STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER - HAUSAUFGABE 9

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

Verteilung von X und Y

X/Y	4	2	$\mathbb{P}(Y=y)$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$	1

(i) $\mathbb{E}(X) = 2\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) + 5\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) + 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{163}{12}$
$\mathbb{E}(X^2) = 4\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) + 25\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) + 9\cdot\frac{1}{6} = \frac{41}{12}$
$\mathbb{E}(Y) = 4\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}) + 2\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) = \frac{19}{6}$
$\mathbb{E}(Y^2) = 16\cdot(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}) + 4\cdot(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}) = 11$

(ii) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{163}{12} - \frac{1681}{144} = \frac{275}{144} \approx 1.91$
$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 11 - \frac{361}{36} = \frac{35}{36} \approx 0.97$

(iii) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = 8\cdot\frac{1}{4} + 20\cdot\frac{1}{6} + 12\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{1}{4} = 10\frac{1}{2} - \frac{163}{12}\cdot\frac{19}{6} = -\frac{2341}{72} \approx -23$

(iv) $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\cdot\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = -\frac{23}{5\cdot\sqrt{385}} \approx -0.23$

Aufgabe 2

(i) Es seien X_1, X_2 unkorrelierte Zufallsvariablen und $a,b,c \in \mathbb{R}$. Durch die unkorreliertheit gilt $Cov(X_1,X_2) = 0$, die meisten anderen Schritte sind durch die Linearität von $\mathbb{E}$ zu erklären.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX_1+bX_2+c) &= \mathbb{E}[(aX_1+bX_2+c-\mathbb{E}(aX_1+bX_2+c))^2]\\
&= \mathbb{E}[(aX_1+bX_2+c-\mathbb{E}(aX_1)-\mathbb{E}(bX_2)-\mathbb{E}(c))^2]\\
&= \mathbb{E}[(aX_1+bX_2+c-\mathbb{E}(aX_1)-\mathbb{E}(bX_2)-c)^2]\\
&= \mathbb{E}[(aX_1+bX_2-a\mathbb{E}(X_1)-b\mathbb{E}(X_2))^2]\\
&= \mathbb{E}[(a(X_1-\mathbb{E}(X_1))+b(X_2-\mathbb{E}(X_2)))^2]\\
&= \mathbb{E}[a^2(X_1-\mathbb{E}(X_1))^2+b(X_2-\mathbb{E}(X_2))^2+2ab(X_1-\mathbb{E}(X_1))(X_2-\mathbb{E}(X_2))]\\
&= \mathbb{E}[a^2(X_1-\mathbb{E}(X_1))^2]+\mathbb{E}[b^2(X_2-\mathbb{E}(X_2))]-\mathbb{E}[2ab(X_1-\mathbb{E}(X_1))(X_2-\mathbb{E}(X_2))]\\
&= a^2\mathbb{V}(X_1)+b^2\mathbb{V}(X_2)-\mathbb{E}[2ab(X_1-\mathbb{E}(X_1))(X_2-\mathbb{E}(X_2))]\\
&= a^2\mathbb{V}(X_1)+b^2\mathbb{V}(X_2)+2abCov(X_1,X_2)\\
&= a^2\mathbb{V}(X_1)+b^2\mathbb{V}(X_2)
\end{aligned}$$

(ii) Es seien X_1, X_2, X_3, X_4 unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = a$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_1 + X_2)X_3 + (X_1 + X_4)^2) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) + \mathbb{E}(2X_1X_4) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_4) \\
&= aa + aa + 2aa + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) \\
&= 4a^2 + \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 + \mathbb{V}(X_4) + (\mathbb{E}(X_4))^2 \\
&= 4a^2 + \sigma + a^2 + \sigma + a^2 \\
&= 6a^2 + 2\sigma
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(i) $\mathbb{E}(X_k) = p_k$

$\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(p_k)$

(ii) $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$ Dies gilt, da die Variablen unabhängig und somit auch unkorelliert sind.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) - (\mathbb{E}(X_k))^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k - p_k^2$

Aufgabe 4

(i) Abhängigkeit:

zu zeigen: $\mathbb{P}(|X-Y|) \cdot \mathbb{P}(X+Y) = \mathbb{P}(|X-Y|) \cap \mathbb{P}(X+Y)$

Gegenbeispiel:

Sei X = 1 und Y = 0 $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$

(ii) Korrelation:

$Cov(X+Y, |X-Y|) = \mathbb{E}((X+Y) \cdot |X-Y|) - \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(|X-Y|) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow$ unkorreliert