



# Linguaggi formali e compilatori

UNITN - Lazzerini Thomas

Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

# Indice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Formulario</b>  | <b>3</b> |
| 1.1      | Unità di misura . . . . .                                      | 3        |
| <b>2</b> | <b>Introduzione</b>  | <b>3</b> |
| 2.1      | Il metodo sperimentale . . . . .                               | 3        |
| <b>3</b> | <b>Cinetica dei punti</b>                                      | <b>3</b> |
| 3.1      | Sistema di riferimento . . . . .                               | 3        |
| 3.2      | Diagramma dello spazio . . . . .                               | 4        |
| 3.3      | Caso semplice . . . . .  | 4        |
| 3.4      | Moto rettilineo uniforme . . . . .                             | 5        |
| 3.5      | Velocità . . . . .   | 5        |
| 3.5.1    | Velocità istantanea . . . . .                                  | 6        |
| 3.5.2    | Accelerazione . . . . .  | 6        |
| 3.5.3    | Moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .             | 6        |
| 3.5.4    | Esercizi vari sui moti con formule . . . . .                   | 7        |
| 3.5.4.1  | Esempio 1 (moto rettilineo uniforme) . . . . .                 | 7        |
| 3.5.4.2  | Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accelerato) . . . . . | 7        |
| 3.6      | Moto armonico . . . . .  | 9        |
| 3.6.1    | Esempio di moto armonico . . . . .                             | 10       |
| 3.7      | I moti piani . . . . .   | 11       |
| 3.7.1    | I vettori . . . . .  | 11       |
| 3.7.2    | Sistema di riferimento . . . . .                               | 11       |
| 3.7.3    | Rappresentare velocità ed accelerazione . . . . .              | 13       |
| 3.7.4    | Esempio . . . . .  | 13       |

# 1 Formulario

## 1.1 Unità di misura

|     |               |           |       |               |            |
|-----|---------------|-----------|-------|---------------|------------|
| $T$ | $\Rightarrow$ | $10^{12}$ | $G$   | $\Rightarrow$ | $10^9$     |
| $M$ | $\Rightarrow$ | $10^6$    | $k$   | $\Rightarrow$ | $10^3$     |
| $m$ | $\Rightarrow$ | $10^{-3}$ | $\mu$ | $\Rightarrow$ | $10^{-6}$  |
| $n$ | $\Rightarrow$ | $10^{-9}$ | $p$   | $\Rightarrow$ | $10^{-12}$ |

## 2 Introduzione

### 2.1 Il metodo sperimentale

Distingue discipline sperimentali da discipline non sperimentali. Si compone di diverse fasi:

1. **formulazione ipotesi**: si fa un'**ipotesi descrittiva** (in **linguaggio matematico**) della porzione di mondo che si vuole analizzare, di conseguenza si decide di **non considerare** altre caratteristiche del mondo che non centrano con l'ipotesi che stiamo formulando;
2. **esperimento**: si va a ricreare una situazione dove l'aspetto che vogliamo analizzare è **sicuramente presente** e **influenzato il meno possibile da fattori esterni**;
3. **esecuzione dell'esperimento**: si verifica l'ipotesi, formulata in modo matematico, confrontando i valori ottenuti con l'esperimento con quelli che si ottengono dalla nostra ipotesi.

In base alla "verifica" dell'ipotesi possiamo fare una differenziazione:

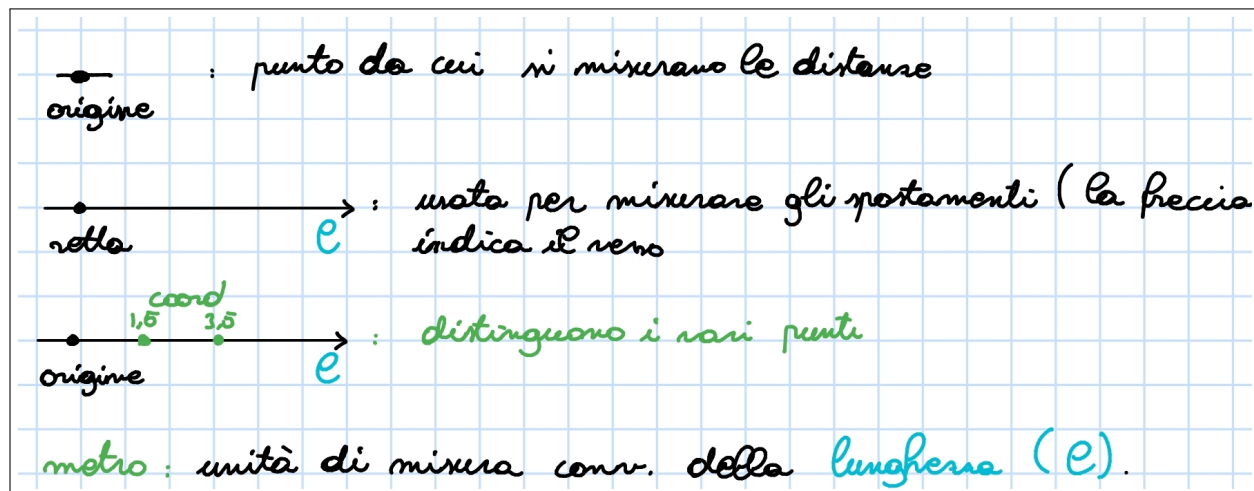
- **teoria**: l'ipotesi **non è ancora verificata**, o è verificata **parzialmente**;
- **legge fisica**: l'ipotesi è **verificata** (in un certo ambito);

## 3 Cinetica dei punti

Descrive il movimento dei corpi.

