

113 學年度資訊學科能力競賽臺南一中校內初選

試題本

競賽規則

1. 競賽時間：2024/09/13 13:30 ~ 16:30，共 3 小時。
2. 本次競賽試題共 6 題，每題皆有子任務。
3. 為了愛護地球，本次競賽題本僅提供電子檔，不提供紙本。
4. 每題的分數為該題所有子任務得分數加總；單筆子任務得分數為各筆繳交在該筆得到的最大分數。
5. 本次初選比照南區賽提供記分板，複選比照全國賽不提供記分板。
6. 全部題目的輸入皆為標準輸入。
7. 全部題目的輸出皆為標準輸出。
8. 所有輸入輸出請嚴格遵守題目要求，多或少的換行及空格皆有可能造成裁判系統判斷為答案錯誤。
9. 每題每次上傳間隔為 120 秒，裁判得視情況調整。
10. 所有試題相關問題請於競賽系統中提問，題目相關公告也會公告於競賽系統，請密切注意。
11. 如有電腦問題，請舉手向監考人員反映。
12. 如有如廁需求，須經過監考人員同意方可離場。
13. 不得攜帶任何參考資料，但競賽系統上的參考資料可自行閱讀。
14. 不得自行攜帶隨身碟，如需備份資料，請將資料儲存於電腦 D 槽。
15. 競賽中請勿交談。請勿做出任何會干擾競賽的行為。
16. 如需使用 C++ 的 `std::cin` 或 `std::cout` 可將以下程式碼插入 `main` function 以及將 `endl` 取代為 `'\n'` 來優化輸入輸出速度。唯須注意不可與 `cstdio` 混用。

```
std::ios::sync_with_stdio(false);  
std::cin.tie(nullptr);
```

A. 猜猜拳

Problem ID: RockPaperScissors

Time Limit: 0.5s

Memory Limit: 16MiB

小杰非常喜歡玩猜猜拳，因此你發起了猜拳挑戰！

猜猜拳一共有以下三種型態：

1. 剪刀：近距離類型招式，手成剪刀姿勢，變成像剪刀般銳利，可直接斬殺對手，不過是三種型態中威力最弱的。
2. 石頭：近距離類型招式，手成拳頭姿勢出拳，是猜猜拳中威力最大的招式。
3. 布：遠距離類型招式，手成布姿勢射出念能力球，擊中目標後會爆炸。

然而，考慮到你會被秒殺，小杰決定用最原始的猜拳規則和你一較高下，也就是「剪刀贏布，布贏石頭，石頭贏剪刀」，勝者獲得一分，敗者分數不變，若為平局則雙方分數皆不變。

猜拳比賽結束後，然而你卻忘記了小杰到底贏了你幾分，你只記得自己出了 a 次剪刀、 b 次石頭、 c 次布，而小杰出了 d 次剪刀、 e 次石頭、 f 次布。

請你算出在最佳情況下，你最多能贏小杰幾分，若你無論如何都會輸給小杰，則輸出你最少輸他幾分，也就是說，輸出必不為負。

— 輸入 —

輸入有兩行。

第一行包括三個正整數 a, b, c ，分別代表你出了幾次剪刀、石頭和布。

第二行包括三個正整數 d, e, f ，分別代表小杰出了幾次剪刀、石頭和布。

— 輸出 —

輸出一個整數，代表你最多能贏小杰幾分，若你無論如何都會輸給小杰，則輸出你最少輸他幾分。

— 輸入限制 —

- $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 10^{18}$
- $a + b + c = d + e + f$

— 子任務 —

編號	分數	額外限制
1	0	範例輸入輸出
2	30	$b = c = 0$ 且 $a \leq 10^9$
3	30	$e = f = 0$ 且 $d \leq 10^9$
4	20	$a, b, c, d, e, f \leq 10^8$
5	20	無額外限制

— 範例輸入 —

3 2 1
1 2 3

— 範例輸出 —

5

B. 生日禮物

Problem ID: BirthdayGift

Time Limit: 0.5s

Memory Limit: 64MiB

今天是小愷的生日，因此小愷的爸爸決定帶小愷去買房子當作給他的生日禮物！小愷爸爸帶小愷來到了一條有 n 棟房子的街上，其中第 i 棟房子的價錢為 a_i ，每棟房子的價錢皆為正整數。

