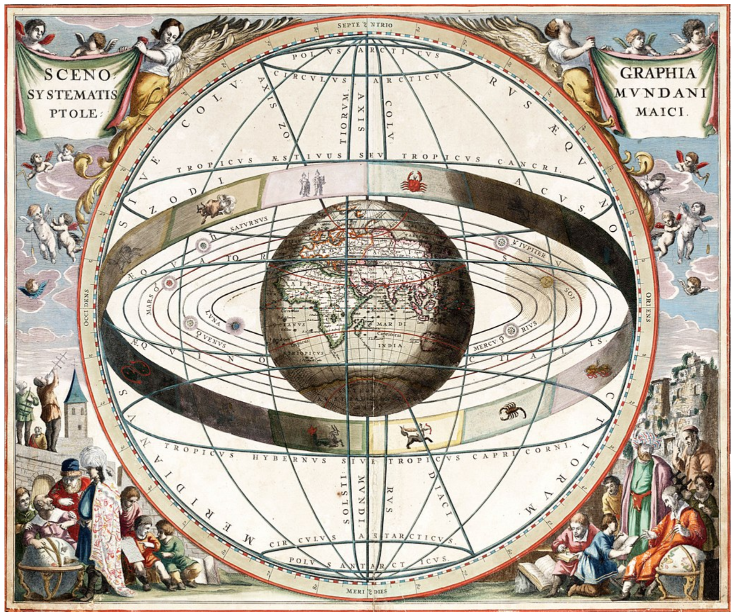



# Fisica

UNITN - Lazzerini Thomas, Cappelletti Samuele

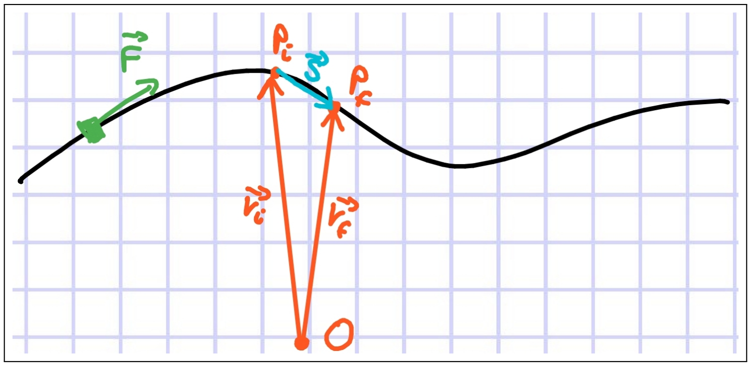
Marzo 2021

Nel presente documento sono presenti gli appunti relativi alla teoria del corso "**Fisica**" dell'anno **2021-2022** tenuto dal **professor Iuppa**).

# Indice

# 1 Meccanica

## 1.1 Lavoro




Supponiamo che ci sia un corpo che si muove lungo una traiettoria. Ora prendiamo un punto d'origine del sistema di riferimento e descriviamo il movimento del corpo con dei raggi vettore dall'origine. Ora consideriamo un punto iniziale $p_i$ ed uno finale $p_f$ molto vicini tra loro e quindi otteniamo uno spostamento infinitesimale, $d\vec{s} = \vec{r_f} - \vec{r_i}$.
Sul corpo inoltre agisce una forza $\vec{F}$ che è quella che lo fa spostare. Osserviamo ora che a seconda del valore di questa forza, potrebbe variare la velocità dell'oggetto. Se $d\vec{s} \perp \vec{F}$, allora il corpo non rallenta, quindi se l'angolo è $90_\circ$, l'effetto sarà minimo, mentre se l'angolo è $0_\circ$ l'effetto sarà massimo e infine se l'angolo è $180_\circ$ l'effetto sarà massimo ma in senso opposto.
In conclusione quindi l'effetto che la forza ha sul corpo è descritta dal coseno ed è definito come **lavoro infinitesimo**, in formula:

$$dW = |\vec{F}||d\vec{s}|cos\alpha_{F,ds}$$

Se il lavoro infinitesimo è positivo, allora il corpo accellera, se è negativo invece, il corpo rallenta. L'iterazione quindi tra il corpo e l'agente esterno, ovvero quello che applica la forza, è definita come energia. In questo caso,l'agente esterno perde energia.

Osserviamo ora che:

$$|\vec{v}||\vec{w}|cos(\alpha_{v,w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

dove "$\cdot$" rappresenta il prodotto scalare tra due vettori. Spesso questo viene detto $v_T w$, ovvero la componente di $v$ tangente a $w$, quindi:

$$|\vec{v}|cos(\alpha_{v,w}) = v_T$$
$$|\vec{w}|cos(\alpha_{v,w}) = w_T$$

Ora usiamo quindi questa osservazione e otteniamo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che l'unità di misura del lavoro è il Joule, $J = 1Nm$. Una caloria sono, $1cal = 4.18J$
. Ora calcoliamo il **lavoro medio** come segue:

$$\overline{W} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

Osserviamo che il lavoro è una quantità scalare, dato che il prodotto scalare prende due vettori e li trasforma in uno scalare.

