

Grundlagen der künstlichen Intelligenz: Hausaufgabe 6

Tom Nick - 340528
Niklas Gebauer - 340942
Leonard Witte - 341457
Johannes Herrmann - 341091

Aufgabe 1 - Hidden Markov-Prozess

Die Anfangsbedingung wird mit $P(X_0 = w) = 0.5$ angenommen.

(a)

$$\begin{aligned} P(X_1 = \dots = X_k = w, X_{k+1} = f \mid X_0 = f) &= P(X_{k+1} = f \mid X_k = w) \cdot \prod_{i=1}^k P(X_{i+1} = w \mid X_i = w) \cdot P(X_1 = w \mid X_0 = f) \\ &= 0.1 \cdot 0.8^{k-1} \cdot 0.2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p_t &= P(X_t \mid Y_{1:t}) \\ &= \alpha p(X_t, Y_t \mid Y_{1:t-1}) = \alpha p(Y_t \mid X_t, Y_{1:t-1}) p(x_t, e_{1:t-1}) \\ &= \alpha p(Y_t, X_t) p(X_t, Y_{1:t-1}) \\ p(X_t \mid Y_{1:t-1}) &= \sum_{x_t} p(X_t, X_t \mid Y_{1:t-1}) = \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t}) \\ p(X_t \mid Y_{1:t}) &= \alpha p(Y_t \mid X_t) \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t-1}) \\ &= \alpha p(Y_t = g \mid X_t = w) \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t-1}) \\ &= \alpha 0.3 \cdot \sum_{x_t} p(X_t \mid X_{t-1}) p(X_t \mid Y_{1:t-1}) \end{aligned}$$

(c)

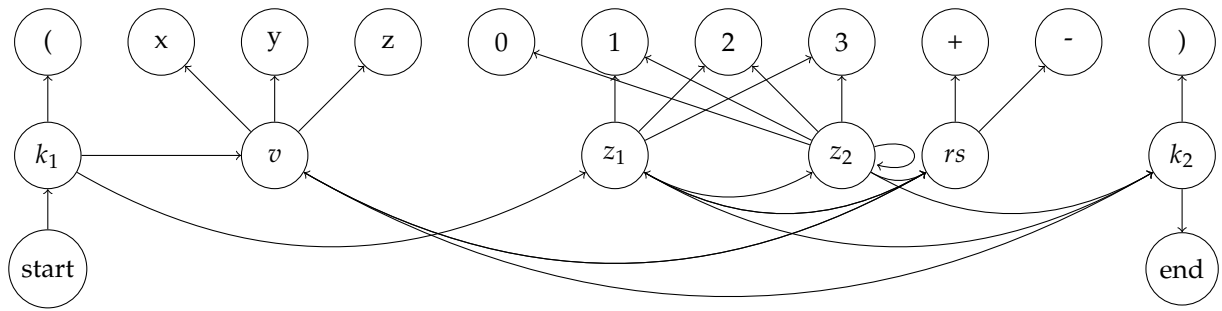
$$\begin{aligned} P(X_{2+1} = w, Y_1 = c, Y_2 = g) &= \sum_{X_2} p(X_{2+1} = w \mid X_2) p(X_2 \mid Y_{1:2}) \\ &= p(X_3 = w \mid X_2 = w) p(X_2 = w \mid Y_{1:2}) + p(X_3 = w \mid X_2 = f) p(X_2 = f \mid Y_{1:2}) \\ &= p(X_3 = w \mid X_2 = w) \sum_{X_1} p(X_2 = w \mid X_1) p(X_1 \mid Y_1) + p(X_3 = w \mid X_2 = f) p(X_2 = f \mid Y_{1:2}) \\ &= p(X_3 = w \mid X_2 = w) (p(X_2 = w \mid X_1 = w) p(X_1 = w \mid Y_1) + p(X_2 = w \mid X_1 = f) p(X_1 = f \mid Y_1)) + \\ &\quad + p(X_3 = w \mid X_2 = f) p(X_2 = f \mid Y_{1:2}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

(d)

(e)

Aufgabe 2 - Hidden Markov-Modell

(a)



(b)

$$\begin{aligned}
 P(x_{0:6} \mid y_{1:6} = (x + 30)) &= P(x_0) \prod_{t=1}^6 P(y_t \mid x_t) P(x_t \mid x_{t-1}) \\
 &= 1.0 \cdot (0.6 \cdot 0.6) \cdot (0.8 \cdot 0.7) \cdot (0.7 \cdot 0.2) \cdot (0.5 \cdot 0.4) \cdot (0.3 \cdot 1.0) \cdot 1.0 \\
 &= 0.00203
 \end{aligned}$$

(c) Keine Ahnung wie formal das muss: Ich nehme an, zwei-stellige Zahlen sind ausgeschlossen. Es gibt folgende Möglichkeiten:

- ... $rs \{x, y, z\} rs$...
- ... $rs \{1, 2, 3\} rs$...

$$P(rs \ x \ rs) = P(v \mid rs) \cdot P(x \mid v) \cdot P(rs \mid v) = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.144$$

$$P(rs \ y \ rs) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.72$$

$$P(rs \ z \ rs) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$

$$P(rs \ 1 \ rs) = 0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.3 = 0.105$$

$$P(rs \ 2 \ rs) = 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.063$$

$$P(rs \ 3 \ rs) = 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.042$$

Somit ist die Variable x am wahrscheinlichsten. Die Aussage sollte mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{0.144}{0.144+0.72+0.24+0.105+0.063+0.042} = 0.1095$ zutreffen.

(d) Die Möglichkeiten wären $(z_1, z_2) z_1 \in \{0, 1, 2\}, z_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ bzw. $start \ k_1 z_1 z_2 k_2 \ stop$

$$P(x_5 = sto, x_4 = k_2, x_3 = z_2, x_2 = z_1, x_1 = k_1, x_0 = sta) = 1.0 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 1.0 = 0.08$$

8% ist die Wahrscheinlichkeit das ein mathematischer Ausdruck mit genau 4 Zeichen auftritt.