

# STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER - HAUSAUFGABE 8

Tom Nick 342225  
Alexander Mühle 339497  
Maximilian Bachl 341455

## Aufgabe 1

1.

$$\Omega = \{(Z), (K, Z), (K, K, Z), (K, K, K)\}$$

Es wird solange geworfen, bis das erste mal Zahl oder  $3 \times$  Kopf kommt, also ist  $\mathbb{P}$  definiert als:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{(Z)\}) &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(\{(K, Z)\}) &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(\{(K, K, Z)\}) &= \frac{1}{8} \\ \mathbb{P}(\{(K, K, K)\}) &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Also ist der Erwartungswert für die benötigten Züge  $X$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) \\ \mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} \\ \mathbb{E}(X) &= 1\frac{3}{4}\end{aligned}$$

2.  $U$  bezeichnet die Augenzahl.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{U}\right) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{7}$$

## Aufgabe 2

1.  $X$  ist eine zum Parameter  $\lambda$  Poisson-verteilte Zufallsvariable,  $u \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{uX}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^u \lambda)^k}{k!} = e^{e^u \lambda - \lambda}\end{aligned}$$

2. Sei  $X$  eine zum Parameter  $\lambda$  Poisson-verteilte Zufallsvariable.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \\ &= (e^{\lambda} - 1) \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda})\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Um einen fairen Spielbetrag berechnen zu können, müssen wir zuerst die erwarteten Gewinne/Verluste berechnen. Sei  $X$  der zu erwartene Gewinn der Spielerin.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} - \left(2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}\right) \\ &= 3 - 2 = 1\end{aligned}$$

Also müsste der Einsatz des Spiels 1 € betragen, damit es fair für beide Parteien ist.

### Aufgabe 4

Die Biene hat  $n$ -mal die Möglichkeit zu springen. Bei  $p$  springt sie zu einem höheren Wert, bei  $q$  zu einem kleineren.

Dies ist eine Binomialverteilung, somit beträgt der Erwartungswert der Position der Biene nach  $N$  Sprüngen:

$$\mathbb{E}(X_n) = n \cdot (p - q)$$