Facciamo ora un'esempio molto semplice:

$$|\vec{F}| = 10N|\Delta\vec{s}| = 100m$$

Ora in base all'angolo $\alpha_{F,ds}$ abbiamo dei diversi valori di lavoro:

| $\alpha_{F,ds}$ | $W$ |
|---|---|
| $0$ | $1000J$ |
| $\pi$ | $-1000J$ |
| $\pi/2$ | $0J$ |
| $\pi/4$ | $707J$ |

Ora consideriamo tutti gli spostamenti infinitesimi e supponiamo che ogni spostamento infinitesimo abbia un valore di forza diversa (ovviamente la forza è esercitata sempre dallo stesso agente esterno, ma in istanti diversi). Abbiamo quindi per ogni spostamento infinitesimale un lavoro infinitesimale diverso. Rappresentiamo questa cosa come segue:

$$\begin{aligned}&d\vec{s_1}, d\vec{s_2}, d\vec{s_3}, ..., d\vec{s_n}\\&\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, ..., \vec{F_n}\\&dW_1, dW_2, dW_3, ..., dW_n\end{aligned}$$

Il **lavoro** quindi sarà la somma di tutti questi lavori infinitesimi:

$$W_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} dW_i$$

però considerando che la n tende a infinito, $n \to \infty$, otteniamo:

$$W_{i\to f} = \int_i^n dW_i = \int_i^n \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Osserviamo che la $\vec{F}$ si può tirare fuori dall'integrale solo se non varia per nessun spostamento infinitesimale.

Ora consideriamo il lavoro $W > 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[0, \pi/2]$, ovvero in cui la forza sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro motore**.
Se invece il lavoro $W < 0$, ovvero per un angolo compreso tra $[\pi/2, \pi]$, ovvero in cui la forza non sta aiutando il moto/movimento, in questo caso il lavoro si chiama **lavoro resistente**.

## 1.2 Esempi di lavoro

### 1.2.1 Lavoro forza peso

Data l'equazione della forza peso:

$$\vec{F_p} = -mh\hat{h}$$

abbiamo lavoro infinitesimo:

$$dW = \vec{F_p} \cdot d\vec{h} = -mh\hat{h} \cdot dh\hat{h} = -mgdh$$

Osserviamo che $\hat{h} \cdot \hat{h} = 1$. Ora quindi sommando tutti questi lavori infinitesimi otteniamo il lavoro $W_p$:

$$W_p = \int_i^f dW = \int_i^f -mgdh = -mg(h_f - h_i) = -mg\Delta h$$

Osserviamo ora che se $\Delta h > 0$, ovvero $h_f > h_i$, avremo $W_p < 0$, quindi lavoro resistente, mentre se $\Delta h < 0$, ovvero $h_f < h_i$, avremo $W_p > 0$, quindi lavoro motore.
Questo era il caso di spostamento verticale, se invece lo spostamento non è verticale il lavoro è comunque lo stesso.
Osserviamo ora che $\vec{F}$ e $d\vec{s}$ non dipendono dal sistema di riferimento, se però consideriamo la forma $\vec{F_p} = -mg\hat{h}$, questa dipende dal sistema di riferimento dato che c'è $\hat{h}$.
Osserviamo inoltre che il lavoro della forza peso dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

Facciamo ora un'esercizio molto semplice:

$$m = 100kg$$
$$\Delta h = 1000m$$
$$W_p = -9.8\frac{m}{s^2} \cdot 100kg \cdot 1000m = -9.8 \cdot 10^5 kg\frac{m^2}{s^2} = -9.8 \cdot 10^5 J = -9.8 \cdot 10^2 KJ$$

### 1.2.2 Lavoro forza elastica

Data l'equazione della forza elastica:

$$\vec{F_{el}} = -K\vec{x}$$

abbiamo lavoro:

$$W_{el} = \int_i^f F_{el}dx = \int_i^f -Kxdx = -\frac{K}{2}({x_f}^2 - {x_i}^2)$$

Osserviamo ora che se ${x_f}^2 > {x_i}^2$, avremo $W_{el} < 0$, infatti allungo la molla che si oppone, mentre se ${x_f}^2 < {x_i}^2$, avremo $W_{el} > 0$, infatti accorcio la molla che aiuta.
Osserviamo inoltre che il lavoro della forza elastica dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso.

### 1.2.3 Lavoro forza attrito

Data l'equazione della forza d'attrito:

$$\vec{F_{att}} = -\mu_d N = -\mu_d mg$$

abbiamo lavoro:

$$W_{att} = \int_i^f F_{att}dx = F_{att}\int_i^f dx = -\mu_d mg \int_i^f dx = -\mu_d mgL$$

dove $L$ è la lunghezza dello spostamento $(x_f - x_i)$.
Osserviamo che l'attrito si oppone sempre al movimento, quindi non vale quello che valeva per il lavoro della forza peso e della forza elastica, ovvero che a seconda del punto finale e del punto iniziale il lavoro poteva essere positivo o negativo.

