Grundlagen der künstlichen Intelligenz: Hausaufgabe 6

Tom Nick	- 340528
Niklas Gebauer	- 340942
Leonard Witte	- 341457
Johannes Herrmann	- 341091

Aufgabe 1 - Hidden Markov-Prozess

Die Anfangsbedingung wird mit $P(X_0 = w) = 0.5$ angenommen.

(a)

$$\begin{aligned}
P(X_1 = \cdots = X_k = w, X_{k+1} = f \mid X_0 = f) &= P(X_{k+1} = f \mid X_k = w) \cdot \prod_{i=1}^{k} P(X_{i+1} = w \mid X_i = w) \cdot P(X_1 = w \mid X_0 = f) \\
&= 0.2 \cdot 0.8^{k-1} \cdot 0.1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
p_t &= P(X_t \mid Y_{1:t}) \\
&= \alpha p(X_t, Y_t \mid Y_{1:t-1}) = \alpha p(Y_t \mid X_t, Y_{1:t-1}) p(x_t, e_{1:t-1}) \\
&= \alpha p(Y_t, X_t) p(X_t, Y_{1:t-1}) \\
p(X_t \mid Y_{1:t-1}) &= \sum_{x_t} p(X_t, X_t \mid Y_{1:t-1}) = \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t}) \\
p(X_t \mid Y_{1:t}) &= \alpha p(Y_t \mid X_t) \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t-1}) \\
&= \alpha p(Y_t = g \mid X_t = w) \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t-1}) \\
&= \alpha 0.3 \cdot \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t-1})
\end{aligned}$$

(c)

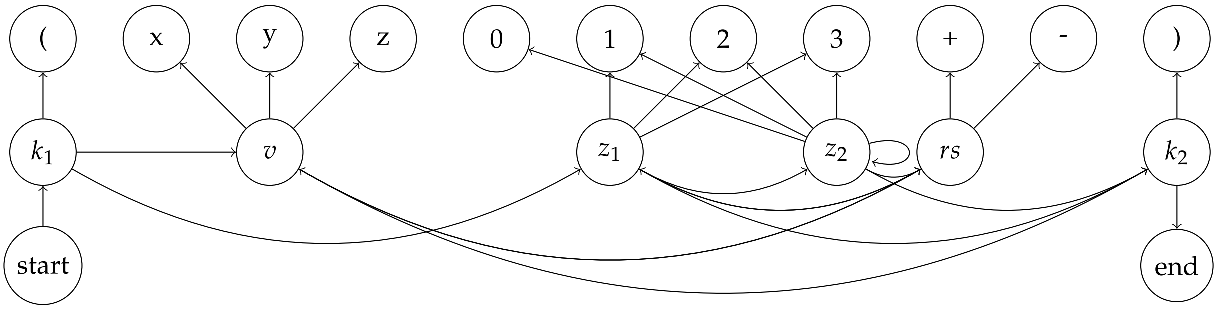
$$\begin{aligned}
P(X_{2+1} = w, Y_1 = c, Y_2 = g) &= \sum_{X_2} p(X_{2+1} = w \mid X_2) p(X_2 \mid Y_{1:2}) \\
= p(X_3 = w \mid X_2 = w) p(X_2 = w \mid Y_{1:2}) &+ p(X_3 = w \mid X_2 = f) p(X_2 = f \mid Y_{1:2}) \\
= p(X_3 = w \mid X_2 = w) \sum_{X_1} p(X_2 = w \mid X_1) p(X_1 \mid Y_1) &+ p(X_3 = w \mid X_2 = f) p(X_2 = f \mid Y_{1:2}) \\
= p(X_3 = w \mid X_2 = w)(p(X_2 = w \mid X_1 = w) p(X_1 = w \mid Y_1) &+ p(X_2 = w \mid X_1 = f) p(X_1 = f \mid Y_1)) + \\
&+ p(X_3 = w \mid X_2 = f) p(X_2 = f \mid Y_{1:2}) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

(d)

(e)

Aufgabe 2 - Hidden Markov-Modell

(a)



(b)

$$
\begin{aligned}
P(x_{0:6} \mid y_{1:6} = (x + 30)) &= P(x_0) \prod_{t=1}^{6} P(y_t \mid x_t) P(x_t \mid x_{t-1}) \\
&= 1.0 \cdot (0.6 \cdot 0.6) \cdot (0.8 \cdot 0.7) \cdot (0.7 \cdot 0.2) \cdot (0.5 \cdot 0.4) \cdot (0.3 \cdot 1.0) \cdot 1.0 \\
&= 0.00203
\end{aligned}
$$

(c) Keine Ahnung wie formal das muss: Ich nehme an, zwei-stellige Zahlen sind ausgeschlossen. Es gibt folgende Möglichkeiten:

- $\ldots\ rs\ \{x, y, z\}\ rs\ \ldots$
- $\ldots\ rs\ \{1, 2, 3\}\ rs\ \ldots$

$$
\begin{aligned}
P(\ rs\ x\ rs\ ) &= P(v \mid rs) \cdot P(x \mid v) \cdot P(rs \mid v) = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.144 \\
P(\ rs\ y\ rs\ ) &= 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.72 \\
P(\ rs\ z\ rs\ ) &= 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.24 \\
P(\ rs\ 1\ rs\ ) &= 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.105 \\
P(\ rs\ 2\ rs\ ) &= 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.063 \\
P(\ rs\ 3\ rs\ ) &= 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.042
\end{aligned}
$$

Somit ist die Variable x am wahrscheinlichsten. Die Aussage sollte mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{0.144}{0.144+0.72+0.24+0.105+0.063+0.042} = 0.1095$ zutreffen.

(d) Die Möglichkeiten wären $(z_1, z_2) z_1 \in \{0, 1, 2\}, z_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ bzw. $start\ k_1 z_1 z_2 k_2\ stop$

$$
P(x_5 = sto, x_4 = k_2, x_3 = z_2, x_2 = z_1, x_1 = k_1, x_0 = sta) = 1.0 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 1.0 = 0.08
$$

8% ist die Wahrscheinlichkeit das ein mathematischer Ausdruck mit genau 4 Zeichen auftritt.