小愷的爸爸原本打算把一整條街上所有的房子都送給小愷，但深知「勝不驕，敗不餒」的道理的他，在深思熟慮下還是決定不這麼做。

他打算給小愷一共 c 元的預算，讓小愷自己決定要買哪些房子，但俗話說的好：「不經一番寒徹骨，焉得梅花撲鼻香」，小愷爸爸並不過多干涉小愷想買哪些房子。

但他卻有一些要求：

1. 小愷買的所有房子必須全部彼此相連
2. 小愷買的所有房子的總價錢不得和預算 c 相差超過 k 元，也就是說小愷爸爸不希望剩太多錢，也不希望超出預算太多

然而，小愷是一個非常懶的人，因此希望你幫他算出，一共有多少種購房方案可以符合小愷爸爸提出的兩個條件。

— 輸入 —

輸入有兩行。

第一行包含三個正整數 n, c, k ，分別代表房子的數量、買房的預算和小愷爸爸可以接受的價差。

第二行包含 n 個正整數 a_1, a_2, \dots, a_n ，其中 a_i 代表第 i 棟房子的價錢。

— 輸出 —

輸出一個整數，表示一共有多少種購房方案可以符合小愷爸爸的要求。

— 輸入限制 —

- $1 \leq n \leq 2.5 \times 10^6$
- $1 \leq a_i \leq 10^9$
- $1 \leq c \leq 10^9$
- $0 \leq k < c$

— 子任務 —

編號	分數	額外限制
1	0	範例輸入輸出
2	14	$k = 0$ 且 $n \leq 4 \times 10^5$
3	7	$n \leq 100$
4	19	$n \leq 3000$
5	40	$n \leq 4 \times 10^5$
6	20	無額外限制

— 範例輸入 —

8 10 2
5 3 1 2 1 4 2 3

— 範例輸出 —

11

C. 友誼悖論

Problem ID: Friendship

Time Limit: 1.5s

Memory Limit: 128MiB

你是否曾經感覺，你的朋友人緣普遍都比你好，他們平均的朋友數量比你的朋友數量多？

如果有的話，也許這不是錯覺，由於取樣上的偏差，這確實有不小的機率會發生。如果在一個很大的群體中，有些人朋友很多，有些人朋友比較少，那麼在朋友關係是隨機分配的情況下，你交朋友時也會有比較高的機率與這些朋友很多的人當朋友，而相對的，你與朋友比較少的人當朋友的機率也比較低。因此，你最終有很高的機率感覺到「你的朋友」的平均朋友數量，比你的朋友數量還多。

以上看似違背常理的狀況，稱作「友誼悖論 (Friendship Paradox)」。

類似的例子還有，在一間學校中，假設有兩個班級，人數分別為 40 與 10，顯然每個班級的平均人數為 25。但如果你隨機抽樣來進行調查，也就是隨機抓人問他「你的班級有多少人？」，然後將統計到的結果進行平均的話，事實上會與實際結果有所偏差，以上述例子而言，你有 0.8 的機率得到 40 的答案、0.2 的機率得到 10 的答案，最終統計結果的期望平均為 $0.8 \times 40 + 0.2 \times 10 = 34$ 。

除此之外，在塞車時容易感覺自己的車道總是塞車，別的車道很暢通也是如此，如果在一個範圍內，塞車的車道有 15 台車，另一個車道只有 5 台車，乍看之下只有 $\frac{1}{2}$ 的機會會在塞車的車道，但倘若身陷車流中，我們有 $\frac{3}{4}$ 的機率是在塞車車道的車。

所以，讓我們回到友誼悖論。

在你的生活圈中，共有 n 個人，將其編號為 1 到 n ，並且其中有 m 對朋友關係，每對朋友關係包含數字 a_i, b_i ，代表 a_i 是 b_i 的朋友，而朋友關係都是互相的，因此 b_i 也會是 a_i 的朋友。可以保證朋友關係不會重複，亦即有朋友關係 a_i, b_i 時，不會存在另一個朋友關係 $a_j, b_j (i \neq j)$ 使得 $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$ 或 $(a_i, b_i) = (b_j, a_j)$ 。另外也保證每個人至少有一個朋友，即對於在 $[1, n]$ 區間內的整數 x ，必然存在 (a_i, b_i) 滿足 $a_i = x$ 或 $b_i = x$ 。