## 1.3 Energia cinetica

Consideriamo ora il lavoro infinitesimo,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = md\vec{v}\frac{d\vec{s}}{dt} = md\vec{v} \cdot \vec{v}$$

e quindi,

$$dW = d[\frac{1}{2}mv^2]$$

L'**energia cinetica** è la seguente quantità:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi ho che:

$$dW = d[E_k]$$

### 1.3.1 Teorema delle forze vive

Il **Teorema delle forze vive** afferma che se un corpo possiede un'energia cinetica iniziale e una forza agisce su di esso effettuando un lavoro, l'energia cinetica finale del corpo è uguale alla somma dell'energia cinetica iniziale e del lavoro compiuto dalla forza lungo la traiettoria del moto. In formula:

$$E_{k,f} = W_{i\to f} + E_{k,i} => W_{i\to f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

Osserviamo ora che se $v_i = 0$ e $v_f = 0$, allora per come è formulata $E_k$, vorrà dire che $E_{k,i} = 0$ e $E_{k,f} = 0$ e quindi $W_{i\to f} = 0$.

## 1.4 Potenza

La **potenza** è definita come:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'unità di misura della potenza è il Watt, $W = 1\frac{J}{s}$.

## 1.5 Forze conservative

Una **forza conservativa** è una forza per cui il lavoro dipende solamente dal punto iniziale, $p_i$, e dal punto finale, $p_f$.
Se vado quindi da $p_i$ a $p_f$ seguendo due percorsi diversi il lavoro sarà lo stesso.
Se invece vado da $p_f$ a $p_i$, il lavoro sarà sempre uguale ma avrà segno opposto, indipendentemente dal percorso. Questo è descritto come segue,

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

ovvero l'integrale chiuso.

### 1.5.1 Energia potenziale

L'**energia potenziale** di un corpo è l'energia che esso possiede a causa della sua posizione o del suo orientamento rispetto ad un campo di forze ed è denotata con $U$.

### 1.5.2 Energia meccanica

L'**energia meccanica** è la somma di energia cinetica ed energia potenziale ovvero,

$$E = E_k + U$$

### 1.5.3 Principio di conservazione dell'energia meccanica

Consideriamo il caso 1-DIM,

$$\int_{p_i}^{p_f} F dx = U(p_f) - U(p_i) = W_{p_i \to p_f}$$

Ora per il teorema delle forze vive ho che,

$$W_{p_i \to p_f} = E_{k,f} - E_{k,i}$$

e quindi, usando una notazione semplificata, ovvero per esempio invece che $U(p_f)$ uso $U_f$, ottengo che,

$$U_f - U_i = E_{k,f} - E_{k,i} => U_f - E_{k,f} = U_i - E_{k,i} => E_f = E_i$$

ovvero l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale, e quindi

$$\Delta E = 0$$

ovvero la variazione di energia meccanica è 0, quindi nel caso in cui si hanno solo forze conservative, l'energia meccanica non varia, si conserva.
Se ora consideriamo,

$$-(U(p_f) - U(p_i)) = W_{p_i \to p_f}$$

ed deriviamo, otteniamo che,

$$F = -\frac{dU}{ds}$$

Nel caso a più dimensioni invece, per esempio consideriamo 3-DIM, abbiamo che,

$$F = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z})$$

### 1.5.4 Esercizio forze conservative

Consideriamo ora l'esercizio fatto in passato [pag.**??**].
Tutte le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica e risolverlo in modo molto più semplice.
Ora abbiamo quindi che le forze che agiscono sul sistema sono,

$$\vec{F_p} = -mg\hat{z}\vec{F_e}l = -k(z - z_i)\hat{z}$$

e considerando la conservazione dell'energia meccanica abbiamo che,

$$E_k + U = cost => E_k + U_p + U_{el} = cost$$

Calcoliamo ora quindi le energie potenziali,

$$U_p = -W_p = mg(z - z_0)$$
$$U_{el} = \frac{k}{2}(z^2 - z_0^2)$$

e quindi ora sostituisco nella formula precedente e ottengo,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{k}{2}z^2 = cost$$

Ora considerando il sistema di riferimento scelto, nel punto iniziale abbiamo $v_i = 0$ e $z = 0$ e quindi, la formula precedente è $= 0$.
Considerando il punto $z_{max}$, ho sempre che $v = 0$, e ottengo che,

$$mgz_{max} + \frac{k}{2}{z_{max}}^2 = 0 => z_{max}(\frac{k}{2}z_{max} + mg) = 0$$

Le due soluzioni sono quindi $z_{max} = 0$, che non viene considerata, e

$$z_{max} = -\frac{2mg}{k} = \Delta z_{max}$$

Ora osserviamo che $z_{v_{max}}$ è $z_{eq}$, ovvero la $z$ nel punto di equilibrio, e quindi,

$$z_{v_{max}} = z_{eq} = \frac{z_{max}}{2} = -\frac{mg}{k}$$

Per calcolare la $v_{max}$ ora, consideriamo sempre il fatto che essa è in $z_{eq}$ e quindi,

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgz_{eq} + \frac{k}{2}z_{eq}^2 = 0 \qquad => \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{(mg)^2}{2K} = 0$$
$$=> \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{(mg)^2}{2K} = 0$$
$$=> \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{(mg)^2}{2K}$$
$$=> v_{max}^2 = \frac{mg^2}{K}$$
$$=> v_{max} = \sqrt{\frac{mg^2}{K}}$$

