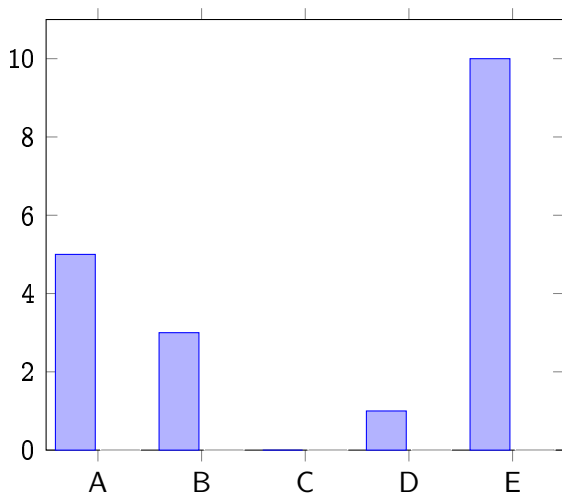


# 112 臺南一中學科能力競賽校內複選

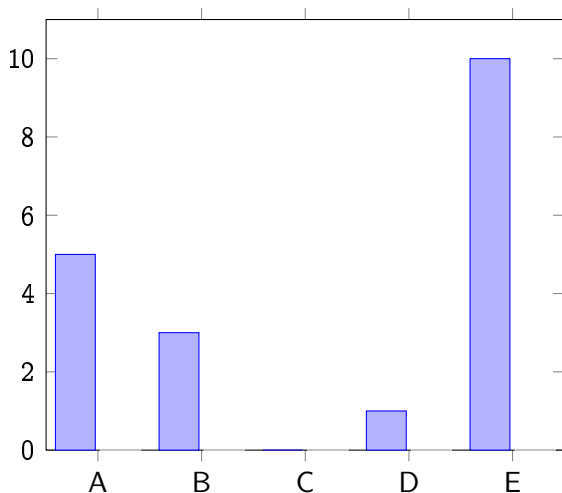
題解

Sep 28 2023

## Overview – 預期解出人數



## Overview – 實際解出人數



# Overview

- 1 A 圖論 + 一些 case
- 2 B 資料結構
- 3 C 數學
- 4 D DP
- 5 E 簽到題

1 E. 宗教戰爭 (religion)

2 A. 網路連線 (connection)

3 B.

4 D. 森林道路 (pathway)

5 C. 老舊鍵盤 (keyboard)

## E. 宗教戰爭 (religion)

## E. 宗教戰爭 (religion) – 題目敘述

給定由  $b$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $q$  組成的字串，問是否能夠在數次旋轉或翻轉之後一樣。

## E. 宗教戰爭 (religion) – 子任務

- 1 字串長度為 1
- 2 無額外限制



## E. 宗教戰爭 (religion) – 子任務 1 — 字串長度為 1

無論如何都是 Yes。

## E. 宗教戰爭 (religion) – 子任務 2 — 無額外限制

旋轉：b 與 q 互換、d 與 p 互換並反轉順序

上下翻轉：b 與 p 互換、d 與 q 互換

左右翻轉：旋轉與上下翻轉。

只有四種可能，全部暴力檢查。

1 E. 宗教戰爭 (religion)

2 A. 網路連線 (connection)

3 B.

4 D. 森林道路 (pathway)

5 C. 老舊鍵盤 (keyboard)

## A. 網路連線 (connection)

## A. 網路連線 (connection) – 題目敘述

給定一張簡單圖，問有多少加  $k$  條邊的組合滿足

- 圖連通
- 圖仍為簡單

## A. 網路連線 (connection) – 子任務

- 1  $k = 1$
- 2  $N \leq 20$
- 3  $N \leq 160$
- 4 無額外限制

## A. 網路連線 (connection) – 子任務 1 — $k = 1$

假設圖的連通塊只有 1 個，答案是  $\frac{N(N-1)}{2} - M$ 。

小心  $\frac{N(N-1)}{2} \approx 3.2 \times 10^9$ ，注意 overflow。

假設圖的連通塊有 2 個，大小分別為  $c_1, c_2$ ，答案是  $c_1 \times c_2$ 。

假設圖的連通塊有 3 個以上，不可能滿足，答案為 0。

## A. 網路連線 (connection) – 子任務 2 — $N \leq 20$

枚舉所有邊的組合： $O(N^4)$

求連通狀態：DFS  $O(N)$

總時間複雜度  $O(N^5)$ 。



## A. 網路連線 (connection) – 子任務 3 — $N \leq 160$

假設圖的連通塊只有 1 個，答案是  
 $\frac{1}{2} \left( \frac{N(N-1)}{2} - M \right) \left( \frac{N(N-1)}{2} - M - 1 \right)。$