### 3.1 Sistema di riferimento

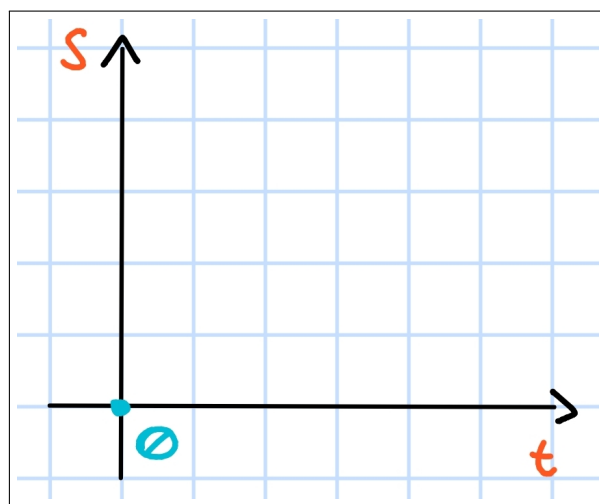
Specifichiamo un sistema di riferimento per il seguente argomento:



Una cosa importante da notare è che un numero singolo può rappresentare solo cose "**mono-dimensionali**" e che, soprattutto, non tutte le unità di misura possono rappresentare qualsiasi cosa (ad es.: l'età dell'universo non si può rappresentare con i metri).

### 3.2 Diagramma dello spazio

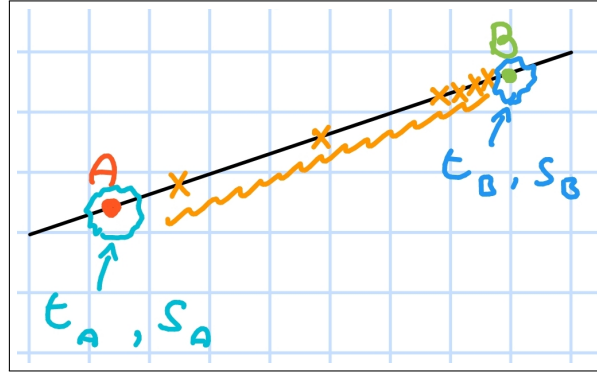
Rappresentiamo lo spostamento nel tempo tramite un "*diagramma dello spazio*":



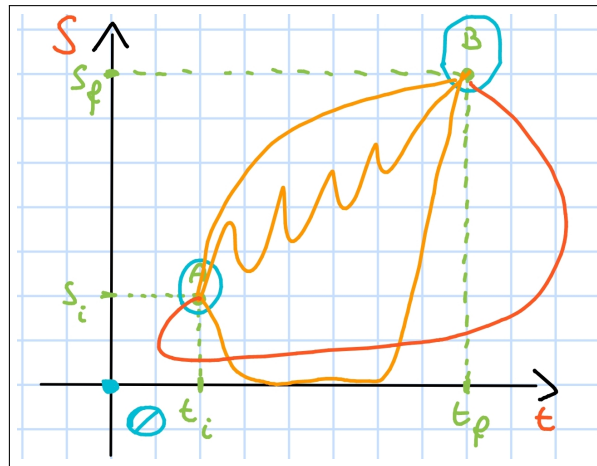
In particolare, in questo diagramma rappresentiamo sull'asse Y lo **spostamento** (s) (rappresentato come **valore uni-dimensionale**) e sull'asse X il **tempo** (t) (anche rappresentato come **valore uni-dimensionale**). *Nota che il diagramma NON RAPPRESENTA una posizione, ma lo spostamento in relazione al tempo.*

### 3.3 Caso semplice

Vediamo un semplice caso di utilizzo per capire come usare i diagrammi dello spazio:



Possiamo immaginare di avere un oggetto in movimento su una retta tra i punti A e B, come possiamo rappresentare questo movimento nel diagramma? Come prima cosa posizioniamo i "fenomeni" (*def. qualcosa che appare evidente all'osservazione*), ovvero i **punti A e B**, nota che non è detto che questi punti coincidano con dei "punti particolari" (ad esempio l'origine) nel nostro diagramma. In particolare, a questi punti associamo **un valore sull'asse del tempo** ( $t_i, t_f$ ) ed **un valore sull'asse dello spazio** ( $s_i, s_f$ ). A questo punto esistono **infiniti possibili percorsi** tra il punto A ed il punto B, ad esempio:



Importante notare che *non tutti questi percorsi, pur avendo senso matematico, hanno senso fisico!* Ad esempio, il percorso in rosso "torna indietro nel tempo"!

