

# STOCHASTIK FÜR INFORMATIKER - HAUSAUFGABE 7

Tom Nick 342225  
Alexander Mühle 339497  
Maximilian Bachl 341455

## Aufgabe 1

- (i) Die Wahrscheinlichkeit, dass wir die ersten  $n - 1$ , wobei  $n \in \{0 \dots N\}$  mal nicht Schwarz ziehen und am Ende eine Schwarze:

$$\mathbb{P}(X = n) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{M}{M+N} \right) \frac{M}{M+N} = \left( 1 - \frac{M}{M+N} \right)^{n-1} \frac{M}{M+N}$$

Das Ganze ist eine andere Schreibweise der geom. Verteilung.

- (ii) Wir ziehen die Wahrscheinlichkeiten aus der vorigen Aufgabe bis exklusive  $k$ , wobei  $k \in \{0 \dots N\}$  von 1 ab, weil der Text *mindestens* besagt.

$$\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)$$

## Aufgabe 2

- (i)  $X$  ist die Anzahl an Stochastik-Büchern unter 4 gezogenen Büchern.

$$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{\binom{13}{4} \binom{12}{0}}{\binom{25}{4}} = \frac{13}{230}$$

- (ii)  $Y$  ist die Anzahl an Analysis-Büchern unter 4 gezogenen Büchern.

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{\binom{12}{4} \binom{13}{0}}{\binom{25}{4}} = \frac{9}{230}$$

- (iii)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y = 4) \\ &= 1 - \frac{13}{230} \\ &= 1 - \frac{9}{230} \\ &= \frac{221}{230} \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

$X$  ist die Anzahl an unbrauchbaren Birnen in einer Lieferung.

Exakt mithilfe der Binomialverteilung.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \binom{500}{0} 0.001^0 0.999^{500} - \binom{500}{1} 0.001^1 0.999^{499} \\ &\approx 0.09\end{aligned}$$

Und nun mithilfe der Poisson-Annäherung:

$$\lambda = 500 \cdot 0.001$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \frac{0.5^0}{0!} e^{-0.5} - \frac{0.5^1}{1!} e^{-0.5} \\ &\approx 0.09\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

Aus der Aufgabenstellung wissen wir:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

Dann wissen wir auch:

$$P(X + Y = n) = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} \cdot e^{-\mu}$$

Da ja nach Aufgabenstellung  $X + Y = n$  und  $n$  fest ist folgt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}P(X = k | X + Y = n) &= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-\mu}}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} \cdot e^{-\mu}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i \mu^{n-i}}{i!(n-i)!}}\end{aligned}$$