DIFERENSIAL

Prodi D4 Teknik Informatika
Politeknik Negeri Malang
2024

Diferensial

- Perhitungan kalkulus banyak digunakan untuk keperluan perhitungan geometrik, yang berhubungan dengan perubahan nilai per-satuan waktu atau jarak.
- Secara kalkulus, didefinisikan sebagai perbandingan perubahan tinggi (selisih tinggi) dan perubahan jarak

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- penentuan titik puncak kurva y = f(x) → dy/dx = 0

Mengapa perlu Metode Numerik?

- Terkadang terdapat suatu fungsi yang sulit dihitung secara manual
- Untuk mengotomatiskan, tanpa harus menghitung manualnya

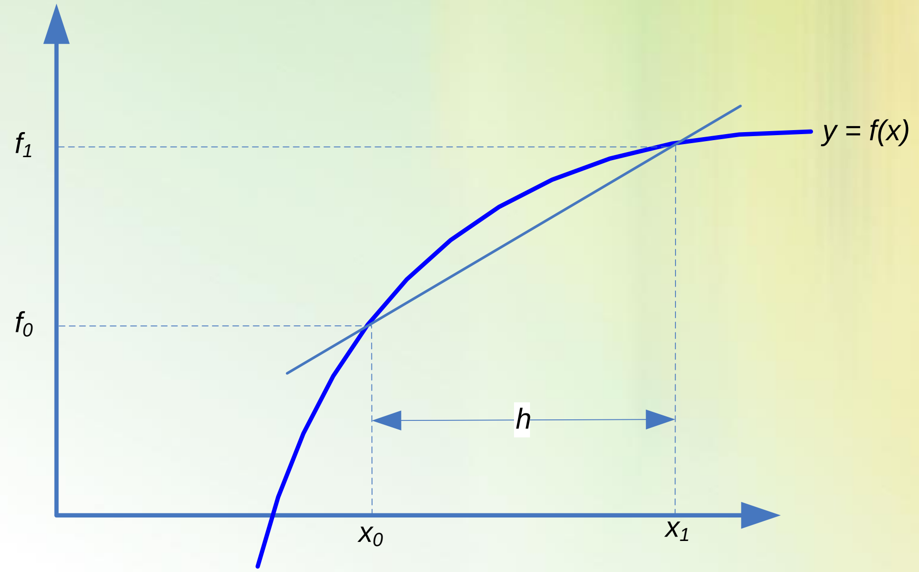
Diferensial

- Metode Selisih Maju
- Metode Selisih Mundur
- Metode Selisih Tengahan
- Differensial Tingkat Tinggi

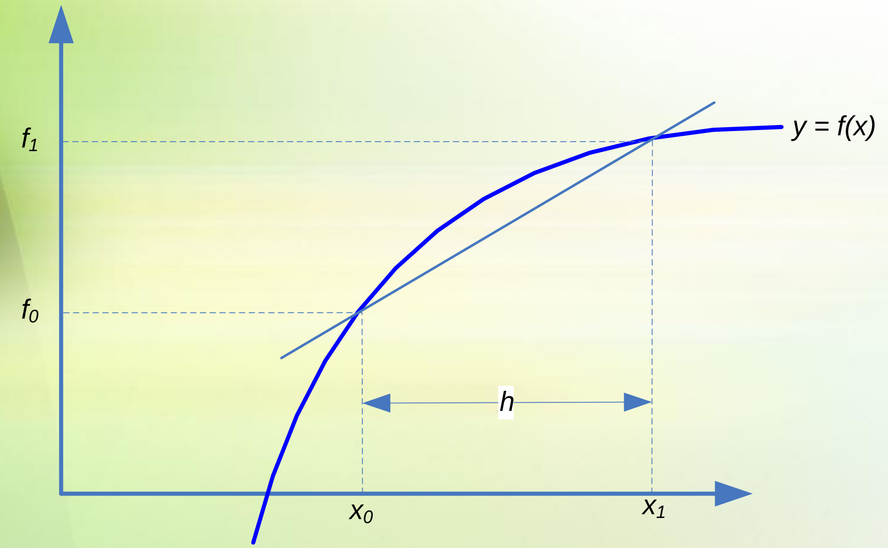
Diferensial

Hubungan antara nilai fungsi dan perubahan fungsi untuk setiap titiknya didefinisikan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Metode Selisih Maju



