电磁学

谭明阳

2023 年 4 月 28 日

目录

1 静电场

当系统不随时间变化时, 电场和磁场可以分离, 我们可以只关注电场的部分. 由于电荷量不随时间变化, 所以不存在电流.

1.1 高斯定理

空间中给定任意的闭合曲面 (高斯面) S, 该曲面包住的全部电荷代数和为 Q, 则高斯定理表述为

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

即从曲面内向外穿出的电通量 (电场线条数) 正比于曲面内的电荷量, 由叠加原理, 该结论是显然的.

单个点电荷情形, 取以电荷为球心的高斯面,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \left(\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\boldsymbol{r}}{r^3}\right),$$

即库仑定律的比例系数 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

无限大均匀带电平板, 面电荷密度 $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$ 已知, 由对称性知, 电场沿平板的法线方向, 取高斯柱面,

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}\right),$$

此结果与到平板的距离无关, 故平板产生的是匀强电场, 当 $\sigma > 0$ 时, 电场指向外侧, 两侧都有.

无限长均匀带电细棒, 线电荷密度 $\eta = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}L}$ 已知, 由对称性知, 电场线处在与棒垂直的平面, 呈辐射状, 取以棒为底面圆心的高斯圆柱面,

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\eta l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\eta}{r}\left(\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\eta\boldsymbol{r}}{r^2}\right),$$

二维问题 (无限长均匀带电细棒) 电场按距离一次方反比衰减, 三维问题 (点电荷) 电场按距离平方反比衰减, 这与高斯定理密切相关 (不同高斯面上的电通量守恒).

1.2 环路定理

试探电荷 q 沿路径 L 从 Q 走到 P, 静电场做功

$$A = \int_{\substack{(Q)\\L}}^{(P)} q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

若 P 与 Q 重合, 则 L 为一闭路, 静电场做功

$$A = \oint_L q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

空间中给定任意的闭合曲线 L, 环路定理表述为

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

环路定理表明, 电场力做功只与起止点有关, 与路径无关, 所以可以在空间中每个点定义电势 U (试探电荷的电势能为 qU)

$$U_{PQ}=U_P-U_Q=-\int_Q^P \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

沿电场线电势降低, 若将电势看作高度, 那么电场线是下降最快的线, 电场指向下降最快的方向, 下降越快, 电场越大. 习惯上规定无穷远处电势为 0, 因此

$$U_P=U_{P\infty}=-\int_\infty^P \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

1.3 梯度、散度和旋度

$$U_P=-\int_\infty^P \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\Longleftrightarrow \boldsymbol{E}=-\nabla U$$