注意這裡的 x 是 y 的朋友，只有在 x, y 之間存在直接的朋友關係才成立，也就是如果 x, z 、 z, y 存在朋友關係，但 x, y 沒有朋友關係的話 x 跟 y 就不會是朋友。

現在你想要知道，在你生活圈的這 n 個人中，有多少人會符合「友誼悖論」，也就是有多少人「朋友的平均朋友數量」大於「自己的朋友數量」。請你統計出符合友誼悖論的人數，並依序輸出這些人的編號。

— 輸入 —

輸入有多行。

第一行包含兩個正整數 n, m ，分別代表生活圈中的人數以及朋友關係的數量。

接下來有 m 行，每行包含兩個正整數 a_i, b_i ，代表 a_i, b_i 間存在朋友關係。

— 輸出 —

輸出兩行。

第一行包含一個整數 k ，代表生活圈中符合朋友悖論的人數。

第二行包含 k 個整數，代表 k 個符合朋友悖論的人的編號，由小到大輸出。

若 $k = 0$ ，則可以只輸出第一行。

— 輸入限制 —

- $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$
- $0 \leq m \leq \min(\frac{n(n-1)}{2}, 10^6)$
- $1 \leq a_i, b_i \leq n$

— 子任務 —

編號	分數	額外限制
1	0	範例輸入輸出
2	15	$m = \frac{n(n-1)}{2}$
3	15	$n \leq 100$
4	15	$n \leq 5000$
5	15	$m \leq 10000$
6	40	無額外限制

— 範例輸入 1 —

5 6
1 3
4 2
3 5
2 1
4 5
3 4

— 範例輸出 1 —

3
1 2 5

— 範例輸入 2 —

9 8
8 7
1 5
5 4
3 7
9 8
6 7
8 2
6 3

— 範例輸出 2 —

6
1 2 3 4 6 9

— 範例說明 —

範例測資 1 說明：

編號為 1 到 5 的人分別有 2, 2, 3, 3, 2 個朋友。

其中編號為 1 的人跟編號為 2, 3 的人是朋友，他的「朋友的平均朋友數」為 $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ ，大於他的朋友數 2。

其中編號為 2 的人跟編號為 1, 4 的人是朋友，他的「朋友的平均朋友數」為 $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ ，大於他的朋友數 2。

其中編號為 3 的人跟編號為 1, 4, 5 的人是朋友，他的「朋友的平均朋友數」為 $\frac{2+3+2}{3} = \frac{7}{3}$ ，小於他的朋友數 3。

其中編號為 4 的人跟編號為 2, 3, 5 的人是朋友，他的「朋友的平均朋友數」為 $\frac{2+3+2}{3} = \frac{7}{3}$ ，小於他的朋友數 3。

其中編號為 5 的人跟編號為 3, 4 的人是朋友，他的「朋友的平均朋友數」為 $\frac{3+3}{2} = 3$ ，大於他的朋友數 2。

因此最終有 3 個人的「朋友的平均朋友數」嚴格大於自己的朋友數，分別為編號為 1, 2, 5 的人。

範例測資 2 說明：

編號為 1 到 9 的人分別有 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 1 個朋友。

因此最終有 6 個人的「朋友的平均朋友數」嚴格大於自己的朋友數，分別為編號為 1, 2, 3, 4, 6, 9 的人。

D. 忠孝東路走九遍

Problem ID: Collect

Time Limit: 1.0s

Memory Limit: 128MiB

Same 作為天龍國的大富豪，他在忠孝東路上的房產數量不可勝數！雖然這乍看之下是好事，但每到收租的季節 Same 總是很煩惱該怎麼有效率的收租。

忠孝東路上的房子可以視為 n 個排成一直線的相鄰街區，為了方便收租，Same 將這些街區依序編號為 1 到 n 。如果他持有街區 i 的房產，那麼他在一次收租只要經過街區 i 就可以收到 a_i （此時 $a_i > 0$ ）元的租金；但反之，有一些街區並沒有他的房產，而如果他的一次收租中經過了這個街區，居民會舉起人民的法槌想要捶倒他這一堵資本主義的高牆，因此居民們會跟他收取過路費，為了方便計算，Same 將需要支付過路費的街區 i 的 a_i 記做負值，代表經過時需要支付過路費 $|a_i|$ （ a_i 的絕對值）元；如果一個街區 i 的 a_i 為 0，代表經過這個街區時，不會收到租金但也不會被收取過路費。

