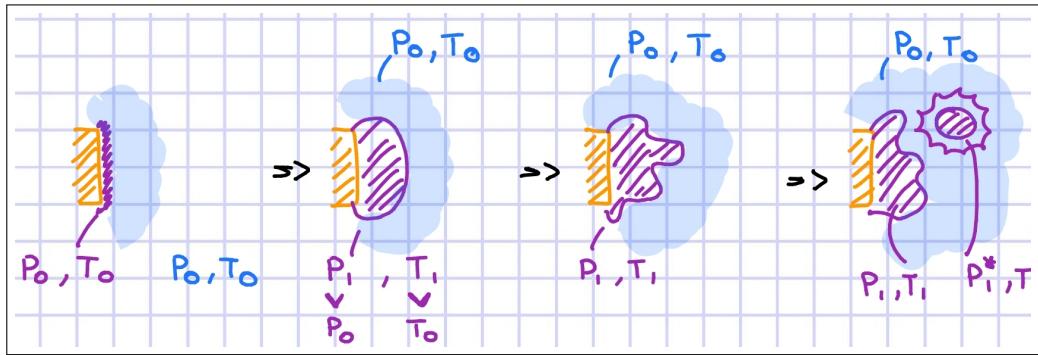
Nota che, la maggior parte delle volte, i buoni conduttori di calore sono anche buoni conduttori di energia elettrica (quindi i metalli).

6.14.2 Convezione

Il metodo di trasferimento del calore principale quando si parla di liquidi e di atmosfera. Non lo trattiamo approfonditamente (dato che i meccanismi algebrici che lo riguardano sono molto complessi), ma lo vediamo velocemente comunque. Supponiamo di essere in questa situazione:



Abbiamo una sorgente a contatto con un liquido più freddo. Ora, vediamo cosa succede se alziamo la temperatura della sorgente e aspettiamo un certo tempo (non specificato, un tempo generico):



Consideriamo diversi momenti:

1. partiremo in un momento in cui tutto il liquido (sia a contatto con la sorgente che non) è alla **stessa pressione P_0 e temperatura T_0** ;
2. col passare del tempo, il liquido a contatto con la sorgente **inizia a scaldarsi** e ciò comporta un **aumento della sua pressione** (al momento prendi per buono);
3. dato che la pressione $P_1 > P_0$, allora il liquido caldo **inizia ad espandersi in maniera irregolare**;
4. dato che l'espansione è irregolare, può succedere che bolle calde si "staccano" dalla sorgente ed iniziano a "fluttuare" nel liquido freddo, **permettendo ad altro liquido freddo di scaldarsi con la sorgente**. Un altro punto importante è che **anche la bolla calda scalderà il liquido freddo!**

Concludendo, l'idea è che, con il passare del tempo, il numero di bolle calde che navigano nel fluido continua ad aumentare finché **tutto il fluido non arriverà alla temperatura della sorgente**.

6.14.3 Irraggiamento

Ogni corpo emette delle **onde elettromagnetiche**, queste non sono altro che **fasci di energia pura**: trasferendo energia possiamo trasferire calore! Ora, la formula che regola questo fenomeno è la **legge di Stefan-Boltzmann**, ovvero:

$$\epsilon = \sigma * e * T^4$$

In particolare abbiamo che:

- ϵ : l'energia emessa da un corpo;
- σ : la **costante di Stefan-Boltzmann**, vale $\sigma = 5,67 * 10^{-8} \frac{J}{m^2*s*K^4}$;
- e : emissività del corpo, possiamo vederla anche come la capacità del corpo di riflettere le onde elettromagnetiche. Vale un valore $\in [0, 1]$, dove 1 identifica la "massima riflettività" del corpo, mentre 0 il "massimo assorbimento" (un corpo totalmente nero) **NON SICURO!!! RICONTROLLARE**;
- T^4 : la temperatura ⁴ del corpo che consideriamo.

Se analizziamo l'unità di misura di questa quantità ϵ vediamo che corrisponde a $\frac{J}{m^2*K}$, in altre parole $[\epsilon] = [\frac{E}{L^2*T}]$, ovvero Energia su Lunghezza²*Temperatura. Nota che tutti i corpi emettono queste onde elettromagnetiche, un esempio interessante (e soprattutto che potrebbe tornare all'esame) è quello della **costante solare**, ovvero la quantità di energia "irraggiata" dal sole. Identifichiamo questa quantità (così

come un sacco di altre cose che non centrano niente, quindi ATTENZIANE) con la lettera c e la chiamiamo **costante solare**. In particolare, vale (mediamente):

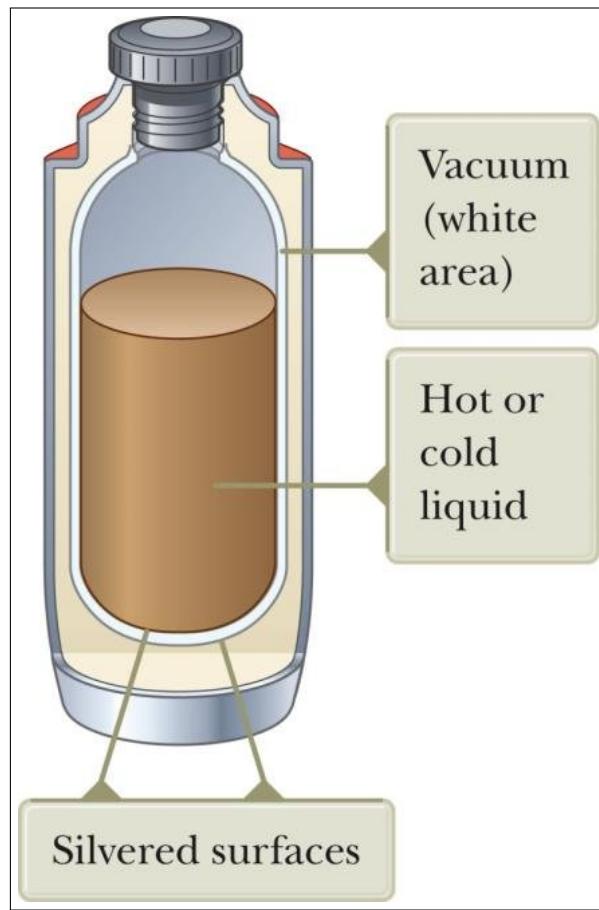
$$c = 1,36 \frac{J}{m^2 * s}$$

Una piccola nota conclusiva: è abbastanza improprio considerare l'irraggiamento come forma di trasmissione del calore "normale", infatti **non c'è un vero e proprio trasferimento meccanico del calore**

6.14.3.1 Esercizio con costante solare

6.14.4 Contenitore adiabatico

Ora che conosciamo i vari metodi per il trasferimento di calore, possiamo porci il quesito "**come costruire un contenitore veramente adiabatico**" (isolante)? Uno dei metodi possibili è quello del *vaso Dewar*, che possiamo schematizzare in questo modo:



Per evitare tutti i tipi di trasferimento di calore, il contenitore deve avere diverse caratteristiche, in particolare:

1. essere a tenuta stagna, in modo da **evitare la convezione**;
2. avere uno "strato di vuoto" il più vicino al liquido da mantenere a temperatura, in modo da **evitare la conduzione**;
3. avere delle pareti **riflettenti** (Dewar usava delle pareti argentate) in modo da **evitare l'irraggiamento**. Nota che le pareti devono essere riflettenti **sia verso l'esterno** (per riflettere le onde dell'ambiente esterno) **sia verso l'interno** (in modo da impedire al liquido di disperdere il suo calore).

6.15 Gas ideali

I gas sono un sistema termodinamico composto da un **gran numero di molecole libere di muoversi nello spazio**. Noi consideriamo i cosiddetti "gas ideali", ovvero quei gas per cui valgono le seguenti condizioni:

- gli elementi che compongono il gas **non interagiscono tra di loro in alcun modo**;
- gli elementi che compongono il gas **hanno volume nullo** (li approssimiamo come dei punti materiali, infatti, rispetto a loro, il contenitore che le contiene è infinitamente grande [di solito]);
- **non ci sono reazioni chimiche** tra le componenti del gas o col contenitore.

Come si intuisce dal nome, i **gas ideali** (in quanto ideali) **sono impossibili**, però sono una **buona approssimazione per quei gas a bassa pressione** (in genere $< 100\text{ atm}$).

6.15.1 Le variabili principali

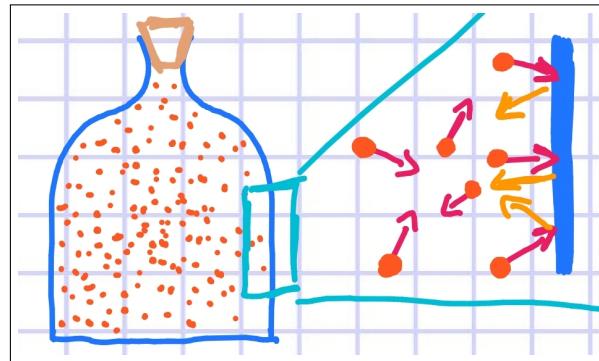
Per descrivere i gas, usiamo principalmente **3 variabili**:

- volume (V);
- pressione (P);
- temperatura (T);

Analizziamole velocemente:

6.15.1.1 Volume La più semplice delle 3: quando parliamo di gas supponiamo che **questo sia continuo in un qualche contenitore**, questo contenitore **"contiene"** **una porzione di spazio** che rappresenta appunto il volume. Nota che, se non diversamente specificato, supponiamo che il gas **occupi tutto il volume a sua disposizione**. Il volume si misura come una **lunghezza al cubo** (L^3), in particolare il **metro³** oppure il **litro** (che corrisponde a un $\text{dm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$).

6.15.1.2 Pressione Il fatto che il gas occupi tutto lo spazio a sua disposizione implica che **sarà a contatto col contenitore che lo contiene**. Inoltre, le molecole del gas sono in costante movimento quindi ci saranno **degli urti tra il contenitore e le molecole del gas**: ciò darà origine ad una forza che premerà sul contenitore.



