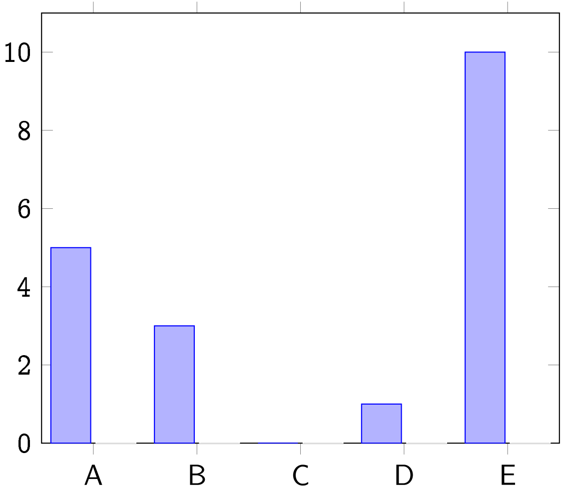
112 臺南一中學科能力競賽校內複選

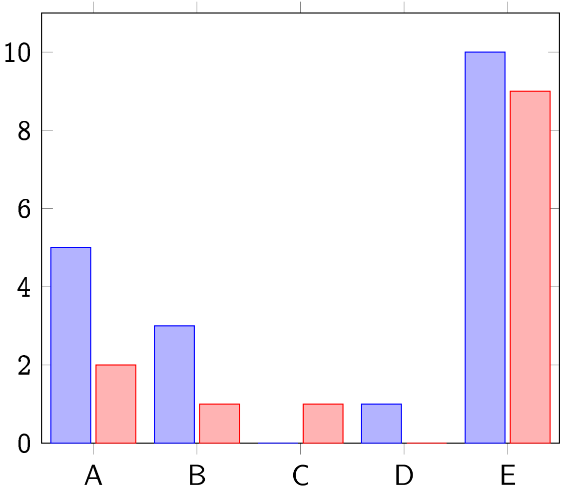
題解

Sep 28 2023

Overview – 預期解出人數



Overview – 實際解出人數



Overview

1. A 圖論 + 一些 case
2. B 資料結構
3. C 數學
4. D DP
5. E 簽到題

1. E. 宗教戰爭 (religion)
2. A. 網路連線 (connection)
3. B. 批量種田 (farming)
4. D. 森林道路 (pathway)
5. C. 老舊鍵盤 (keyboard)

E. 宗教戰爭 (religion)

E. 宗教戰爭 (religion) – 題目敘述

給定由 b， p， d， q 組成的字串，問是否能夠在數次旋轉或翻轉之後一樣。

E. 宗教戰爭 (religion) – 子任務

1. 字串長度為 1
2. 無額外限制

E. 宗教戰爭 (religion) – 子任務 1 — 字串長度為 1

無論如何都是 Yes。

E. 宗教戰爭 (religion) – 子任務 2 — 無額外限制

旋轉：b 與 q 互換、d 與 p 互換並反轉順序

上下翻轉：b 與 p 互換、d 與 q 互換

左右翻轉：旋轉與上下翻轉。

只有四種可能，全部暴力檢查。

1. E. 宗教戰爭 (religion)
2. A. 網路連線 (connection)
3. B. 批量種田 (farming)
4. D. 森林道路 (pathway)
5. C. 老舊鍵盤 (keyboard)

A. 網路連線 (connection)

A. 網路連線 (connection) – 題目敘述

給定一張簡單圖，問有多少加 k 條邊的組合滿足

- 圖連通
- 圖仍為簡單

A. 網路連線 (connection) – 子任務

1. $k = 1$
2. $N \leq 20$
3. $N \leq 160$
4. 無額外限制

A. 網路連線 (connection) – 子任務 1 — $k = 1$

假設圖的連通塊只有 1 個，答案是 $\frac{N(N-1)}{2} - M$。
小心 $\frac{N(N-1)}{2} \approx 3.2 \times 10^9$，注意 overflow。