假設圖的連通塊有 2 個，大小分別為  $c_1, c_2$ ，  
考慮有兩條連接兩個連通塊的邊，是  $\frac{1}{2}(c_1 \times c_2)(c_1 \times c_2 - 1)。$   
有一個連通兩個連通塊的邊，另一個不是：  
 $c_1 \times c_2 \times (M - \frac{1}{2}c_1(c_1 - 1) - \frac{1}{2}c_2(c_2 - 1))。$

假設圖的連通塊有 3 個，大小分別為  $c_1, c_2, c_3$ ，答案為  
 $(c_1 + c_2 + c_3)c_1c_2c_3。$

假設圖的連通塊有 3 個以上，不可能滿足，答案為 0。

## A. 網路連線 (connection) – 子任務 4 — 無額外限制

$$\frac{1}{2} \left( \frac{N(N-1)}{2} - M \right) \left( \frac{N(N-1)}{2} - M - 1 \right) \approx 5 \times 10^{18}$$

善用 (unsigned) long long !

1 E. 宗教戰爭 (religion)

2 A. 網路連線 (connection)

3 B.

4 D. 森林道路 (pathway)

5 C. 老舊鍵盤 (keyboard)

B.

1 E. 宗教戰爭 (religion)

2 A. 網路連線 (connection)

3 B.

4 D. 森林道路 (pathway)

5 C. 老舊鍵盤 (keyboard)

## D. 森林道路 (pathway)

## D. 森林道路 (pathway) – 題目敘述

給定一個  $N \times M$  的網格，求出最大權的道路。

道路的條件是：

- $(1, 1), (N, M)$  要在道路上
- 對於任意兩個左上 – 右下分布的兩個格子，道路要包含他們的最短路。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務

- 1 只需要驗證輸入是不是合法的道路
- 2  $N M \leq 50$
- 3  $N M \leq 2000$
- 4  $N M \leq 10^5$



## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

首先  $(1, 1)$  至  $(N, M)$  連通。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

首先  $(1, 1)$  至  $(N, M)$  連通。

對於同一列的兩個格子，中間的格子都必須存在。

對於同一行的兩個格子，中間的格子都必須存在。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

首先  $(1, 1)$  至  $(N, M)$  連通。

對於同一列的兩個格子，中間的格子都必須存在。

對於同一行的兩個格子，中間的格子都必須存在。

假設相鄰兩列的格子是  $(i, L_i)$  至  $(i, R_i)$  以及  $(i + 1, L_{i+1})$  至  $(i + 1, R_{i+1})$ ，則

$L_i \leq L_{i+1}$ ，否則  $(1, 1)$  至  $(i + 1, L_{i+1})$  沒有最短路被包含。

$R_i \leq R_{i+1}$ ，否則  $(i, R_i)$  至  $(N, M)$  沒有最短路被包含。

$R_i \leq L_{i+1}$ ，否則不連通。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

這樣的條件就合法嗎？

容易驗證最短路條件一定滿足。

複雜度  $O(NM)$ 。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 2 — $NM \leq 50$

定義  $dp_{i,l,r}$  表示考慮到第  $i$  列取了  $[l, r]$  的所有格子，最大的權重可能。

初始值  $dp_{0,1,1} = 0$  而剩餘的狀態都是  $-\infty$ 。

轉移直接按照剛剛的條件並枚舉，最後答案是  $\max_l dp_{n,l,m}$ 。

總時間複雜度  $O(NM^2 \times M^2)$ 。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 3 — $N M \leq 2000$

$dp_{i,l,r}$  的轉移來源：

$$\max_{\substack{1 \leq l' \leq l \\ l \leq r' \leq r}} dp_{i-1,l',r'} + \sum_{j=l}^r a_{i,j}$$

