

STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER - HAUSAUFGABE 9

Tom Nick 342225
 Alexander Mühle 339497
 Maximilian Bachl 341455

Aufgabe 1

| | | | | |
|------------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | X/Y | 4 | 2 | $\mathbb{P}(Y = y)$ |
| Verteilung von X und Y | 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ |
| | 5 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ |
| | 3 | $\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| | $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{4} + \frac{2}{6}$ | $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ | 1 |

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{E}(X) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{163}{12} \\ \mathbb{E}(X^2) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + 25 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{41}{12} \\ \mathbb{E}(Y) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{6} \\ \mathbb{E}(Y^2) &= 16 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{163}{12} - \frac{1681}{144} = \frac{275}{144} \approx 1.91 \\ \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 11 - \frac{361}{36} = \frac{35}{36} \approx 0.97 \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 8 \cdot \frac{1}{4} + 20 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{4} = 10\frac{1}{2} - \frac{163}{12} \cdot \frac{19}{6} = -\frac{2341}{72} \approx -23$$

$$\text{(iv)} \quad \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)} \cdot \sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = -\frac{23}{5 \cdot \sqrt{385}} \approx -0.23$$

Aufgabe 2

(i)

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{E}(X_k) &= p_k \\ \mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(p_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathbb{V}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \text{ Dies gilt, da die Variablen unabhängig und somit auch unkorreliert sind.} \\ \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) - (\mathbb{E}(X_k))^2 = \sum_{k=1}^n p_k - p_k^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(i) Abhängigkeit:

zu zeigen: $\mathbb{P}(|X - Y|) \cdot \mathbb{P}(X + Y) = \mathbb{P}(|X - Y|) \cap \mathbb{P}(X + Y)$

Gegenbeispiel:

Sei $X = 1$ und $Y = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$

(ii) Korrelation:

$Cov(X + Y, |X - Y|) = \mathbb{E}((X + Y) \cdot |X - Y|) - \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(|X - Y|) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \text{unkorreliert}$