假設圖的連通塊有 2 個，大小分別為 c_1, c_2，答案是 $c_1 \times c_2$。

假設圖的連通塊有 3 個以上，不可能滿足，答案為 0。

A. 網路連線 (connection) – 子任務 2 — $N \leq 20$

枚舉所有邊的組合：$O(N^4)$

求連通狀態：DFS $O(N)$

總時間複雜度 $O(N^5)$。

A. 網路連線 (connection) – 子任務 3 — $N \leq 160$

假設圖的連通塊只有 1 個，答案是
$\frac{1}{2}\left(\frac{N(N-1)}{2} - M\right)\left(\frac{N(N-1)}{2} - M - 1\right)$。

假設圖的連通塊有 2 個，大小分別為 c_1, c_2，
考慮有兩條連接兩個連通塊的邊，是 $\frac{1}{2}(c_1 \times c_2)(c_1 \times c_2 - 1)$。
有一個連通兩個連通塊的邊，另一個不是：
$c_1 \times c_2 \times \left(M - \frac{1}{2}c_1(c_1 - 1) - \frac{1}{2}c_2(c_2 - 1)\right)$。

假設圖的連通塊有 3 個，大小分別為 c_1, c_2, c_3，答案為
$(c_1 + c_2 + c_3)c_1c_2c_3$。

假設圖的連通塊有 3 個以上，不可能滿足，答案為 0。

A. 網路連線 (connection) – 子任務 4 — 無額外限制

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N(N-1)}{2} - M\right)\left(\frac{N(N-1)}{2} - M - 1\right) \approx 5 \times 10^{18}$$

善用 `(unsigned) long long`！

1. E. 宗教戰爭 (religion)
2. A. 網路連線 (connection)
3. B. 批量種田 (farming)
4. D. 森林道路 (pathway)
5. C. 老舊鍵盤 (keyboard)

B. 批量種田 (farming)

B. 批量種田 (farming) – 題目敘述

給一個長度為 N 的序列每個值各自 c_i，然後進行多次操作。

每次操作給 l_i, r_i, x_i 詢問區間 $[l_i, r_i]$ 有幾個不同數字

並把 $[l_i, r_i]$ 都改成 x_i。

B. 批量種田 (farming) – 子任務

1. 只需要驗證輸入是不是合法的道路
2. $N, Q \leq 5000$
3. $\forall x_i, c_i \leq 10$
4. $\forall x_i = 1$
5. $N, Q \leq 300000$

