Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1 Motivation

Das zentrale Ergebnis des letzten Vortrags war die Existenz und Eindeutigkeit des Haarmaßes, welche sich im folgenden Satz zusammenfassen lässt.

Satz (Existenz und Eindeutigkeit des Haarmaßes)**.** Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann gibt es eine linksinvariantes Radonmaß $\mu \neq 0$ auf $\mathcal{B}(X)$. Dieses ist eindeutig bis auf positive Vielfache.

Dieses Maß wird als das Haarmaß bezeichnet. Somit erhalten wir auf jeder Gruppe einen sinnvollen Begriff des Integrals. Dies erlaubt uns, wirklich sinnvoll über Räume wie $\mathrm{L}^2(G)$ zu reden.
Im Spezialfall erhalten wir dann natürlich Ergebnisse für die Integrationstheorie auf dem $\mathbb{R}^d$ oder anderen spannenden Gruppen wie $\mathbb{R}^\times$. Jedoch sind nicht alle Gruppen so gut strukturiert wie diese Gruppen. Diese sind nämlich abelsch und lokalkompakt. Die Integrationstheorie auf solchen Gruppen ist zentraler Gegenstand der *harmonischen Analysis*. Der nicht abelsche Fall ist jedoch nicht so gut strukturiert und deutlich unübersichtlicher. Für den kompakten Fall erhalten wir jedoch den *Satz von Peter-Weyl*, welcher viele Informationen über die Struktur von $\mathrm{L}^2(G)$ beinhaltet. Diesen zu verstehen und zu beweisen ist Gegenstand des vorliegenden Seminarvortrags.
Zunächst brauchen wir jedoch noch Grundlagen der Darstellungstheorie topologischer Gruppen.

1.2 Notation

- Für einen Banachraum V bezeichnen wir mit $\mathrm{GL}_{\mathrm{cont}}(V)$ die Menge der stetigen, linearen, invertierbaren Abbildungen.
- Für zwei Banachräume V, W bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(V, W)$ die Menge der beschränkten, stetigen linearen Abbildungen $T : V \to W$.

2. Grundlagen

2.1 Haarsche Integrationstheorie

2.2 Funktionalanylsis

3. Darstellungstheorie

Ziel der Darstellungstheorie ist es gewissermaßen, das Problem der schwierigen Strukturierung von Gruppen zu lösen, indem man die Elemente in lineare Operatoren übersetzt. Für diese kennen wir nämlich aus der linearen Algebra im endlichdimensionalen sowie der Funktionalanalysis um unendlichdimensionalen Fall viele hilfreiche Sätze, mit denen wir sehr häufig mehr über die Struktur der Gruppe verstehen können.

3.1 Grundlegende Begriffe

Der zentrale Begriff in der Darstellungstheorie topologischer Gruppen ist der einer Darstellung.

Definition 1.1 (Darstellung)**.** Sei V ein Banachraum und G eine topologische Gruppe. Eine Banachraum-Darstellung [1] von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to \mathrm{GL}_{\mathrm{cont}}(V)$, sodass die Abbildung

$$G \times V \to V, (g, v) \mapsto (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

stetig ist.

Beispiel 1. Für $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ erhalten wir folgende Standarddarstellung auf $V = \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, $A \mapsto A$ mit Matrixmultiplikation als zugehöriger Wirkung.

Bereits aus der Algebra 1 wissen wir um die Wichtigkeit bestimmter „elementarer" Strukturen, z.B. den zyklischen Gruppen bei der Klassifikation endlicher abelscher Gruppen. Auch in der Darstellungstheorie gibt es einen ähnlichen Begriff:

Definition 1.2 (Unterdarstellungen, irreduzible Darstellungen)**.** Sei (ρ, V_ρ) eine Darstellung einer topologischen Gruppe G.

1. (π, V_π) heißt Unterdarstellung von (ρ, V_ρ), falls V_π ein abgeschlossener Untervektorraum von V_ρ ist und ρ eingeschränkt auf V_π gleich π ist.
2. (ρ, V_ρ) heißt irreduzibel , falls es keine nicht-trivialen Unterdarstellungen gibt, also falls für jede Unterdarstellung (π, V_π) gilt, dass $V_\pi = \{0\}$ oder $V_\pi = V_\rho$.

Bemerkung 1. Jeder abgeschlossene Untervektorraum $U \subseteq V_\rho$, für den $\rho(G)U \subseteq U$ gilt, liefert eine Unterdarstellung durch Einschränken von ρ auf U.

Für den Fall, dass die Banachräume V für unsere Darstellungen sogar Hilberträume sind, gibt es noch eine weitere Art von Darstellungen:

Definition 1.3 (Unitäre Darstellungen)**.** Sei V ein Hilbertraum und G eine topologische Gruppe. Eine Darstellung ρ auf V heißt unitäre Darstellung, falls $\rho(g)$ unitär ist für alle $g \in G$, also $\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $g \in G$ und alle $v, w \in V$.

