

# Grundlagen der künstlichen Intelligenz: Hausaufgabe 3

Tom Nick - 340528  
Niklas Gebauer - 340942  
Leonard Witte - 341457  
Johannes Herrmann - 341091

## Aufgabe 1

- a)  $\forall x (Stack(x) \Rightarrow ((\exists y (Block(y) \wedge in(y, x))) \wedge (\forall y (in(y, x) \Rightarrow Block(y))))))$
- b)  $\forall x (Stack(x) \Rightarrow \exists y ((Block(y) \wedge in(y, x) \wedge on(y, T)) \wedge \forall z ((Block(z) \wedge in(z, x) \wedge on(z, T)) \Rightarrow z = y)))$
- c)  $\forall x (Block(x) \Rightarrow ((\neg \exists y ((Block(y) \wedge on(x, y)) \wedge on(x, T)) \vee (\exists y (Block(y) \wedge on(x, y)) \wedge \neg on(x, T))))))$
- d)  $\forall x (Block(x) \wedge \neg \exists y (Block(y) \wedge on(y, x)) \Rightarrow top(x))$
- e)  $\forall x \forall y (Block(x) \wedge Block(y) \wedge ((on(x, y) \wedge \neg \exists z (Stack(z) \wedge in(x, z) \wedge on(z, y) \wedge top(x))) \vee (\neg on(x, y) \wedge \exists z (Stack(z) \wedge in(x, z) \wedge on(z, y) \wedge top(x)))) \Rightarrow over(x, y))$
- f)  $\forall x ((Block(x) \wedge rot(x)) \Rightarrow in(x, 1))$
- g)  $\forall x (in(x, 2) \Rightarrow (Block(x) \wedge blau(x)))$

## Aufgabe 2

1. Implikationen entfernen, denn in einer KNF kommen lediglich Disjunktionen und Konjunktionen vor. Wir verwenden die Auflösung für Implikationen ( $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$ ):  
 $(\forall x)(\neg P(x) \vee ((\forall y)(\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge \neg(\forall y)(\neg Q(x, y) \vee P(y))))$
2. Negationen nach innen bringen, um nur Literale zu haben. Wir verwenden die Regel von De'Morgan:  
 $(\forall x)(\neg P(x) \vee ((\forall y)(\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge (\exists y)(Q(x, y) \wedge \neg P(y))))$
3. Unabhängige Variablen (solche, die im Bindungsbereich verschiedener Quantoren liegen) umbenennen, um Eindeutigkeit herzustellen, damit später ohne Probleme Quantoren nach außen gezogen werden können:  
 $(\forall x)(\neg P(x) \vee ((\forall y)(\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge (\exists z)(Q(x, z) \wedge \neg P(z))))$
4. Um eine KNF zu erhalten, müssen wir die Quantoren entfernen. Zuerst bringen wir sie dafür nach außen:  
 $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge (Q(x, z) \wedge \neg P(z))))$
5. Quantoren entfernen, indem wir Existenzquantoren durch Konstanten oder n-stellige Funktionen ersetzen, wobei n die Anzahl der Allquantoren ist, in deren Scope sich der Existenzquantor befindet. Danach können die Allquantoren einfach weggelassen werden, da dann alle Variablen implizit allquantisiert sind. Wir erhalten eine erfüllbarkeitsäquivalente skolemisierte Formel. Wir führen also für z eine 2-stellige Funktion  $g(x, y)$  ein:  
 $\neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge (Q(x, g(x, y)) \wedge \neg P(g(x, y))))$
6. Nach KNF umformen (in diesem Fall durch iterative Anwendung des Distributivgesetzes):  
 $(\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x, g(x, y))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(g(x, y)))$   
In Mengenschreibweise:  
 $\{\{\neg P(x), \neg P(y), P(f(x, y))\}, \{\neg P(x), Q(x, g(x, y))\}, \{\neg P(x), \neg P(g(x, y))\}\}$   
Die Klausel sollten jeweils paarweise Disjunkte Variablen enthalten, damit beispielsweise die Resolution einfach durchgeführt werden kann. Dafür kann man die Variablen umbenennen:  
 $\{\{\neg P(x), \neg P(y), P(f(x, y))\}, \{\neg P(a), Q(a, g(a, b))\}, \{\neg P(c), \neg P(g(c, d))\}\}$

## Aufgabe 3

Wir schreiben für jede Iteration jeweils  $\theta$  und  $L\theta$  auf. Die unterstrichenen Teile sind jeweils die nächsten Stellen an denen sich 2 Klauseln unterscheiden.