B. 批量種田 (farming) – 子任務 1 — $N, Q \leq 5000$

さ... 純粹暴力拿分

自己加油 $><$

B. 批量種田 (farming) – 子任務 2 — $\forall x_i, c_i \leq 10$

發現值域全部都不會超過 10

B. 批量種田 (farming) – 子任務 2 — $\forall x_i, c_i \leq 10$

發現值域全部都不會超過 10

可以開一個線段樹每個節點第 i 個 bit 表示區間有沒有出現 i

B. 批量種田 (farming) – 子任務 2 — $\forall x_i, c_i \le 10$

發現值域全部都不會超過 10

可以開一個線段樹每個節點第 i 個 bit 表示區間有沒有出現 i

query 區間直接把所有區間 or 起來算幾個 bit 是 1

modify 可以直接用懶標處理

複雜度 $O(N \log N)$

B. 批量種田 (farming) – 子任務 3 — $\forall x_i = 1$

每次詢問一段區間的同時也會把那段區間全部改成一樣的

B. 批量種田 (farming) – 子任務 3 — $\forall x_i = 1$

每次詢問一段區間的同時也會把那段區間全部改成一樣的

改成 1 之後就不會再改變了

那就可以直接不用理

每次都直接暴力修改每個值都只被改到一次

B. 批量種田 (farming) – 子任務 3 — $\forall x_i = 1$

每次詢問一段區間的同時也會把那段區間全部改成一樣的

改成 1 之後就不會再改變了

那就可以直接不用理

每次都直接暴力修改每個值都只被改到一次

每次 query 就直接暴力查詢還沒被改成 1 的點

修改就把它改成 1，暴力查詢的部分可以用 set, dsu, map... 維護

複雜度在均攤下是 $O(N \log N)$ *or* $O(N\alpha(N))$

B. 批量種田 (farming) – 子任務 4 — 無額外限制

考慮結合子題二跟子題三的做法

考慮相鄰不一樣的數量

B. 批量種田 (farming) – 子任務 4 — 無額外限制

考慮結合子題二跟子題三的做法

考慮相鄰不一樣的數量

每一次操作最多讓兩個相鄰不一樣的次數 $+2$

總共的相鄰不一樣的次數最多 $N + 2Q$

B. 批量種田 (farming) – 子任務 4 — 無額外限制

考慮結合子題二跟子題三的做法

考慮相鄰不一樣的數量

每一次操作最多讓兩個相鄰不一樣的次數 $+2$

總共的相鄰不一樣的次數最多 $N + 2Q$

如果每個相鄰不同的情況都用線段樹 or set 去做修改和查詢的話

總複雜度 $O((N + Q) \log N)$

1. E. 宗教戰爭 (religion)
2. A. 網路連線 (connection)
3. B. 批量種田 (farming)
4. D. 森林道路 (pathway)
5. C. 老舊鍵盤 (keyboard)

D. 森林道路 (pathway)

D. 森林道路 (pathway) – 題目敘述

給定一個 $N \times M$ 的網格，求出最大權的道路。

道路的條件是：

- $(1, 1), (N, M)$ 要在道路上
- 對於任意兩個左上 – 右下分布的兩個格子，道路要包含他們的最短路。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務

1. 只需要驗證輸入是不是合法的道路
2. $NM \leq 50$
3. $NM \leq 5000$
4. $NM \leq 10^5$

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

首先 $(1, 1)$ 至 (N, M) 連通。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

首先 $(1, 1)$ 至 (N, M) 連通。

對於同一列的兩個格子，中間的格子都必須存在。
對於同一行的兩個格子，中間的格子都必須存在。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

首先 $(1,1)$ 至 (N,M) 連通。

對於同一列的兩個格子，中間的格子都必須存在。
對於同一行的兩個格子，中間的格子都必須存在。

假設相鄰兩列的格子是 (i, L_i) 至 (i, R_i) 以及 $(i+1, L_{i+1})$ 至 $(i+1, R_{i+1})$，則

$L_i \le L_{i+1}$，否則 $(1,1)$ 至 $(i+1, L_{i+1})$ 沒有最短路被包含。
$R_i \le R_{i+1}$，否則 (i, R_i) 至 (N,M) 沒有最短路被包含。
$R_i \le L_{i+1}$，否則不連通。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 1 — 驗證

這樣的條件就合法嗎？

容易驗證最短路的條件一定滿足。

複雜度 $O(NM)$。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 2 — $NM \leq 50$

定義 $dp_{i,l,r}$ 表示考慮到第 i 列取了 $[l,r]$ 的所有格子，最大的權重可能。

初始值 $dp_{0,1,1} = 0$ 而剩餘的狀態都是 $-\infty$。

轉移直接按照剛剛的條件並枚舉，最後答案是 $\max_l dp_{n,l,m}$。

總時間複雜度 $O(NM^2 \times M^2)$。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 3 — $NM \leq 5000$

$dp_{i,l,r}$ 的轉移來源：

$$\max_{\substack{1 \leq l' \leq l \\ l \leq r' \leq r}} dp_{i-1,l',r'} + \sum_{j=l}^{r} a_{i,j}$$

當 i, l 固定的時候，能夠轉移的上一個狀態左界 $1 \leq l' \leq l$ 是固定的，右界依序遞增。
因此我們只需要對 l' 預處理前綴最大值，轉移的時候逐漸加入 r 即可只花 $O(1)$ 轉移。

