EINSTEINS RELATIVITETSTEORI

Thomas Mellergaard Amby
- Marselisborg Gymnasium -

*

Indhold

KAPITEL 1

Indledning

ndledning

Følgende note er tænkt som et supplement til lærebøgerne om emnet *relativitetsteori*. Emnet er ikke dækket i det ønskede omfang af bøgerne, hvorfor jeg sammen med fysik A-niveau holdet årgang 2012 fra Marselisborg Gymnasium har kastet mig over dette emne. I gennem emnet har vi brugt litteratur fra flere forskellige kilder bl.a. "*Relativity An introduction to space-time physics*" Adams1997 Adams (1997) såvel som "*University Physics*" YF2005 Young and Friedman (2004). Hertil kommer forskellige noter som har været anvendt i mindre omfang. Hvorfor de ikke er nævnt i denne indledning.

KAPITEL 2

Galilei Transformationen

rmationen

Vi vil starte med at beskrive forskellige reference rammer. Disse kaldes initialsystemer

INITIALSYSTEMER:

lsystemer

I fysik anvender man i forbindelse med relativitetsteorien begrebet *initialsystemer*. Vi vil nu ganske kort gennem gå hvad der karakteriserer et initialsystem.

Inden for fysikken afvender vi betegnelsen *initialsystem* om et koordinatsystem, hvor alle legemer som ikke er påvirket af ydre kræfter

kraft, og som derfor bevæger sig med konstante hastigheder. Der findes uendeligt mange initialsystemer, der bevæger sig med konstante hastigheder. Det vil med andre ord sige, at et koordinatsystem som indeholder en partikel P, skal opfylde Newtons første lov for at det kan betegnes som et initialsystem.

> "*En partikel som ikke er påvirket af en ydre resulterende kraft vil enten ligge stille eller bevæge sig med konstant hastighed langs en ret linje.*"
>
> Sir Issac Newton

Lad os se lidt mere på de to postulater som den specielle relativitetsteori er baseret på. Begge postulater beskriver hvad en observatør i et initialsystem ser. Teorien er speciel da denne indvirker på observatører i netop sådan et specielt initialsystem.

$$x = x' + ut \tag{G.1}$$ eq:Gx

$$y = y' \tag{G.2}$$ eq:Gy

$$z = z' \tag{G.3}$$ eq:Gz

$$t = t' \tag{G.4}$$ eq:Gt

$$v_x = v'_x + u \tag{G.5}$$ eq:Gv

KAPITEL 3

Lorentz Transformationen

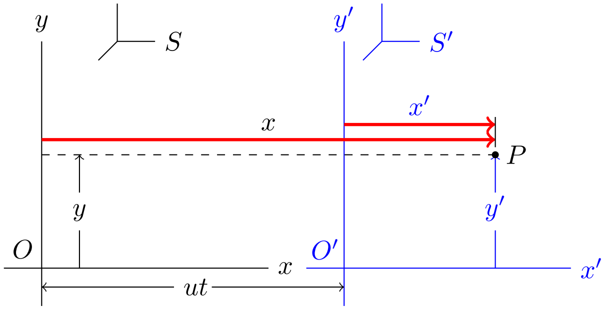
I kapitel 2 omtalte vi de Galileiske koordinat transformations ligninger se (G.1 - G.4 i kapitel 2). Disse transformationer relatere koordinatet

$$(x, y, z, t) \text{ i } S \mapsto (x', y', z', t') \text{ i } S'$$

Her er en af forudsætningerne at det andet system S' bevæger sig med konstant fart u relativt til systemet S i positiv retning langs den fælles $x - x'$ akse. Denne transformation antager også at tidsskalaen er den samme i for de to systemer, hvilket fremgår af ligning (G.4) i kapitel 2. Som vi tidligere har vist gælder Galilei transformationen kun for grænseområdet for u gående mod nul. Vi er derfor nu klar til at udlede en mere generel transformation som er konsistent med relativitets princippet. Denne mere generelle transformation har fået navnet *Lorentz transformationen*. Vores første spørgsmål er følgende:

> "*Når en begivenhed finder sted i punktet (x,y,z) til tiden t, som det observeres i systemet S, hvad er da koordinaterne (x',y',z') og tiden t' af begivenheden som den observeres i systemet S' som bevæger sig relativt til S med konstant hastighed u og i positiv x-retning.*"

For at udlede denne koordinat kransformation, refererer vi igen til figuren fra kapitel 2. Som før, antager vi at de to systemers nulpunkter



er sammenfaldende til tiden $t = 0 = t'$. Derfor er afstanden i S fra O til O' til tiden t stadig ut.

Koordinatet x' er en *rigtig længde* i S', hvilket betyder at i systemet S vil den være forkortet med en faktor:

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Som vi tidligere har vist om længdeforkortning. Derfor vil afstanden x fra O til P, som den ses fra S ikke blot være $x = x' + ut$, som vi kender fra Galilei transformationen men derimod:

$$x = ut + x' \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{2}} \tag{3.1}$$ eq:L1

Løser vi nu denne ligning for x' , finder vi frem til følgende:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}} \tag{L.1}$$ eq:L2

Dette er den ene del af Lorentz transformationen. Den anden del af transformationen er den ligning som giver os t' udtrykt ved x og t. For at finde frem til denne ligning, skal vi noterer os at det relativistiske princip kræver at *formen* af transformationen fra S til S' skal være identisk med transformationen fra S' til S. Den eneste forskel er at vi ændre et fortegn i forhold til den relative hastigheds komponent u. Dermed kan ligning (3.1) omskrives til

$$x' = -ut' + x \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{2}} \tag{3.2}$$

eq:L3

Vi kan nu sætte ligning (L.1) og (3.2) lig med hinanden for at eliminere x'. Dette giver os en ligning for t' udtrykt ved x og t. Dette giver:

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{L.2}$$

eq:L4

Som vi tidligere har omtalt så er længder målt vinkelret på bevægelsesretningen ikke påvirket af bevægelsen, hvilket betyder at $y' = y$ og $z' = z$.