- a) 1.  $\theta = \{\}$   
 $L\theta = \{\underline{P(x, g(y), g(g(z)))}, P(u, u, u), \underline{v}\}$

2.  $\theta = \{v/P(x, g(y), g(g(z)))\}$   
 $L\theta = \{P(\underline{x}, g(y), g(g(z))), P(\underline{u}, u, u)\}$
  3.  $\theta = \{v/P(x, g(y), g(g(z))), x/u\}$   
 $L\theta = \{P(u, \underline{g(y)}, g(g(z))), P(u, \underline{u}, u)\}$
  4.  $\theta = \{v/P(x, g(y), g(g(z))), x/u, u/g(y)\}$   
 $L\theta = \{P(g(\underline{y}), g(y), g(g(\underline{z}))), P(g(\underline{y}), g(y), g(\underline{y}))\}$
  5.  $\theta = \{v/P(x, g(y), g(g(z))), x/u, u/g(y), y/g(z)\}$   
 $L\theta = \{P(g(g(z)), g(g(z)), g(g(z)))\}$
- b)
1.  $\theta = \{\}$   
 $L\theta = \{P(\underline{x}, y, f(w, z)), P(\underline{1}, v, f(1, 2, 3))\}$
  2.  $\theta = \{x/1\}$   
 $L\theta = \{P(1, \underline{y}, f(w, z)), P(1, \underline{v}, f(1, 2, 3))\}$
  3.  $\theta = \{x/1, y/v\}$   
 $L\theta = \{P(1, v, \underline{f(w, z)}), P(1, v, \underline{f(1, 2, 3)})\}$   
 Abbruch, nicht unifizierbar, die Funktionen nehmen unterschiedlich viele Argumente.
- c)
1.  $\theta = \{\}$   
 $L\theta = \{P(f(\underline{x}, y), f(y, x)), P(\underline{z}, x)\}$
  2.  $\theta = \{z/f(x, y)\}$   
 $L\theta = \{P(f(x, y), \underline{f(y, x)}), P(f(x, y), \underline{x})\}$   
 Abbruch,  $x$  kommt in  $f(y, x)$  vor.
- d)
1.  $\theta = \{\}$   
 $L\theta = \{P(\underline{x}, g(v, v), b), P(\underline{f(y, z)}, g(x, w), h(1, z))\}$
  2.  $\theta = \{x/f(y, z)\}$   
 $L\theta = \{P(f(\underline{y}, z), g(\underline{v}, v), b), P(f(\underline{y}, z), g(\underline{x}, w), h(1, z))\}$
  3.  $\theta = \{x/f(y, z), v/x\}$   
 $L\theta = \{P(f(\underline{y}, z), g(x, \underline{x}), b), P(f(\underline{y}, z), g(x, \underline{w}), h(1, z))\}$
  4.  $\theta = \{x/f(y, z), v/x, x/w\}$   
 $L\theta = \{P(f(\underline{y}, z), g(w, w), \underline{b}), P(f(\underline{y}, z), g(w, w), \underline{h(1, z)})\}$
  5.  $\theta = \{x/f(y, z), v/x, x/w, b/h(1, z)\}$   
 $L\theta = \{P(f(\underline{y}, z), g(w, w), h(1, z))\}$

## Aufgabe 4

a) Die Formeln in KNF:

- (1)  $\neg Be(x, GKI) \vee \neg Ge(x, Poker) \vee Fr(x)$
- (2)  $(\neg Fl(x) \vee Be(x, y)) \wedge (\neg In(x) \vee Be(x, y))$
- (3)  $\neg Be(x, y) \vee Te(x, f(x, y))$
- (4)  $\neg In(x) \vee Ge(x, Poker)$
- (5) & (6) sind bereits in KNF

Die Klauseln Mengenschreibweise mit umbenannten Variablen (nummeriert für die nächste Teilaufgabe):

- (1)  $\{\neg Be(x, GKI), \neg Ge(x, Poker), Fr(x)\}$
- (2)  $\{\neg Fl(a), Be(a, b)\}$
- (3)  $\{\neg In(c), Be(c, d)\}$
- (4)  $\{\neg Be(e, g), Te(e, f(e, g))\}$
- (5)  $\{\neg In(h), Ge(h, Poker)\}$
- (6)  $\{\neg Fl(O)\}$
- (7)  $\{In(O)\}$
- (8)  $\{Fl(S)\}$
- (9)  $\{\neg In(S)\}$

b) Um zu prüfen, wer froh ist, stellen wir folgende Formel auf:

$$\exists y(Fr(y))$$

Diese Formel drückt aus, dass es jemanden gibt, der froh ist. Wir wollen nun testen:

$$KB \models \exists y(Fr(y))$$

Um diese Inferenz mittels Resolution beweisen zu können, müssen wir die negierte Anfrage als Klausel zur Wissensbasis hinzufügen und einen Widerspruch herleiten (wir verwenden die Klauseln und Nummerierung aus 4 a) und fahren nun hier direkt mit der negierten Anfrage als Klausel fort):

$$(10)\{\neg Fr(y)\}$$

Resolution:

$$\begin{array}{ll} (11)\{\neg Be(y, GKI), \neg Ge(y, Poker)\} & \neg (1) \& (10), \{x/y\} \\ (12)\{\neg In(y), \neg Ge(y, Poker)\} & \neg (3) \& (11), \{x/y, d/Poker\} \\ (13)\{\neg In(y)\} & \neg (5) \& (12), \{h/y\} \\ (14)\{\} & \neg (7) \& (13), \{y/O\} \end{array}$$