Formalizzando il tutto, ogni molecola del gas si muove liberamente nel contenitore con una **certa velocità v** ed ha anche una **certa massa m** . Possiamo quindi dire che **ogni molecola ha una certa**

quantità di moto $m * v = p$. Ora, quando le molecole urtano il contenitore avviene un urto perfettamente elastico tra la molecola e la parete del contenitore. C'è da notare che la massa della molecola (m) è infinitesimale rispetto alla massa della parete del contenitore (m_{parete}), quindi potremmo dire che c'è una specie di "inversione del moto". Questa variazione della quantità di moto Δp avviene in un certo tempo Δt e sappiamo che non è nulla, quindi abbiamo una forza impulsiva!

$$\frac{m * \vec{v}_i - m * \vec{v}_f}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} \neq \vec{0}$$

Questo per ogni singola molecola, se però sommiamo le forze impulsive di tutte le molecole del gas otteniamo una forza (ortogonale alla parete del contenitore) non trascurabile. Se poi andiamo a considerare la **forza ortogonale per unità di superficie** otteniamo proprio la pressione! In particolare:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S}$$

Dimensionalmente, ci troviamo con una Forza fratto una Superficie, avremmo quindi:

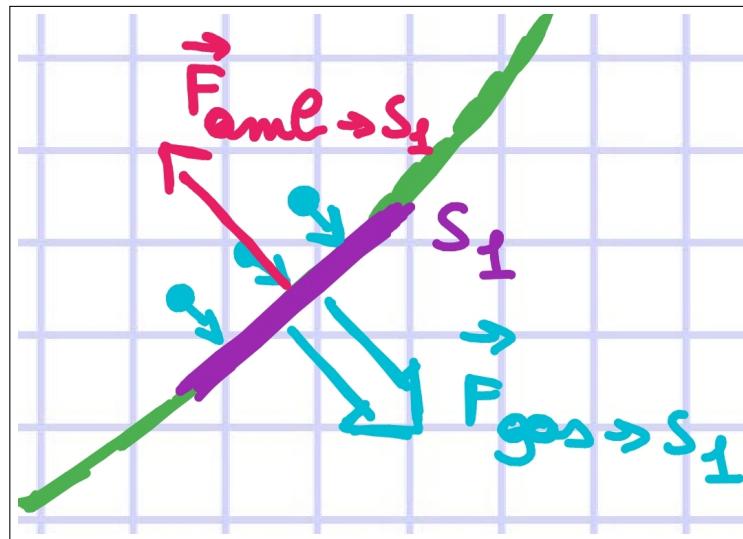
$$[p] = \frac{[F]}{[L^2]} = \frac{N}{m^2} = \text{Pascal} = Pa$$

L'unità di misura fondamentale della pressione è il Pascal, esistono poi delle "derivate", in particolare citiamo:

$$bar = 10^5 Pa$$

$$atmosfera = atm = 1,013 bar$$

Terminiamo la pressione con una precisazione per quanto riguarda i **gas in equilibrio**. Immaginiamo di avere una situazione di questo tipo:

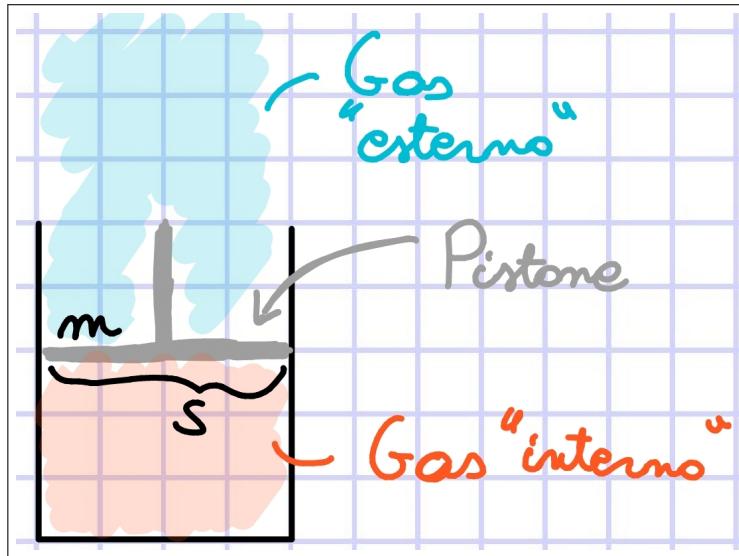


Una supposizione importante per capire questo "esempio" è che il contenitore (in verde) possa, volendo, espandersi all'infinito. Ora, abbiamo detto che le molecole del gas all'interno del contenitore, scontrandosi con le sue pareti, creano una forza (che noi chiamiamo **pressione**) che **spinge verso l'esterno**. Se prendiamo ad esempio un palloncino e lo gonfiamo, notiamo che inizia ad **aumentare di volume**. Ad un certo punto però **si ferma**. Ciò avviene perché si è raggiunto uno **stato di equilibrio**, ovvero abbiamo la forza della pressione che spinge verso l'esterno ma c'è anche una forza uguale ma opposta che bilancia la pressione. Nel caso del palloncino, questa è la **risultante della somma tra forza elastica del pallone ($\vec{F}_{gas \rightarrow S_1}$) e pressione dell'ambiente esterno** che preme sul pallo verso l'esterno.

$(\vec{F}_{amb \rightarrow S_1})$. Se noi "estremizziamo" questo esempio e togliamo la forza elastica del pallone, abbiamo che il pallone smette di crescere solo quando **la forza del gas che preme sulla superficie è uguale alla forza dell'ambiente che preme sulla superficie**, ovvero:

$$\vec{F}_{amb \rightarrow S_1} = -\vec{F}_{gas \rightarrow S_1} \Rightarrow \frac{F_{\perp,a}}{S_1} = \frac{F_{\perp,g}}{S_1} \Rightarrow P_a = P_g$$

Questa equazione in rosso è molto importante per i **sistemi in equilibrio**. Di fatto, la parete del contenitore trasmette meccanicamente le forze dall'interno verso l'esterno e vice versa. Possiamo quindi pensare di "togliere virtualmente" la parete e fare dei confronti tra i 2 gas. In molti casi, infatti, non possiamo direttamente misurare la pressione dei gas che ci interessano, però, se questi si trovano in equilibrio con l'ambiente esterno, possiamo calcolarla considerando la pressione dell'ambiente esterno! Ad esempio:



Abbiamo un pistone che preme del gas contenuto in un contenitore a tenuta stagna. Di questo pistone conosciamo la **massa** (m) e la **superficie** (S), come facciamo a calcolare la pressione del gas in rosso? Se il sistema si trova in uno stato di equilibrio, ovvero il pistone è fermo e non scende (comprimento ulteriormente il gas), possiamo dire che la pressione del gas rosso è **uguale alla pressione dell'ambiente esterno**, ovvero:

$$\begin{aligned} P_{ambiente} &= P_{atmosferica} + P_{pistone} \\ &= P_{atmosferica} + \frac{F_{pesoPistone}}{S} \\ &= P_{atmosferica} + \frac{m * g}{S} \end{aligned}$$

Concludendo, dato che la pressione del gas rosso è uguale alla pressione dell'ambiente esterno (perchè il sistema è in equilibrio), abbiamo che $P_{gasRosso} = P_{atmosferica} + \frac{m*g}{S}$!

6.15.1.3 Temperatura La temperatura è **fortemente legata all'energia interna del gas**. Possiamo vedere l'energia interna del gas come la **somma dell'energia cinetica di ogni molecola del gas** ($\frac{1}{2}mv^2$). Per quanto riguarda le unità di misura, abbiamo già detto prima che utilizziamo il **Kelvin (K)** e, in alcuni casi, i gradi *Celsius* ($^{\circ}C$) o *Fahrenheit* ($^{\circ}F$)

6.15.2 Equazione di stato dei gas ideali (o perfetti)

Introduciamo ora l'**equazione di stato** di questi gas ideali, prima però una veloce definizione (tratta da Wikipedia) di equazione di stato:

In termodinamica e chimica fisica, una equazione di stato è una legge costitutiva che descrive lo stato della materia sotto un dato insieme di condizioni fisiche. Fornisce una relazione matematica tra due o più variabili di stato associate alla materia, come temperatura, pressione, volume o energia interna.

In pratica, è una funzione ($= 0$) che ci descrive il comportamento del nostro gas in base alla variazione delle variabili termodinamiche che consideriamo. Come detto prima, per i gas usiamo come variabili **pressione**, **volume** e **temperatura**, dato che sono 3 rappresentiamo il tutto in un **diagramma bidimensionale** ($3 - 1$, infatti se avessimo N variabili dovremmo usare una dimensione $N - 1$, questo perché, di solito, siamo interessati a scoprire il valore di una particolare variabile date le altre). In particolare, per i gas l'equazione di stato è:

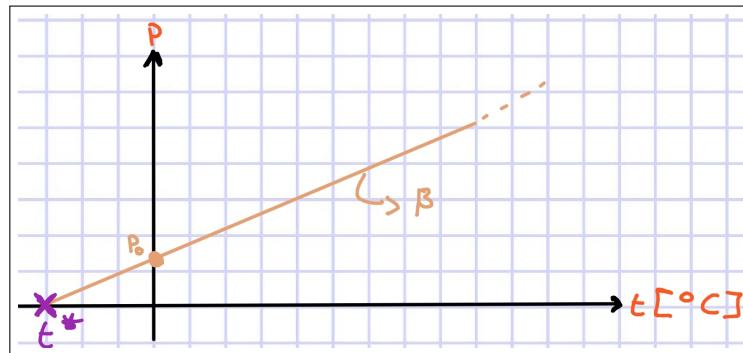
$$p * V - nRT = 0$$

Questa equazione la si ottiene basandosi sui risultati di 3 (o meglio 4) leggi, vediamole.

