

Grundlagen der künstlichen Intelligenz: Hausaufgabe 5

Tom Nick - 340528
Niklas Gebauer - 340942
Leonard Witte - 341457
Johannes Herrmann - 341091

Aufgabe 1

Wir definieren folgende Ereignisse:

$I_c :=$ Das Auto hat die Farbe $c \in \{B, G\}$

$E_c :=$ Das Auto erscheint in der Farbe $c \in \{B, G\}$

Aus dem Text kennen wir folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(E_B | I_B) = 0.7$$

$$P(E_G | I_B) = 0.3$$

a.) Nach Bayes wäre die Rechnung:

$$P(I_B | E_B) = \frac{P(E_B | I_B) \cdot P(I_B)}{P(E_B)} \quad (1)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Wahrscheinlichkeit für $P(I_B)$ bzw. $P(I_G)$ benötigt werden, die wir aber nicht kennen, somit können wir mit den derzeitigen Informationen nicht die wahrscheinlichste Farbe des Autos berechnen.

b.) Nun kennen wir:

$$P(I_B) = 0.2$$

$$P(I_G) = 0.8$$

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} P(I_B | E_B) &= \frac{P(E_B | I_B) \cdot P(I_B)}{P(E_B | I_B) \cdot P(I_B) + P(E_B | I_G) \cdot P(I_G)} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} \\ &= \frac{0.14}{0.14 + 0.24} = \frac{0.14}{0.38} = 0.368 \end{aligned}$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit $P(I_G | E_B)$ ist damit 0.632, womit es fast doppelt so wahrscheinlich ist, dass die Person ein grünes, anstatt ein blaues Taxi gesehen hatte.

Aufgabe 2

a.)

$$\begin{aligned} P(X = x, E_1 = e_1, E_2 = e_2, \dots, K_1 = k_1, K_2 = k_2, \dots, C_1 = c_1, C_2 = c_2, \dots, Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots) \\ = P(X = x | E_1 = e_1, E_2 = e_2, \dots) * \prod_i P(E_i = e_i | \text{eltern}(E_i)) * \prod_j P(K_j = k_j | \text{eltern}(K_j)) \\ * \prod_l P(C_l = c_l | \text{eltern}(C_l)) * \prod_m P(Z_m = z_m | \text{eltern}(Z_m)) \end{aligned}$$

mit:

$$\text{eltern}(E_i) \subseteq \{C_1 = c_1, C_2 = c_2, \dots, Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots\}$$

$$\text{eltern}(K_j) \subseteq \{X = x, C_1 = c_1, C_2 = c_2, \dots\} \text{ und } X \in \text{eltern}(K_j)$$

$$\text{eltern}(C_l) \subseteq \{E_1 = e_1, E_2 = e_2, \dots, K_1 = k_1, K_2 = k_2, \dots, C_1 = c_1, C_2 = c_2, \dots, Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots\}$$

$$\text{eltern}(Z_m) \subseteq \{E_1 = e_1, E_2 = e_2, \dots, K_1 = k_1, K_2 = k_2, \dots, C_1 = c_1, C_2 = c_2, \dots, Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots\}$$

b.) Wir nummerieren die einzelnen Produkte aus a) zur besseren Lesbarkeit des Beweises wie folgt:

$$(1) P(X = x | E_1 = e_1, E_2 = e_2, \dots)$$

$$(2) \prod_i P(E_i = e_i | \text{eltern}(E_i))$$

$$(3) \prod_j P(K_j = k_j | \text{eltern}(K_j))$$

$$(4) \prod_l P(C_l = c_l | \text{eltern}(C_l))$$

$$(5) \prod_m P(Z_m = z_m | \text{eltern}(Z_m))$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & P(X = x | mb(X), Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots) \\ \stackrel{\text{Def. bed. Wkt.}}{=} & \frac{P(X = x, mb(X), Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots)}{\sum_x P(X = x, mb(X), Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots)} \\ \stackrel{\text{Fakt. Verb.-Wkt.}}{=} & \frac{(1) * (2) * (3) * (4) * (5)}{\sum_x [(1) * (2) * (3) * (4) * (5)]} \\ \stackrel{(2),(4),(5) \text{ unabh. v. } X}{=} & \frac{(1) * (2) * (3) * (4) * (5)}{(2) * (4) * (5) * \sum_x [(1) * (3)]} \\ = & \frac{\sum_{z_1, z_2, \dots} [(2) * (4) * (5)] * (1) * (3)}{\sum_{z_1, z_2, \dots} [(2) * (4) * (5)] * \sum_x [(1) * (3)]} \\ \stackrel{(1),(3) \text{ unabh. v. } Z_m}{=} & \frac{\sum_{z_1, z_2, \dots} [(2) * (4) * (5) * (1) * (3)]}{\sum_{z_1, z_2, \dots} [(2) * (4) * (5) * \sum_x [(1) * (3)]]} \\ \stackrel{(2),(4),(5) \text{ unabh. v. } X}{=} & \frac{\sum_{z_1, z_2, \dots} [(2) * (4) * (5) * (1) * (3)]}{\sum_{x, z_1, z_2, \dots} [(2) * (4) * (5) * (1) * (3)]} \\ \stackrel{\text{Fakt. Verb.-Wkt.}}{=} & \frac{P(X = x, mb(X))}{mb(X)} \\ \stackrel{\text{Def. bed. Wkt.}}{=} & P(X = x | mb(X)) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei

$X :=$ Das Produkt der Augenzahlen der zwei Würfel

$Y :=$ Die Augenzahl eines Würfels

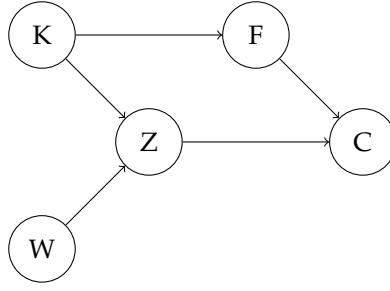
Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert von X gleich dem Einsatz ist, dann ist der Gewinn/Verlust der Spieler 0euro. Es ist offensichtlich das X sich ergibt, wenn die Erwartungswerte der Augenzahl beider Würfel multipliziert wird und dass das Werfen zweier Würfel unabhängige Ereignisse sind, somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y * Y) \\ E(X) &= E(Y) \cdot E(Y) \\ E(X) &= 3.5 \cdot 3.5 \\ E(X) &= 12.25 \end{aligned}$$

Also muss der Einsatz 12.25euro betragen, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 4

a.)



b.)

$$\begin{aligned}
 P(C = w | K = w, Z = f) &= \frac{\sum_{W,F} [P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]}{\sum_{C,W,F} [P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]} \\
 &= \frac{P(K) \sum_W [P(W)P(Z|K,W)] \sum_F [P(F|K)P(C|F,Z)]}{P(K) \sum_W [P(W)P(Z|K,W)] \sum_F [P(F|K) \sum_C [P(C|F,Z)]]} \\
 &= \frac{\sum_F [P(F|K)P(C|F,Z)]}{\sum_F [P(F|K) \sum_C [P(C|F,Z)]]} \\
 &= \frac{\sum_{x \in \{w,f\}} [P(F = x | K = w)P(C = w | F = x, Z = f)]}{1} \\
 &= P(F = w | K = w)P(C = w | F = w, Z = f) + P(F = f | K = w)P(C = w | F = f, Z = f) \\
 &= 0.6 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.62
 \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned}
 P(K = W | F = W) &= \frac{\sum_{W,Z,C} [P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]}{\sum_{K,W,Z,C} [P(K)P(W)P(F|K)P(Z|K,W)P(C|F,Z)]} \\
 &= \frac{P(K)P(F|K) \sum_W [P(W) \sum_Z [P(Z|K,W) \sum_C [P(C|F,Z)]]]}{\sum_K [P(K)P(F|K) \sum_W [P(W) \sum_Z [P(Z|K,W) \sum_C [P(C|F,Z)]]]]} \\
 &= \frac{P(K)P(F|K)}{\sum_K [P(K)P(F|K)]} \\
 &= \frac{P(K = w)P(F = w | K = w)}{\sum_{y \in \{w,f\}} [P(K = y)P(F = w | K = y)]} \\
 &= \frac{P(K = w)P(F = w | K = w)}{P(K = w)P(F = w | K = w) + P(K = f)P(F = w | K = f)} \\
 &= \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.2 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.1} \\
 &= 0.6
 \end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned}
 P(W = w | Z = w) &= \frac{\sum_{F,K,C} [P(K) * P(W) * P(F|K) * P(Z|K,W) * P(C|F,Z)]}{\sum_{F,K,C,W} [P(K) * P(W) * P(F|K) * P(Z|K,W) * P(C|F,Z)]} \\
 &= \frac{P(W) * \sum_K [P(K) * P(Z|K,W) * \sum_F [P(F|K) * \sum_C [P(C|F,Z)]]]}{\sum_W [P(W) * \sum_K [P(K) * P(Z|K,W) * \sum_F [P(F|K) * \sum_C [P(C|F,Z)]]]]} \\
 &\stackrel{\sum_F=1, \sum_C=1}{=} \frac{P(W) * \sum_K [P(K) * P(Z|K,W)]}{\sum_W [P(W) * \sum_K [P(K) * P(Z|K,W)]]} \\
 &= \frac{P(W = w) * [P(K = w) * P(Z = w | K = w, W = w) + P(K = f) * P(Z = w | K = f, W = w)]}{\sum_{y \in \{w,f\}} P(W = y) * [P(K = w) * P(Z = w | K = w, W = w) + P(K = f) * P(Z = w | K = f, W = w)]} \\
 &= \frac{0.4 * [0.2 * 0.9 + 0.8 * 0.5]}{0.4 * [0.2 * 0.9 + 0.8 * 0.5] + 0.6 * [0.2 * 0.5 + 0.8 * 0.1]} \\
 &= \frac{0.4 * 0.58}{0.4 * 0.58 + 0.6 * 0.18} \\
 &\approx 0.68
 \end{aligned}$$