Stochastik für Informatiker - Hausaufgabe 9

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

Verteilung von X und Y

X/Y	4	2	$\mathbb{P}(Y=y)$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$	1

(i) $\mathbb{E}(X) = 2\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) + 5\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) + 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{163}{12}$
$\mathbb{E}(X^2) = 4\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) + 25\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) + 9\cdot\frac{1}{6} = \frac{41}{12}$
$\mathbb{E}(Y) = 4\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}) + 2\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) = \frac{19}{6}$
$\mathbb{E}(Y^2) = 16\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}) + 4\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) = 11$

(ii) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{163}{12} - \frac{1681}{144} = \frac{275}{144} \approx 1.91$
$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 11 - \frac{361}{36} = \frac{35}{36} \approx 0.97$

(iii) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = 8\cdot\frac{1}{4} + 20\cdot\frac{1}{6} + 12\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{1}{4} = 10\frac{1}{2} - \frac{163}{12}\cdot\frac{19}{6} = -\frac{2341}{72} \approx -23$

(iv) $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\cdot\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = -\frac{23}{5\cdot\sqrt{385}} \approx -0.23$

Aufgabe 2

(i) Es seien X_1, X_2 unkorrelierte Zufallsvariablen und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Durch die unkorreliertheit gilt $Cov(X_1, X_2) = 0$, die meisten anderen Schritte sind durch die Linearität von $\mathbb{E}$ zu erklären.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX_1 + bX_2 + c) &= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 + c - \mathbb{E}(aX_1 + bX_2 + c))^2] \\
&= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 + c - \mathbb{E}(aX_1) - \mathbb{E}(bX_2) - \mathbb{E}(c))^2] \\
&= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 + c - \mathbb{E}(aX_1) - \mathbb{E}(bX_2) - c)^2] \\
&= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 - a\mathbb{E}(X_1) - b\mathbb{E}(X_2))^2] \\
&= \mathbb{E}[(a(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) + b(X_2 - \mathbb{E}(X_2)))^2] \\
&= \mathbb{E}[a^2(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 + b(X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2 + 2ab(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] \\
&= \mathbb{E}[a^2(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] + \mathbb{E}[b^2(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] - \mathbb{E}[2ab(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] \\
&= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2) - \mathbb{E}[2ab(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] \\
&= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2) + 2abCov(X_1, X_2) \\
&= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2)
\end{aligned}$$

(ii) Es seien X_1, X_2, X_3, X_4 unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = a$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_1 + X_2)X_3 + (X_1 + X_4)^2) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) + \mathbb{E}(2X_1X_4) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_4) \\
&= aa + aa + 2aa + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) \\
&= 4a^2 + \mathbb{V}(X_1) - (\mathbb{E}(X_1))^2 + \mathbb{V}(X_4) - (\mathbb{E}(X_4))^2 \\
&= 4a^2 + \sigma - a^2 + \sigma - a^2 \\
&= 2a^2 + 2\sigma
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(i) $\mathbb{E}(X_k) = p_k$
$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(p_k)$

(ii) $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$ Dies gilt, da die Variablen unabhängig und somit auch unkorelliert sind.
$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) - (\mathbb{E}(X_k))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k - p_k^2$

Aufgabe 4

(i) Abhängigkeit:
zu zeigen: $\mathbb{P}(|X - Y|) \cdot \mathbb{P}(X + Y) = \mathbb{P}(|X - Y|) \cap \mathbb{P}(X + Y)$
Gegenbeispiel:
Sei X = 1 und Y = 0 $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$

(ii) Korrelation:
$Cov(X + Y, |X - Y|) = \mathbb{E}((X + Y) \cdot |X - Y|) - \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(|X - Y|) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow$ unkorreliert