# Estatística e Probabilidade

## Introdução ao Estudo de Probabilidade

**Desenvolvimento do material**
Gregório Dalle Vedove Nosaki

**1ª Edição**

Copyright © 2022, Afya.
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Afya.

# Sumário

## Introdução ao Estudo de Probabilidade

## Para início de conversa...

Neste capítulo, vamos introduzir os primeiros conceitos e definições que fazem parte do estudo da Teoria das Probabilidades. Trabalharemos com conceitos como espaço amostral e eventos de probabilidade para experimentos probabilísticos. Existem diversas situações cotidianas que podem ser estudadas como experimentos probabilísticos e iremos explorar alguns deles neste capítulo, para poder ilustrar as diversas definições e propriedades. Trataremos da definição formal de probabilidade e também como definir o cálculo de probabilidades em eventos com espaço amostral finito cujos resultados têm a mesma chance de serem obtidos. Trabalharemos com alguns exemplos clássicos dentro do estudo de probabilidades que são o lançamento de uma moeda, o lançamento de dados cúbicos de seis faces e os baralhos tradicionais utilizados para diversos jogos de cartas. A abrangência da Teoria das Probabilidades é muito grande e diversificada, assim como a Estatística como veremos nestes próximos capítulos.

## Objetivos

- Utilizar conceitos de probabilidade para predições a partir de dados conhecidos.
- Entender os termos experimento, espaço amostral e evento.

# 1. Espaço Amostral

Diversos eventos probabilísticos nos cercam diariamente e podem até mesmo passar despercebidos em alguns casos. Segundo Navid (2012), os estudos sobre a teoria das probabilidade tiveram seu financiamento provido por jogadores do século XVII, que recorreram a matemáticos para calcular as probabilidades em jogos de azar visando a uma melhor estratégia para vencê-los. Logo, ficou claro que esse ramo da Matemática foi reconhecido como parte de diversos outros eventos naturais e em diferentes áreas do conhecimento. A probabilidade é um dos vários ramos da Matemática e iremos começar a abordar de maneira mais formal e generalizada seus principais objetos, definições, conceitos e propriedades neste capítulo.

**Definição:** um **espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento probabilístico.

**Importante**

Trataremos por "experimentos probabilísticos" ou apenas "experimentos" qualquer tipo de ação que envolva diferentes resultados possíveis. Não devemos nos restringir a procedimentos de experimentação realizados em laboratórios ou ambientes controlados. Veremos diversos exemplos cotidianos de situações que podem ser consideradas experimentos.

No lançamento de um dado, por exemplo, o espaço amostral é o conjunto de todas as faces possíveis deste dado. Se estivermos tratando do dado cúbico de seis faces, o mais tradicional, então nosso espaço amostral é o conjunto $S$ dada por

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

No caso do lançamento de uma moeda, o espaço amostral é formado apenas pelas duas possibilidades de resultado: cara ou coroa, ou seja,

$$S = \{\text{cara}, \text{coroa}\}.$$

Podemos utilizar números para representar os possíveis resultados do lançamento de uma moeda. Dessa forma, se 0 significa a face 'cara' e 1 a face 'coroa' o espaço amostral do lançamento de uma moeda se torna

$$S = \{0, 1\}.$$

Os espaços amostrais podem não ser finitos. Se considerarmos o experimento probabilístico de selecionar um número real qualquer no intervalo $[0, 1]$, então nosso espaço amostral é infinito. Consulte Loesch (2012) para conhecer mais exemplos de espaços amostrais.

# 2. Evento

Em probabilidade, sempre estaremos interessados em estudar a relação entre uma determinada coleção de possíveis resultados de um espaço amostral em relação com o todo. Essa coleção é chamada de evento, e será definida formalmente a seguir.