## 1.6 Forze non conservative e lavoro

Consideriamo ora il fatto in cui sul sistema agiscono anche forze non conservative e ne calcoliamo il lavoro. Abbiamo quindi che,

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{R}_{nc}$$
$$W_{TOT} = \int_i^f \vec{R}d\vec{s} = \int_i^f \vec{R}_c d\vec{s} + \int_i^f \vec{R}_{nc}d\vec{s} = W_c + W_{nc}$$

Ora però sappiamo che,

$$W_{TOT} = \Delta E_k => W_c + W_{nc} = \Delta E_k => W_{nc} = \Delta E_k - W_c$$

ma ora ci ricordiamo che $W_c = -\Delta U$ e quindi,

$$W_{nc} = \Delta E_k + \Delta U => W_{nc} = \Delta E$$

Quindi se sul sistema agiscono delle forze non conservative, il lavoro di queste sarà uguale alla variazione di energia meccanica.
Osserviamo ora quindi che se $W_{nc} < 0$, vuol dire che $E_f - E_i < 0$ e quindi $E_f < E_i$. Allo stesso modo, se $W_{nc} > 0$, vuol dire che $E_f - E_i > 0$ e quindi $E_f > E_i$, e inoltre $E_f = E_i + W_{nc}$.

### 1.6.1 Esempio lavoro forze non conservative

Supponiamo che un corpo di massa $m$ scali una montagna di altezza $h_{max}$ partendo da $h_0 = 0$. Ora non considerando gli attriti, abbiamo solo la forza peso che agisce sulla massa. Calcoliamo quindi,

$$\begin{aligned} &\Delta U_p = mgh_{max} + mg0 = mgh_{max} \\ &\Delta E_k = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{1}{2}m{v_i}^2 = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}m0^2 = 0 \\ &\Delta E = mgh_{max} = W_{nc} \end{aligned}$$

L'energia cinetica è $= 0$ dato che sia la velocità iniziale che quella finale sono $= 0$ e quindi l'energia meccanica sarà uguale all'energia potenziale, quest'ultima è uguale all'energia potenziale finale dato che, essendo l'altezza iniziale $= 0$, anche l'energia potenziale iniziale $= 0$.

## 1.7 Gravità universale

La **forza gravitazionale** è quella forza che esiste tra 2 corpi. Possiamo rappresentarla con questa formula:

$$\vec{F} = -\gamma * \frac{m_1 * m_2}{r_{1,2}^2} * \hat{r}_{1,2}$$

Dove:

- $G$ è la **costante di gravitazione universale**, calcolata scientificamente e vale $\gamma = G = 6,67 * 10^{-11} \frac{N*m^2}{Kg^2}$. Nota che G è $\gamma$ per la Terra;
- $m_1, m_2$ sono le masse dei 2 corpi;
- $r1,2$ è la distanza tra i 2 corpi;

Perché ci serve la costante di gravitazione? Se **controlliamo le unità di misura senza questa costante** otterremo una $\frac{M^2}{L^2}$ (M -> massa, L -> lunghezza), ma noi **vogliamo una forza**! Per questo motivo introduciamo la costante di gravitazione, espressa proprio come $N * \frac{L^2}{M^2}$, se mettiamo tutto insieme le masse e le lunghezze si semplificano **lasciando solo una forza** (in Newton)! Se immaginiamo di avere la Terra e la Luna, la forza gravitazionale è proprio **la forza normale che permette alla luna di restare sulla sua orbita** (che immaginiamo essere perfettamente circolare per semplicità). Questa forza corrisponderebbe proprio a:

$$\vec{F} = -G * \frac{m_L * m_T}{d^2}$$

Ora, noi sappiamo che, per la II legge di Newton, che $\vec{F} = m * \vec{a}$. Possiamo mettere a confronto i **moduli di queste 2 forze**:

$$m_{I,L} * \frac{v^2}{d_{T,L}} = G * \frac{m_{G,L} * m_{GT}}{d_{T,L}^2}$$

Alcune osservazioni:

1. il "$-G$" diventa "$G$" perché **stiamo paragonando i moduli**, quindi il segno non importa;
2. la forza a sinistra dell'$=$ corrisponde alla **forza normale del moto circolare**;
3. a sinistra dell'$=$, la massa $m_{I,L}$ è la **massa INERZIALE** (*capacità di un corpo di opporsi al moto*) della luna, mentre a destra la massa $m_{G,L}$ è la **massa GRAVITAZIONALE** (*carica gravitazionale del corpo*) della luna. Sono 2 valori **concettualmente diversi**, ma **hanno valori uguali**!