請特別注意，在一次收租中，每個街區的租金跟過路費都只會收取一次，也就是說，重複走到已經走過的街區，並不會重複收取租金或過路費。

至於在不同街區間的移動，有兩種交通方式。

第一種：由於 Same 是大富豪，走路是不可能的，他會選擇撥打 55688 叫計程車。但因為他吃飽太閒，所以他每次搭計程車都只會搭一個街區的距離到相鄰的街區，而搭乘一次的費用是 x 元。也就是說，對於街區 i ，他可以花費 x 元移動到街區 $i - 1$ 或街區 $i + 1$ 。但不能搭超過忠孝東路的範圍，換句話說目的地必須在街區 1 到 n 內。

第二種：如果 Same 已經到了忠孝東路的末端，也就是街區 1 跟街區 n ，他還可以選擇花費 y 元搭乘「BL 列車」直接到另一端，也就是花費 y 元從街區 1 移動到街區 n 或者從街區 n 移動到街區 1。

為了避免重演上次收租時欠缺規劃，導致來來回回跑了九遍忠孝東路，Same 這次需要事先做好收租的規劃。最一開始他有 10^{100} 元，他可以任意選擇收租的起點，然後利用上述兩種交通方式在不同街區間移動，最終在任何他想要的街區結束收租，而假設最終 Same 有 $10^{100} + k$ 元，這個 k 就是他這次收租的所得。

不過 Same 太久沒寫程式了，因此想要請你幫他寫程式計算出一次收租最多能收到多少錢，也就是計算最大的 k 值。

— 輸入 —

輸入有兩行。

第一行包含三個正整數 n, x, y ，分別代表忠孝東路上的街區數量、搭乘一次計程車的費用、搭乘一次「BL 列車」的費用。

第二行包含 n 個正整數 a_1, a_2, \dots, a_n ，意義如題目所述。

— 輸出 —

輸出一個整數，代表一次收租可以得到的最大所得。

— 輸入限制 —

- $1 \leq n \leq 2 \times 10^6$
- $0 \leq x \leq 10^9$
- $0 \leq y \leq 10^{18}$
- $-10^9 \leq a_i \leq 10^9$
- 保證至少有一個 $a_i > 0$

— 子任務 —

編號	分數	額外限制
1	0	範例輸入輸出
2	18	$n \leq 3000$
3	18	$x = 0, y = 10^{18}$ 且 $n \leq 5 \times 10^5$
4	20	$y = 10^{18}$ 且 $n \leq 5 \times 10^5$
5	10	$x = y = 0$ 且 $n \leq 5 \times 10^5$
6	10	$x = 0$ 且 $n \leq 5 \times 10^5$
7	10	$x = y$ 且 $n \leq 5 \times 10^5$
8	7	$n \leq 5 \times 10^5$
9	7	無額外限制

－ 範例輸入 1 －

5 10 20
20 5 -5 30 30

－ 範例輸出 1 －

50

－ 範例輸入 2 －

8 0 0
10 -15 10 -20 15 -10 10 -5

－ 範例輸出 2 －

20

－ 範例輸入 3 －

5 10 100
15 20 -10 30 5

－ 範例輸出 3 －

30

— 範例說明 —

範例測資 1 說明:

選擇街區 1 為起點，收到 20 元。

然後支付 20 元搭乘 BL 列車到街區 5，收到 30 元。

然後支付 10 元搭乘計程車到街區 4，收到 30 元。

結束收租，最終收到的金額是 $20 - 20 + 30 - 10 + 30 = 50$ 。

範例測資 2 說明:

選擇街區 6 為起點，被收取過路費 10 元。

然後支付 0 元搭乘計程車到街區 5，收到 15 元。

然後支付 0 元搭乘計程車到街區 6，由於已經走過街區 6，不再收取過路費。

然後支付 0 元搭乘計程車到街區 7，收到 10 元。

然後支付 0 元搭乘計程車到街區 8，被收取過路費 5 元。

然後支付 0 元搭乘 BL 列車到街區 1，收到 10 元。

結束收租，最終收到的金額是 $-10 + 15 + 10 - 5 + 10 = 20$ 。

範例測資 3 說明:

