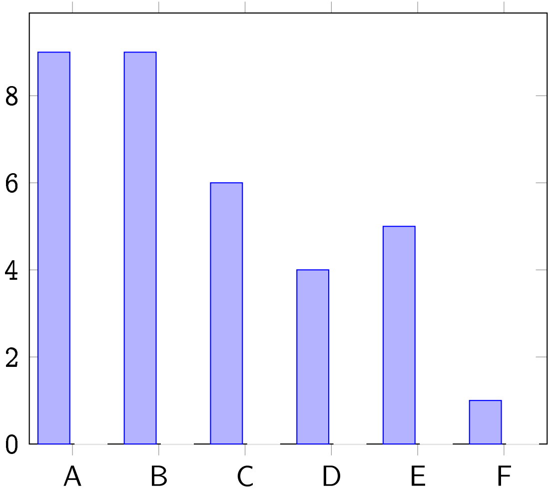
114 臺南一中學科能力競賽校內複選

題解

Sep 25 2025

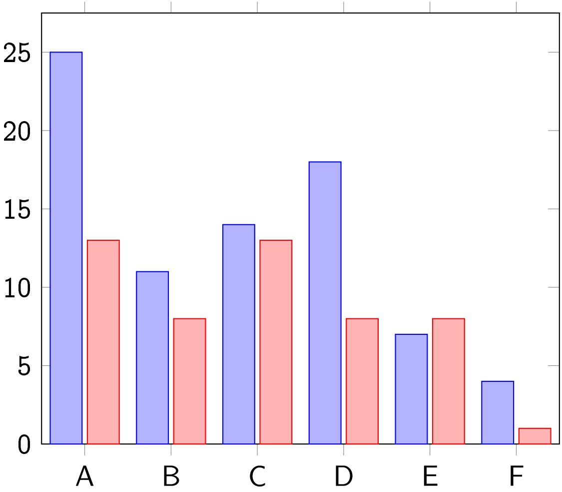
Overview – 預期解出人數

預測校隊線: 450



Overview – 實際解出人數

預測複選線: 450 實際複選線: 318



出題者想說的和 Fun Fact

出題者想說的和 Fun Fact – 前言

出題出很久，希望大家都有好好打

出題者想說的和 Fun Fact – 前言

出題出很久，希望大家都有好好打

希望比賽過程不要出事

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pB

- 史蒂夫最後會說甜菜是因為甜菜的根是圓的 (圓根)，並且有雙關暗示艾力克斯是天才。

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pB

- 史蒂夫最後會說甜菜是因為甜菜的根是圓的 (圓根)，並且有雙關暗示艾力克斯是天才。
- 米勒拉賓是一個判斷質數的演算法

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pB

- 史蒂夫最後會說甜菜是因為甜菜的根是圓的 (圓根)，並且有雙關暗示艾力克斯是天才。
- 米勒拉賓是一個判斷質數的演算法
- Alapin Variation 是西洋棋中的一個開局，走法為 1.e4 c5 2.c3。

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pC

- 因為 2024 年的全國賽開始會出現互動題了，依照目前趨勢全國賽以後應該每年都會有一題互動題 (我猜的)，所以大家必須要會寫互動題。

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pC

- 因為 2024 年的全國賽開始會出現互動題了，依照目前趨勢全國賽以後應該每年都會有一題互動題 (我猜的)，所以大家必須要會寫互動題。
- 本題序改編自 2024 全國賽測機題的 pB，為了避免有些人沒看過那題，所以在測機也用同一個模板出了一題，雖然有沒有看過不影響作答就是了。

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pC

- 因為 2024 年的全國賽開始會出現互動題了，依照目前趨勢全國賽以後應該每年都會有一題互動題 (我猜的)，所以大家必須要會寫互動題。
- 本題序改編自 2024 全國賽測機題的 pB，為了避免有些人沒看過那題，所以在測機也用同一個模板出了一題，雖然有沒有看過不影響作答就是了。
- 應該是校內賽第一次出現互動題