Detto ciò, soprattutto facendo riferimento al terzo punto, possiamo applicare una serie di semplificazioni:

$$\begin{aligned}
& m_{I,L} * \frac{v^2}{d} = G * \frac{m_{G,L} * m_{G,T}}{d^2} && => \frac{v^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\
& conversione\ vel.\ moto\ circolare && => \frac{(\omega * d)^2}{d} = G * \frac{m_{G,T}}{d^2} \\
& && => \omega^2 * d^2 = G * \frac{m_{G,T}}{d} \\
& && => \omega^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\
& definizione\ \omega && => (\frac{2\pi}{T})^2 * d^3 = G * m_{G,T} \\
& && => \frac{d^3}{T^2} = G * \frac{m_{G,T}}{(2\pi)^2}
\end{aligned}$$

Ok, con l'ultima equazione siamo arrivati al punto in cui abbiamo **tutto quello che riguarda il satellite** (la Luna) **è da una parte** e **tutto quello che riguarda la Terra è dall'altra**. In particolare, notiamo che la parte che riguarda la Terra **è costante**! Ciò ci permette di, ad esempio, i scegliere una nuova distanza e, di conseguenza, il periodo T si "aggiusterà" di conseguenza per mantenere la costante "costante".

$$\frac{d^3}{T^2} = const.$$

Nota come **la massa del satellite non influisce sulla distanza o sul periodo**, quindi possiamo usare la **stessa formula** per **qualsiasi satellite che orbita la terra** (con un moto circolare uniforme). Immaginiamo di considerare l'ISS che orbita la terra ad una distanza di 500Km, la formula diventerebbe:

$$\frac{d_L^3}{T_L^2} = const. = \frac{d_{ISS}^3}{T_{ISS}^2}$$

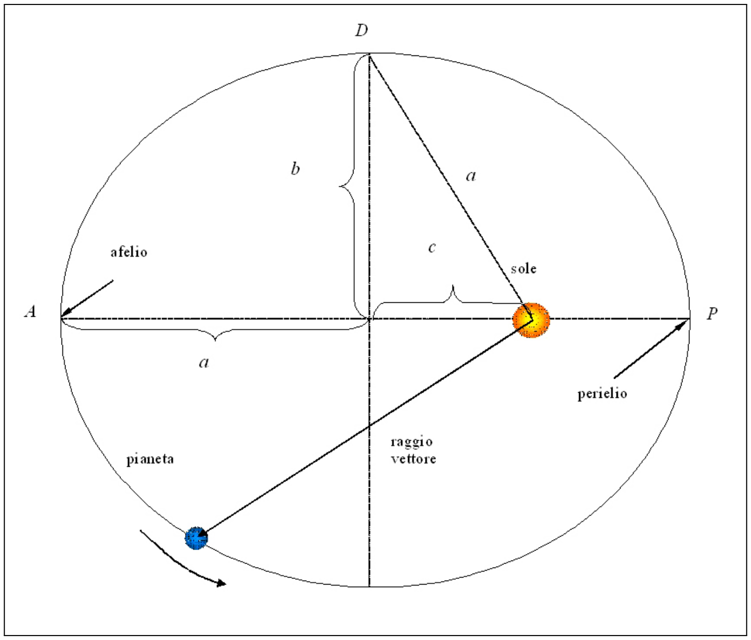
$$\frac{(300000Km)^3}{(28gg)^2} = const. = \frac{(500Km)^3}{(?)^2}$$

Come detto prima, se variamo il raggio dell'orbita, il periodo varia di conseguenza per mantenere il valore della costante uguale!

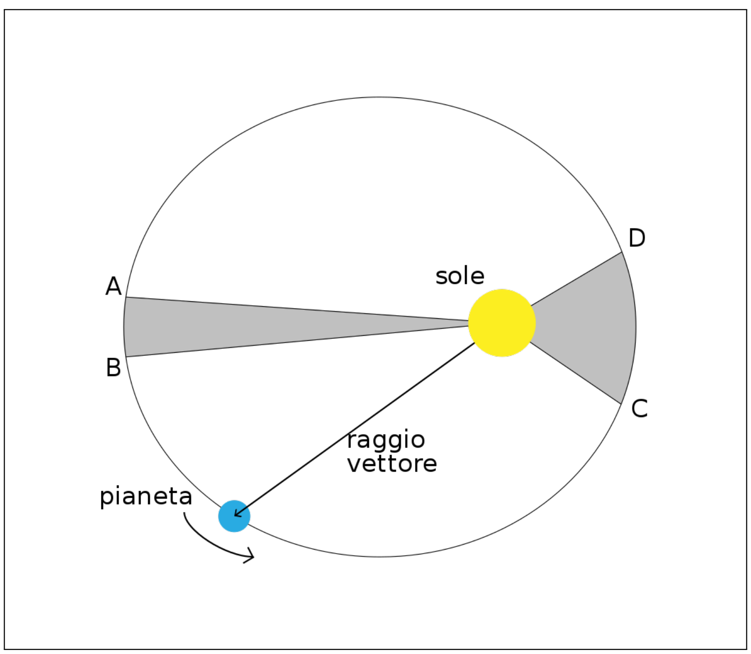
## 1.8 Leggi di Keplero

La legge di gravità universale è stata "creata" come **"unificazione" delle 3 leggi di Keplero**. Nota che queste leggi descrivono il moto, ellittico, dei pianeti attorno al Sole. Citiamole per completezza:

1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi*;




2. *Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali*;




3. *I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore*. Questa legge può essere scritta in forma matematica in questo modo:

$$T^2 = k * a^3$$

In particolare, $k$ è una costante (detta anche Keplero) che dipende dal corpo attorno al quale si orbita.