Samler vi nu alle udtrykkene sammen kan vi se at Lorentz transformatioenen består af følgende fire ligninger:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}} = \gamma \cdot (x - ut) \tag{L.1}$$

eq:Lx

$$y' = y \tag{L.2}$$

eq:Ly

$$z' = z \tag{L.3}$$

eq:Lz

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \cdot (t - \frac{ux}{c^2}) \tag{L.4}$$

eq:Lt

Dette sæt af ligninger er den generelle transformations beskrivelse mellem to initialsystemer i relativitetsteorien. Hvorfor vi herefter ikke længere vil anvende Galilei transformationerne, da disse som tidligere omtalt er begrænsede til tilfældet hvor hastigheden u går mod nul.

Dette afsnit er baseret på Young and Friedman (2004); Adams (1997).

KAPITEL 4

Relativistisk Masseforøgelse & Hastighedsaddition

Vi har i kapitel 3 set på hvorledes vi kunne genereliserer Galilei transformationerne, på den generelle form som lever op til det relativistiske princip kaldte vi dem for Lorentz transformationer. Vi skal nu se på hastighedstransformation som følge af Lorentz transformationen. Vi skal nu anvende ligning (L.1 - L.4) til at udlede en relativistisk version af Galilei hastigheds transformationen, se ligning (G.5).

Vi betragter her udelukkende en-dimentionel bevægelse langs x-aksen og anvender begrebet "**hastighed**" som en kort form af "*x-komponenter af hastigheden.*" Antag at på tiden dt vil en partikel bevæge sig afstanden dx, som målt af observatøren i systemet S. Vi opnår samhørende værdier for afstand dx' og tid dt' i systemet S'. Ved nu at tage differentialerne af ligning (L.1) og ligning (L.4) finder vi:

$$dx' = \gamma \cdot (dx - u\,dt)$$

$$dt' = \gamma \cdot (dt - \frac{u\,dx}{c^2})$$

Divideres disse to ligninger nu med hinanden således at vi får dx'/dt' finder vi:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - u\,dt}{dt - \frac{u\,dx}{c^2}}$$

og deles både tæller og nævner i ovenstående resultat nu med dt finder vi følgende:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

Afslutningsvis anvender vi vores viden fra Galilei hastigheds transformationen, nemlig at dx/dt er hastigheden v_x i S og at dx'/dt' er hastigheden v'_x i systemet S'. Dermed har vi vist den generelle relativistiske hastigheds transformation.

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \tag{L.5}$$

eq:Lv

Når u og v_x er meget mindre end c, vil nævneren i ligning (L.5) gå mod 1, og vi vil gå mod et ikke relativistisk resultat hvor $v'_x = v_x - u$. Det modsatte ekstremum hvor $v_x = c$; finder vi derimod:

$$v'_x = \frac{c-u}{1-\frac{uc}{c^2}} = \frac{c\cdot(1-\frac{u}{c})}{1-\frac{u}{c}} = c$$

Dette faktum betyder at hvis noget bevæger sig med hastigheden $v_x = c$ målt i systemet S vil hastigheden $v'_x = c$ også hvis den måles i S', uanset den relative bevægelse mellem de to systemer. Dermed er ligning (**??**) i overenstemmelse med Einsteins postulat om at "*lysets hastighed i vakuum er den samme i alle initialsystemer*".

Det relativistiske princip fortæller os her at der ikke er nogen fundemental forskel på de to initialsystemer S og S'. Derfor må udtrykket for v_x, udtrykt ved v'_x have samme form som ligning (L.5), med v_x og v'_x byttet om og ligeså med fortegnet på u. Gør man dette finder man

$$v_x = \frac{v'_x - u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \tag{L.5.1}$$

eq:Lv2

Både ligning (L.5) og ligning (L.5.1) er Lorentz hastigheds transformationer . for en-demintionel bevægelse.

Når u er mindre end c, fortæller Lorentz hastigheds transformationen os at et objekt som bevæger sig med en fart mindre end c i et initialsystem, vil det samme objekt altid have en far mindre end c i *alle andre* initialsystemer. Heraf kan vi konkludere at intet fysisk objekt kan bevæge sig med fart lig med eller større end lysets i vakuum, relativt til et *vilkårligt* initialsystem. Den relativistiske generelisering af energi og bevægelsesmængde, som vi senere skal se på vil yderligere underbygge denne konklusion.

Dette afsnit er basseret på Young and Friedman (2004); Adams (1997).

*

Litteratur

Adams1997 Adams, S.: 1997, *Relativity An introduction to space-time physics*, Chapt. 1 - 2, pp 1 – 130, Taylor Francis

YF2005 Young, H. D. and Friedman, R. A.: 2004, *University Physics with Modern Physics*, Chapt. 37, pp 1403 – 1444, Pearson Addison Wesley, 11th edition

Indeks