Stochastik für Informatiker - Hausaufgabe 8

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

1.

$$\Omega = \{(Z), (K, Z), (K, K, Z), (K, K, K)\}$$

Es wird solange geworfen, bis das erste mal Zahl oder 3× Kopf kommt, also ist $\mathbb{P}$ definiert als:

$$\mathbb{P}(\{(Z)\}) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(\{(K, Z)\} = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(\{(K, K, Z)\} = \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{P}(\{K, K, K)\} = \frac{1}{8}$$

Also ist der Erwartungswert für die benötigten Züge X:

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3)$$
$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{E}(X) = 1\frac{3}{4}$$

2. U bezeichnet die Augenzahl.

$$\mathbb{E}(\frac{1}{U}) = \sum_{i=1}^{6} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{7}$$

Aufgabe 2

1. X ist eine zum Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable, $u \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}(e^{uX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^u \lambda)^k}{k!} = e^{e^u \lambda - \lambda}$$

2. Sei X eine zum Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \\
&= (e^{\lambda} - 1) \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \\
&= (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda}) \\
&= \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Um einen fairen Spielbetrag berechnen zu können, müssen wir zuerst die erwarteten Gewinne/Verluste berechnen. Sei X der zu erwartene Gewinn der Spielerin.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} - \left(2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}\right) \\
&= 3 - 2 = 1
\end{aligned}
$$

Also müsste der Einsatz des Spiels 1 € betragen, damit es fair für beide Parteien ist.

Aufgabe 4

Sei n_1 die Anzahl der Sprünge nach links und n_2 die nach rechts. Es gilt $n_1 + n_2 = N$. Mit der Wahrscheinlichkeit p springt sie nach rechts und mit $p - 1 = q$ nach links.

Es gibt $\binom{N}{n_1}$ Möglichkeiten um exakt n_1 Schritte nach links und $\binom{N}{n_2}$ Möglichkeiten um n_2 nach rechts zu springen. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit um eine bestimmte geordnete Sequenz von n_1 und n_2 Sprüngen ist demnach q^{n_1} bzw. p^{n_2}.

Dies ist also eine Binomialverteilung, somit beträgt der Erwartungswert der Position der Biene noch N Sprüngen:

$$\mathbb{E}(X_n) = n_2 \cdot p - n_1 \cdot q$$