## 1.9 Sistemi di riferimento non inerziali

Prima di cominciare con i sistemi di riferimento non inerziali, sostanzialmente quei **sistemi di riferimento soggetti ad una qualche accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale**, dobbiamo introdurre alcuni concetti fondamentali.

### 1.9.1 Convertire una rotazione in vettore

Come facciamo a rappresentare una rotazione utilizzando un vettore? Vediamo punto per punto:

- **direzione**: corrisponde all'asse su cui viene eseguita la rotazione;
- **verso**: applichiamo la "regola della vite destrorsa", ovvero immaginiamo di posizionare una vite sull'asse di rotazione ed applichiamo suddetta rotazione: il verso di avanzamento/arretramento della vite ci indica il verso del vettore (ricorda che le viti "entrano" se vengono ruotate in senso orario);
- **modulo**: come abbiamo già visto, possiamo rappresentare la rotazione con una **velocità angolare** $\omega$, prendiamo come modulo del vettore il **valore numerico di** $\omega$;

### 1.9.2 Prodotto vettoriale

Dobbiamo ridordare il concetto di **prodotto vettoriale**, in particolare è un'operazione binaria tra 2 vettori 3-dimensionali che restituisce un vettore 3-dimensionale. Matematicamente potremmo scrivere:

$$\times : R^3 \times R^3 \to R^3$$

Supponiamo di avere:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{k}$$

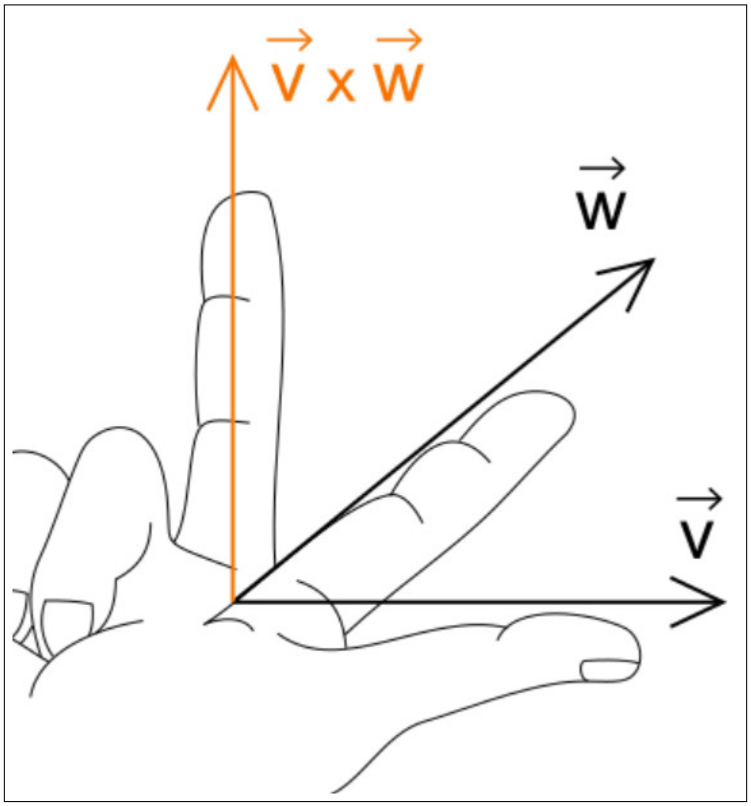
Ora, il vettore $\vec{k}$ ha 3 componenti principali, come le calcoliamo? Vediamo:

- **modulo**: corrisponde a

  $$||\vec{v}|| * ||\vec{w}|| * sin(\theta)$$

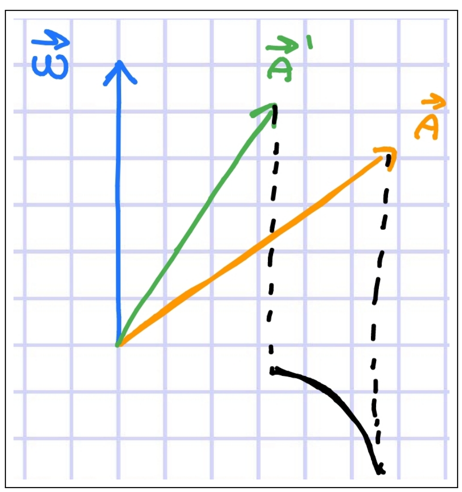
  dove $||\vec{v}||$ e $||\vec{w}||$ rappresentano la **norma euclidea** dei rispettivi vettori (sostanzialmente si fa la radice della somma dei quadrati delle componenti del vettore), mentre $\theta \in [0, \pi]$ rappresenta **l'angolo convesso tra i vettori**;
- **direzione**: la direzione **ortogonale** al piano che contiene $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
- **verso**: per quanto riguarda il verso, includo la regola generale della mano destra:

> - il verso di $\vec{v} \times \vec{w}$ si ricava con la regola della mano destra: si dispone il pollice della mano destra nella direzione e nel verso del vettore $\vec{v}$, e l'indice nella direzione e nel verso di $\vec{w}$. Distendendo il dito medio perpendicolarmente al palmo della mano, si ha la direzione e il verso in cui punta il prodotto $\vec{v} \times \vec{w}$.

