Grundlagen der künstlichen Intelligenz: Hausaufgabe 5

Tom Nick - 340528
Niklas Gebauer - 340942
Leonard Witte - 341457
Johannes Herrmann - 341091

Aufgabe 1

Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} I_c &:= \text{Das Auto hat die Farbe } c \in \{B, G\} \\ E_c &:= \text{Das Auto erscheint in der Farbe } c \in \{B, G\} \end{aligned}$$

Aus dem Text kennen wir folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(E_B \mid I_B) &= 0.7 \\ P(E_G \mid I_B) &= 0.3 \end{aligned}$$

a.) Nach Bayes wäre die Rechnung:

$$P(I_B \mid E_B) = \frac{P(E_B \mid P_B) \cdot P(I_B)}{P(E_B)} \tag{1}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Wahrscheinlichkeit für $P(I_B)$ bzw. $P(I_G)$ benötigt werden, die wir aber nicht kennen, somit können wir mit den derzeitigen Informationen nicht die wahrscheinlichste Farbe des Autos berechnen.

b.) Nun kennen wir:

$$\begin{aligned} P(I_B) &= 0.2 \\ P(I_G) &= 0.8 \end{aligned}$$

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} P(I_B \mid E_B) &= \frac{P(E_B \mid P_B) \cdot P(I_B)}{P(E_B \mid I_B) \cdot P(I_B) + P(E_B \mid I_G) \cdot P(I_G)} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} \\ &= \frac{0.14}{0.14 + 0.24} = \frac{0.14}{0.38} = 0.368 \end{aligned}$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit $P(I_G \mid E_B)$ ist damit 0.632, womit es fast doppelt so Wahrscheinlich ist, dass die Person ein Grünes, anstatt ein Blaues Taxi gesehen hatte.

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Sei

$$\begin{aligned} X &:= \text{Das Produkt der Augenzahlen der zwei Würfel} \\ Y &:= \text{Die Augenzahl eines Würfel} \end{aligned}$$

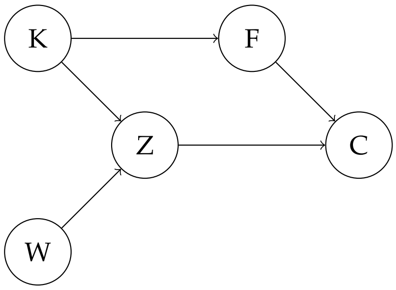
Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert von X gleich dem Einsatz ist, dann ist der Gewinn/Verlust der Spieler 0euro. Es ist offensichtlich das X sich ergibt, wenn die Erwartungswerte der Augenzahl beider Würfel multipliziert wird, somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y) \cdot E(Y) \\ E(X) &= 3.5 \cdot 3.5 \\ E(X) &= 12.25 \end{aligned}$$

Also muss der Einsatz 12.25euro betragen, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 4

a.)



b.)

$$
\begin{aligned}
P(C=w|K=w,Z=f) &= \sum_{y\in\{w,f\}} (P(C=w|F=y,Z=f)\cdot P(F=y|K=w)) \\
&= P(C=w|F=w,Z=f)\cdot P(F=w|K=w) + P(C=w|F=f,Z=f)\cdot P(F=f|K=w) \\
&= 0,9\cdot 0,6 + 0,1\cdot 0,4 = 0,58
\end{aligned}
$$

c.)

$$
\begin{aligned}
P(K=w|F=w) &= \frac{P(K=w,F=w)}{P(F=w)} \\
&= \frac{P(K=w)\cdot P(F=w|K=w)}{\sum_{k\in\{w,f\}} P(F=w|K=k)} \\
&= \frac{P(K=w)\cdot P(F=w|K=w)}{P(F=w|K=w)+P(F=w|K=f)} \\
&= \frac{0,2\cdot 0,6}{0,6+0,1} \approx 0,1714
\end{aligned}
$$

d.)