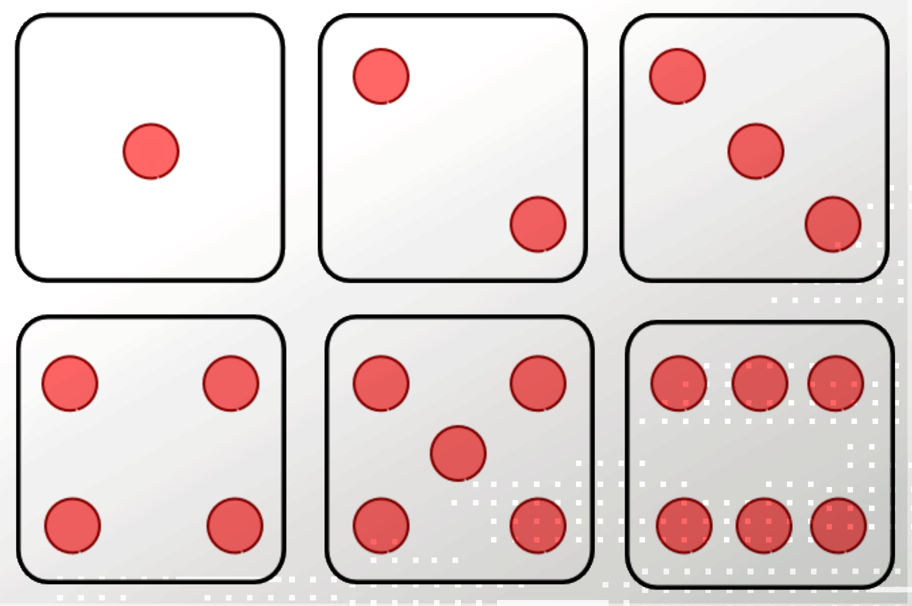
**Definição:** um **evento** $A$ é um subconjunto de um espaço amostral $S$, ou seja, $A \subset S$.

Os conjuntos unitários formados por cada um dos possíveis resultados de um experimento probabilístico são exemplos de eventos de um espaço amostral. No lançamento de um dado, por exemplo, o evento de obter a face 3 voltada para cima é um exemplo de evento deste espaço amostral. Representamos por $A = \{3\}$ enquanto que o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Fica claro que $A \subset S$.

Os eventos não precisam necessariamente ser conjuntos unitários. No exemplo do dado, por exemplo, podemos considerar o evento de se obter uma face cujo valor seja um número par. Neste caso, o evento é descrito como sendo $B = \{2, 4, 6\}$ e vale que $B \subset S$. O evento no qual a face voltada para cima é diferente de 1 é descrito pelo conjunto $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C \subset S$.

**Exemplo 1:** considere o lançamento de dois dados de seis faces simultaneamente. Para descrever este espaço amostral, podemos utilizar uma representação em pares ordenados onde cada entrada representa o resultado de cada dado. Observe a tabela abaixo que descreve todos os 36 resultados possíveis desse experimento.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |



Na primeira coluna, temos os possíveis resultados do lançamento do primeiro dado, e, na primeira linha, os possíveis resultados do lançamento do segundo dado. No cruzamento de uma linha com uma coluna, está representado o par ordenado correspondente ao lançamento dos dois dados. Por exemplo, o par ordenado (3,5) corresponde ao resultado, onde o primeiro dado apresenta a face 3 e o segundo dado a face 5.

O espaço amostral neste exemplo são todos os 36 pares ordenados que podem ser obtidos a partir do lançamento dos dois dados.

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1); & (1,2); & (1,3); & (1,4); & (1,5); & (1,6); \\ (2,1); & (2,2); & (2,3); & (2,4); & (2,5); & (2,6); \\ (3,1); & (3,2); & (3,3); & (3,4); & (3,5); & (3,6); \\ (4,1); & (4,2); & (4,3); & (4,4); & (4,5); & (4,6); \\ (5,1); & (5,2); & (5,3); & (5,4); & (5,5); & (5,6); \\ (6,1); & (6,2); & (6,3); & (6,4); & (6,5); & (6,6) \end{array} \right\}$$

Se considerarmos o evento de que a soma dos números na face dos dois dados seja igual a 6, então esse evento é descrito pelo conjunto

$$A = \{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}.$$

Note que há uma diferença entre (2,4) e (4,2), pois, em cada um desses pares ordenados, o número apresentado em cada entrada corresponde a uma face específica do dado. Podemos ter o primeiro dado com face 2 e o segundo com face 4 e também podemos ter o primeiro dado com face 4 e o segundo com face 2. Em ambos os casos, a soma das faces voltadas para cima é igual a 6 e, portanto, fazem parte do nosso evento.