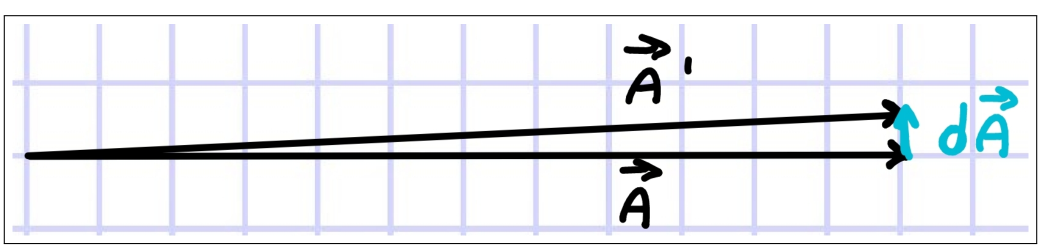



### 1.9.3 Legge di Poisson

L'ultimo concetto da introdurre, ci permette di "ridurre" la derivata di un vettore ad un prodotto vettoriale. Supponiamo di avere un cono gelato e di **disegnare un vettore sul lato di questo cono**. Ora, immaginiamo di applicare una rotazione sull'asse di questo cono, otterremo qualcosa del genere:



Ora, se lo spostamento di $\vec{A}$ verso $\vec{A}'$ è **infinitesimale**, ovvero



possiamo "approssimare" $dA$ nell'intervallo di temo $dt$ ($dA/dt$, ovvero la derivata) come il **prodotto vettoriale tra il vettore rotazione $\vec{\omega}$ ed il vettore $\vec{A}$**:

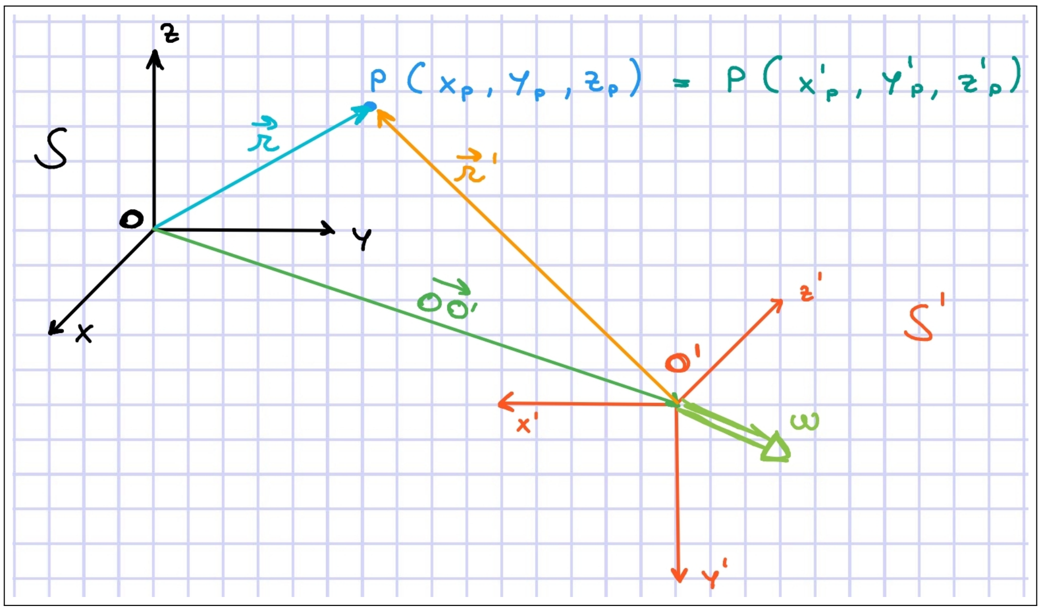
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

### 1.9.4 Cambiare il sistema di riferimento

Supponiamo di avere **2 sistemi di riferimento**:

- $S$: sistema di riferimento **inerziale**, **FISSO**;
- $S'$: sistema di riferimento **non inerziale**, che **rispetto ad S NON è FISSO**;

Vediamo un disegno:




Come si vede dall'immagine, abbiamo un **sistema inerziale fisso** ($S$) ed un **sistema non inerziale non fisso** ($S'$). Nota che **conosciamo il vettore** $\vec{oo'}$ (che rappresenta lo spostamento dell'origine di S') e **il vettore** $\vec{\omega}$ (che rappresenta una rotazione di S'). Ora, dato **un punto P** vogliamo sapere la relazione tra spazio, velocità ed accelerazione nei 2 sistemi di riferimento. Vediamo punto per punto.

#### 1.9.4.1 Spazio in un sistema non inerziale

Ci basta controllare il disegno, risulta abbastanza ovvio che:

$$\vec{r} = \vec{oo'} + \vec{r'}$$

Ricorda che $\vec{r'}$ corrisponde allo spazio di P visto da S'.

