Grundlagen der künstlichen Intelligenz: Hausaufgabe 5

Tom Nick - 340528
Niklas Gebauer - 340942
Leonard Witte - 341457
Johannes Herrmann - 341091

Aufgabe 1

Wir definieren folgende Ereignisse:

$$I_c := \text{Das Auto hat die Farbe } c \in \{B, G\}$$
$$E_c := \text{Das Auto erscheint in der Farbe } c \in \{B, G\}$$

Aus dem Text kennen wir folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(E_B \mid I_B) = 0.7$$
$$P(E_G \mid I_B) = 0.3$$

a.) Nach Bayes wäre die Rechnung:

$$P(I_B \mid E_B) = \frac{P(E_B \mid P_B) \cdot P(I_B)}{P(E_B)} \quad (1)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Wahrscheinlichkeit für $P(I_B)$ bzw. $P(I_G)$ benötigt werden, die wir aber nicht kennen, somit können wir mit den derzeitigen Informationen nicht die wahrscheinlichste Farbe des Autos berechnen.

b.) Nun kennen wir:

$$P(I_B) = 0.2$$
$$P(I_G) = 0.8$$

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} P(I_B \mid E_B) &= \frac{P(E_B \mid P_B) \cdot P(I_B)}{P(E_B \mid I_B) \cdot P(I_B) + P(E_B \mid I_G) \cdot P(I_G)} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} \\ &= \frac{0.14}{0.14 + 0.24} = \frac{0.14}{0.38} = 0.368 \end{aligned}$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit $P(I_G \mid E_B)$ ist damit 0.632, womit es fast doppelt so wahrscheinlich ist, dass die Person ein grünes, anstatt ein blaues Taxi gesehen hatte.

Aufgabe 2

a.)

$$\begin{aligned} &P(X = x, E_1 = e_1, E_2 = e_2, ..., K_1 = k_1, K_2 = k_2, ..., C_1 = c_1, C_2 = c_2, ..., Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...) \\ &= P(X = x | E_1 = e_1, E_2 = e_2, ...) * \prod_i P(E_i = e_i | eltern(E_i)) * \prod_j P(K_j = k_j | eltern(K_j)) \\ &* \prod_l P(C_l = c_l | eltern(C_l)) * \prod_m P(Z_m = z_m | eltern(Z_m)) \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} eltern(E_i) &\subseteq \{C_1 = c_1, C_2 = c_2, ..., Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...\} \\ eltern(K_j) &\subseteq \{X = x, C_1 = c_1, C_2 = c_2, ...\} \text{und} X \in eltern(K_j) \\ eltern(C_l) &\subseteq \{E_1 = e_1, E_2 = e_2, ..., K_1 = k_1, K_2 = k_2, ..., C_1 = c_1, C_2 = c_2, ..., Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...\} \\ eltern(Z_m) &\subseteq \{E_1 = e_1, E_2 = e_2, ..., K_1 = k_1, K_2 = k_2, ..., C_1 = c_1, C_2 = c_2, ..., Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...\} \end{aligned}$$

b.) Wir nummerieren die einzelnen Produkte aus a) zur besseren Lesbarkeit des Beweises wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&(1) P(X = x|E_1 = e_1, E_2 = e_2, ...)\\
&(2) \prod_i P(E_i = e_i|eltern(E_i))\\
&(3) \prod_j P(K_j = k_j|eltern(K_j))\\
&(4) \prod_l P(C_l = c_l|eltern(C_l))\\
&(5) \prod_m P(Z_m = z_m|eltern(Z_m))
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&P(X = x|mb(X), Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...)\\
&\overset{\text{Def. bed. Wkt.}}{=} \frac{P(X = x, mb(X), Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...)}{\sum_x P(X = x, mb(X), Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, ...)}\\
&\overset{\text{Fakt. Verb.-Wkt.}}{=} \frac{(1) * (2) * (3) * (4) * (5)}{\sum_x [(1) * (2) * (3) * (4) * (5)]}\\
&\overset{\text{(2),(4),(5) unabh. v. X}}{=} \frac{(1) * (2) * (3) * (4) * (5)}{(2) * (4) * (5) * \sum_x [(1) * (3)]}\\
&= \frac{\sum_{z_1,z_2,...} [(2) * (4) * (5)] * (1) * (3)}{\sum_{z_1,z_2,...} [(2) * (4) * (5)] * \sum_x [(1) * (3)]}\\
&\overset{\text{(1),(3) unabh. v. } Z_m}{=} \frac{\sum_{z_1,z_2,...} [(2) * (4) * (5) * (1) * (3)]}{\sum_{z_1,z_2,...} [(2) * (4) * (5) * \sum_x [(1) * (3)]]}\\
&\overset{\text{(2),(4),(5) unabh. v. X}}{=} \frac{\sum_{z_1,z_2,...} [(2) * (4) * (5) * (1) * (3)]}{\sum_{x,z_1,z_2,...} [(2) * (4) * (5) * (1) * (3)]}\\
&\overset{\text{Fakt. Verb.-Wkt.}}{=} \frac{P(X = x, mb(X))}{mb(X)}\\
&\overset{\text{Def. bed. Wkt.}}{=} P(X = x|mb(X))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Sei

$$
\begin{aligned}
X &:= \text{Das Produkt der Augenzahlen der zwei Würfel}\\
Y &:= \text{Die Augenzahl eines Würfel}
\end{aligned}
$$