總時間複雜度 $O(NM^2)$。

D. 森林道路 (pathway) – 子任務 4 — $NM \leq 10^5$

$$\min(N, M) \leq \sqrt{NM}$$

假如 $M > N$ 將網格轉置，可以發現條件是相同的，所以直接做一樣的 DP。

總時間複雜度
$O(\min(NM^2, N^2M)) = O(NM\min(N, M)) = O(NM\sqrt{NM})$。

1. E. 宗教戰爭 (religion)
2. A. 網路連線 (connection)
3. B. 批量種田 (farming)
4. D. 森林道路 (pathway)
5. C. 老舊鍵盤 (keyboard)

C. 老舊鍵盤 (keyboard)

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 題目敘述

找到最小的**正整數** M 使得 N 整除 $\overbrace{11\cdots1}^{M}$。

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務

1. $N \leq 10$
2. $N \leq 2 \times 10^5$
3. $N \leq 10^9$

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 1 — $N \leq 10$

手算，答案表：

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	1	-1	3	-1	-1	-1	6	-1	9	-1

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 2 — $N \leq 2 \times 10^5$

我們沒有辦法計算太大的數字，要怎麼搜索？

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 2 — $N \le 2 \times 10^5$

我們沒有辦法計算太大的數字，要怎麼搜索？

$$\overbrace{11\cdots1}^{k+1} = 10 \cdot \overbrace{11\cdots1}^{k} + 1$$

定義 $f(x) \equiv 10x + 1 \mod N$，我們想知道 0 套幾次 0 會變回 0。

搜索到 N 以下就能找到答案（或者無解）了，為什麼？

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

引理 (無解條件)

如果 N 是 2 或 5 的倍數則無解。

考慮尾數一直都是 1，所以這件事情顯然會無解。

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

考慮由 $0, 1, \ldots, N-1$，當這些數字 $x \to x+1$ 的時候，不難發現是一對一對應，也就是說他是一個排列。

考慮由 $0, 1, \ldots, N-1$，當這些數字 $x \to 10x$ 的時候，也是一對一對應，因為：
假設 $10a \equiv 10b \mod N$，則 $N | 10(a-b)$，因為 $\gcd(N, 10) = 1$
所以 $N | (a-b)$ 但不可能發生。

所以說，$f(x) \equiv 10x + 1 \mod N$ 是兩個排列的合成函數，仍然是一個排列，在這些數字跟 f 作為有向邊構成的圖每個數字 in, out degree 都是 1，是由一堆環組成的，因此答案一定 $\leq N$。

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

找環長度可以由下列的作法在 $O(\sqrt{N}\log N)$ 內做到：

假設 $x_0 = 0, x_i = f(x_{i-1})$，先找到 $x_0, x_1, \cdots, x_{K-1}$。

因為 $f(x) = 10x + 1$，所以 $\overbrace{f(f(f(f(\cdots f}^{K}(x)\cdots))))$ 也可以被寫成一個線性函數，也就是 $x_{i+K} = ax_i + b$。

這時候可以一直計算 $x_K, x_{2K}, x_{3K}\cdots, x_{\lceil \frac{N}{K}\rceil K}$，一定會有其中一個與 $x_0, x_1, \cdots, x_{K-1}$ 對應到，當找到就能夠計算環的長度 $= iK - j$。

開一個 map 紀錄 $x_0, x_1, \cdots, x_{K-1}$，所以總時間複雜度是 $O((K + \frac{N}{K})\log N)$，取 $K = O(\sqrt{N})$ 有 $O(\sqrt{N}\log N)$。

C. 老舊鍵盤 (keyboard) – 子任務 3 — $N \leq 10^9$

Alternative Solution: 考慮

$$\overbrace{11\cdots1}^{M} \equiv 0 \mod N \Rightarrow \overbrace{99\cdots9}^{M} \equiv 0 \mod 9N \Rightarrow 10^M \equiv 1 \mod 9N$$

因為

$$10^{\phi(9N)} \equiv 1 \mod 9N$$

所以只需要對 $9N$ 因式分解求出 $\phi(9N)$，接著對 $\phi(9N)$ 的質因數 p 不斷嘗試 $\frac{\phi(9N)}{p}$ 是否是更好的解就好，使用 Pollard Rho 可以做到 $O(\sqrt[4]{N})$。