6.15.2.1 Legge isocora di Gay-Lussac Se noi teniamo il **volume costante** ($V = \text{const}$, isocora), abbiamo che pressione la corrisponde a:

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

Dove p_0 corrisponde alla pressione ad una temperatura di **0 gradi Celsius**. Se noi rappresentassimo questa equazione sul piano cartesiano in funzione della temperatura, otterremo qualcosa del genere:

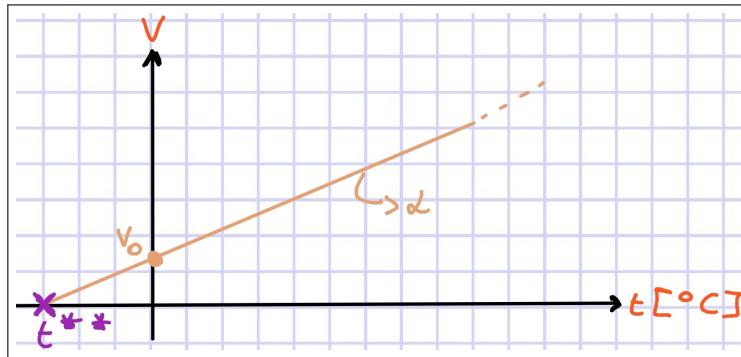


Nota come la retta è crescente, questo implica che, per qualche valore di temperatura (t^*), avremmo **pressione = 0**, e ciò è particolarmente interessante! Idealmente, più è bassa la temperatura e, a parità di volume, la pressione si abbassa: però la pressione **non può essere negativa!** Su questo punto ci torneremo in seguito;

6.15.2.2 Legge isobara di Gay-Lussac Se noi teniamo la **pressione costante** ($p = \text{const}$, isobara), abbiamo che il volume in funzione della temperatura corrisponde a:

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

Dove V_0 corrisponde al volume ad una temperatura di **0 gradi Celsius**. Se noi rappresentassimo questa equazione sul piano cartesiano in funzione della temperatura, otterremo qualcosa del genere:

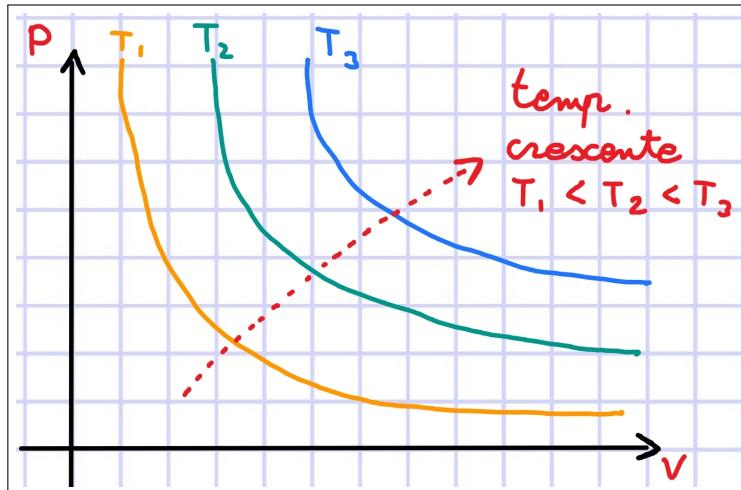


Nota come la retta è crescente, questo implica che, per qualche valore di temperatura (t^{**}), avremmo **volumen = 0**, e anche questo è particolarmente interessante! Idealmente, più è bassa la temperatura e, a parità di pressione, il volume si abbassa: però il volume **non può essere negativo!** Cosa ancora più interessante, $t^* = t^{**}$ (i 2 punti sono uguali)! Dopo ci torneremo più in dettaglio;

6.15.2.3 Legge isoterna di Boyle A parità di temperatura, il **prodotto $p * V$ resta costante!**
Ovvero:

$$p_i * V_i = p_f * V_f = \text{const}$$

In soldoni, se tengo la temperatura costante e abbasso la pressione, il volume **aumenta per compensare e viceversa**. Se prendiamo questa equazione e la rappresentiamo su un grafico bidimensionale, otteniamo un'iperbole equilatera:



6.15.2.4 Legge di Avogadro Gas diversi nelle stesse condizioni di temperatura, pressione e volume contengono lo stesso numero di oggetti (N). In particolare, abbiamo che:

$$N = \frac{1}{K_B} \frac{pV}{T}$$

Dove K_B rappresenta la **costante di Boltzmann** ($K_B = 1,38 * 10^{-23} \frac{J}{K}$). Da dove deriva la sua unità di misura? Se controlliamo l'equazione precedente, abbiamo che N , ovvero il numero di "molecole" del gas (adimensionale) è (tralasciando K_B) uguale al $\left[\frac{pV}{T} \right] = \left[\frac{\frac{F}{L^2} * L^3}{T} \right] = \left[\frac{F * L}{T} \right] = \left[\frac{E}{T} \right] = \left[\frac{J}{K} \right]$ ricorda che, per definizione, **una forza per uno spostamento è un'energia** (che ha unità di misura Joule). Dato che dobbiamo "semplificare" queste unità di misura per rendere il tutto adimensionale, la costante di Boltzmann

avrà come unità di misura $\frac{J}{K}$! Molto spesso però, ci troveremo a lavorare con il **numero di moli** n invece che con il numero esatto di elementi N . Possiamo quindi modificare la formula precedente in questo modo:

$$n = \frac{1}{R} \frac{pV}{T}$$

Sappiamo infatti che le moli $n = \frac{N}{N_A}$ (ricorda che il *numero di Avogadro* $N_A = 6,022 * 10^{23}$), quindi ci basta **dividere da entrambe le parti per N_A** . Infatti R corrisponde proprio a $R = \frac{1}{k_B * N_A} \approx 8,314 \frac{J}{K * mol}$. Concludiamo con un po' di numeri, supponiamo di avere un gas con queste caratteristiche:

$$n = 1 \text{ mol}$$

$$p = 1 \text{ atm}$$

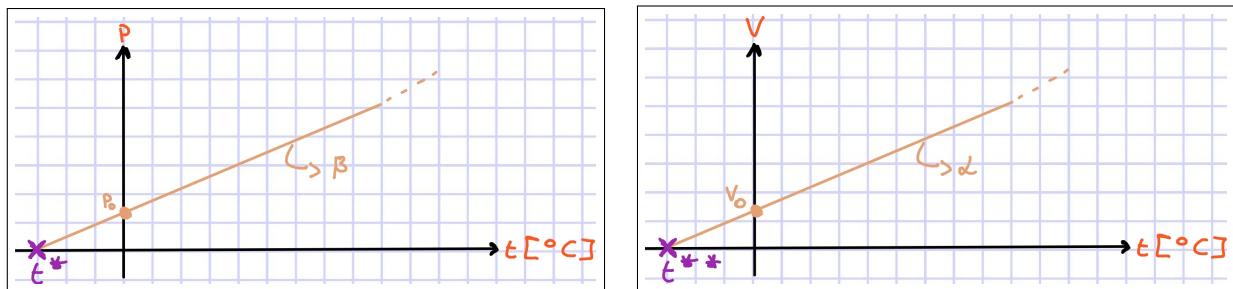
$$t = 0^\circ C \Rightarrow 273,16 K$$

Allora il suo volume è fissato, e vale:

$$V = 22,414 \text{ dm}^3 = 22,414 \text{ l}$$

Questo viene definito **volumen molare**.

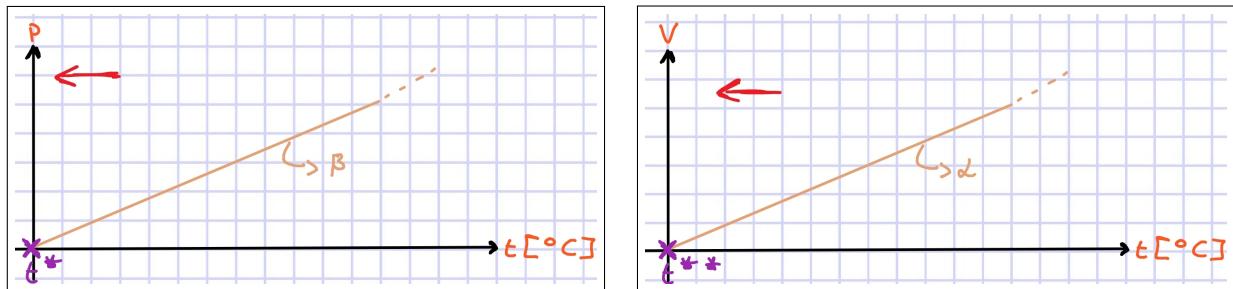
6.15.2.5 Mettiamo tutte le leggi insieme L'equazione di stato dei gas si ottiene **mettendo insieme le 4 leggi viste prima**, cominciamo da quelle di *Gay-Lussac*:



Avevamo questi 2 grafici, ovviamente la retta dipende dal gas: per gas diversi otterremo rette diverse. La cosa interessante però è che i punti t^* e t^{**} **puntano allo stesso valore di temperatura!** Questo succede indipendentemente dal valore di α e β (che dipendono dal tipo di gas, dal contenitore, ...). Prendendo 2 misurazioni (2 punti sul grafico) siamo capaci di tracciare la retta associata e stimare questa temperatura. Col tempo, siamo arrivati ad un'ottima approssimazione, ovvero:

$$t^* = t^{**} = t_0 = -273,15^\circ C = 0 K$$

L'idea ora è quella di fare una cosa del genere:



Ovvero **sostituiamo il sistema di riferimento**, in modo da usare il **sistema di riferimento assoluto per la temperatura** (i gradi Kelvin appunto). Se facciamo cos', le equazioni delle leggi fondamentali

cambiano leggermente, in particolare:

$$\begin{cases} \text{gay - lussac : } p = p_0(1 + \beta t) \\ \text{gay - lussac : } p = V_0(1 + \alpha t) \\ \text{boyle : } p_i * V_i = p_f * V_f = \text{const} \\ \text{avogadro : } n = \frac{1}{R} \frac{pV}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{gay - lussac : } p = p_0\beta T \\ \text{gay - lussac : } p = V_0\alpha T \\ \text{boyle : } p * V = \text{const} \\ \text{avogadro : } \frac{pV}{T} = nR \end{cases}$$

Il significato resta sempre lo stesso, le stiamo solo considerando con la scala della temperatura assoluta. Questa formulazione delle **leggi sperimentali** ci permette di capire che questi sono solo dei "casi particolari" di una formulazione più generica, che è proprio la nostra **equazione di stato dei gas ideali**:

$$pV = nRT$$

Ricorda che questa equazione vale **solo per gli stati di equilibrio del nostro sistema termodinamico!** Un'altra cosa interessante da notare è che l'equazione di stato è uguale all'equazione di Avogadro: in realtà la formulazione della legge di Avogadro non è esattamente quella data. Nell'originale ci sono delle costanti moltiplicative che la rendono effettivamente diversa dall'equazione di stato. Al momento però ce la facciamo andare bene così.