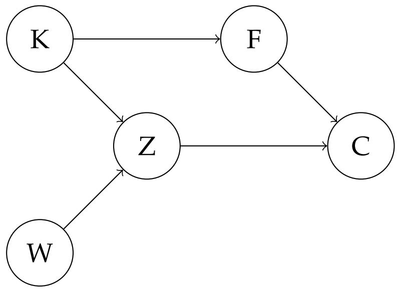
Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert von X gleich dem Einsatz ist, dann ist der Gewinn/Verlust der Spieler 0euro. Es ist offensichtlich das X sich ergibt, wenn die Erwartungswerte der Augenzahl beider Würfel multipliziert wird und dass das Werfen zweier Würfel unabhängige Ereignisse sind, somit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(Y * Y)\\
E(X) &= E(Y) \cdot E(Y)\\
E(X) &= 3.5 \cdot 3.5\\
E(X) &= 12.25
\end{aligned}
$$

Also muss der Einsatz 12.25euro betragen, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 4

a.)



b.)

$$
\begin{aligned}
P(C=w|K=w,Z=f) &= \frac{\sum_{W,F}[P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]}{\sum_{C,W,F}[P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]} \\
&= \frac{P(K)\sum_W[P(W)P(Z|K,W)]\sum_F[P(F|K)P(C|F,Z)]}{P(K)\sum_W[P(W)P(Z|K,W)]\sum_F[P(F|K)\sum_C[P(C|F,Z)]]} \\
&= \frac{\sum_F[P(F|K)P(C|F,Z)]}{\sum_F[P(F|K)\sum_C[P(C|F,Z)]]} \\
&= \frac{\sum\limits_{x\in\{w,f\}}[P(F=x|K=w)P(C=w|F=x,Z=f)]}{1} \\
&= P(F=w|K=w)P(C=w|F=w,Z=f)+P(F=f|K=w)P(C=w|F=f,Z=f) \\
&= 0.6\cdot 0.9+0,4\cdot 0.2 = 0.62
\end{aligned}
$$

c.)

$$
\begin{aligned}
P(K=W|F=W) &= \frac{\sum_{W,Z,C}[P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]}{\sum_{K,W,Z,C}[P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]} \\
&= \frac{P(K)P(F|K)\sum_W[P(W)\sum_Z[P(Z|K,W)\sum_C[P(C|F,Z)]]]}{\sum_K[P(K)P(F|K)\sum_W[P(W)\sum_Z[P(Z|K,W)\sum_C[P(C|F,Z)]]]]} \\
&= \frac{P(K)P(F|K)}{\sum_K[P(K)P(F|K)]} \\
&= \frac{P(K=w)P(F=w|K=w)}{\sum\limits_{y\in\{w,f\}}[P(K=y)P(F=w|K=y)]} \\
&= \frac{P(K=w)P(F=w|K=w)}{P(K=w)P(F=w|K=w)+P(K=f)P(F=w|K=f)} \\
&= \frac{0.2\cdot 0.6}{0.2\cdot 0.6+0.8\cdot 0.1} \\
&= 0.6
\end{aligned}
$$

d.)

$$
\begin{aligned}
&P(W=w|Z=w) \\
&= \frac{\sum_{F,K,C}[P(K)*P(W)*P(F|K)*P(Z|K,W)*P(C|F,Z)]}{\sum_{F,K,C,W}[P(K)*P(W)*P(F|K)*P(Z|K,W)*P(C|F,Z)]} \\
&= \frac{P(W)*\sum_K[P(K)*P(Z|K,W)*\sum_F[P(F|K)*\sum C[P(C|F,Z)]]]}{\sum_W[P(W)*\sum_K[P(K)*P(Z|K,W)*\sum_F[P(F|K)*\sum C[P(C|F,Z)]]]]} \\
&\overset{\sum_F=1,\sum_C=1}{=} \frac{P(W)*\sum_K[P(K)*P(Z|K,W)]}{\sum_W[P(W)*\sum_K[P(K)*P(Z|K,W)]]} \\
&= \frac{P(W=w)*[P(K=w)*P(Z=w|K=w,W=w)+P(K=f)*P(Z=w)|K=f,W=w)]}{\sum_{y\in\{w,f\}}P(W=y)*[P(K=w)*P(Z=w|K=w,W=w)+P(K=f)*P(Z=w)|K=f,W=w)]} \\
&= \frac{0,4*[0,2*0,9+0,8*0,5]}{0,4*[0,2*0,9+0,8*0,5]+0,6*[0,2*0,5+0,8*0,1]} \\
&= \frac{0,4*0,58}{0,4*0,58+0,6*0,18} \\
&\approx 0,68
\end{aligned}
$$