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pE

- 本題序小部分參考 2023 校內初選-地震。

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pF

- 本題序小部分參考 2024 校內初選-忠孝東路走九遍。

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pF

- 本題序小部分參考 2024 校內初選-忠孝東路走九遍。
- 忠孝東路走九遍是一首老歌

出題者想說的和 Fun Fact – Fun Fact — pF

- 本題序小部分參考 2024 校內初選-忠孝東路走九遍。
- 忠孝東路走九遍是一首老歌
- 在忠孝東路跑的捷運真的叫 BL (板南線)，而主角叫 Ame 是因為去年這題主角叫 Same，如有雷同純屬巧合。

出題者想說的和 Fun Fact

1. A：枚舉 + 國中數學
2. B：數論 + 分 case 討論
3. C：互動題
4. D：DP
5. E：資料結構
6. F：圖論

A. 法陣 (triangle)

A. 法陣 (triangle) – 題目敘述

二維直角座標上給你六個點，問你這六個點是否能分成三個點三個點，使得這兩個三角形全等。

A. 法陣 (triangle) – 子任務

1. 無額外限制

A. 法陣 (triangle) – 子任務 1 — 無額外限制

把 $\binom{6}{3}$ 種組合全部都暴搜看看就好。

判斷兩個三角形全等可以用國中學過的 SSS 全等，也就是三條邊的長度有沒有一一對應來判斷。

B. 圓根 (root)

B. 圓根 (root) – 題目敘述

給你一個奇數 n，保證 n 不是質數。
問你 n 能不能被表示成 p^k 其中 p 為奇質數且 k 為正整數。

B. 圓根 (root) – 子任務

1. $n \leq 10^6$
2. $n \leq 10^{12}$
3. 無額外限制

B. 圓根 (root) – 子任務 1 — $n \leq 10^6$

用 $O(n)$ 的方法將 n 質因數分解就好

B. 圓根 (root) – 子任務 2 — $n \leq 10^{12}$

用 $O(\sqrt{n})$ 的方法將 n 質因數分解就好

B. 圓根 (root) – 子任務 3 — 無額外限制

用 $O(\sqrt[4]{n})$ 的方法 (Pollard Rho) 將 n 質因數分解就好

B. 圓根 (root) – 子任務 3 — 無額外限制

用 $O(\sqrt[4]{n})$ 的方法 (Pollard Rho) 將 n 質因數分解就好

太超綱了!! 換個方法

B. 圓根 (root) – 子任務 3 — 無額外限制

我們可以觀察到，如果 n 可以被表示成 p^k，其中如果 $k \geq 3$ 那麼 p 一定小於等於 $\sqrt[3]{maxn} \approx 2 \times 10^6$ 。

B. 圓根 (root) – 子任務 3 — 無額外限制

我們可以觀察到，如果 n 可以被表示成 p^k，其中如果 $k \geq 3$ 那麼 p 一定小於等於 $\sqrt[3]{maxn} \approx 2 \times 10^6$ 。

因為題目保證不是質數，所以 k 不會是 1

B. 圓根 (root) – 子任務 3 — 無額外限制

我們可以觀察到，如果 n 可以被表示成 p^k，其中如果 $k \geq 3$ 那麼 p 一定小於等於 $\sqrt[3]{maxn} \approx 2 \times 10^6$ 。

因為題目保證不是質數，所以 k 不會是 1

因此我們只要先檢查 p 能不能是小於等於 2×10^6 的所有數，如果都不行，那麼剩下的可能就是 $k = 2$，所以只要在檢查 n 是不是完全平方數就好了。

C. 隱藏的排列 (permutation)

C. 隱藏的排列 (permutation) – 題目敘述

互動題，有一個 1 到 n 的隱藏排列 p ，每次你可以詢問 $p_i - p_j$ 是多少，花 $n-1$ 次以內的詢問還原出那個序列。

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務

1. $n = 3$
2. $p_1 = 1$
3. 無額外限制

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 1 — $n = 3$

因為就 3! 種可能的排列，我們觀察一下每一個排列的 $p_2 - p_1$ 和 $p_3 - p_1$ 是多少

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 1 — $n = 3$

因為就 3! 種可能的排列，我們觀察一下每一個排列的 $p_2 - p_1$ 和 $p_3 - p_1$ 是多少

1 2 3 -> (1, 2)
1 3 2 -> (2, 1)
2 1 3 -> (-1, 2)
2 3 1 -> (1, -2)
3 1 2 -> (-2, 1)
3 2 1 -> (-1, -1)