- Untuk menyelesaikan diferensial metode selisih maju dapat mengadopsi secara langsung definisi differensial, dan dituliskan: $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil

Contoh

Hitung nilai diferensial dari f(x) = $2x^3$ dengan metode selisih maju pada selang x=[1,2] dan

h = 0.1

x	f(x)	f’(x)	eksak	error (eksak-*f’(x)*)
1	2	6.62	6	-0.619999999999999
1.1	2.662	7.94	7.26	-0.679999999999999
1.2	3.456	9.38	8.64	-0.739999999999998
1.3	4.394	10.94	10.14	-0.799999999999999
1.4	5.488	12.62	11.76	-0.859999999999999
1.5	6.75	14.42	13.5	-0.920000000000003
1.6	8.192	16.34	15.36	-0.979999999999993
1.7	9.826	18.38	17.34	-1.04
1.8	11.664	20.54	19.44	-1.1
1.9	13.718	22.82	21.66	-1.15999999999998
2	16	25.22	24	-1.22

Rata-rata error: -0.919999999999998

Bandingkan…

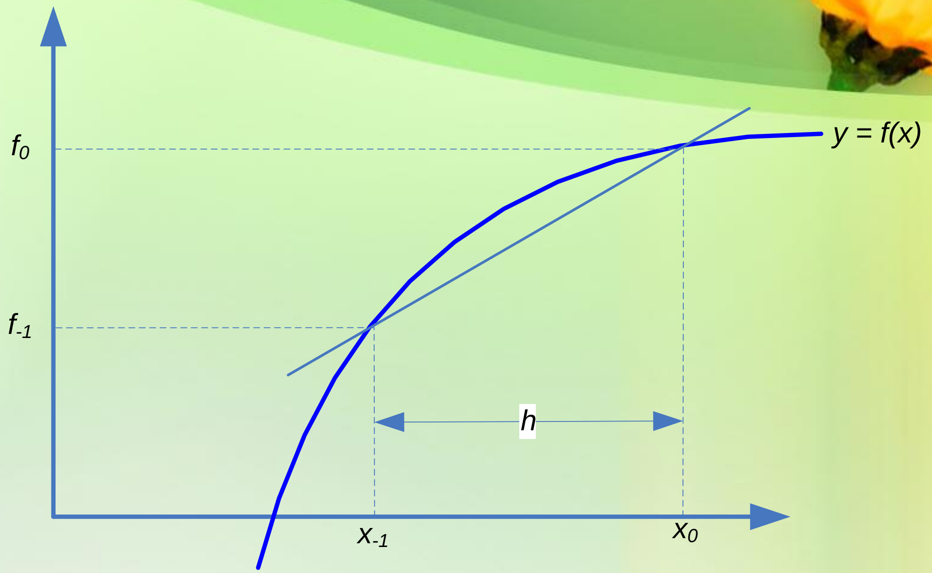
h = 0.01

X	f(x)	f'(x)	eksak	error (eksak-*f'(x)*)
1	2	6.06019999999998	6	-0.0601999999999823
1.01	2.06	6.18139999999996	6.1206	-0.0607999999999587
1.02	2.12	6.30379999999997	6.2424	-0.0613999999999706
1.03	2.185	6.42740000000002	6.3654	-0.0620000000000163
1.04	2.249	6.55220000000001	6.4896	-0.0626000000000078
1.05	2.315	6.67819999999999	6.615	-0.0631999999999895
1.06	2.38	6.80540000000001	6.7416	-0.063800000000005
1.07	2.45	6.93380000000001	6.8694	-0.0644000000000116
1.08	2.51	7.06340000000001	6.9984	-0.0650000000000075
1.09	2.59	7.1942	7.1286	-0.0655999999999937
1.1	2.66	7.32619999999997	7.26	-0.0661999999999701

Rata-rata error : -0.0631999999999921

Error akan mengecil jika nilai h mengecil.