當  $i, l$  固定的時候，能夠轉移的上一個狀態左界  $1 \leq l' \leq l$  是固定的，右界依序遞增。

因此我們只需要對  $l'$  預處理前綴最大值，轉移的時候逐漸加入  $r$  即可只花  $O(1)$  轉移。

總時間複雜度  $O(N M^2)$ 。

## D. 森林道路 (pathway) – 子任務 4 — $NM \leq 10^5$

$$\min(N, M) \leq \sqrt{NM}$$

假如  $M > N$  將網格轉置，可以發現條件是相同的，所以直接做一樣的 DP。

總時間複雜度

$$O(\min(NM^2, N^2M)) = O(NM \min(N, M)) = O(NM\sqrt{NM})。$$

1 E. 宗教戰爭 (religion)

2 A. 網路連線 (connection)

3 B.

4 D. 森林道路 (pathway)

5 C. 老舊鍵盤 (keyboard)



## C. 老舊鍵盤 (keyboard)

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 題目敘述

找到最小的**正整數**  $M$  使得  $N$  整除  $\overbrace{11 \dots 1}^M$ 。

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務

1  $N \leq 10$

2  $N \leq 2 \times 10^5$

3  $N \leq 10^9$

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 1 — $N \leq 10$

手算，答案表：

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M$	1	-1	3	-1	-1	-1	6	-1	9	-1

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 2 — $N \leq 2 \times 10^5$

我們沒有辦法計算太大的數字，要怎麼搜索？

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 2 — $N \leq 2 \times 10^5$

我們沒有辦法計算太大的數字，要怎麼搜索？

$$\overbrace{11 \cdots 1}^{k+1} = 10 \cdot \overbrace{11 \cdots 1}^k + 1$$

定義  $f(x) \equiv 10x + 1 \pmod N$ ，我們想知道 0 套幾次 0 會變回 0。

搜索到  $N$  以下就能找到答案（或者無解）了，為什麼？

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

### 引理 (無解條件)

如果  $N$  是 2 或 5 的倍數則無解。

考慮尾數一直都是 1，所以這件事情顯然會無解。

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

考慮由  $0, 1, \dots, N - 1$ ，當這些數字  $x \rightarrow x + 1$  的時候，不難發現是一對一對應，也就是說他是一個排列。

考慮由  $0, 1, \dots, N - 1$ ，當這些數字  $x \rightarrow 10x$  的時候，也是一對一對應，因為：

假設  $10a \equiv 10b \pmod{N}$ ，則  $N \mid 10(a - b)$ ，因為  $\gcd(N, 10) = 1$  所以  $N \mid (a - b)$  但不可能發生。

所以說， $f(x) \equiv 10x + 1 \pmod{N}$  是兩個排列的合成函數，仍然是一個排列，在這些數字跟  $f$  作為有向邊構成的圖每個數字 in, out degree 都是 1，是由一堆環組成的，因此答案一定  $\leq N$ 。



## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

找環長度可以由下列的作法在  $O(\sqrt{N} \log N)$  內做到：

假設  $x_0 = 0, x_i = f(x_{i-1})$ ，先找到  $x_0, x_1, \dots, x_{K-1}$ 。

因為  $f(x) = 10x + 1$ ，所以  $\overbrace{f(f(f(f(\dots f(x)\dots))))}^K$  也可以被寫成一個線性函數，也就是  $x_{i+K} = ax_i + b$ 。

這時候可以一直計算  $x_K, x_{2K}, x_{3K} \dots, x_{\lceil \frac{N}{K} \rceil K}$ ，一定會有其中一個與  $x_0, x_1, \dots, x_{K-1}$  對應到，當找到就能夠計算環的長度  $= iK - j$ 。

開一個 map 紀錄  $x_0, x_1, \dots, x_{K-1}$ ，所以總時間複雜度是  $O((K + \frac{N}{K}) \log N)$ ，取  $K = O(\sqrt{N})$  有  $O(\sqrt{N} \log N)$ 。

## C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

Alternative Solution: 考慮

$$\overbrace{11 \cdots 1}^M \equiv 0 \pmod{N} \Rightarrow \overbrace{99 \cdots 9}^M \equiv 0 \pmod{9N} \Rightarrow 10^M \equiv 1 \pmod{9N}$$

因為

$$10^{\phi(9N)} \equiv 1 \pmod{9N}$$

所以只需要對  $9N$  因式分解求出  $\phi(9N)$ ，接著對  $\phi(9N)$  的質因數  $p$  不斷嘗試  $\frac{\phi(9N)}{p}$  是否是更好的解就好，使用 Pollard Rho 可以做到  $O(\sqrt[4]{N})$ 。