第12卷 第3期 哈尔滨理工大学学报 Vol. 12 No. 3
2007年6月 JOURNAL HARBIN UNIV. SCI. & TECH. Jun., 2007

# 再生核Hilbert空间中的一种插值方法

顾丽娟， 邓彩霞， 姚丽丽
（哈尔滨理工大学 应用科学学院，黑龙江 哈尔滨 150080）

**摘 要：**在给定的再生核Hilbert空间中，利用再生核的性质，通过再生核函数的线性组合得到插值基函数，从而构造了插值函数，并给出误差估计和数值算例。该方法是这个再生核Hilbert空间中一种新的插值方法，计算量小，收敛速度较快，便于实际应用。

**关键词：**插值函数；再生核；再生核Hilbert空间
**中图分类号：**O241.5 **文献标识码：**A **文章编号：**1007-2683(2007)03-0120-03

# Interpolation Method in A Reproducing Kernel Hilbert Space

*GU Li-juan*, *DENG Cai-xia*, *YAO Li-li*
(Applied Science College, Harbin Univ. Sic. Tech., Harbin 150080, China)

**Abstract:** In this paper, interpolation function is constructed by basis functions which are presented by the linear combination of a reproducing kernel function in some reproducing kernel Hilbert space. Meanwhile estimation of error and numerical examples are given. As a new method to resolve numerical approximation in the reproducing kernel Hilbert space, it is easy for calculation, better convergent and can be used conveniently.

**Key words:** interpolation function; reproducing kernel; reproducing kernel Hilbert space

由于再生核函数有许多良好的计算性质，利用再生核理论解决数值逼近问题是一种有效方法. 在20世纪80年代至90年代，文[1,2]借助数值泛函的方法研究了 $W_2^1$、$W_2^2$空间及有关的张量积空间等再生核空间的最佳插值逼近问题. 文[3]在再生核空间 $H_0^1[a,b]$中给出了样条插值算子的定义，并证明了该样条插值算子与最佳插值逼近算子的一致性，文[4,5]把这一结果推广到 $W_2^m$空间中，也得到了令人满意的理论成果. 文[6]应用二阶微分算子插值样条的方法研究再生核空间 $H^1[0,1]$中的数值逼近问题.

本文应用再生核空间理论的特殊技巧，针对解决再生核 Hilbert 空间 $H_K[a,b]$中数值逼近问题，给出了一种新的方法，同文[6]的方法比较，在插值过程中，插值函数的系数可以直接利用再生核得到，避免了解方程组，从而更便于数值计算.

收稿日期：2006-06-18
基金项目：黑龙江省高校骨干教师创新项目(1054G010).
作者简介：顾丽娟(1978-)，女，哈尔滨理工大学硕士研究生.

## 1 插值函数的构造

**定义1** 设 $H$ 是 Hilbert 函数空间，其元素是某个抽象集合 $E$ 上的实值或复值函数，内积用下式表示：

$$\langle f,g\rangle = \langle f(\cdot),g(\cdot)\rangle,\ f,g\in H$$

若 $\forall q\in E$，存在一个 $K(p,q)$ 作为 $p$ 的函数是 $H$ 中的元素，且 $\forall q\in E$ 及 $f\in H$ 有

$$f(q) = \langle f(p),K(p,q)\rangle_p$$

则称 $K(p,q)$ 是 Hilbert 函数空间 $H$ 的再生核函数，并称 $H$ 是再生核 Hilbert 空间. 范数取为 $\|\cdot\|=$

$\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$.

$H_K[a,b]=\{f(x)\mid f(x)$ 是 $[a,b]$ 上所有绝对连续的实值或复值函数,并且 $f(a)=0$, $f'(x)\in L_2(a,b)\}$

定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f'(x)\overline{g'(x)}\mathrm{d}x.$$

由定义1可验证

$$K(x,y)=\min(x,y)-a$$

是 Hilbert 空间 $H_K[a,b]$ 的再生核.

在 Hilbert 空间 $H_K[a,b]$ 中,对区间 $[a,b]$ 作一个分划:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

对于 $i,j=1,2,\cdots,n$, $x\in[a,b]$,取

$$h_i=x_i-x_{i-1}$$

$$e_i(x)=h_i^{-\frac{1}{2}}(K(x,x_i)-K(x,x_{i-1}))$$

易证

$$\langle e_i(x),e_j(x)\rangle=\delta_{i,j}$$

即 $e_i(x)$ 可作为 $H_K[a,b]$ 中的插值基函数.