[1] Häufig werden wir nur Darstellung sagen und damit eine Banachraum-Darstellung meinen.

Wir möchten später zeigen, dass sich jede endlichdimensionale Darstellung als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben lässt. Dazu definieren wir

Definition 1.4 (Direkte Summe von Darstellungen)**.** Seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ zwei unitäre Darstellungen. Auf der direkten Summe von Vektorräumen $V := V_1 \oplus V_2$ definieren wir die direkte Summe von Darstellungen $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ durch komponentenweise Wirkung. Analog definiert man dies für beliebige Indexfamilien I.

Besonders relevant werden auch Beziehungen zwischen Darstellungen, die wie üblich über Abbildungen gegeben sind.

Definition 1.5 (G-Homomorphismen, Äquivalenz von Darstellungen)**.** Seien $(\rho, V_\rho), (\pi, V_\pi)$ zwei Darstellungen von G.

1. Ein stetiger, linearer Operator $T : V_\rho \to V_\pi$ heißt G-Homomorphismus , falls

$$T \circ \rho(g) = \pi(g) \circ T$$

   für alle $g \in G$ gilt.

2. Die Menge aller G-Homomorphismen von V_ρ nach V_π bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\pi)$.

3. Falls ρ und π unitäre Darstellungen sind, heißen diese unitär äquivalent , falls es einen unitären G-Homomorphismus $T : V_\rho \to V_\pi$ gibt.

3.2 Lemma von Schur

Wie man sich schon vorstellen kann, ist die Theorie irreduzibler Darstellungen sehr überschaubar. Ein zentrales Resultat dieser ist das sogenannte Lemma von Schur:

Lemma 2.1 (Schur). Seien (ρ, V_ρ) eine unitäre Darstellung einer topologischen Gruppe G. Dann sind äquivalent:

1. ρ ist irreduzibel.

2. Falls $T \in \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\rho)$, dann gilt $T \in \mathbb{C}\,\mathrm{id}$.

Für den Beweis dieses Lemma brauchen wir noch ein wenig Vorarbeit aus der Funktionalanalysis:

Lemma 2.2. Sei H ein Hilbertraum und $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine Menge beschränkter Operatoren auf H, sodass für alle $S \in A$ auch $S^* \in A$ gilt. Dann sind äquivalent:

1. Die einzige A-invariante, abgeschlossene Menge ungleich $\{0\}$ ist V.

2. Falls $T \in \mathcal{L}(H)$ mit allen $S \in A$ kommutiert, dann ist $T = \lambda\,\mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen, (2) gilt. Dann sei $\{0\} \neq L \subseteq H$ ein abgeschlossener, A-invarianter Unterraum von H. Dann ist auch $L^\perp$ ein A-invarianter, abgeschlossener Untervektorraum, denn für alle $T \in A$, $x \in L^\perp$ und $y \in L$ gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

Da $T^* \in A$, folgt $T^* y \in L$. Somit gilt auch

$$\langle x, T^* y \rangle = 0.$$

Da die gewählten Elemente beliebig waren, folgt $Tx \in L^\perp$ und somit ist $L^\perp$ ein A-invarianter, abgeschlossener Untervektorraum. Dann betrachten wir die orthogonale Projektion auf L $P_L : H \to L$. Aus obiger Rechnung sehen wir direkt mittels $H = L \oplus L^\perp$, dass diese mit allen $T \in A$ kommutiert. Unter Ausnutzung von (2) erhalten wir also, dass $P_L = \mathrm{id}$ (da Projektionen Operatornorm 1 haben) gilt. Somit muss $L = H$ gelten.
Angeommen (1) gilt. Sei also $T \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator, der mit A kommutiert. Dann kommutiert auch T^* mit A, denn für $S \in A$ ist $S^* \in A$ ud somit

$$\begin{aligned}
\langle ST^* x, y \rangle &= \langle T^* x, S^* y \rangle \\
&= \langle x, TS^* y \rangle \\
&= \langle x, S^* T \rangle \\
&= \langle T^* S x, y \rangle,
\end{aligned}$$