Quanto aos eventos, trata-se de subconjuntos do espaço amostral, e as operações e relações da teoria de conjuntos se aplicam a eles da mesma forma. Por exemplo, se considerarmos dois eventos $A$ e $B$ de um espaço amostral $S$, então o conjunto $A \cup B$ representa o evento onde há a possibilidade de $A$ ou $B$ ocorrer, enquanto que o conjunto $A \cap B$ representa o evento de que $A$ e $B$ ocorram simultaneamente. Dizemos que dois eventos $A$ e $B$ são **independentes** se $A \cap B = \varnothing$, ou seja, não existe nenhum elemento do espaço amostral que pertence a $A$ e a $B$ simultaneamente.

Considere novamente o experimento do lançamento de um dado de seis faces. O espaço amostral neste caso é $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Considere os eventos $A = \{4\}$, $B = \{2,4,6\}$ e $C = \{5,6\}$. $A$ pode ser descrito como o evento de obter a face 4 voltada para cima, $B$ o evento de se obter uma face par e $C$ o evento de obter uma face maior ou igual a 5. Note que, se considerarmos o evento $A$ e $B$ simultaneamente, temos o conjunto

$$A \cap B = \{4\}.$$

O evento onde $B$ ou $C$ é determinado pelo conjunto

$$B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}.$$

Já o evento de $A$ e $C$ que ocorre simultaneamente é

$$A \cap C = \varnothing$$

e, portanto, $A$ e $C$ são independentes.

**Importante**

A notação de Teoria dos Conjuntos é fundamental para o estudo de probabilidade. Diversas propriedades simples sobre as relações entre conjuntos podem auxiliar na manipulação de eventos e no cálculo de suas probabilidades. Consulte Bonafini (2012), Iezzi e Murakami (1977) para revisar os conceitos e as propriedades básicas desta teoria se for necessário.

# 3. Definição Clássica de Probabilidade

Após a introdução dos elementos de espaço amostral e evento, podemos começar a trabalhar com o conceito de probabilidade. Apresentaremos, inicialmente, uma definição intuitiva do que significa a probabilidade de um evento dentro de um espaço amostral.

**Definição:** para cada evento $A$ de um espaço amostral $S$, denotamos por $P(A)$ a **probabilidade** do evento $A$ ocorrer. Essa probabilidade nos indica a proporção de vezes que o evento $A$ ocorre a longo prazo com diversas realizações do experimento cujo espaço amostral é $S$.

Para determinar as diferentes probabilidades em um determinado experimento real, são necessárias muitas repetições desse experimento, e, ainda assim, os resultados podem variar consideravelmente. Vamos estabelecer alguns axiomas sobre o conceito de probabilidade para que possamos manipular esse conceito.

**Axiomas de probabilidade:** as seguintes propriedades são consideradas axiomáticas, pois não possuem uma demonstração formal, mas, ainda assim, são aceitas como verdades para a construção de toda a teoria das probabilidades.

1. a probabilidade do espaço amostral é sempre igual a 1, ou seja, $P(S) = 1$;
2. para qualquer evento $A$, vale que $0 \leq P(A) \leq 1$;
3. se $A$ e $B$ são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, são eventos independentes, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

As propriedades descritas acima têm interpretações intuitivas e concordam com o que se é esperado considerando a definição de probabilidade. Você pode conferir um estudo mais detalhado do significado e das interpretações com exemplos dos axiomas de probabilidade em Ross (2010) e Navidi (2012).

No caso de experimentos com um espaço amostral finito e em que todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer, podemos definir a probabilidade de um evento ocorrer de maneira simples e intuitiva.

**Definição:** considere um experimento cujo espaço amostral $S$ é finito com $n$ resultados igualmente prováveis de ocorrer. A probabilidade de um evento $A \subset S$ ocorrer é definida como sendo

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

onde $k$ é o número de resultados possíveis que compõem o evento $A$.

No caso do lançamento de uma moeda onde as duas únicas possibilidades de resultado são 'cara' ou 'coroa' e se estivermos considerando uma moeda honesta, a probabilidade de obter a face 'cara' é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade de obter a face 'coroa' é também $\frac{1}{2}$.

$$P(\text{'cara'}) = P(\text{'coroa'}) = \frac{1}{2}$$

No caso do lançamento de um dado cúbico onde as faces têm a mesma chance de serem obtidas, então cada uma delas tem probabilidade de $\frac{1}{6}$. Vejamos outro exemplo do cálculo de probabilidades com alguns eventos não tão triviais.