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 1 — $n = 3$

因為就 3! 種可能的排列，我們觀察一下每一個排列的 $p_2 - p_1$ 和 $p_3 - p_1$ 是多少

1 2 3 -> (1, 2)
1 3 2 -> (2, 1)
2 1 3 -> (-1, 2)
2 3 1 -> (1, -2)
3 1 2 -> (-2, 1)
3 2 1 -> (-1, -1)

可以發現兩兩相異，因此我們可以用這兩個詢問找到對應的那個排列。

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 2 — $p_1 = 1$

如果我們知道了 $p_i - p_1 = k$，那麼我們就可以推得 $p_i = p_1 + k$ 了。

又知道 $p_1 = 1$，因此就可以算出所有 p_i 了。

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 3 — 無額外限制

我們先假設 $p_1 = 0$，如此可以用 subtask 2 的方法得出一個排列，我們假設叫 q。

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 3 — 無額外限制

我們先假設 $p_1 = 0$，如此可以用 subtask 2 的方法得出一個排列，我們假設叫 q。

舉例來說，那個隱藏的序列 p 是 [2 4 1 5 3]，那我們得到的 q 會是 [0 2 -1 3 1]。

C. 隱藏的排列 (permutation) – 子任務 3 — 無額外限制

我們先假設 $p_1 = 0$，如此可以用 subtask 2 的方法得出一個排列，我們假設叫 q。

舉例來說，那個隱藏的序列 p 是 [2 4 1 5 3]，那我們得到的 q 會是 [0 2 -1 3 1]。

我們可以觀察到 p 和 q 的最小值會發生在同個位置，因此 q 最小值那個地方在 p 中會是 1。

因此我們只要將這個 q 全部加上 1 - (q 的最小值) 就會變成 p 了。

D. 切蛋糕 (cake)

D. 切蛋糕 (cake) – 題目敘述

給你一個長度為 n ($n \leq 3000$) 的序列，你可以把它切成很多個區間。

對於每個區間，你可以選擇把那個區間的分數設為 0 或那個區間的數字總和乘以區間長度，問你分數總和最大可以是多少。

D. 切蛋糕 (cake) – 子任務

1. C_i 皆相同
2. 無額外限制

D. 切蛋糕 (cake) – 子任務 1 — C_i 皆相同

可以觀察到不要切一定會最好。

D. 切蛋糕 (cake) – 子任務 2 — 無額外限制

我們定義 $dp[i]$ 為: 只看 1 到 i，分數總和最大會是多少。

D. 切蛋糕 (cake) – 子任務 2 — 無額外限制

我們定義 $dp[i]$ 為: 只看 1 到 i，分數總和最大會是多少。

因此我們有轉移式

$$dp[i] = \max(dp[i-1], \max_{1 \le j < i} (dp[j] + sum(j+1, i) \times (i-j)))$$

其中 $sum(j+1, i)$ 為 $j+1$ 到 i 的數字總和，可以用前綴和快速查詢。

而最後 $dp[n]$ 即為答案

E. 地震 (earthquake)

E. 地震 (earthquake) – 題目敘述

給你一個長度為 n 的序列 h，有 q 個事件

1 l r c：對 l 到 r 都加上 c

2 a b：問你有多少整數 i 滿足 $a \leq i < b$ 且 $h_i < h_{i+1}$

E. 地震 (earthquake) – 子任務

1. 不會有 $1\ L\ R\ C$ 類型的事件
2. 所有 $2\ A\ B$ 的事件中 $A = 1, B = N$
3. 所有 $1\ L\ R\ C$ 的事件中 $L = R$
4. 無額外限制

E. 地震 (earthquake) – 子任務 1 — 不會有 1 L R C 類型的事件

開一個陣列 p，接著對於第 $h_i < h_{i+1}$ 的所有 i，我們在 p_i 上加 1，詢問時就相當於問 $p_l + ... + p_{r-1}$ 的值，可以用前綴和快速回答。