Metode Selisih Mundur



Untuk menyelesaikan differensial metode selisih mundur, dilakukan dengan memodifikasi diferensial metode selisih maju yaitu:

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Contoh:

Hitung nilai differensial dari $f(x)=2x^3$ dengan metode selisih mundur, pada selang $x=[1,2]$ dan $h=0.1$

x	f(x)	f’(x)	eksak	error (eksak-*f’(x)*)
1	2	5.42	6	0.58
1.1	2.662	6.62	7.26	0.6399999999999998
1.2	3.456	7.94	8.64	0.6999999999999998
1.3	4.394	9.38	10.14	0.7599999999999998
1.4	5.488	10.94	11.76	0.8200000000000002
1.5	6.75	12.62	13.5	0.8799999999999994
1.6	8.192	14.42	15.36	0.9399999999999991
1.7	9.826	16.34	17.34	0.9999999999999993
1.8	11.664	18.38	19.44	1.0600000000000001
1.9	13.718	20.54	21.66	1.12
2	16	22.82	24	1.18

Rata-rata error : 0.8799999999999998

Bandingkan…

h = 0.01

X	f(x)	f'(x)	eksak	error (eksak-*f'(x)*)
1	2	5.9402	6	0.0598000000000045
1.01	2.060602	6.0602	6.1206	0.0603999999999738
1.02	2.122416	6.1814	6.2424	0.0609999999999964
1.03	2.185454	6.303799999997	6.3654	0.0616000000000296
1.04	2.249728	6.4274	6.4896	0.0621999999999838
1.05	2.31525	6.5522	6.615	0.0627999999999922
1.06	2.382032	6.6781999	6.7416	0.0634000000000112
1.07	2.450086	6.805399999	6.8694	0.0640000000000391
1.08	2.519424	6.933799999	6.9984	0.0646000000000333
1.09	2.590058	7.063399999996	7.1286	0.0652000000000372
1.1	2.662	7.1942	7.26	0.0657999999999621

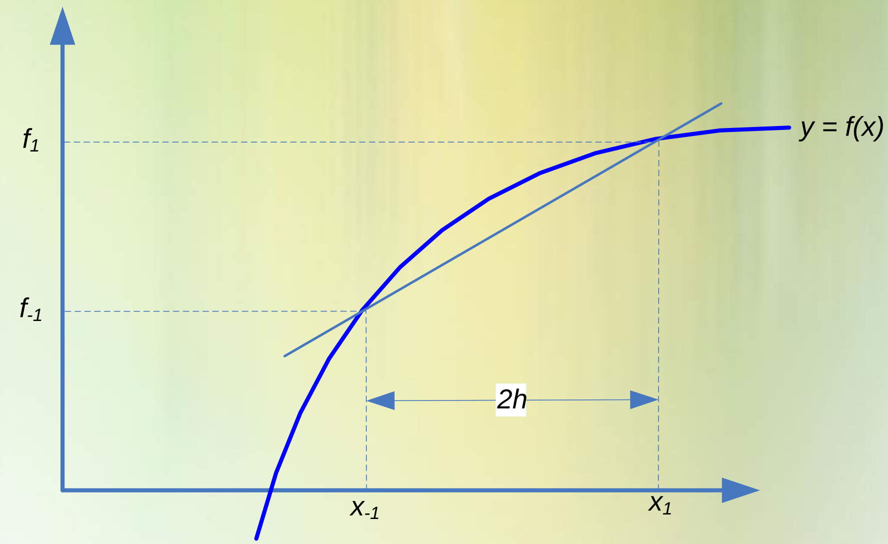
Rata-rata error : 0.0628000000000058

Error akan mengecil jika nilai h mengecil.