### 3.4 Moto rettilineo uniforme

STUB##### (In teoria lo fa dopo, controllare)

### 3.5 Velocità

Possiamo immaginare la velocità ( $v$ ) come la "*def. variazione dello spazio rapportato al tempo impiegato per percorrerlo*", in particolare la velocità è data dalla formula:

$$v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Vediamo un semplice esempio:

$$s_i = 400m, s_f = 700m, t_i = 7 : 30 = 450min, t_f = 7 : 40 = 460min$$

$$v = \frac{700m - 400m}{460min - 450min} = \frac{300m}{600s} = 0,5m/s$$

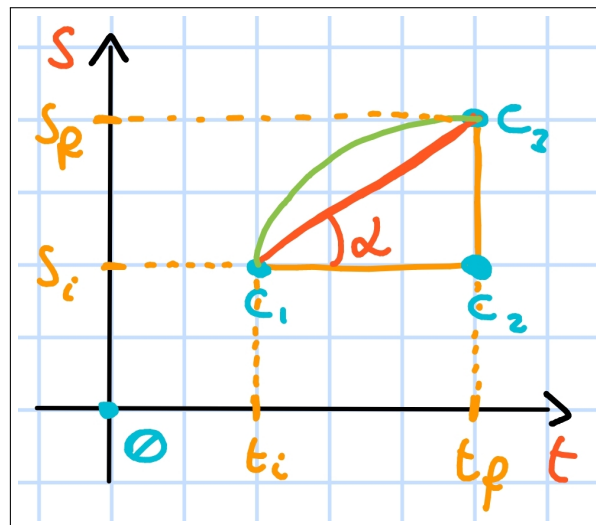
Nota che nella seconda uguaglianza nell'esempio abbiamo **convertito i minuti in secondi**, puoi immaginare che abbiamo posto " $min = (60s)$ ", quindi abbiamo fatto " $10min = 10 * (60s) = 600s$ ".

### 3.5.1 Velocità istantanea

Quella che abbiamo calcolato prima possiamo vederla come "velocità media" di tutto il percorso, la **velocità istantanea** invece possiamo vederla come la *def. velocità in un punto specifico del percorso*. Immagina quindi di fare la formula:

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Nota che quando si usa la lettera " $\delta$ " stiamo ad indicare una **piccola** (infinitesima) **variazione**. Ora, se il valore di  $s$  viene espresso **in funzione di  $t$** , quindi abbiamo  $s(t)$ , e la funzione " $s(t)$ " è **derivabile**, allora la **velocità istantanea corrisponde alla derivata prima della funzione  $s(t)$** , che a sua volta corrisponde a  $\frac{ds}{dt}$ .



Supponendo che il **moto del nostro punto** venga identificato dalla curva in verde, il rapporto tra la lunghezza dei 2 cateti  $C_1C_2$  ( $\Delta t$ ) e  $C_2C_3$  ( $\Delta s$ ) rappresenta la **tangente  $\alpha$** , che in questo caso rappresenta la **velocità media**. Ora, se restringiamo l'intervallo di  $t$  in modo che tenda a 0 e calcoliamo il valore della derivata in quel punto otterremo la velocità istantanea.

### 3.5.2 Accelerazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che la **velocità in un punto corrisponde al valore della derivata prima** (della funzione che rappresenta il moto del nostro corpo) **in quel punto**, per quanto riguarda l'accelerazione abbiamo che **l'accelerazione corrisponde al rapporto tra la derivata della velocità e la derivata del tempo**, ottenendo quindi la formula  $\frac{dv}{dt}$ , operativamente dobbiamo fare la derivata seconda della funzione che rappresenta il moto del nostro punto.

### 3.5.3 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Cominciamo col dire che:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ricorda che con  $dv$  e  $dt$  intendiamo le **derivate**. Da questa ricaviamo  $dv$ , ovvero:

$$dv = a * dt \Rightarrow \int_A^B dv = \int_A^B (a * dt) \Rightarrow v_B - v_A = a(t_B - t_A)$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Ottenuta questa formula, possiamo passare a calcolare lo **spazio in funzione del tempo**, ovvero:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v * dt \Rightarrow \int_A^B ds = \int_A^B v * dt \Rightarrow s_B - s_A &= \int_A^B [v_0 + a(t - t_0)] dt \Rightarrow \\ \Rightarrow s_B - s_A &= \left[ v_0 * t + a \frac{(t - t_0)^2}{2} \right]_A^B \Rightarrow s_B - s_A = v_0 * t_B + a \frac{(t_B - t_0)^2}{2} - v_0 * t_A + a \frac{(t_A - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Da questo otteniamo quindi che la velocità in funzione del tempo corrisponde a:

$$\underline{s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Terminiamo dicendo che in questo moto **l'accelerazione è costante**, quindi:

$$\underline{a(t) = a}$$

### 3.5.4 Esercizi vari sui moti con formule

Vediamo alcuni esempi:

