Stochastik für Informatiker - Hausaufgabe 11

Tom Nick	342225
Alexander Mühle	339497
Maximilian Bachl	341455

Aufgabe 1

1.
$$\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < \frac{1}{2} \vee X > \frac{2}{3}) &= \mathbb{P}(X < \frac{1}{2}) + \mathbb{P}(\frac{2}{3} < X)\\ &= \mathbb{P}(X < \frac{1}{2}) + (\mathbb{P}(X < 1) - \mathbb{P}(X < \frac{2}{3})\\ &= F(\frac{1}{2}) + (1 - F(\frac{2}{3}))\\ &= \frac{1}{2} + (1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

2. $p \in (0,1)$ mit der Zufallsvariable X, wobei $\mathbb{P}(X = 1) = p)$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Somit ist X *fast* Bernoulli verteilt, womit gilt:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 - p & \text{falls } t \in [0,1] \\ 1 & \text{falls } t \geq 1 \end{cases}$$

3. $n \in \mathbb{N}$, X ist diskret verteilt auf der Menge $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$.

$$F_X(t) = \frac{1}{n}$$

Aufgabe 2

Die Invariante der Uebergangsmatrix P ist der Eigenvektor von P zum Eigenwert 1. Wir benutzen die *Standardalgorhithmus* zum berechnen des Eigenwerts.

1. Da wir den Eigenvektor zum Eigenwert 1 berechen, muessen wir die Einheitsmatrix vom P subtrahieren.

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} - I^3 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5 \end{pmatrix}$$

2. Die Matrix in ZSF bringen.

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt das LGS:

$$
\begin{aligned}
\pi(1) - \pi(3) = 0 \Leftrightarrow \pi(1) &= \pi(3) \\
\pi(2) - \pi(3) = 0 \Leftrightarrow \pi(2) &= \pi(3) \\
\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) &= 1
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{3} = \pi(1) = \pi(2) = \pi(3)$$

Somit ist die Invariante Verteilung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{11}{30} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Da stimmt etwas nicht, ich habe die Rechnung per Hand und mit Wolfram-Alpha überprüft. Es gibt also keine Invariante :(.

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N,1} & \dots & p_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} p_{1,j} \cdot \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{N} p_{N,j} \cdot \frac{1}{N} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} p_{1,j} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} p_{N,j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \cdot 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

1. .

2.
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3.
$$P^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir besitzen hier genau den in Aufgabe 3 beschriebenen Fall, da $N = 5$ ist die Invariante Verteilung gegeben durch:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Probe:
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

4. Gar keine, da:
$$P^5 = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 & 5 & 10 \\ 10 & 2 & 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 2 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 & 2 & 10 \\ 10 & 5 & 5 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$