Metode Selisih Tengahan

Metode selisih tengahan adalah metode pengambilan perubahan dari dua titik sekitar dari titik yang diukur. Yaitu dengan memadukan selisih mundur dan selisih maju. Rumusnya adalah:

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$



Contoh

Hitung diferensial $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range $x=[0,1]$ dengan $h=0.05$

X	f(x)	f’(*x*)	eksak	error
0	1	1.00083	1	0.000833125
0.05	1.04754	0.90333	0.902499	0.000831131
0.1	1.09033	0.810809	0.809984	0.000825373
0.15	1.12862	0.723237	0.722421	0.000816238
0.2	1.16266	0.640558	0.639754	0.000804089
0.25	1.19268	0.562701	0.561911	0.000789273
0.3	1.21893	0.489576	0.488804	0.000772113
0.35	1.24164	0.421082	0.420329	0.000752913
0.4	1.26103	0.357103	0.356371	0.00073196
0.45	1.27735	0.297514	0.296804	0.000709519
0.5	1.29079	0.24218	0.241494	0.000685839
0.55	1.30156	0.190961	0.1903	0.00066115
0.6	1.30988	0.143707	0.143071	0.000635667
0.65	1.31594	0.100267	0.0996572	0.000609585
0.7	1.31991	0.0604834	0.0599004	0.000583086
0.75	1.32198	0.0241983	0.023642	0.000556336
0.8	1.32233	-0.00874888	-0.00927837	0.000529485
0.85	1.32111	-0.0385191	-0.0390218	0.000502671
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.0657492	0.000476018
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.0896204	0.000449637
1	1.30956	-0.11037	-0.110794	0.000423628

Rata-rata error = 0.000665659

Diferensiasi Tingkat Tinggi

Untuk menghitung diferensial tingkat tinggi digunakan metode diferensiasi dengan mengembangkan metode selisih tengahan atau Turunan Kedua Selisih Tengahan yaitu:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

Turunan Kedua Beda Mundur

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_{-1} + f_0}{h^2}$$

Turunan Kedua Beda Maju

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

Contoh

Hitung differensial kedua dari $f(x)=e^{-x}sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f”(x)	eksak	error
0	1	-2	-2	1.38889e-007
0.05	1.04754	-1.90012	-1.90008	3.94861e-005
0.1	1.09033	-1.80071	-1.80063	7.51525e-005
0.15	1.12862	-1.70219	-1.70209	0.000107067
0.2	1.16266	-1.60496	-1.60482	0.000135436
0.25	1.19268	-1.50934	-1.50918	0.000160461
0.3	1.21893	-1.41564	-1.41546	0.000182341
0.35	1.24164	-1.32413	-1.32393	0.000201271
0.4	1.26103	-1.23503	-1.23481	0.000217443
0.45	1.27735	-1.14853	-1.1483	0.000231042
0.5	1.29079	-1.0648	-1.06456	0.000242248
0.55	1.30156	-0.983979	-0.983728	0.000251235
0.6	1.30988	-0.906166	-0.905908	0.000258172
0.65	1.31594	-0.831448	-0.831184	0.000263221
0.7	1.31991	-0.759885	-0.759619	0.000266538
0.75	1.32198	-0.691519	-0.691251	0.000268271
0.8	1.32233	-0.62637	-0.626101	0.000268564
0.85	1.32111	-0.564441	-0.564173	0.000267551
0.9	1.31848	-0.505721	-0.505456	0.000265362
0.95	1.31458	-0.450184	-0.449921	0.00026212
1	1.30956	-0.39779	-0.397532	0.000257939

Rata-rata error = 0.000201003

Pemakaian Differensial

Salah satu pemakaian differensial yang paling banyak dibicarakan adalah **penentukan titik puncak kurva**, dimana titik puncak (tertinggi atau terendah) diperoleh dengan memanfaatkan nilai differensial dari kurva pada setiap titik yang ditinjau.

Pemakaian Differensial

Definisi 1.