**3.5.4.1 Esempio 1 (moto rettilineo uniforme)** Supponiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A ( $t_0, s_0$ ) ad un punto B ( $t_1, s_1$ ) tramite un **moto rettilineo uniforme**, abbiamo i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} t_0 = ? & s_0 = 1,5Km & v = 36m/s \\ s_1 = 11,5Km & t_1 = 0,3h & \end{array}$$

L'obiettivo è trovare i dati mancanti (ovvero  $t_0$ ). Noi sappiamo che la velocità "v" corrisponde a:

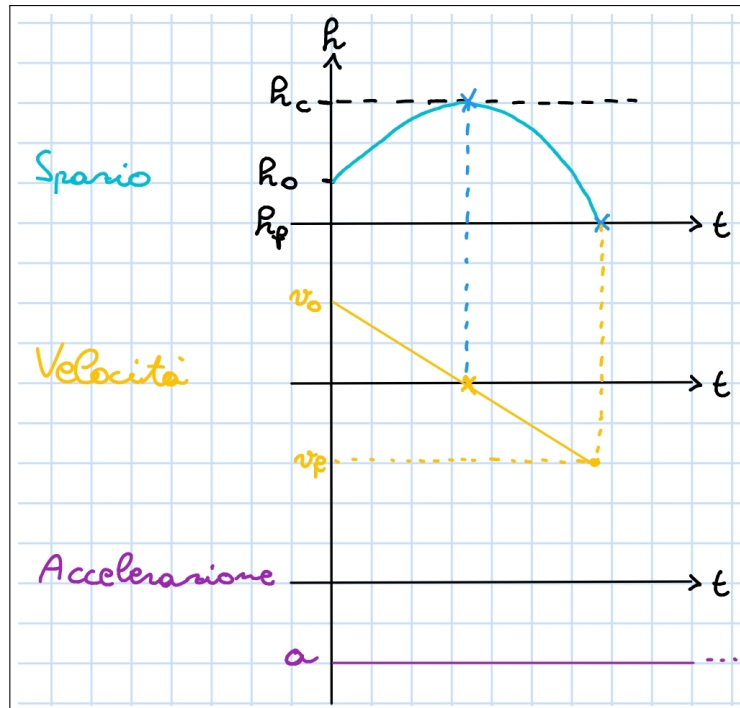
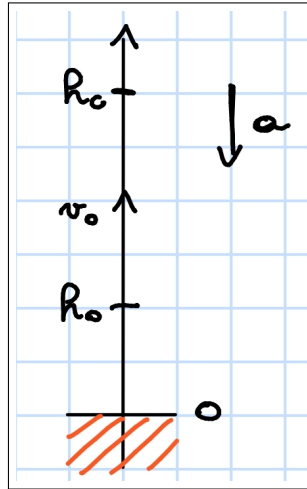
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow \dots \Rightarrow t_0 = t_1 - \frac{s_1 - s_0}{v}$$

Sostituendo i valori forniti, otteniamo che  $t_0 \approx 802,22s$

**3.5.4.2 Esempio 2 (moto rettilineo uniformemente accelerato)** Supponiamo di avere un oggetto all'altezza  $h_0$  e di lanciarlo verso l'alto con una velocità  $v_0$  nell'istante  $t_0$  con un'accelerazione  $a$ . Dobbiamo trovare l'altezza ( $h_c$ ) ed il tempo ( $t_c$ ) di culmine e, supponendo che alla fine l'oggetto raggiunga l'altezza finale " $h_f$ ", trovare il tempo finale " $t_f$ ". Supponiamo di avere i seguenti dati:

$$\begin{array}{llll} h_0 = 100m & t_0 = 0s & v_0 = 5m/s & a = -9,8m/s^2 \\ t_c = ? & h_c = ? & t_f = ? & h_f = 0m \end{array}$$

Includiamo delle immagini complementari:



Procediamo per punti:

1. Vogliamo trovare il tempo di culmine ( $t_c$ ), quindi poniamo  $v(t) = 0$  e troviamo la  $t$  che rende vera l'equazione:

$$v(t) = 0 \Rightarrow v_0 + a(t - 0) \Rightarrow t_c = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5m/s}{-9,8m/s^2} \approx 0,51s$$

2. Vogliamo calcolare l'altezza di culmine ( $h_c$ ), per farlo usiamo la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} h_c &= s(t_c) = s_0 + v_0(t_c - 0) + \frac{1}{2}a(t_c - 0)^2 = \\ &= 100m + 5m/s * (0,51s) + 1/2(-9,8m/s^2) * (0,51s)^2 \approx 101,28m \end{aligned}$$