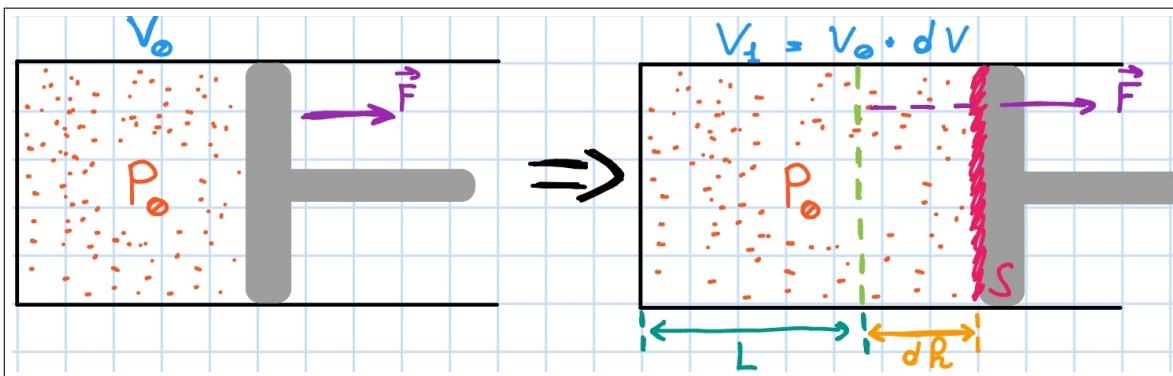
6.15.2.6 Esempio

6.15.3 Lavoro dei gas

In questa parte è importante **ricordare la prima legge della termodinamica**:

$$\Delta U = Q - W$$

Ora, immaginiamo di essere in una situazione in cui c'è un gas che si espande:



Partiamo con un gas a volume V_0 e a pressione p_0 , ora supponiamo che si faccia un **incremento infinitesimale del volume**, passando al volume $V_1 = V_0 + dV$, mantenendo una pressione p_0 costante. Come calcoliamo il lavoro infinitesimale (dW) compiuto con questo incremento di volume? Sappiamo che **il lavoro corrisponde a Forza * Spostamento** ($dW = \vec{F} * d\vec{s}$, volendo possiamo togliere anche il simbolo del vettore, dato che tutto avviene sullo stesso asse). Possiamo fare un po' di passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} * d\vec{s} \\ \text{Sostituiamo i parametri} &= F * dh \\ \text{Moltiplichiamo e dividiamo per la Superficie} &= \frac{F}{S} * Sh \\ \text{Abbiamo che } \frac{F}{S} &= \text{pressione e } S * dh = L^2 * L = \text{volume} &= p * dV \end{aligned}$$

Questo ragionamento vale solo per **lavori infinitesimi** e, quindi, per **spostamenti infinitesimi**: cosa succede quando abbiamo spostamenti più grandi? "Semplicemente" facciamo l'integrale di tutti i lavori infinitesimi! In particolare:

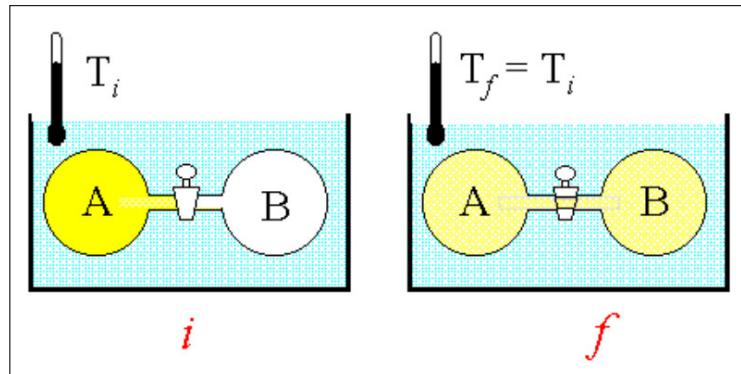
$$\int_i^f dW = \int_i^f p(v) * dV$$

Nota come **la pressione dipende dal volume**: nell'esempio prima potevamo mettere che la pressione restasse costante dato che la variazione di volume è infinitesima, ma nel caso in cui abbiamo una variazione maggiore dobbiamo tenerne conto! Il messaggio da portare a casa è che **il gas compie del lavoro quando cambia di volume!**

6.15.4 Energia interna dei gas

Diciamolo subito: **l'energia interna di un gas dipende SOLO dalla sua temperatura**. Possiamo arrivare a questa conclusione con diversi metodi, vediamoli.

6.15.4.1 Esperimento dell'espansione libera del gas A questo punto è molto importante citare l'esperimento dell'espansione libera di Joule:



In questo esperimento abbiamo un vaso Dewar che contiene un liquido, in questo liquido sono immerse 2 camere: una contiene del gas, l'altra il vuoto. Nota che il liquido è in equilibrio termico col gas. Queste camere sono collegate da un piccolo passaggio, inizialmente chiuso, e sono fatte di un materiale che **conduce calore**. Ad un certo punto **apriamo il passaggio tra le 2 camere**, permettendo al gas di passare nella camera vuota. Dopo questa **espansione libera del gas** "succedono delle cose", in particolare:

$V_i < V_f$	Il volume occupata dal gas aumenta (occupa entrambe le camere)
$p_i > p_f$	La pressione del gas diminuisce (stessa quantità in volume maggiore)

$$T_i \approx T_f$$

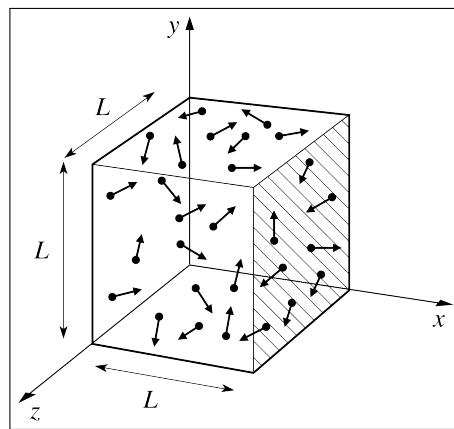
L'ultima riga è la più interessante: nonostante il volume e la pressione siano cambiati, la temperatura resta uguale (in realtà cambia, ma in modo quasi impercettibile). In generale, l'energia interna del sistema dipende da pressione, volume e temperatura ($U(p, V, T)$). Inoltre, per il primo principio della termodinamica, abbiamo che $\Delta U = Q - W$. Ora, il **contenitore è rigido** quindi il **volume resta effettivamente costante**, di conseguenza **NON C'E' LAVORO** ($W = 0$, è solo il gas che aumenta di volume, quello del contenitore resta costante). Per quanto riguarda il calore, tutto il nostro sistema si trova in un **contenitore adiabatico**, allora **non abbiamo scambio di calore con l'esterno** ($Q = 0$, il calore del sistema è già

all'interno del sistema, non si può prendere calore da nessuna parte). Dunque, per la prima legge della dinamica abbiamo che:

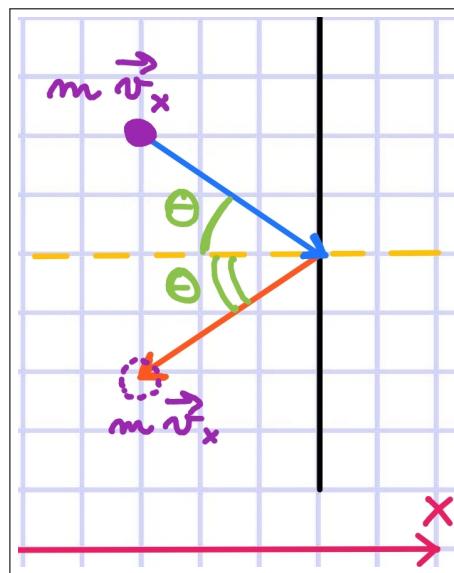
$$\Delta U = Q - W = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

Abbiamo detto prima che, **in genere**, l'energia interna di un sistema dipende da pressione, volume e temperatura, **PERO'** abbiamo visto sperimentalmente che, pur cambiando la pressione ed il volume, **l'energia interna del sistema resta uguale**: possiamo quindi dire che **l'energia interna del gas dipende solo dalla Temperatura!**

6.15.4.2 Teoria cinetica dei gas Prima abbiamo visto un **metodo sperimentale**, ora passiamo a vedere il "metodo" matematico. Per fare ciò dobbiamo introdurre quella che viene definita **teoria cinetica dei gas**, ovvero "*come si muovono le molecole dei gas?*" Immaginiamo di avere un contenitore tridimensionale che contiene del gas:



Le molecole del gas si **muovono in modo caotico, non hanno una direzione preferita** (molto importante). Supponiamo che il contenitore sia un cubo di **lato L**. Iniziamo considerando una parete singola:

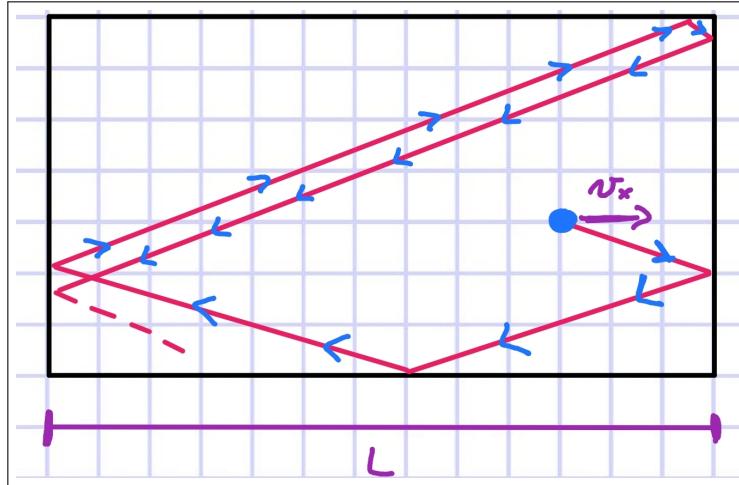


La nostra molecola entrerà in collisione con la "parete L_y/L_z " con **un angolo θ , una certa velocità v_x ed una massa m** (la stessa per tutte le molecole): in questo caso si verificherà un **urto perfettamente**

elastico dove la **parete del contenitore** resterà perfettamente immobile (dato che la sua massa è praticamente infinita rispetto a quella della molecola). Ora, l'angolo di uscita della molecola sarà uguale a quello di entrata e, più importante, la **velocità sull'asse x** (che nel caso della parete ortogonale all'asse x è l'unica che ci interessa) sarà **uguale e contraria alla velocità di entrata**. Avremmo quindi un Δp (quantità di moto) molto specifico:

$$\Delta p = p_f - p_i = m * v_{x,f} - m * v_{x,i} = m * (v_{x,f} - v_{x,i}) = 2m * v_{x,i} = 2m * v_x$$