E. 地震 (earthquake) – 子任務 2 — 所有 2 A B 的事件中 $A = 1, B = N$

可以觀察到，若出現第 1 種操作，那 subtask 1 所述的陣列 p 只會在 $a-1$ 及 b 的位置有可能發生改變，因此我們只要看這兩個位置有沒有改變就好。

E. 地震 (earthquake) – 子任務 3 — 所有 1 L R C 的事件中 $L = R$

根據 subtask 1 和 2，我們可以發現這個陣列 p 會需要修改，因此我們可以使用二元索引樹 (BIT) 等資料結構來維護這個陣列 p。

E. 地震 (earthquake) – 子任務 4 — 無額外限制

綜合上述子任務，我們還需要快速知道某個位置目前的值是多少，因此可以使用差分來維護陣列 h，這樣也可以使用二元索引樹來快速維護。

F. 忠孝東路走一遍 (road)

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 題目敘述

給你一個序列 C 和 X, Y, Z，你一開始在 1 上。

移動有兩種方式:

1. 花 X 元從 i 移動到 $i-1$ 或 $i+1$
2. 選一個 $C_i = C_j$ 的 j 並花 Y 元從 i 移動到 j

對於第二種移動方式，有一個 Z $(Z \leq 2Y)$ 元的優惠券，使用 t 次第二種移動方式花的實際金錢為 $\max(0, t \times Y - Z)$

對於 $k = 1, 2, ..., n$ 問你從 1 走到 k 再從 k 走到 n 最小花費是多少。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務

1. C_i 皆相同
2. 對於所有 k，滿足 $C_i = k$ 的 i 的數量不會超過 2 個
3. $Z = 0$
4. 無額外限制

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 1 — C_i 皆相同

枚舉 1 到 k 和 k 到 n 分別是用哪種移動方式就好。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 2 — 對於所有 k，滿足 $C_i = k$ 的 i 的數量不會超過 2 個

首先，我們偷偷的在這個子任務再加個 $Z = 0$ 的條件。

我們可以直接把每個街區視為點，然後每個點可以到達的所有街區建一條邊，由於圖的邊是雙向的，從 1 到 k 再從 k 到 n 的最短路徑，相當於從 1 到 k 加上從 n 到 k 的最短路徑。

因此我們只要從點 1 和點 n 跑一次 dijkstra 後就可以得出了。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 2 — 對於所有 k，滿足 $C_i = k$ 的 i 的數量不會超過 2 個

但是這子任務沒有保證 $Z = 0$，因為題目限制 $Z \leq 2Y$，因此我們對每個點都記錄用了 0 次，1 次，或 2 次以上的第二種移動方式到這個點的最短路徑。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 2 — 對於所有 k，滿足 $C_i = k$ 的 i 的數量不會超過 2 個

但是這子任務沒有保證 $Z = 0$，因為題目限制 $Z \le 2Y$，因此我們對每個點都記錄用了 0 次，1 次，或 2 次以上的第二種移動方式到這個點的最短路徑。

如此一來我們分別枚舉 1 到 k 和 k 到 n 分別用了幾次第二種移動方式的所有可能，取個最小值就是答案了。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 3 — $Z = 0$

如果用 subtask 2 第一頁寫的那個方式做會遇到一個問題，如果我們每個點可以到達的所有街區都建一條邊，那邊的數量最多有 $O(n^2)$ 條。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 3 — $Z = 0$

如果用 subtask 2 第一頁寫的那個方式做會遇到一個問題，如果我們每個點可以到達的所有街區都建一條邊，那邊的數量最多有 $O(n^2)$ 條。

我們可以對每個 C_i 都建一條超級點，對於所有相同 C_i 的點，我們建一條邊權為 Y 的邊到那個超級點，再建一條邊權為 0 的邊回來就好，這樣邊的數量就會是 $O(n)$ 條的。

F. 忠孝東路走一遍 (road) – 子任務 4 — 無額外限制

綜合 subtask 2, 3 就可以做出來了。