构造插值函数 $\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i(x)$,其中 $c_i$ 是傅里叶系数,则有

$$c_i=\langle f,e_i\rangle=\int_{x_{i-1}}^{x_i}h_i^{-\frac{1}{2}}f'(x)\,\mathrm{d}x=h_i^{-\frac{1}{2}}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

因此

$$\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n}h_i^{-1}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(K(x,x_i)-K(x,x_{i-1}))$$

把等式右边展开整理,得到 $f(x_i)$ 的系数为

$$\lambda_i(x)=(h_i^{-1}+h_{i+1}^{-1})K(x,x_i)-h_i^{-1}K(x,x_{i-1})-h_{i+1}^{-1}K(x,x_{i+1})$$

则有 $\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\lambda_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$.

## 2　收敛性和误差估计

**定理1**　对 $\forall f\in H_K[a,b]$, $\forall a_i\in R$,插值函数 $\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n}h_i^{-\frac{1}{2}}(f(x_i)-f(x_{i-1}))e_i(x)$

其中 $x\in[a,b]$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$,有下式成立

1) $\|f-\varphi_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}h_i^{-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^2$;

2) $\|f-\varphi_n\|\leqslant\left\|f-\sum_{i=1}^{n}a_ie_i(x)\right\|$;

3) $\lim_{n\to\infty}\|f-\varphi_n\|=0$.

证明:1) $\|f-\varphi_n\|^2=\langle f-\varphi_n,f-\varphi_n\rangle=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}h_i^{-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^2$.

2) $\left\|f-\sum_{i=1}^{n}a_ie_i(x)\right\|^2=\langle f-\sum_{i=1}^{n}a_ie_i(x),f-\sum_{j=1}^{n}a_je_j(x)\rangle=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}h_i^{-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^2+\sum_{i=1}^{n}|a_i-h_i^{-\frac{1}{2}}(f(x_i)-f(x_{i-1}))|^2$

当且仅当 $a_i=h_i^{-\frac{1}{2}}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$ 时, $\left\|f-\sum_{i=1}^{n}a_ie_i(x)\right\|$ 取到最小值 $\|f-\varphi_n\|$.

3) 考虑 $n>m$,则有

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}h_i^{-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^2$$

由1)可验证

$$\sum_{i=1}^{\infty}h_i^{-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^2<\infty$$

所以对给定的 $\varepsilon$,可以找到 $N(\varepsilon)$ 使对所有的 $m,n\geqslant N(\varepsilon)$,有

$$\sum_{i=m+1}^{n}h_i^{-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|^2<\varepsilon$$

由于 $H_K[a,b]$ 是完备的, $\varphi_n$ 收敛于 $s\in H_K[a,b]$: $\lim_{n\to\infty}\|s-\varphi_n\|=0$

固定 $v$, 对于 $n\geqslant v$, 有

$$\langle s-\varphi_n,e_v\rangle=\langle s,e_v\rangle-\langle\varphi_n,e_v\rangle=\langle s,e_v\rangle-\langle f,e_v\rangle$$

由 Schwartz 不等式,有

$$\left|\langle s,e_v\rangle-\langle f,e_v\rangle\right|=\left|\langle s-\varphi_n,e_v\rangle\right|\leqslant\|s-\varphi_n\|\,\|e_v\|=\|s-\varphi_n\|$$

由 $\varphi_n$ 收敛于 $s$ 得

$$\langle s,e_v\rangle=\langle f,e_v\rangle(v=1,2,\cdots,n)$$

推出 $s=f$,所以3)成立.

定理1证明了插值函数的最佳逼近性和收敛性,并给出数值分析中的最佳平方逼近问题可以转化为在 Hilbert 空间 $H_K[a,b]$ 中求解的方法.