Ora possiamo chiederci "ogni quanto, in termini di tempo, questa molecola urta QUESTA parete"? Dato che in ogni urto l'angolo d'uscita è lo stesso di quello in entrata, possiamo immaginare che le molecole del gas si muovano in questo modo "speculare":



Dunque, per percorrere nella sua interezza la lunghezza L_x (che si trova sull'asse x) alla velocità v_x impiegheremo esattamente $\frac{L_x}{v_x}$, poi moltiplichiamo il tutto per 2 dato che vogliamo gli urti sulla stessa parete (praticamente si deve percorrere $2L_x$). Otteniamo quindi:

$$\Delta t = \frac{2L_x}{v_x}$$

Abbiamo un Δp e abbiamo un Δt , quindi **abbiamo una forza impulsiva!** In particolare:

$$F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m * v_x}{\frac{2L_x}{v_x}} = \frac{2m * v_x * v_x}{2L_x} = \frac{m * v_x^2}{L_x}$$

Questa è la forza esercitata da una paticella sola, se vogliamo calcolare la **forza totale esercitata sulla parete** dobbiamo sommare la forza esercitata da tutte le particelle, quindi:

$$F_x^{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{m * v_x^2}{L_x} = \frac{m}{L_x} \sum_{i=1}^N v_x^2$$

Nota come m ed L_x siano 2 valori costanti per tutte le particelle, quindi li portiamo fuori dalla sommatoria. A questo punto, le particelle sono davvero tante e trovare la velocità di tutte potrebbe essere un procedimento un po' lungo, quindi **iniziamo a considerare la velocità media delle particelle** ($\langle v_x \rangle$), quindi possiamo scrivere così:

$$F_x^{tot} = \frac{m}{L_x} \sum_{i=1}^N v_x^2 = \frac{m}{L_x} N * \langle v_x^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad F_x^{tot} = \frac{m}{L_x} N * \langle v_x^2 \rangle$$

Bene, a questo punto decidiamo di dividere da entrambe le parti per L_y e L_z , ottenendo:

$$\begin{aligned} F_x^{tot} &= \frac{m}{L_x} N * \langle v_x^2 \rangle & \Rightarrow \frac{F_x^{tot}}{L_y * L_z} &= \frac{m}{L_x * L_y * L_z} N * \langle v_x^2 \rangle \\ \text{Superficie e Volume} & & \Rightarrow \frac{F_x^{tot}}{S} &= \frac{m}{V} N * \langle v_x^2 \rangle \\ \text{Pressione su } X & & \Rightarrow P_x &= \frac{m}{V} N * \langle v_x^2 \rangle \end{aligned}$$

Questo è un risultato abbastanza importante: abbiamo ottenuto la **pressione misurata sull'asse x**. Ora facciamo un passaggio abbastanza "scivoloso": **la pressione che misuriamo sull'asse x deve essere uguale a quella che misuriamo sull'asse y e sull'asse z** (la pressione del gas deve essere uguale in tutto il gas)!

$$P_x = P_y = P_z = P$$

Da questo punto, considerando la formula della $P - x$ che abbiamo trovato prima, possiamo dedurre che:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

Questo è vero perché il gas **non può avere una direzione preferita in media!** Tutte le particelle si muovono in moto assolutamente caotico. Ora, considerando la velocità al quadrato media del gas:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

PERO', dato che $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, abbiamo:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 * \langle v_x^2 \rangle$$

Allora $\langle v_x^2 \rangle$ sarà ugugale a:

$$\langle v^2 \rangle = 3 * \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

Possiamo usare questa nuova informazione nella formula precedente:

$$P = \frac{m}{V} N * \langle v_x^2 \rangle = \frac{m * N * \langle v^2 \rangle}{3V} = \frac{N * m * v^2}{3V}$$

Questo è un risultato molto interessante, infatti possiamo **moltiplicare e dividere per 2**, ottenendo l'**energia cinetica media**:

$$\begin{aligned} P &= \frac{N * m * v^2}{3V} & \Rightarrow P &= \frac{N}{3V} * \langle m * v^2 \rangle \\ & & \Rightarrow P &= \frac{2N}{3V} * \langle \frac{1}{2} * m * v^2 \rangle \\ & & \Rightarrow P &= \frac{2N}{3V} * \langle E_K \rangle \end{aligned}$$

Ma non ci fermiamo qui, infatti possiamo "spostare" il volume così:

$$P = \frac{2N}{3V} * \langle E_K \rangle \quad \Rightarrow PV = \frac{2N}{3} * \langle E_K \rangle$$

Ora, per l'equazione di stato dei gas ideali, possiamo **sostituire quel PV**:

$$PV = \frac{2N}{3} * \langle E_K \rangle \quad \Rightarrow \quad Nk_B T = \frac{2N}{3} * \langle E_K \rangle$$

Alla fine di tutto questo procedimento molto verboso, possiamo finalmente concludere con:

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} * k_B T$$

L'energia cinetica media delle particelle del gas dipende solo dalla sua Temperatura (moltiplicata per una costante). Questo è un risultato molto interessante. Avevamo detto in precedenza che, nel nostro modello molto easy dei gas ideali, **l'energia interna del sistema corrisponde alla dell'energia cinetica delle particelle che compongono in nostro gas** ($N \langle E_K \rangle = U$), possiamo quindi dire che:

$$U = \frac{3}{2} * Nk_B T$$

Questa formula è fantastica: abbiamo stabilito per **deduzione dal modello** che **l'energia cinetica** delle particelle del gas e quindi l'energia interna del gas **dipende solo la temperatura!** Infatti tutta la **parte in rosso** è **costante**, l'unica roba che può cambiare e far variare l'energia interna è la Temperatura. Rigirando la formula, possiamo dire che la temperatura del gas dipende dall'energia cinetica delle sue particelle! Da questo possiamo dire che, per raggiungere lo *zero assoluto* (0 K o -273,16 ° C) solo quando tutte le particelle sono completamente ferme.

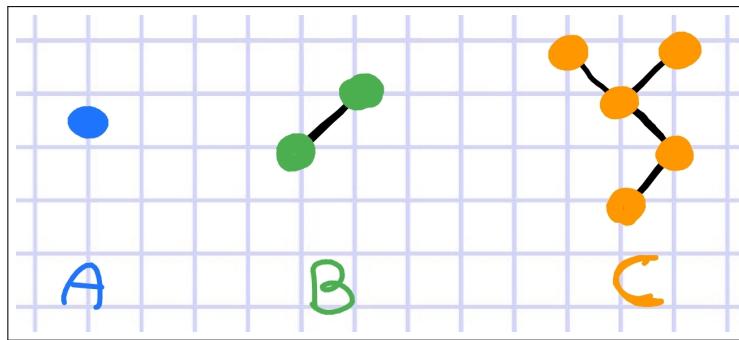
Gradi di libertà Per quanto riguarda questo metodo "matematico" c'è un discorso sui *gradi di libertà*. Partiamo da questa formul:

$$U = \frac{3}{2} * Nk_B T$$

Ora, **da dove deriva questo 3?** Se ricordi, quel 3 deriva da come abbiamo "semplificato" la velocità della particella del gas:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

Questo ragionamento va bene per **i gas mono-atomici** (A), ovvero quelli composti da "particelle uniche". Se però abbiamo **gas bi-atomici** (B) o **poli-atomici** (C)?



Non si deve cambiare molto il ragionamento, si deve solo tenere conto del fatto che le particelle bi-atomiche e poli-atomiche **possono ruotare**. Non ci fermiamo troppo, basti sapere che la **formula generale per l'energia interna** è:

$$U = \frac{l}{2} * Nk_B T$$

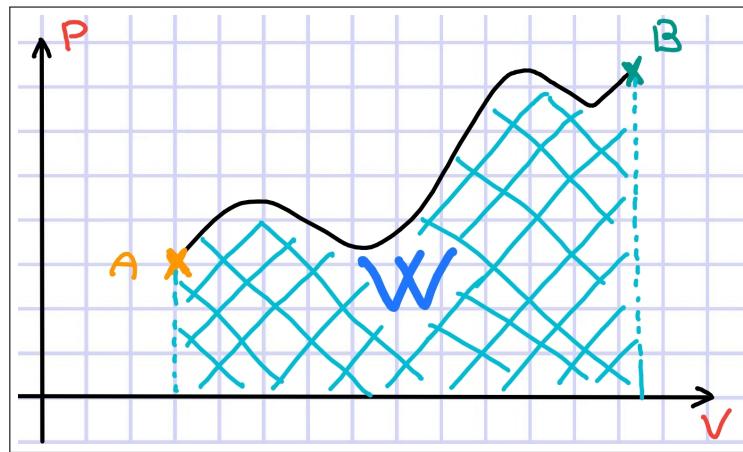
Dove l rappresenta i **gradi di libertà** e vale:

- **gas mono-atomici**, la particella può muoversi su 3 assi: $l = 3$;
- **gas bi-atomici**, la particella è composta da 2 atomi, può muoversi su 3 assi e ruotare in modo "significativo" su 2 assi (una rotazione sull'asse che connette i 2 atomi non comporta nessun cambiamento significativo della particella): $l = 3 + 2 = 5$;
- **gas poli-atomici**, la particella è composta da più di 2 atomi, può muoversi su 3 assi e ruotare in modo "significativo" su 3 assi: $l = 3 + 3 = 6$;