Suatu titik a pada kurva y = f(x) dinamakan titik puncak bila dan hanya bila: $f'(a) = 0$.

Definisi 2.

Sebuah titik puncak a dikatakan titik maksimum pada kurva y = f(x) bila: $f''(a) < 0$.

Definisi 3.

Sebuah titik puncak a dikatakan titik minimum pada kurva y = F(x) bila: $f''(a) > 0$.

Contoh

Tentukan titik-titik puncak dari kurva $y = x^3-2x^2-x$ dengan mengambil range $[-1,1]$ dengan $h = 0.05$

x	f(x)	f'(x)	f''(x)
-1	-1.28736	3.75537	-2.93548
-0.95	-1.10326	3.60682	-3.00637
-0.9	-0.926673	3.45525	-3.05622
-0.85	-0.757731	3.30168	-3.08679
-0.8	-0.596505	3.14702	-3.09977
-0.75	-0.443029	2.9921	-3.09677
-0.7	-0.297295	2.8377	-3.07932
-0.65	-0.159259	2.68449	-3.0489
-0.6	-0.0288457	2.5331	-3.00686
-0.55	0.0940508	2.38407	-2.95453
-0.5	0.209561	2.23787	-2.89312
-0.45	0.317838	2.09495	-2.8238
-0.4	0.419056	1.95567	-2.74764
-0.35	0.513405	1.82033	-2.66566
-0.3	0.601089	1.68922	-2.57881
-0.25	0.682327	1.56255	-2.48795
-0.2	0.757345	1.44051	-2.39391
-0.15	0.826378	1.32322	-2.29743
-0.1	0.889667	1.21081	-2.19921
-0.05	0.947458	1.10333	-2.09987

0	1	1.00083	-2
0.05	1.04754	0.90333	-1.90012
0.1	1.09033	0.810809	-1.80071
0.15	1.12862	0.723237	-1.70219
0.2	1.16266	0.640558	-1.60496
0.25	1.19268	0.562701	-1.50934
0.3	1.21893	0.489576	-1.41564
0.35	1.24164	0.421082	-1.32413
0.4	1.26103	0.357103	-1.23503
0.45	1.27735	0.297514	-1.14853
0.5	1.29079	0.24218	-1.0648
0.55	1.30156	0.190961	-0.983979
0.6	1.30988	0.143707	-0.906166
0.65	1.31594	0.100267	-0.831448
0.7	1.31991	0.0604834	-0.759885
0.75	**1.32198**	**0.0241983**	**-0.691519**
0.8	**1.32233**	**-0.008748**	**-0.62637**
0.85	1.32111	-0.038519	-0.564441
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.505721
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.450184
1	1.30956	-0.11037	-0.39779

Lanjutan…

Terlihat bahwa nilai puncak terjadi antara 0.75 dan 0.8, karena nilai f’(x) mendekati nol. Pada nilai tersebut terlihat nilai f”(x)<0 maka nilai puncak tersebut adalah nilai puncak maksimum.

Post Test

1. f(x) = 3 x^3 dengan metode selisih mundur dari range x=[-1,1] dengan h=0.01 dan bandingkan dengan h=0.1, beri komentarmu.
2. f(x) = 4x^3 dengan metode selisih maju dari range x=[0,2] dengan h=0.5 dan h=0.05, beri komentarmu
3. f(x) = x^3 dengan metode selisih Tengah dari range x=[2,10] dengan h=0.08 dan h=0.8, beri komentarmu
4. Hitung differensial kedua dari *f(x)*=$2x^3 + 4x + 5$dengan h=0.05 dari range x=[3,4]
5. Tentukan titik dari kurva $y = 3x^3-4x^2-1x$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

Refrensi

- Munir, Rinaldi. 2008. Metode Numerik Revisi Kedua. Informatika Bandung: Bandung
- Cahya Rahmad, ST, M.Kom. Dr. Eng, “Diktat Kuliah Matematika Numerik”, Program Studi Manajemen Informatika, Politeknik Negeri Malang

TERIMAKASIH