**Exemplo 2:** Um baralho tradicional que é utilizado para jogar diversos jogos de cartas diferentes possui 52 cartas divididas em quatro grupos de 13 cartas cada, chamados de naipes. Os naipes e seus símbolos são, respectivamente

copas - ♥ ouros - ♦ espadas - ♠ paus - ♣

Dentro de cada naipe as cartas são numeradas de 1 a 10, sendo que o número 1 é substituído pela letra A e é chamado de 'ás'. Além das dez cartas numeradas, cada naipe possui três figuras que são o valete, a dama e o rei, representados pelas letras 'J', 'Q' e 'K', respectivamente.

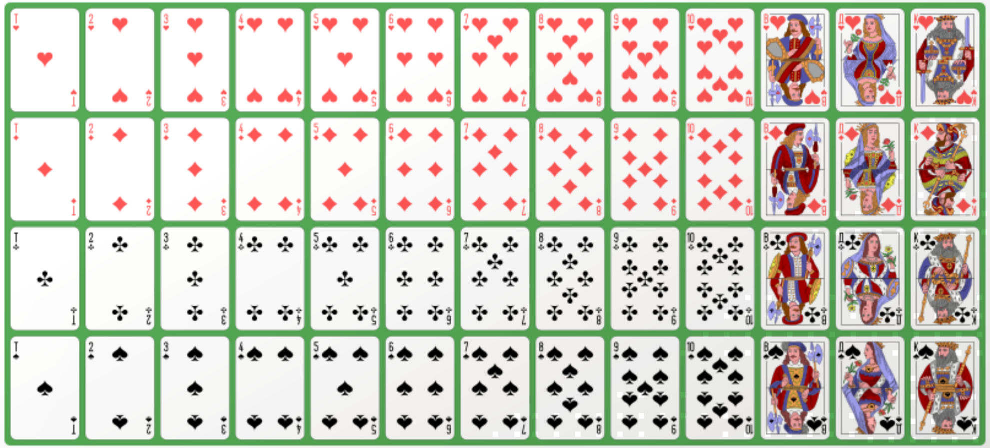


Figura 1: Baralho tradicional com 52 cartas divididas em 4 naipes.
Fonte: Wikimedia.

Considere um baralho deste tipo com 52 cartas e, ainda, que a possibilidade de cada carta ser selecionada seja igual para todas as cartas do deck. Vamos denotar por $B$ o evento de selecionar uma carta do naipe de espadas, ou seja, o conjunto $B$ pode ser representado por

$B$ = {A♠, 2♠, 3♠, 4♠, 5♠, 6♠, 7♠, 8♠, 9♠, 10♠, J♠, Q♠, K♠}

O número total de elementos no espaço amostral é 52 e o número de elementos no evento $B$ é 13, portanto, a probabilidade de ocorrência do evento $B$ é igual a

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Considere agora o evento $C$ como sendo selecionar uma carta da corte, ou seja, um valete, uma dama ou um rei. Neste caso, nosso evento $C$ pode ser descrito pelo conjunto

$C$ = { J♥, Q♥, K♥, J♦, Q♦, K♦, J♠, Q♠, K♠, J♣, Q♣, K♣}.

O conjunto $C$ elementos e, portanto a probabilidade de ocorrência do evento $C$ é igual a

$$P(C) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

Vamos calcular a probabilidade de ocorrência dos eventos $B$ e $C$ simultaneamente, isso é, vamos calcular a probabilidade do evento

$B \cap C$ = {J♠, Q♠, K♠}.

Dessa forma, temos que

$$P(B \cap C) = \frac{3}{52}.$$

A ocorrência do evento $B$ ou $C$ é descrita pelo conjunto

$B \cup C$ = {A♠, 2♠, 3♠, 4♠, 5♠, 6♠, 7♠, 8♠, 9♠, 10♠,
J♠, Q♠, K♠, J♥, Q♥, K♥, J♦, Q♦, K♦,
J♣, Q♣, K♣}

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento $B$ ou $C$ é

$$P(A \cup B) = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}.$$

Algumas propriedades de probabilidades podem ser úteis quando estamos manipulando diferentes eventos. A proposição a seguir traz algumas dessas propriedades.