**定理2**　若 $f(x)\in H_K[a,b]$ 是绝对连续的实值函数,二阶导数存在,并且 $|f'(x)|\leqslant M_1$, $|f''(x)|\leqslant M_2$, $M_1,M_2$ 为常数,对区间 $[a,b]$ 作一个分划:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

取 $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n.$

$$h = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{h_i\}$$

则有 $\|f - \varphi_n\| \leqslant \sqrt{2M_1M_2(b-a)h}.$

证明:应用 Lagrange 中值定理,有

$$\|f-\varphi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} h_i^{-1}|f(x_i) - f(x_{i-1})|^2 =$$
$$\int_a^b |f'(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^{n} h_i |f'(\xi_i)|^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^{n} h_i |f'(\xi_i)|^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} h_i |f'(\eta_i)|^2 - \sum_{i=1}^{n} h_i |f'(\xi_i)|^2 \leqslant$$
$$2M_1 h \sum_{i=1}^{n} |f'(\eta_i) - f'(\xi_i)| \leqslant$$
$$2M_1 h \sum_{i=1}^{n} h_i |f''(\mu_i)| \leqslant 2M_1M_2(b-a)h$$

其中,$\xi_i,\eta_i$ 在 $x_{i-1}$ 与 $x_i$ 之间,$\mu_i$ 在 $\xi_i$ 与 $\eta_i$ 之间,$i = 1,2,\cdots,n$,所以定理2成立.

## 3 数值算例

**例1** $f(x) = (x-a)(b-x), x \in [a,b]$

由定理1,取 $h_i = \dfrac{b-a}{n}$,有

$$\|f-\varphi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} h_i^{-1}|f(x_i) - f(x_{i-1})|^2 = \frac{(b-a)^2}{3n^2}$$

取 $a = 3, b = 4, n = 5$,则有

$$(x-3)(4-x) - \sum_{i=1}^{5} c_i e_i(x)$$

其中 $c_i = \dfrac{(6-2i)\sqrt{5}}{25}$  $i = 1,2,\cdots,5.$

**例2** $f(x) = \cos(2\pi x), x \in [-1/4, 3/4]$,取 $n = 20, h = \dfrac{1}{20}, i = 1,2,\cdots,20$,有

$$\lambda_i(x) = 20\left(2K\left(x,\frac{i}{20}-\frac{1}{4}\right) - K\left(x,\frac{i-1}{20}-\frac{1}{4}\right) - K\left(x,\frac{i+1}{20}-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\cos(2\pi x) - \sum_{i=1}^{20}\cos\left(2\pi\left(\frac{i}{20}-\frac{1}{4}\right)\right)\lambda_i(x)$$

如图1,图2所示.

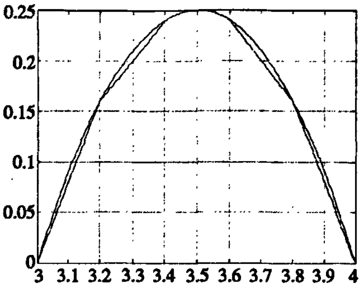


图1 函数(x−3)(4−x)及其插值函数的图像

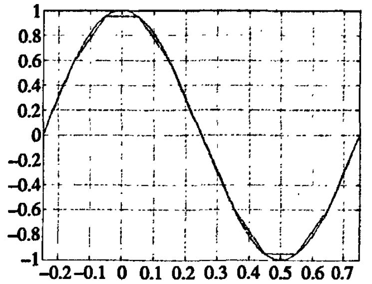


图2 函数 cos(2πx)及其插值函数的图像

由数值算例可见,本方法同文[6]的方法比较,在数值过程中,插值函数的系数可以直接由再生核获得,避免了解方程组,并有很好的逼近效果,因此更加广泛、实用.

**参考文献:**


[1] 崔明根,邓中兴. $W_2^1[a,b]$空间中的最佳插值逼近算子[J]. 计算数学,1986,8(2):209~216.

[2] TAN-yi Zhong, ZHONG-xing Deng. The Optimal Hermit Numerical Primitive Function in the Space $W_2^2$[J]. Beijing Mathematics,1998, 4(1):114~119.

[3] 邓彩霞,邓中兴. 再生核空间中样条插值算子与最佳插值逼近算子的一致性[J]. 高等学校计算数学学报,1995,17(2):119-128.

[4] 张新建,黄建华. $W_2^m$空间中样条插值算子与最佳逼近算子的一致性[J]. 计算数学,2001,23(4):385~392.

[5] 张新建. $W_2^m$空间中的样条插值算子与线性泛函的最佳逼近[J]. 计算数学,2002,24(2):129~136.

[6] 马晓剑,邓中兴,邓彩霞. 再生核空间 $H(K)$中二阶微分算子插值样条[J]. 哈尔滨理工大学学报,2002,7(5):111~114.


(编辑:王 萍)