3. Vogliamo calcolare il tempo "finale" ( $t_f$ ), per farlo usiamo sempre la formula dello spazio:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= h_f = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow s_0 + v_0(t_f - 0) + \frac{1}{2}a(t_f - 0)^2 &= 0 \end{aligned}$$



A questo punto abbiamo una funzione di secondo grado con  $x = t_f$ , quindi usiamo la formula solita:

$$t_{f \pm 1/2} = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 - 2\frac{s_0}{a}}$$

$$t_f = 0,51s + \sqrt{(0,51s)^2 - 2 * \frac{100m}{-9,8m/s^2}} \approx 5,06s$$

Nota che possiamo subito sostituire il " $\pm$ " con un "+" dato che la radice sarà sicuramente più grande di quel 0,51 che la precede, quindi non avrebbe fisicamente senso fare altrimenti (tempo negativo).

### 3.6 Moto armonico

Nel moto armonico abbiamo un'**accelerazione oscillante**, nella forma  $a_0 * \sin(t)$ . Il problema è che il sin (come tutte le funzioni matematiche) è adimensionale, quindi dobbiamo aggiungere delle componenti aggiuntive per **rendere il tempo "t" adimensionale**, in particolare abbiamo che:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t + \varphi)$$

dove " $\omega$ " rappresenta la **pulsazione** e " $\varphi$ " la **fase**. Nota che **abbiamo già l'accelerazione**, ovvero  $a_0 * \sin(t)$ , quindi per calcolare velocità e spazio procediamo per **integrazioni successive**, con gli estremi di integrazione che corrispondono al **punto di inizio e di fine** della nostra misurazione.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = v_0 + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \omega a_0 \sin(\omega \tau + \varphi) d\tau = \\ &= v_0 + \frac{1}{\omega} \left[ -\cos(\omega \tau + \varphi) \right]_{t_0}^t = \textcolor{red}{v}_0 - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Nota che il **testo in rosso sopra**, in quanto costante, viene raccolto in  $V$ , passiamo ora a calcolare lo spazio (che corrisponde all'integrazione della velocità):

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \\ &= \textcolor{red}{s}_0 + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

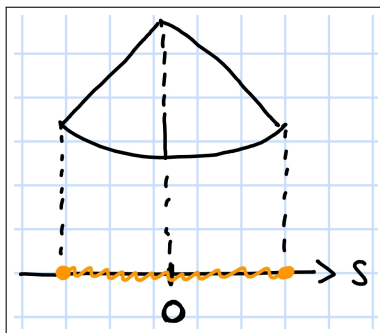
In definitiva, le formule che interessano a noi sono:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 * \sin(\omega t + \varphi) \\ v(t) &= \textcolor{red}{V} - \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \\ s(t) &= \textcolor{red}{S} + V(t - t_0) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ricorda che **le parti in rosso** sono costanti (di solito per noi varranno 0), mentre l'accelerazione ci è stata fornita all'inizio, quindi teniamo quella. Vediamo un "esempio":

### 3.6.1 Esempio di moto armonico

Ipotizziamo di avere una situazione del genere: vogliamo misurare l'andamento dell'ombra di un'altalena (che va solo avanti e indietro) sulla superficie.



Noi *assumiamo sempre che  $\varphi$  (ovvero la fase) = 0* e che *cominciamo da  $t_0 = 0$* , quindi le nostre formule diventano:

$$a(t) = a_0 * \sin(\omega t)$$

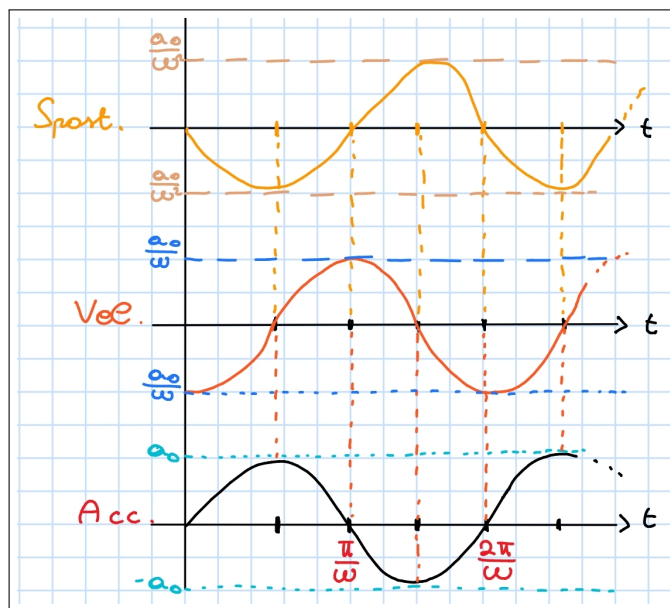
$$v(t) = -\frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$s(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

Prima di passare al grafico dobbiamo calcolare il valore della nostra variabile  $t$ , ora noi sappiamo che  $\omega t$ , dato che  $\varphi = 0$ , deve rappresentare una rotazione completa ( $2\pi$ ):

$$\omega t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} = T$$

Nota che il nostro  $T$  rappresenta il **periodo**. Con queste funzioni/variabili, possiamo passare al calcolo dei grafici temporali:



## 3.7 I moti piani

Prima di partirci con i moti veri e propri, introduciamo velocemente i **vettori**.

