Stochastik für Informatiker - Hausaufgabe 7

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

(i) Die Wahrscheinlichkeit, dass wir die ersten $n-1$, wobei $n \in \{0 \dots N\}$ mal nicht Schwarz ziehen und am Ende eine Schwarze:

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{M}{M+N} \right) \frac{M}{M+N} = \left(1 - \frac{M}{M+N} \right)^{n-1} \frac{M}{M+N}$$

Das Ganze ist eine andere Schreibweise der geom. Verteilung.

(ii) Wir ziehen die Wahrscheinlichkeiten aus der vorigen Aufgabe bis exklusive k, wobei $k \in \{0 \dots N\}$ von 1 ab, weil der Text *mindestens* besagt.

$$\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)$$

Aufgabe 2

(i) X ist die Anzahl an Stochastik-Büchern unter 4 gezogenen Büchern.

$$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{\binom{13}{4}\binom{12}{0}}{\binom{25}{4}} = \frac{13}{230}$$

(ii) Y ist die Anzahl an Analysis-Büchern unter 4 gezogenen Büchern.

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{\binom{12}{4}\binom{13}{0}}{\binom{25}{4}} = \frac{9}{230}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y = 4) \\
&= 1 - \frac{13}{230} \\
&= 1 - \frac{9}{230} \\
&= \frac{221}{230}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

X ist die Anzahl an unbrauchbaren Birnen in einer Lieferung.

Exakt mithilfe der Binomialverteilung.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \binom{500}{0} 0.001^0 0.999^5 00 - \binom{500}{1} 0.001^1 0.999^4 99 \\ &\approx 0.09\end{aligned}$$

Und nun mithilfe der Poisson-Annäherung:

$\lambda = 500 \cdot 0.001$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \frac{0.5^0}{0!} e^{-0.5} - \frac{0.5^1}{1!} e^{-0.5} \\ &\approx 0.09\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aus der Aufgabenstellung wissen wir:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

Dann wissen wir auch:

$$P(X + Y = n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} \cdot e^{-\mu}$$

Da ja nach Aufgabenstellung $X + Y = n$ und n fest ist folgt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}P(X = k | X + Y = n) &= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-\mu}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} \cdot e^{-\mu}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i \mu^{n-i}}{i!(n-i)!}} \\ &= \frac{n! \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!}}{\sum_{i=0}^{n} n! \frac{\lambda^i \mu^{n-i}}{i!(n-i)!}} \\ &= \frac{\binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}}{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^i \mu^{n-i}}\end{aligned}$$

mithilfe des binom. Lehrsatzes

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\binom{n}{k}\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Somit sehen wir, dass die Binomialverteilung die Parameter $n = n$, wobei n ja fest und gegeben ist, und $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ hat.