Negli esercizi verrà detto il tipo di gas: basta **sostituire la l !**

6.16 Trasformazioni particolari dei gas ideali

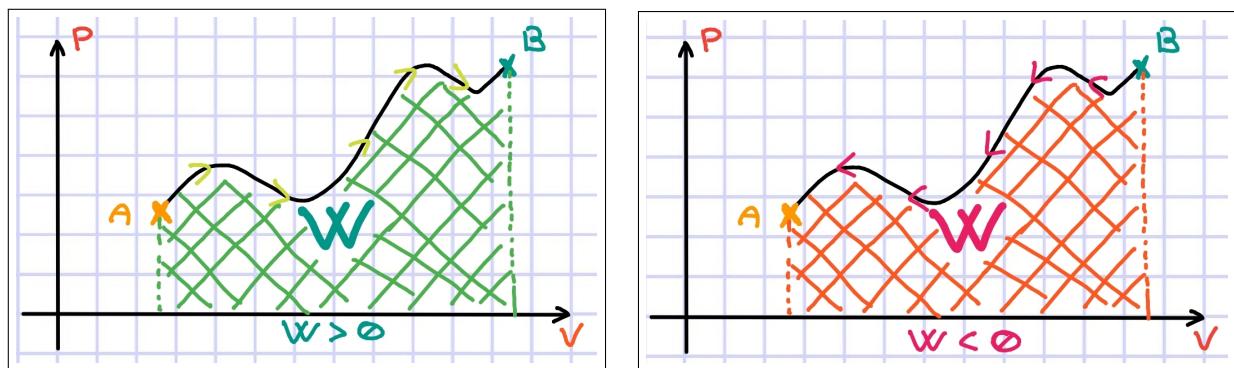
Vediamo alcune trasformazioni dei gas ideali, questo vengono definite "particolari" perché **mantengono una delle variabili termodinamiche costanti**. Per rappresentare queste trasformazioni usiamo il piano PV:



Una cosa importante in queste trasformazioni è la **rappresentazione del lavoro**, abbiamo detto che:

$$W_{I \rightarrow F} = \int_I^F p(V)dV$$

Ovvero, il lavoro compiuto dal gas corrisponde all'integrale della pressione (che dipende dal Volume) rispetto al Volume dal punto iniziale I al punto finale F . Graficamente sul piano corrisponde all'area di piano sotto la curva della nostra trasformazione. Non dimenticare come funzionano le integrali però:



Se andiamo da A verso B (ovvero il Volume aumenta) allora il segno dell'integrale sarà **POSITIVO**, altrimenti se andiamo da B verso A (ovvero il Volume diminuisce) allora il segno dell'integrale sarà **NEGATIVO**. Finiamo questa introduzione ricordando la **prima legge della termodinamica**:

$$\Delta U = Q - W$$

Ci tornerà molto utile nell'analisi delle trasformazioni.

6.16.1 Trasformazione isocora

6.16.2 Trasformazione isobara

6.16.2.1 Relazione di Meyer

6.16.3 Trasformazione isotermica

6.16.4 Trasformazione adiabatica

6.17 Trasformazioni cicliche

6.18 Ciclo di Carnot

6.19 Secondo principio della termodinamica

Possiamo dividere il secondo principio della termodinamica in 2 parti (+ 1):

1. **principio di Kelvin:** è *impossibile realizzare una macchina termica ciclica il cui unico risultato sia la conversione in lavoro di tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea*;
2. **principio di Clausius:** è *impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo a uno più caldo senza l'apporto di lavoro esterno*;
3. è *impossibile realizzare una macchina termica il cui rendimento sia pari al 100%* (questa parte non viene citata dal professore, la aggiungo io per completezza [trovata su Wikipedia], da questo punto in poi lo ignorerò).

Questi, in quanto principi, **non vanno dimostrati!** Però, è possibile (con una dimostrazione per assurdo) dimostrare che entrambi i principi **sono equivalenti**.

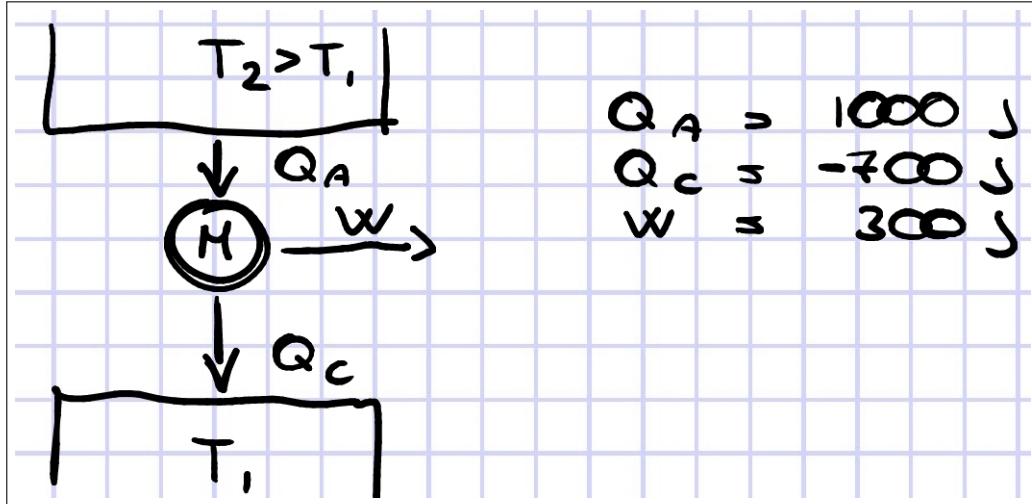
6.19.1 Veloce recap sulle macchine

Prima di passare alla dimostrazione per assurdo precedentemente citata, facciamo un veloce ripasso per quanto riguarda le macchine termiche e le macchine frigorifere. In entrambi i casi, nota che la temperatura T_2 è sempre **maggior**e della temperatura T_1

6.19.1.1 Macchine termiche Definiamo una **macchina termica** una macchina che ha come scopo **produrre lavoro (W) tramite l'assorbimento di calore (Q_A)**. Come visto in precedenza, questo NON è un procedimento efficiente al 100% (tutto il *calore assorbito* (Q_A) non verrà mai convertito 1:1 in lavoro), ma ci sarà anche del *calore ceduto* (Q_C). In particolare, il rendimento della nostra macchina corrisponderà a:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = \frac{Q_A}{Q_A} - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Vediamo un rapido esempio:



La macchina (M) assorbe calore (Q_A , segno positivo dato che lo assorbe) e produce un certo lavoro in uscita (W , segno positivo perché lo produce). In contemporanea però, cede del calore (Q_C , segno negativo perché lo perde). Ora, seguendo la formuletta vista prima, possiamo dire che **M lavora con un rendimento del 30%**, però possiamo anche andare oltre! Supponendo che questa sia una **macchina di Carnot**, possiamo anche dire il **rapporto tra le temperature in gioco!** In particolare, avevamo detto che il rendimento di una macchina di Carnot corrisponde a:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Quindi possiamo dire che:

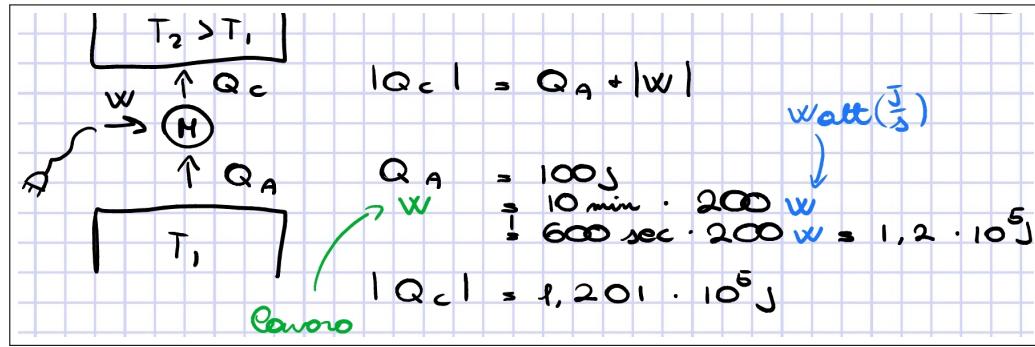
$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 30\% = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{7}{10}$$

Data una delle 2 temperature possiamo dire quale deve essere l'altra temperatura per lavorare con un rendimento del 30%!

6.19.1.2 Macchine frigorifere Definiamo una **macchina frigorifera** una macchina che ha come scopo **assorbire calore (Q_A) tramite l'assorbimento di lavoro (W)**. In questo caso, il rendimento di questa macchina dipende dal rapporto tra calore assorbito e quantità di lavoro impiegata per assorbire tale calore. La formula sarà quindi:

$$\eta = \frac{Q_A}{|W|}$$

Ricorda che nelle macchine frigorifere, il lavoro viene "rubato" a noi, quindi (nel nostro sistema di riferimento) avrà segno negativo (da qui il modulo). Ricorda inoltre che $W = Q_A - |Q_C|$ (ancora, nel nostro sistema di riferimento il calore ceduto è negativo, quindi mettiamo il modulo). Vediamo ora un rapido esempio:

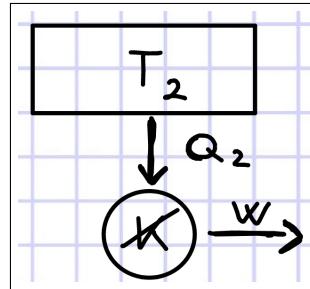


La macchina (M) assorbe calore (Q_A , segno positivo dato che lo assorbe) da una zona di **bassa temperatura** (T_1) utilizzando una certa quantità di lavoro in entrata (W , segno negativo perché lo "ruba" a noi). In contemporanea cede del calore (Q_C , segno negativo perché lo perde) ad una zona ad **alta temperatura** (T_2).

