Stochastik für Informatiker - Hausaufgabe 1

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

1. Aufgabe

a)

$$\Omega := \{(w_1, w_2) \mid w_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \in \{1,2\}\}$$
$$\mathbb{P}(x) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

b) i)

$$i = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid w_1 + w_2 \leq 5\}$$
$$\mathbb{P}(i) = \frac{10}{36}$$

ii)

$$ii = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid w_1 \bmod 2 = 1 \wedge w_2 \bmod 2 = 1\}$$
$$\mathbb{P}(i) = \frac{1}{4}$$

iii)

$$iii = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid (w_1 + w_2) \bmod 2 = 1\}$$
$$\mathbb{P}(i) = \frac{1}{2}$$

iv)

$$i = \{(w_1, w_2) \in \Omega \mid (w_1 * w_2) \bmod 2 = 0\}$$
$$\mathbb{P}(i) = \frac{3}{4}$$

2. Aufgabe

(i)

$$A_i := \Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

(ii)

$$A_{ii} := \overline{A_i}$$

(iii)

$$A_{iii} := (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap (\overline{A_1} \cup \overline{A_3}) \cap (\overline{A_2} \cup \overline{A_3})$$

(iv)

$$A_{iv} = A_{iii} \setminus A_i$$

(v)

$$A_v = \Omega \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

(vi)

$$A_v \setminus A_{iii}$$

3. Aufgabe

a) Die Anzahl der *verschiedenen* Paare einer Farbe beträgt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$. Somit gibt es also $n \cdot (n+1)$ verschiedene Möglichkeiten zwei Kugeln gleicher Farbe zu ziehen, bei jeweils n Kuglen von jeder Farbe. Die Anzahl allgemein möglicher Züge kann berechnet werden mit: $\binom{n}{2}$, also beträgt die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{n(n+1)}{\binom{2n}{2}} = \frac{n(n+1)}{\frac{2n!}{2! \cdot (2n-2)!}} = \frac{n+1}{2n-1}$$

b) Wenn man nicht zwei gleiche Kugeln zieht, zieht man 2 verschiedenfarbige, also ist die Wahrscheinlichkeit dafür:

$$1 - \frac{n+1}{2n-1}$$

4. Aufgabe

a) **Lemma:**

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Beweis: Es gilt $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Also gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B))$. Da $A \setminus B$ und $A \cap B$ offensichtlich disjunkt sind, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \setminus B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Nach dem Skript auf S.2 gilt:

$$\begin{aligned} &\text{genau eines der E. von } A \text{ oder } B \text{ tritt ein } = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &\Rightarrow \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) \\
&\quad + \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) \\
&\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3, i \neq j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$