Stochastik für Informatiker - Hausaufgabe 4

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

Karten $:= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$
$\Omega := \{C_x, P_x, K_y, H_z \mid x \in$ **Karten**$, y \in$ **Karten** $\setminus \{K\}, z \in ($**Karten** $\setminus \{K\}) \cup \{K1, K2\}\}$
Caro Karten $:= \{C_x \mid x \in$ **Karten**$\}$
Alle roten Karten $:=$ **Caro Karten** $\cup \{H_x \mid x \in ($**Karten** $\setminus \{K\}) \cup \{K1, K2\}\}$

1. A und B sind abhängig:

$$\begin{aligned}(A \cap B) &= \mathbb{P}(\{H_{K1}, H_{K2}\}) = \frac{3}{52} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(\{H_{K1}, H_{K2}, C_K, P_K\}) \cdot \mathbb{P}(\textbf{Alle roten Karten}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{27}{52} = \frac{27}{676}\end{aligned}$$

2. B und C sind abhängig:

$$\begin{aligned}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\textbf{Caro Karten}) \\ &= \frac{13}{52} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(\textbf{Caro Karten}) \cdot \mathbb{P}(\textbf{Alle roten Karten}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{27}{52}\end{aligned}$$

3. A und C sind unabhängig:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(\{C_K\}) \\ &= \frac{1}{52} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{H_{K1}, H_{K2}, C_K, P_K\}) \cdot \mathbb{P}(\textbf{Caro Karten}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}\end{aligned}$$

Da gezeigt wurde, dass A und B abhängig sind, B und C auch, aber A und C nicht, folgert aus der Abhängigkeit von A, B und B,C nicht die Abhängikeit von A und C.

Aufgabe 2

1. A_i und B_i abhängig?
   - A_1 und B_1:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap B_1) &= \mathbb{P}(\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}) = \frac{4}{36} \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\{(1, x) \mid x \in \{1..6\}\}) \cdot \mathbb{P}(\{(x, y) \mid x, y \in \{1..6\}, y \geq 3\}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36} \\ &\Rightarrow \textbf{unabhängig!}\end{aligned}$$

- A_2 und B_2:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \cap B_2) &= \mathbb{P}(\{(5,5),(6,5)\}) = \frac{2}{36}\\ &\neq \mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(B_2)\\ &= \mathbb{P}(\{(x,y) \mid x,y \in \{1..6\}, x+y \geq 10\})\cdot\mathbb{P}(\{(x,5) \mid x \in \{1..6\}\})\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}\\ &\Rightarrow \textbf{abhängig!}\end{aligned}$$

- A_3 und B_3:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3 \cap B_3) &= \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,1),(4,3),(5,2),(6,1),(6,3)\}) = \frac{9}{36}\\ &= \mathbb{P}(A_3)\cdot\mathbb{P}(B_3)\\ &= \mathbb{P}(\{(x,y) \mid x,y \in \{1..6\}, (x+y) \bmod 2 = 1\})\cdot\mathbb{P}(\{(x,y) \mid x,y \in \{1..6\}, y \leq 3\})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\\ &\Rightarrow \textbf{unabhängig!}\end{aligned}$$

2. Annahme: A und B sind unabhängig, d.h. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^C \cap B) &= \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))\\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A))\\ &= \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A^C)\\ \mathbb{P}(A^C \cap B^C) &= \mathbb{P}(A^C \setminus (A^C \cap B))\\ &= \mathbb{P}(A^C) - \mathbb{P}(A^C \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A^C) - \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A^C)\\ &= \mathbb{P}(A^C)\cdot(1-\mathbb{P}(B))\\ &= \mathbb{P}(A^C)\cdot\mathbb{P}(B^C)\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es gibt 4 Möglichkeiten, die Kugeln zu ziehen, nämlich: RRR, RSR, SSR und SRR, die im nachfolgenden dargestellt werden. Man muss nur darauf achten, dass man die Kugeln, nach jedem Zug in die andere Urne legt.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{letzte Kugel aus } U_1 \text{ ist rot}) &= \frac{r_1}{r_1+s_1}\frac{r_2+1}{r_2+s_2+1}\frac{r_1}{r_1+s_1}\\ &+ \frac{r_1}{r_1+s_1}\frac{s_2}{r_2+s_2+1}\frac{r_1-1}{r_1+s_1}\\ &+ \frac{s_1}{r_1+s_1}\frac{s_2+1}{r_2+s_2+1}\frac{r_1-1}{r_1+s_1}\\ &+ \frac{s_1}{r_1+s_1}\frac{r_2}{r_2+s_2+1}\frac{r_1}{r_1+s_1}\end{aligned}$$