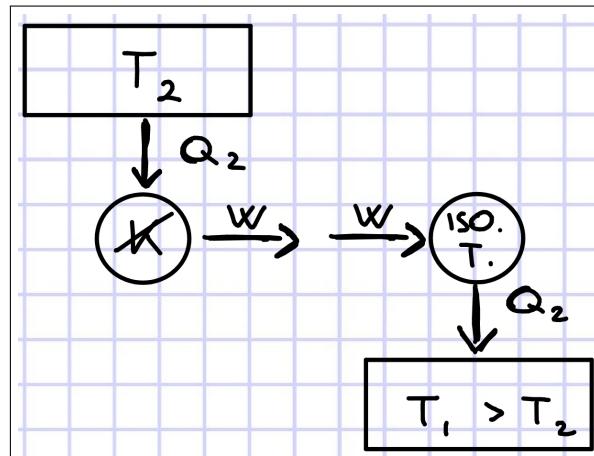
6.19.2 Dimostrazione dell'uguaglianza delle 2 principi

I 2 principi (di Kelvin e Clausius) sono equivalenti, ciò è facilmente dimostrabile con una dimostrazione per assurdo, vediamo entrambi i casi.

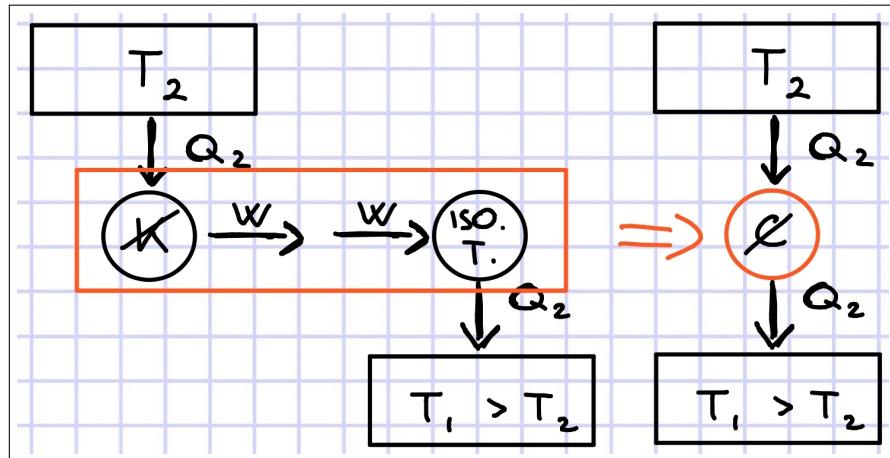
6.19.2.1 Kelvin => Clausius Immaginiamo di avere una macchina " K " capace di violare il principio di Kelvin: se tale macchina esistesse, allora sarebbe anche possibile violare il principio di Clausius! Quindi, immaginiamo di avere questa macchina " K ", capace di **assorbire una quantità Q_2** di calore (da una sorgente a temperatura T_2) e convertire tutto questo calore in un lavoro W **senza dispersione**:



Ora, possiamo affiancarci una normalissima macchina che compie una **trasformazione isoterma**. Questa macchina **assorbirà tutto il lavoro** prodotto da K e **restituirà una quantità Q_2** di calore ad una sorgente a temperatura T_1 . Visto che possiamo, supponiamo anche che $T_1 > T_2$ (molto importante):

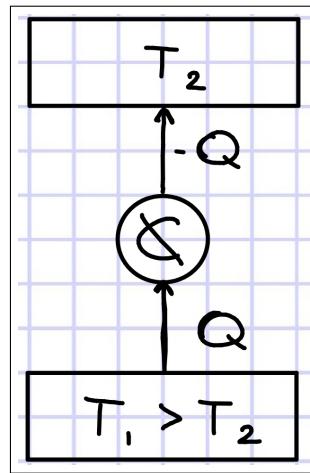


A questo punto possiamo "compattare" queste macchine in una **macchina unica** che andremmo a chiamare \mathcal{K} :

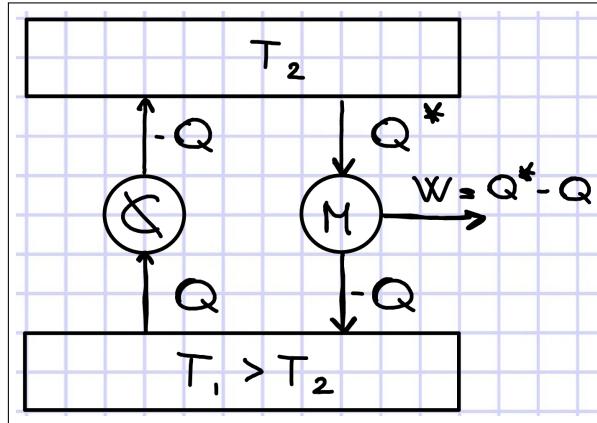


Se andiamo ad analizzare la macchina \mathcal{K} notiamo che **viola il principio di Clausius!** Infatti è capace di **trasferire calore dalla sorgente a temperatura T_2 a quella a temperatura T_1** e, come abbiamo detto prima, $T_1 > T_2$: in questa macchina il calore passa da una zona fredda ad una zona più calda "naturalmente", senza l'assorbimento di lavoro esterno (il lavoro viene generato tutto internamente alla macchina \mathcal{K} , quindi quello possiamo ignorarlo)!

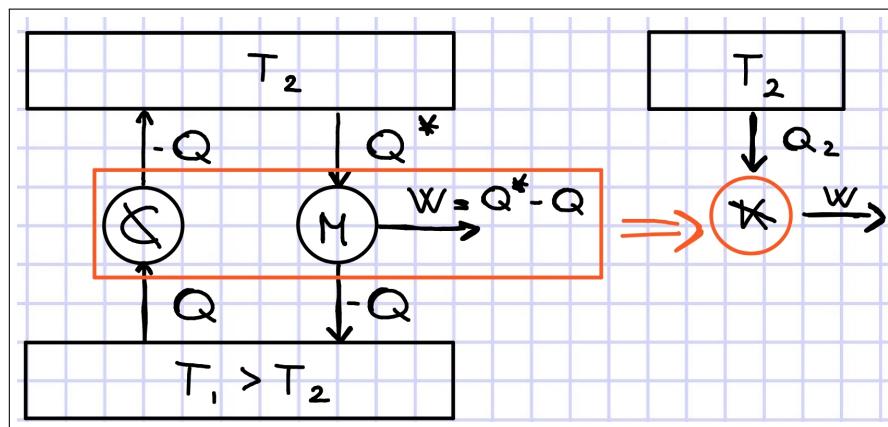
6.19.2.2 Clausius \Rightarrow Kelvin In un modo simile, possiamo dimostrare che l'esistenza di una macchina capace di violare il principio di Clausius implicherebbe l'esistenza di una macchina capace di violare il principio di Kelvin. Come prima, immaginiamo di avere questa macchina " \mathcal{K} ", capace di **assorbire una quantità Q di calore da una sorgente a temperatura T_1 e cedere la stessa quantità di calore (quindi $-Q$) ad una sorgente a temperatura T_2 (vale sempre $T_1 > T_2$):**



Ora, a questa macchina impossibile ne affianchiamo una normalissima che assorbe un calore Q^* dalla sorgente T_2 e produce un certo lavoro W . La parte importante qui è il **calore ceduto**: supponiamo che **corrisponda esattamente a $-Q$** (Q^* può essere arbitrariamente grande, quindi gestiamo il rendimento della macchina e l'assorbimento di calore in modo da cederne quanto vogliamo noi):

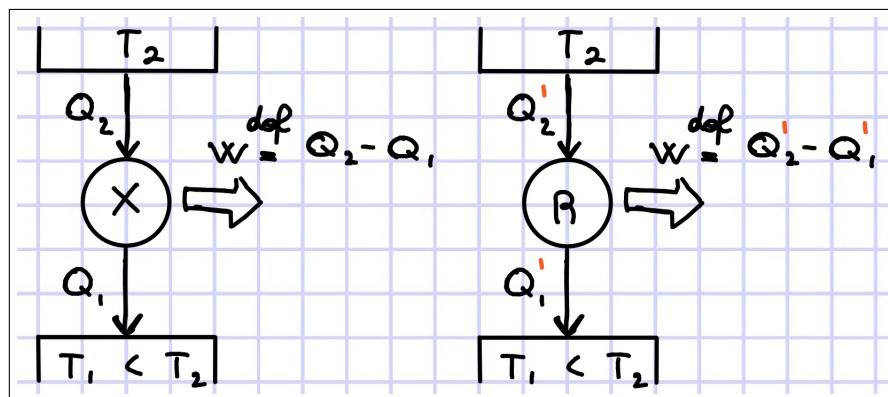


E adesso comprimiamo **queste macchine**: dato che **assorbiamo e cediamo una quantità di calore Q dalla sorgente T_1** è come se **non assorbissimo effettivamente calore!** Quindi otteniamo una macchina (che possiamo chiamare \mathbb{K}) capace di violare il principio di Kelvin!



6.20 Teorema di Carnot

Questo teorema nasce da una domanda molto semplice: "*a parità di temperature, e più efficiente una macchina termica reversibile o una irreversibile?*". Nota MOLTO bene quel "*a parità di temperature*": durante l'orale è importante citarlo! Per la dimostrazione ci troviamo in questa situazione:



1. abbiamo 2 macchine termiche:

- una **macchina generica** X di cui non conosciamo le specifiche, in particolare **non sappiamo se è reversibile** (può diventare una macchina frigorifera) o **irreversibile**;

- una macchina NON generica R che sappiamo essere reversibile

2. abbiamo 2 sorgenti di temperatura:

- una alla temperatura T_2 ;
- una alla temperatura T_1 che sappiamo essere **più fredda** dell'altra ($T_1 < T_2$);

3. entrambe le macchine **assorbono calore da T_2** e cedono calore a T_1 , nota che **non è detto che le 2 macchine assorbano/cedano le stesse quantità di calore**;

4. entrambe le macchine producono la stessa quantità di lavoro W .