選擇街區 4 為起點，收到 30 元。

直接結束收租，最終收到的金額是 30 元。

E. 下雨天

Problem ID: RainyDay

Time Limit: 1.5s

Memory Limit: 128MiB

「下雨天了怎麼辦 我好想你
我不敢打給你 我找不到原因
為什麼失眠的聲音 變得好熟悉
沉默的場景 做你的代替陪我等雨停」

窗外下起瓢潑大雨，這時宜漾收到來自男朋友的訊息，猛然想起，今天是他們的一周年紀念日，他們預定了要前往灣歐萬大樓上的高檔餐廳「想 A 喬伊」慶祝。因此宜漾隨手回覆了訊息，就匆匆出門了。

「怎樣的雨 怎樣的夜
怎樣的我能讓你更想念
雨要多大 天要多黑
才能夠有你的體貼」

隨後宜漾走到了路上，由於大雨下不停，路上已經積滿了大大小小的水坑。宜漾的家與餐廳的位置可以視為在一條數線上，宜漾的家位於原點，即座標 0，而餐廳位於座標 n 。另外路上的每個整數點，包含宜漾的家與餐廳，都有水坑，座標 i 上的水坑大小為 a_i 。

現在，宜漾從家裡也就是座標 0 出發，最初她身上的潮濕度為 0。接著她開始走向餐廳，每一步她可以選擇跨出任意整數距離，假設她跨出距離為 k 的一步，則她可以從座標 i 移動到座標 $i + k$ 。

由於宜漾不想浪費時間，因此她不會走出座標 0 到座標 n 的範圍，但她可以朝數線負的方向走。

只不過根據祖沖之的圓周率帶入反三角函數，以及將哈伯常數帶入波茲曼定律，再加上一點波以耳氫原子模型的修正，可以得到以下結論。

倘若宜漾從大小為 x 的水坑跨出步伐，那她會激起大小為 x 的水花，並且在她跨入另一個大小為 y 的水坑時，會再激起大小為 y 的水花，當距離為 1 時，碰撞產生的水花會使宜漾增加 xy 的潮濕度。然而當兩個水花距離越遠，水花們碰撞在一起會產生越大的加成效果，每當距離增加 1，水花使宜漾增加的潮濕度便會加倍。也就是說，當宜漾從座標 i 跨出距離為 k 的步伐到座標 $i + k$ ，他的潮濕度會增加 $2^{k-1}a_i a_{i+k}$ 。

由於宜漾是要去高檔餐廳吃飯，因此她希望到達餐廳時潮濕度越低越好，請你告訴她當她到達座標 n 時，潮濕度最低可以是多少。

－ 輸入 －

輸入有兩行。

第一行包含一個正整數 n ，代表餐廳的座標。

第二行包含 $n + 1$ 個正整數 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ，代表每個整數點上水坑的大小。

－ 輸出 －

輸出一個整數，代表宜漾到達餐廳時可能的最小潮濕度。

－ 輸入限制 －

- $1 \leq n \leq 2 \times 10^6$
- $1 \leq a_i \leq 10^6$

－ 子任務 －

編號	分數	額外限制
1	0	範例輸入輸出
2	8	$a_i \leq 2$ 且 $n \leq 10^5$
3	12	$n \leq 20$
4	15	$n \leq 3000$
5	35	$n \leq 10^5$
6	30	無額外限制

— 範例輸入 —

5
2 1000 1000 1 1000 3

— 範例輸出 —

14

F. 簡短的問題

Problem ID: ShortProblem

Time Limit: 1.0s

Memory Limit: 128MiB

輸入一個 n ，請輸出 2^n 除以 $10^9 + 9$ 的餘數。

— 輸入 —

輸入只有一行，包含一個整數 n ，意義如題目所述。

— 輸出 —

輸出 2^n 除以 $10^9 + 9$ 的餘數。

— 輸入限制 —

- $0 \leq n \leq 10^{10000000}$

— 子任務 —

編號	分數	額外限制
1	0	範例輸入輸出
2	25	$n \leq 10^7$
3	25	$n \leq 10^{18}$
4	25	$n \leq 10^{5000}$
5	25	無額外限制

－ 範例輸入 1 －

10

－ 範例輸出 1 －

1024

－ 範例輸入 2 －

30

－ 範例輸出 2 －

73741815

－ 範例說明 －

範例測資 1 說明:

$$2^{10} = 1024。$$

範例測資 2 說明:

$$2^{30} = 1073741824，除以 $10^9 + 9$ 的餘數為 73741815。$$