#### 1.9.4.2 Velocità in un sistema non inerziale (teorema delle velocità relative)

Sappiamo per definizione che la velocità è la derivata dello spazio, quindi **deriviamo lo spazio**! Cominciamo da S:

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad &= \frac{d}{dt}(r_x * \hat{x} + [y] + [z]) \\ &= \frac{dr_x}{dt} * \hat{x} + r_x * \frac{d\hat{x}}{dt} + [y] + [z] \\ &= v_x * \hat{x} + v_y * \hat{y} + v_z * \hat{z}\end{aligned}$$

Per semplicità "omettiamo" la y ([y]) e la z ([z]) dato che sono uguali alla x. Nota che la parte in verde si annulla in quanto il nostro sistema di riferimento resta immutato!

Proviamo ora a calcolare la velocità per S':

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{oo'} + \vec{r'}) \qquad = \frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt}$$

Arriviamo a questo punto: per quanto riguarda $\vec{oo'}$, possiamo notare che il punto $o$ (origine di S) è fisso, pertanto è come se calcolassimo semplicemente la velocità di $o'$ (l'unico punto in movimento dei 2). Otteniamo quindi:

$$\frac{d\vec{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} \qquad = \vec{v}_{o'} + (\frac{dr_x}{dt} * \hat{x'} + r_x * \frac{d\hat{x'}}{dt} + [y] + [z])$$

Il problema ora è che la parte in verde **questa volta non si annulla**! Il sistema $S'$ infatti è in movimento. Come lo gestiamo? **Usiamo le formule di Poisson** [pag.13]!

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{o'} + (\frac{dr_x}{dt} * \hat{x'} + r_x * \frac{d\hat{x'}}{dt} + [y] + [z]) &= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + x' * \vec{\omega} \times \hat{x'}] + [y] + [z] \\
&= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + \vec{\omega} \times (x' * \hat{x'})] + [y] + [z] \\
per\ definizione \qquad &= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'})] + [y] + [z] \\
espandi\ [y]\ [z]\ e\ raccogli \qquad &= \vec{v}_{o'} + [v_{x'} * \hat{x'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{y'} * \hat{y'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{y'})] + [v_{z'} * \hat{z'} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{z'})] \\
&= \vec{v}_{o'} + (v_{x'} * \hat{x'} + v_{y'} * \hat{y'} + v_{z'} * \hat{z'}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{x'} + \vec{r}_{y'} + \vec{r}_{z'}) \\
per\ definizione \qquad &= \vec{v}_{o'} + \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}
\end{aligned}$$

Finiamo con l'ottenere quello che viene definito **teorema delle velocità relative**, ovvero:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

Dove:

- $\vec{v'}$ rappresenta la velocità del punto P nel sistema di riferimento S';
- $\vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$ è quella che viene detta **velocità di trascinamento**, ovvero la velocità imposta dal sistema di riferimento che si muove e "trascina" il punto P.

**Un po' di casistica** Vediamo un po' di casi particolari:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$: il S.R. S' **non ruota**, per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dallo spostamento dell'origine di S' (immagina ad esempio un treno su un tratto rettilino). In particolare abbiamo che:
$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{o'}$$
- $\vec{v}_{0'} = \vec{0}$: il S.R. S' **non si sposta** (nota che ciò non garantisce che l'origine di S' coincide con quella di S), per questo la velocità di trascinamento è data soltanto dal prodotto vettoriale di $om\vec{e}ga$ con $\vec{r'}$ (immagina ad esempio un peso poggiato su un giradischi). In particolare abbiamo che:
$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$
- $\vec{v}_{0'} = \vec{0}, \vec{\omega} = \vec{0}$: il S.R. S' **non ruota e non si sposta** (anche qui, ciò non garantisce che l'origine di S' coincide con quella di S), per questo la velocità di trascinamento è **nulla**. In particolare abbiamo che:
$$\vec{v} = \vec{v'}$$

#### 1.9.4.3 Accelerazione in un sistema non inerziale (teorema delle accelerazioni relative)

Per quanto riguarda l'accelerazione, il procedimento è **sempre lo stesso**: **dobbiamo derivare la velocità**! Non è nulla di nuovo, è solo un po' lungo, si deve fare attenzione a fare i giusti raccoglimenti ed utilizzare le formule di Poisson [pag.13]. Sostanzialmente, il risultato finale, detto **teorema delle accelerazioni relative**, è:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \vec{r'}) + 2\omega \vec{\times} \vec{v'}$$

Dove:

- $\vec{a'}$ corrisponde all'accelerazione del corpo in S';
- $\vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \vec{r'})$ è l'accelerazione di trascinamento;
- $2\omega \vec{\times} \vec{v'}$ è la **forza di Coriolis**, una **forza apparente** (trattiamo in seguito) che esiste solo se S' ruota rispetto ad S.

#### 1.9.4.4 Riassumendo

Riassumendo rapidamente, le formule che interessano a noi sono:

1. **spazio**:

$$\vec{r} = o\vec{o'} + \vec{r'}$$

2. **velocità**:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

3. **accelerazione**:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times (\omega \vec{\times} \vec{r'}) + 2\omega \vec{\times} \vec{v'}$$