

STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER - HAUSAUFGABE 9

Tom Nick 342225
 Alexander Mühle 339497
 Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

	X/Y	4	2	P(Y = y)
Verteilung von X und Y	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$
	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$
	3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	P(X = x)	$\frac{1}{4} + \frac{2}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	1

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{E}(X) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{163}{12} \\ \mathbb{E}(X^2) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + 25 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{41}{12} \\ \mathbb{E}(Y) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{6} \\ \mathbb{E}(Y^2) &= 16 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{163}{12} - \frac{1681}{144} = \frac{275}{144} \approx 1.91 \\ \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 11 - \frac{361}{36} = \frac{35}{36} \approx 0.97 \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 8 \cdot \frac{1}{4} + 20 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{4} = 10\frac{1}{2} - \frac{163}{12} \cdot \frac{19}{6} = -\frac{2341}{72} \approx -23$$

$$\text{(iv)} \quad \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)} \cdot \sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = -\frac{23}{5 \cdot \sqrt{385}} \approx -0.23$$

Aufgabe 2

- (i) Es seien X_1, X_2 unkorrelierte Zufallsvariablen und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Durch die unkorreliertheit gilt $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$, die meisten anderen Schritte sind durch die Linearität von \mathbb{E} zu erklären.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(aX_1 + bX_2 + c) &= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 + c - \mathbb{E}(aX_1 + bX_2 + c))^2] \\ &= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 + c - \mathbb{E}(aX_1) - \mathbb{E}(bX_2) - \mathbb{E}(c))^2] \\ &= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 + c - \mathbb{E}(aX_1) - \mathbb{E}(bX_2) - c)^2] \\ &= \mathbb{E}[(aX_1 + bX_2 - a\mathbb{E}(X_1) - b\mathbb{E}(X_2))^2] \\ &= \mathbb{E}[(a(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) + b(X_2 - \mathbb{E}(X_2)))^2] \\ &= \mathbb{E}[a^2(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 + b^2(X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2 + 2ab(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] \\ &= \mathbb{E}[a^2(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] + \mathbb{E}[b^2(X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2] - \mathbb{E}[2ab(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] \\ &= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2) - \mathbb{E}[2ab(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))] \\ &= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2) + 2ab\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2) \end{aligned}$$

(ii) Es seien X_1, X_2, X_3, X_4 unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = a$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}((X_1 + X_2)X_3 + (X_1 + X_4)^2) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) + \mathbb{E}(2X_1X_4) \\
 &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_4) \\
 &= aa + aa + 2aa + \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_4^2) \\
 &= 4a^2 + \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 + \mathbb{V}(X_4) + (\mathbb{E}(X_4))^2 \\
 &= 4a^2 + \sigma^2 + a^2 + \sigma^2 + a^2 \\
 &= 6a^2 + 2\sigma^2
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(i) $\mathbb{E}(X_k) = p_k$

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(p_k)$$

(ii) $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$ Dies gilt, da die Variablen unabhängig und somit auch unkorreliert sind.

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) - (\mathbb{E}(X_k))^2 = \sum_{k=1}^n p_k - p_k^2$$

Aufgabe 4

(i) Abhängigkeit:

$$\text{zu zeigen: } \mathbb{P}(|X - Y|) \cdot \mathbb{P}(X + Y) = \mathbb{P}(|X - Y|) \cap \mathbb{P}(X + Y)$$

Gegenbeispiel:

$$\text{Sei } X = 1 \text{ und } Y = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

(ii) Korrelation:

$$\text{Cov}(X + Y, |X - Y|) = \mathbb{E}((X + Y) \cdot |X - Y|) - \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(|X - Y|) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \text{unkorreliert}$$