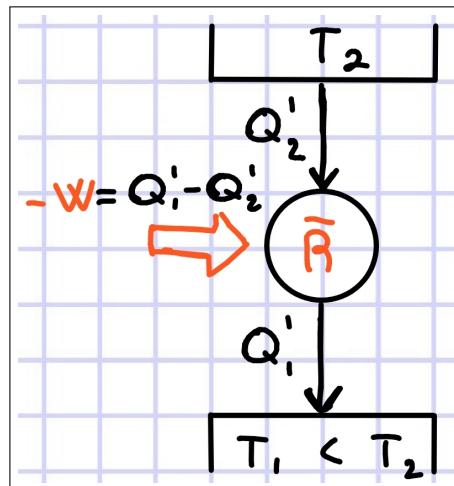
Ora, noi ci chiediamo:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} >= < \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

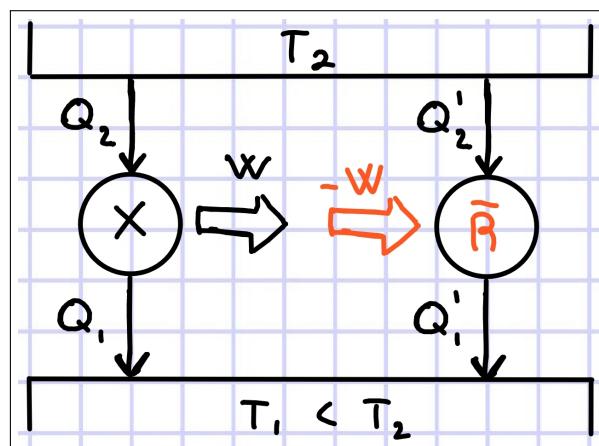
ovvero, **come si relazionano i rendimenti delle 2 macchine tra di loro?** Il teorema di Carnot risponde proprio a questo quesito: **il rendimento di una macchina termica generica X è SEMPRE minore o uguale al rendimento di una macchina termica reversibile** (l' = vale quando entrambe le macchine sono reversibili). Come arriviamo a questa conclusione? Ci arriviamo tramite delle assunzioni, in particolare assumiamo (per assurdo) che :

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} > \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

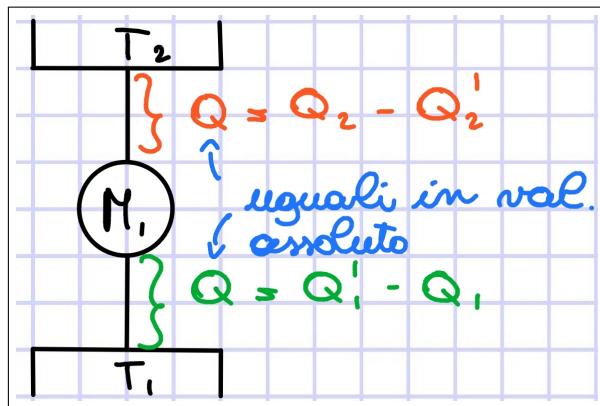
Ok, dato che la macchina R è reversibile, possiamo farne la **versione "negata"** \bar{R} :



e dato che assorbe proprio una **quantità $-W$ di lavoro** la possiamo **connettere in serie** alla macchina generica X :



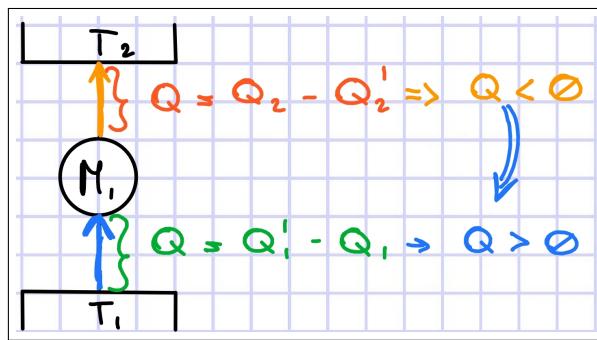
Possiamo quindi immaginare di **comprimere le 2 macchine** (annullando di fatto l'apporto del lavoro, è tutta roba interna alla macchine quindi noi non perdiamo niente), ottenendo la macchina M_1 :



Ora, ci sono dei trasferimenti di energia tra $T_1 < - > M_1$ e $T_2 < - > M_1$, però in quale verso? Prima abbiamo supposto " $\eta_{X,(T_1,T_2)} > \eta_{R,(T_1,T_2)}$ ", quindi possiamo ragionarci sopra:

$$\begin{aligned} \eta_{X,(T_1,T_2)} &> \eta_{R,(T_1,T_2)} \\ \Rightarrow \frac{\mathbb{W}}{Q_2} &> \frac{\mathbb{W}}{Q'_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{Q_2} &> \frac{1}{Q'_2} \\ \Rightarrow Q'_2 &> Q_2 \end{aligned}$$

Dato il lavoro prodotto dalle macchine e i calori che assorbono possiamo facilmente calcolare il loro rendimento, dato che sappiamo (o meglio, abbiamo supposto) che il rendimento di X è maggiore di quello di R possiamo applicare dei semplici passaggi algebrici e scoprire che Q'_2 deve essere maggiore di Q_2 . Fai attenzione qui: se il calore è > 0 allora la **macchina lo sta assorbendo**, se è < 0 allora lo sta cedendo. Dato che non stiamo producendo lavoro, **i 2 calori devono essere uguali e contrari**, cioè stiamo trasferendo calore da una sorgente ad un'altra. Facciamo un disegno:



Qui ci accorgiamo però che **c'è un problema**: abbiamo detto prima che $T_1 < T_2$, quindi **T_1 è più fredda di T_2 !** Stiamo **trasferendo calore da una fonte fredda verso una fonte calda**, ma questo è **impossibile per il principio di Clausius!** Non possiamo trasferire calore da una fonte fredda verso una fonte calda senza l'apporto di lavoro esterno, possiamo quindi dire che:

$$\cancel{\eta_{X,(T_1,T_2)} > \eta_{R,(T_1,T_2)}}$$

Non si può fare, è impossibile. **Quindi deve essere:**

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \leq \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

Ora, possiamo considerare un altro caso: e se **anche la macchina X fosse reversibile?** Ricorda che è una macchina generica, potrebbe essere reversibile come no: nel caso fosse reversibile potremmo invertire X e fare **gli stessi identici passaggi fatti prima**. Da questi otteremo che:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \Rightarrow \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

Se ora mettiamo insieme quanto abbiamo scoperto, otteniamo che:

$$\left. \begin{array}{l} \eta_{X,(T_1,T_2)} \leq \eta_{R,(T_1,T_2)} \\ \eta_{X,(T_1,T_2)} \Rightarrow \eta_{R,(T_1,T_2)} \end{array} \right\} \eta_{X,(T_1,T_2)} = \eta_{R,(T_1,T_2)}$$

Se le 2 macchine sono entrambe reversibili (e lavorano nello stesso range di temperatura) **devono avere lo stesso rendimento!** Sostanzialmente, questa è la legge di Carnot:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \leq \eta_{R,(T_1,T_2)} \quad (1)$$

Il rendimento di una macchina termica qualsiasi è, sempre minore o uguale del rendimento di una qualsiasi macchina termica reversibile che lavora nello stesso range di temperatura (se anche la prima macchina è reversibile, le 2 macchine DEVONO avere lo stesso rendimento).

6.20.0.1 Corollari0 e osservazioni

A questo punto possiamo mettere insieme un corollario:

1. **corollario:** come già detto in precedenza, **tutte le macchine reversibili che lavorano alle stesse temperature hanno lo stesso rendimento;**
2. **osservazione 1:** abbiamo detto che **tutte le macchine reversibili DEVONO avere la stessa efficienza** (a parità di temperatura), dato che la **macchina di carnot** è reversibile ed ha un rendimento che corrisponde a $1 - \frac{T_1}{T_2}$ (ricorda che $T_1 < T_2$) possiamo dire che **tutte le macchine termiche reversibili hanno rendimento $\frac{T_1}{T_2}$** ;
3. **osservazione 2:** supponendo che la macchina X **ceda il calore Q_1 a T_1 ed assorba Q_2 da T_2** , possiamo dire che il suo rendimento corrisponde a $1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$ (ricorda che Q_1 è negativo perché è il calore ceduto dalla macchina). Ora, per il teorema di Carnot, possiamo dire che:

$$\eta_{X,(T_1,T_2)} \leq \eta_{R,(T_1,T_2)} \implies 1 - \frac{|Q_{1,X}|}{Q_{2,X}} \leq 1 - \frac{|Q_{1,R}|}{Q_{2,R}}$$

Per osservazione precedente (R reversibile)

$$\implies 1 - \frac{|Q_{1,X}|}{Q_{2,X}} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Tolgo X per semplicità

$$\implies 1 - \frac{|Q_1|}{T_1} \leq 1 - \frac{Q_2}{T_2}$$

$$Q_1 == -|Q_1|$$

$$\implies +\frac{Q_1}{T_1} \leq -\frac{Q_2}{T_2}$$

$$\implies \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Questa è una formulazione alternativa del teorema di Carnot che ci tornerà molto utile in futuro;

4. **osservazione 3:** dato che, all'osservazione 2, abbiamo stabilito che " $\frac{|Q_{1,X}|}{|Q_{2,X}|} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$ ". Bene, possiamo quindi dire che il **massimo rendimento possibile per qualsiasi macchina** che lavora nel range di temperatura $[T_1, T_2]$ corrisponde esattamente a:

$$\eta_{MAX,(T_1,T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Questa è una cosa abbastanza sorprendente: a livello teorico siamo riusciti a trovare un limite effettivamente impossibile da superare nella realtà! Supponendo di avere $T_1 = 283K$ e $T_2 = 300K$, possiamo subito dire che qualsiasi macchina che lavora in questo range di temperature avrà di sicuro un rendimento che non supera $1 - \frac{283}{300} = \frac{17}{300}$ (piuttosto basso come rendimento): questo è il trucco! Più è piccolo è il divario delle temperature e minore sarà il rendimento! Questa è un limite teorico, dimostrabile con i teoremi!

5. **osservazione 4:** facendo riferimento all'osservazione 2, se abbiamo 2 macchine reversibili possiamo dire che: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$. Se esplicitiamo i segni dei 2 calori (usando i moduli), otteniamo: $\frac{-|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} = 0$. Questo "cambio di segni" ci permette di ottenere questa equazione:

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}$$

Questa equazione ci permette di stabilire una **relazione tra calore trasferito Q e la temperatura T**: questo rapporto ci permette di creare degli strumenti di misurazione della temperatura assoluta. Misurando lo scambio del calore, possiamo misurare le temperature!