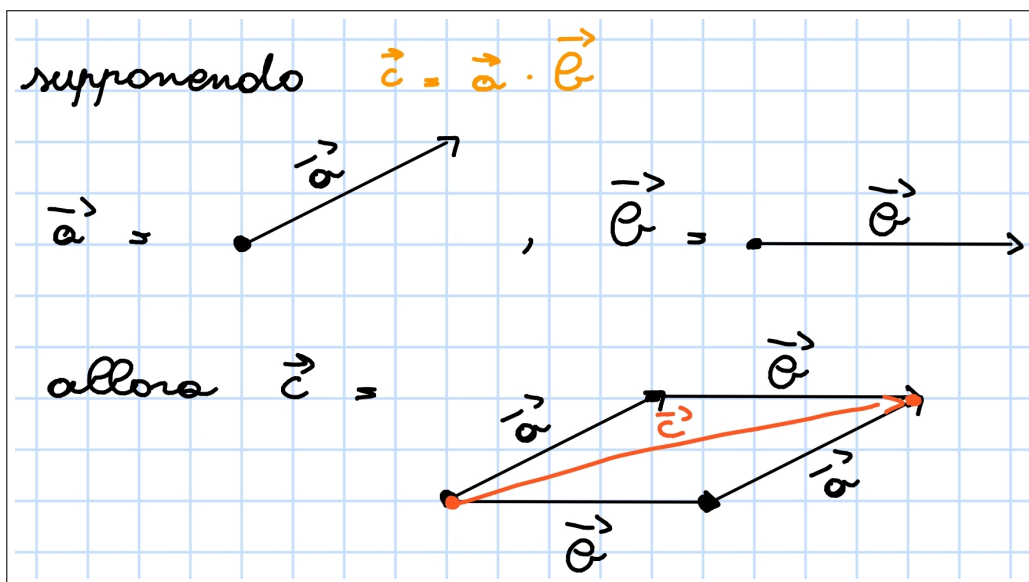
### 3.7.1 I vettori

Passiamo ora a considerare i **moti con 2 dimensioni**, per questo motivo dobbiamo introdurre i **vettori** composti da:

- punto di inizio;
- verso;
- modulo (la lunghezza del vettore);
- direzione (la retta su cui giace il vettore);

I vettori, si comportano in modi leggermente diversi rispetto ai numeri "normali", in particolare a noi interessa:

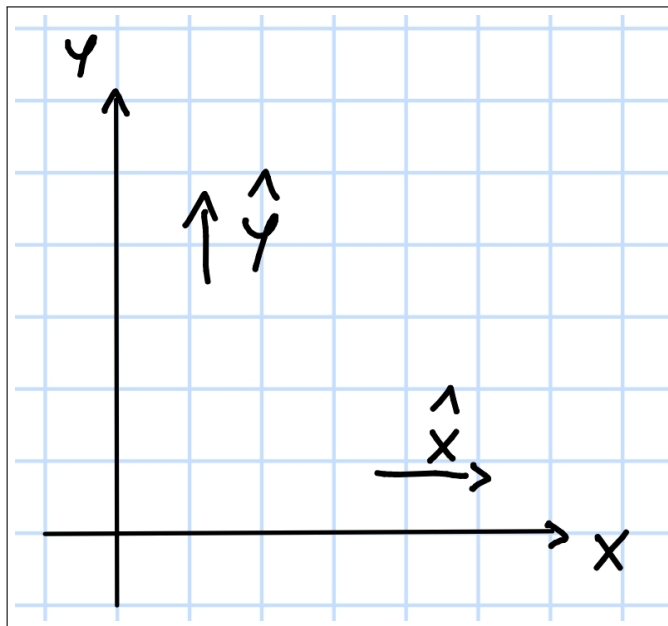
- somma: si fa con la **regola del parallelogramma**, ovvero:



- prodotto per scalare: quando si moltiplica un vettore per uno scalare, semplicemente si va a **moltiplicare il modulo del vettore**, in particolare " $\vec{a} = b * \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = b * |\vec{c}|$ "