Da wir mit unserer Anfrage einen Widerspruch herleiten konnten, haben wir somit gefolgert, dass es jemanden gibt, der froh ist. Wenn man die Substitutionen betrachtet, sieht man, dass es Olli ist (wegen der letzten Substitution  $\{y/O\}$  muss gelten  $Fr(O)$ ) und somit gilt auch:

$$KB \models \exists y(Fr(y))$$

c) Wie man in 4 a) sehen kann, lässt sich Formel (2) vom Aufgabenblatt in zwei Klauseln umformen. Somit können wir einfach zwei Regeln als definite Hornformeln aufstellen, die (2) vom Aufgabenblatt in unserer Hornklausel-Wissensbasis repräsentieren:

$$\begin{array}{l} Fl(x) \Rightarrow Be(x, y) \\ In(x) \Rightarrow Be(x, y) \end{array}$$

Die negativen Literale aus (5) und (6) können wir einfach ignorieren, da sie für die Inferenzregel, welche wir bei der Vorwärts- bzw. Rückwärtsverkettung benutzen (den generalisierten Modus Ponens), irrelevant sind. Denn wir können mit dieser Regel, die für definite Hornklausel-Wissensbasen vollständig ist, lediglich aus Fakten ('unnegiertem' Wissen) neues Wissen folgern. Also ergibt sich mit diesen Überlegungen insgesamt folgende Hornklausel-Wissensbasis (die Variablen haben wir für die Formeln paarweise disjunkt benannt):

$$\begin{array}{l} (1) Be(x, GKI) \wedge Ge(x, Poker) \Rightarrow Fr(x) \\ (2) Fl(y) \Rightarrow Be(y, z) \\ (3) In(a) \Rightarrow Be(a, b) \\ (4) Be(c, d) \Rightarrow Te(c, f(c, d)) \\ (5) In(e) \Rightarrow Ge(e, Poker) \\ (6) In(O) \\ (7) Fl(S) \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ll} (1)[Fr(O)] & \\ (2)[Be(O, GKI), Ge(O, Poker)] & \neg (1)\{x/GKI\} \\ (3)[Be(O, GKI), In(O)] & \neg (5)\{e/O\} \\ (4)[Be(O, GKI)] & \neg (6) \\ (5)[Fl(O)] & \neg (2)\{y/O, z/GKI\} \\ fail & \\ (5)[In(O)] & \neg (3)\{a/O, b/GKI\} \\ (6)[ ] & \neg (6) \end{array}$$

e) Wir möchten wieder

$$KB \models \exists y (Fr(y))$$

beweisen.

Wir führen für den Vorwärtsverkettungsbeweis die Nummerierung aus 4 c) fort und geben in jeder Iteration das neu hinzugewonnene Wissen und aus welchen Regeln und Fakten es gefolgert wurde inklusive der Substitutionen an:

1. Iteration:

$$\begin{array}{ll} (8) Be(O, b) & \vdash (3), (6), \{a/O\} \\ (9) Ge(O, Poker) & \vdash (5), (6), \{e/O\} \\ (10) Be(S, z) & \vdash (2), (7), \{y/S\} \end{array}$$

2. Iteration:

$$\begin{array}{ll} (11) Fr(O) & \vdash (1), (8), (9), \{x/O, b/GKI\} \\ (12) Te(O, f(O, b)) & \vdash (4), (8), \{c/O, d/b\} \\ (13) Te(S, f(O, z)) & \vdash (4), (10), \{c/S, d/z\} \end{array}$$

3. Iteration:

$$Fr(y)\{y/O\} \in \{(11), (12), (13)\}$$

Da wir das Ziel  $Fr(y)$  durch Unifikation mit (11) erreicht haben, terminiert der Algorithmus und gibt  $\{y/O\}$  zurück, also haben wir mittels Vorwärtsverkettung bewiesen, dass Olli froh ist.

## Aufgabe 5

Ursprüngliche Klauseln:

- (1)  $\{P(f(w)), Q(f(x))\}$
- (2)  $\{\neg P(f(1)), \neg P(y)\}$
- (3)  $\{Q(g(z)), Q(g(f(f(z))))\}$
- (4)  $\{\neg Q(f(g(1))), \neg Q(g(f(v))), \neg Q(g(v))\}$

Resolutionsbeweis:

$$\begin{array}{ll} (5) \{\neg P(y), Q(f(x))\} & \vdash (1) \& (2), \{w/1\} \\ (6) \{Q(f(x))\} & \vdash (1) \& (5), \{y/f(w)\} \\ (7) \{\neg Q(f(g(1))), \neg Q(g(f(a))), Q(g(f(f(a))))\} & \vdash (3) \& (4), \{z/v, v/a\} \\ (8) \{\neg Q(f(g(1))), \neg Q(g(f(b)))\} & \vdash (4) \& (7), \{v/f(a), a/b\} \\ (9) \{\neg Q(g(f(b)))\} & \vdash (6) \& (8), \{x/g(1)\} \\ (10) \{Q(g(z))\} & \vdash (3) \& (9), \{b/f(z)\} \\ (11) \{\} & \vdash (9) \& (10), \{z/f(b)\} \end{array}$$