**Proposição:** considere $S$ um espaço amostras e $A, B \subset S$ eventos desse espaço amostral. As seguintes propriedades são válidas:

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$, onde $A^C = S - A$ é chamado de evento complementar de $A$;

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
3. se $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Pelo item 1 da proposição anterior e pelo item 1 dos axiomas de probabilidade apresentados, sabemos que $P(S) = 1$ e como $S^C = \varnothing$, podemos concluir que

$$P(\varnothing) = 0.$$

Além disso, se assumirmos que os eventos $A$ e $B$ são independentes, então $A \cap B = \varnothing$. Nesse cenário, o item 2 da proposição anterior corresponde ao item 3 dos axiomas de probabilidade.

## Importante

As propriedades apresentadas na proposição são válidas para qualquer espaço amostral e quaisquer eventos definidos nele. As demonstrações dessas e de outras propriedades podem ser encontradas em Ross (2010).

**Exemplo 3:** Vamos considerar novamente o experimento com o lançamento de dois dados cúbicos considerando que são ambos dados honestos, ou seja, cada face tem a mesma probabilidade de ser obtida. Denote por $S$ o espaço de todos os pares ordenados que podem ser obtidos com o lançamento de dois dados como descrito no Exemplo 1.

Seja $A \subset S$ um evento tal que a soma das faces superiores dos dados seja igual a 10, ou seja,

$$A = \{(4,6); (5,5); (6,4)\}.$$

A probabilidade $P(A)$ pode ser calculada como sendo

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Considere agora o evento $B \subset S$ tal que a soma das duas faces superiores seja igual a 7. O evento $B$ é descrito pelo conjunto

$$B = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$$

e a probabilidade de sua ocorrência $P(B)$ é

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Note que $A \cap B = \varnothing$ e, portanto, os eventos $A$ e $B$ são independentes. De fato, se a soma das faces voltadas para cima após o lançamento de dois dados for igual a 10, então a mesma soma não pode ser igual a 7. Como vimos $P(\varnothing) = 0$, então pelo item 2 da Proposição 1 (que corresponde ao item 3 dos axiomas de probabilidade) vale que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Logo, a probabilidade de que a soma das faces superiores dos dados seja igual a 7 ou a 10 é

$$P(A \cup B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Outra forma de descrever um evento, neste caso, pode ser pela regra de composição que o par ordenado deve satisfazer. Por exemplo, considere que o evento $C \subset S$ é descrito como sendo os lançamentos cuja soma das faces superiores seja maior ou igual a sete. Dessa forma, podemos descrevê-lo como o conjunto

$$C = \{(x, y) \in S : x + y \geq 7\}.$$

Os pares ordenados que fazem parte do evento $C$ estão destacados na tabela abaixo que apresenta todas as possibilidades de resultado com o lançamento de dois dados.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Vale, portanto, que

$$P(C) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Note que $A \subset C$ e $B \subset C$, portanto, $P(A) \leq P(C)$ e $P(B) \leq P(C)$ como descrito na Proposição 1.

Neste capítulo, começamos nosso estudo sobre a Teoria das Probabilidades com as primeiras definições e propriedades que são a base de toda essa teoria. É importante ressaltar que tais elementos estão presentes em todos os estudos probabilísticos e tais definições e conceitos devem estar bem compreendidos para que possamos construir novas propriedades, interações e resultados mais elaborados. Apresentamos diversos exemplos para ilustrar as definições e também começar a estimular sua atenção para eventos probabilísticos que existem à nossa volta e que podem passar despercebidos. Trabalhamos com a definição clássica de probabilidade e os axiomas de probabilidades sob os quais é desenvolvida toda a teoria subsequente dessa área da Matemática. Além disso, vimos como é intuitiva a definição do cálculo das probabilidades para experimentos cujo espaço amostral é finito e todas as possibilidades de resultado têm a mesma chance de serem obtidas.

# Referências


BONAFINI, F.C. (org.). **Matemática**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos e Funções. São Paulo: Atual, 1977.

LOESCH, Claudio: **Probabilidade e estatística**. Rio de Janeiro: Grupo Gen - LTC, 2012.

NAVIDI, W. **Probabilidade e estatística para ciências exatas**. Porto Alegre: Grupo A - AMGH, 2012.

ROSS, S. **Probabilidade**: um curso moderno com aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SPIEGEL, M.; SCHILLIER, J.; SRINIVASAN, A. **Probabilidade e estatística**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.