### 3.7.2 Sistema di riferimento

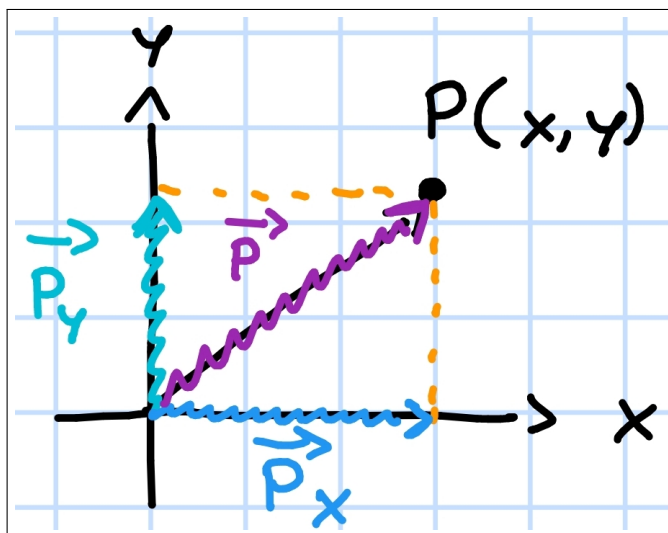
Introduciamo ora il sistema di riferimento per questo moto:



Da questo punto in poi, rappresentiamo il moto sul **piano cartesiano**: rappresenteremo quindi il **movimento "fisico"** del moto in quanto **non più unidimensionale**! Per quanto riguarda gli assi, si usano quelli che vengono definiti **versori** che matematicamente si rappresentano come  $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$ . In questo modo otteniamo qualcosa di **adimensionale** e che ha **modulo 1 per definizione**.

Quando vogliamo rappresentare un punto, possiamo farlo **attraverso un vettore**, che a sua volta si può rappresentare come la **somma di 2 vettori "unidimensionali"** (uno per ogni asse) che a loro volta si possono rappresentare come **spostamenti sui vari assi moltiplicati per il versore associato**:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}$$



Allo stesso modo possiamo rappresentare velocità ed accelerazione!

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x * \hat{x} + a_y * \hat{y}$$

Ora, possiamo anche rappresentare un vettore sottoforma di "matrice", in questo modo:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix}$$

Ovvero lo spostamento, ad esempio, è composto dalla somma dello spostamento sull'asse x  $S_x$  e di quello sull'asse y  $S_y$

### 3.7.3 Rappresentare velocità ed accelerazione

Partiamo con la velocità: sappiamo che la velocità per il moto unidimensionale è data dalla **derivata dello spostamento**, per quanto riguarda il moto piano non cambia molto: dobbiamo soltanto **derivare una somma di 2 componenti!** Ovvero:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d[S_x * \hat{x} + S_y * \hat{y}]}{dt} = \frac{dS_x}{dt} * \hat{x} + \textcolor{red}{S_x} * \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{dS_y}{dt} * \hat{y} + \textcolor{red}{S_y} * \frac{d\hat{y}}{dt}$$

Quelle 2 parti evidenziate in **rosso** sono speciali: rappresentano il possibile movimento degli assi. Per il momento, le considereremo **sempre nulle** in quanto i **nostri assi non si muoveranno!** Quindi, in soldoni, otterremo che la nostra velocità equivale a:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dS_x/dt \\ dS_y/dt \end{bmatrix}$$

Nota però che questo ragionamento possiamo farlo **solo se gli assi restano fermi**, altrimenti dovremmo fare delle considerazioni in più. Allo stesso modo, possiamo fare la stessa cosa per l'accelerazione, ottenendo anche qui:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \end{bmatrix}$$

### 3.7.4 Esempio

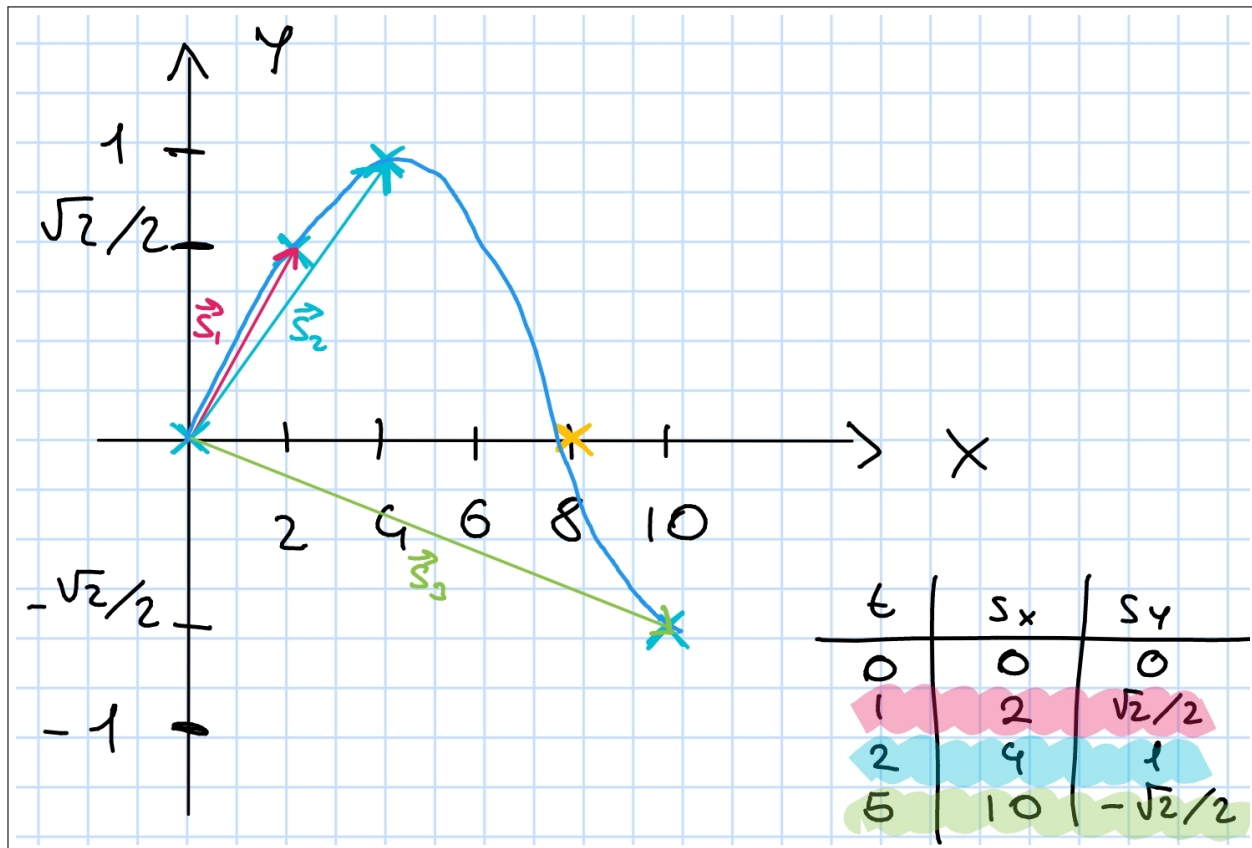
Vediamo un esempio, dobbiamo calcolare velocità e accelerazione sapendo che:

$$\vec{S}(t) = \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m/s \\ 1m * \sin(\pi/4 Hz) \end{bmatrix}$$

Nota che  $Hz = s^{-1}$ , la prima cosa da fare ora è **rappresentare qualche punto**, possiamo farlo in una tabella:

| $t$ | $S_x$ | $S_y$         |
|-----|-------|---------------|
| 0   | 0     | 0             |
| 1   | 2     | $\sqrt{2}/2$  |
| 2   | 4     | 1             |
| 5   | 10    | $-\sqrt{2}/2$ |

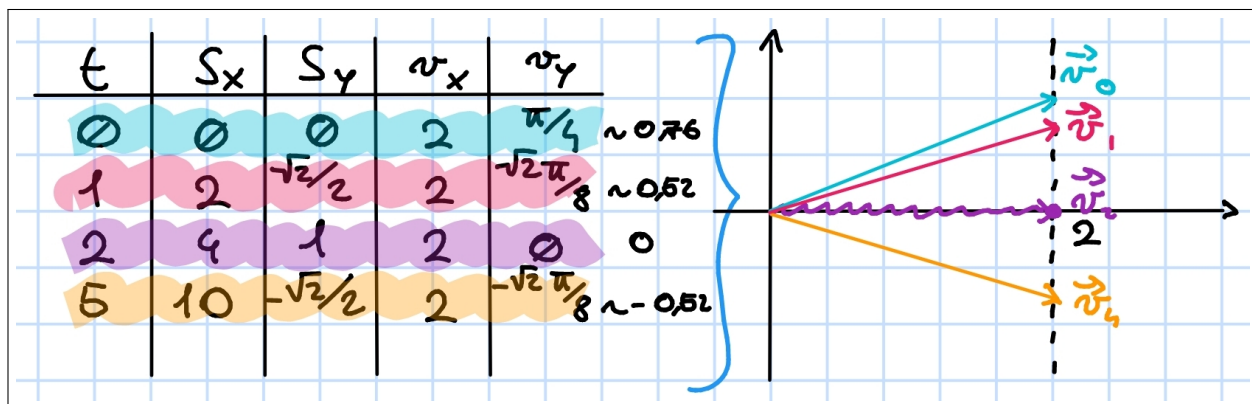
Rappresentiamo ora questi punti sul piano cartesiano (aggiungendo anche i vettori che rappresentano i punti), ricorda inoltre che il piano ora **rappresenta la traiettoria e NON più lo spazio/tempo**:



Ora calcoliamo la velocità, per farlo ci basta derivare per t:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4}\cos(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Rifacciamo la tabella e rappresentiamo il tutto sul grafico:



Terminiamo con l'accelerazione, che corrisponde semplicemente alla **derivata della velocità**, otterremo quindi:

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\frac{\pi}{4})^2 \sin(\pi/4 t)\hat{y} \end{bmatrix}$$

Ricapitolando i risultati ottenuti, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\vec{S}(t) &= \begin{bmatrix} 2t\hat{x} \\ \sin(\pi/4 \ t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{v}(t) &= \begin{bmatrix} 2\hat{x} \\ \frac{\pi}{4}\cos(\pi/4 \ t)\hat{y} \end{bmatrix} \\ \vec{a}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin(\pi/4 \ t)\hat{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$