da $S^* \in A$. Da die Matrixkoeffizienten übereinstimmen, folgt $ST^* = T^*S$. Indem wir $T = \frac{1}{2}(T + T^*) - \frac{1}{2}i(iT - iT^*)$ betrachten, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass T selbstadjungiert ist. Da die Aussage für $T = 0$ mit $\lambda = 0$ klar ist, können wir zudem $T \neq 0$ annehmen. Wir zeigen, dass das Spektrum von T aus einem einzigen Punkt besteht.
Angenommen, es gibt $x \neq y \in \sigma(T)$. Dann gibt es zwei Funktionen $f, g \in C(\sigma(T))$ mit $f(x) \neq 0 \neq g(y)$ und $f \cdot g = 0$. Dann betrachten wir das stetige Funktionalkalkül $f(T)$ und $g(T)$ und erinnern uns daran, dass jeder Operator S, der mit T kommutiert, auch mit $f(T)$ kommutiert für $f \in C(\sigma(T))$. Dann ist $f(T) \neq 0 \neq g(T)$ und $f \cdot g(T) = 0$, da das holomorphe Funktionalkalkül multiplikativ ist.
Da $g(T)$ mit A kommutiert, ist $L = \overline{g(T)H}$ ein A-invarianer Untervektorraum von H ungleich dem Nullraum. Aus Anwendung von (1) erhalten wir, dass $L = H$. Aber es gilt gleichzeitig auch, dass $\{0\} \neq f(T)H = f(T)L \subseteq \overline{f(T)g(T)H} = \{0\}$, was einen Widerspruch darstellt. Somit muss das Spektrum einelementig sein. □

Zusätzlich brauchen wir noch ein kleines Lemma, um ein wenig mehr über unitäre Darstellungen zu erfahren.

Lemma 2.3. Sei (ρ, V) eine Darstellung. Dann sind äquivalent:

1. ρ ist unitär.
2. $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^*$ für alle $g \in G$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \rho \text{ ist unitär} &\iff \rho(g)^* \text{ unitär } \forall g \in G \\ &\iff \rho(g)^{-1} = \rho(g)^* \forall g \in G \\ &\iff \rho(g^{-1}) = \rho(g)^* \forall g \in G, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass ρ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Nun können wir das Lemma Lemma von Schur beweisen, welches mehr oder weniger ein direktes Korollar aus den obigen Lemmata 2.2 und 2.3 ist.

Beweis (Schur). Nach Lemma 2.3 ist $A := \{\rho(g) : g \in G\}$ eine Menge, für die $S \in A \iff S^* \in A$ gilt. Daher können wir Lemma 2.2 anwenden und erhalten die gewünschte Aussage. □

Während das Lemma von Schur im ersten Moment so wirkt, als könne man damit nur die Homomorphismen einer Darstellung auf sich selbst klassifizieren, liefert es auch viele Informationen für die Homomorphismen zwischen beliebigen irreduziblen Darstellungen.

Korollar 2.4. Seien $(\rho, V_\rho), (\pi, V_\pi)$ zwei irreduzible, unitäre Darstellungen. Dann gilt für einen G- Homomorphismus $T : V_\rho \to V_\pi$, dass $T = 0$ oder dass T invertierbar mit stetiger Umkehrabbildung ist. In diesem Fall existiert ein $c > 0$, sodass cT unitär ist. Dies zeigt insbesondere, dass $\mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\pi) = \{0\}$ gilt, außer ρ und π sind unitär äquivalent. In diesem Fall ist $\dim(\mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\pi)) = 1$-

Beweis. Sei $T : V_\rho \to V_\pi$ ein G-Homomorphismus. Betrachte $T^* : V_\pi \to V_\rho$. Diese Abbildung ist ebenfalls ein G-Homomorphismus wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \langle \rho(g)T^*x, y\rangle &= \langle T^*x, \rho(g)^*y\rangle \\ &= \langle x, T\rho(g^{-1})y\rangle \\ &= \langle x, \pi(g^{-1})Ty\rangle \\ &= \langle \pi(g)x, Ty\rangle \\ &= \langle T^*\pi(g)x, y\rangle, \end{aligned}$$

für alle $g \in G, x, y \in H$. Damit ist $T^*T \in \mathrm{Hom}_G(V_\rho, V_\rho)$. Aus dem Lemma von Schur folgt, dass $T^*T = \lambda\,\mathrm{id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Falls $T \neq 0$, dann ist $T^*T \neq 0$. Durch die positive Semidefinitheit der Abbildung, folgt $\lambda > 0$. Betrachte $c = \sqrt{\lambda^{-1}}$. Dann ist $(cT)^*(cT) = \mathrm{id}$. Zusätzlich folgt analog, dass TT^* bijektiv ist. Damit muss cT bijektiv sein und somit auch unitär.
Für je zwei G-Homomorphismen $S, T : V_\rho \to V_\pi$ mit $T \neq 0$ folgt also, dass $S \circ T^{-1} \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\pi)$. Somit $S \circ T^{-1} = \lambda\,\mathrm{id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit $S = \lambda T$. Dies zeigt die Eindimensionalität. □

3.3 Kompakte Gruppen

Das Lemma von Schur liefert uns schon eine gute Charakterisierung irreduzibler Darstellungen. Jedoch interessieren uns auch nicht notwendigerweise irreduzible Darstellungen. Diese können im Allgemeinen etwas unübersichtlicher werden. Für kompakte Gruppen wird die Situation jedoch recht überschaubar und hier wird uns das erste Mal die Integration bezüglich des Haarmaßes gute Dienste erweisen.
Zuerst beginnen wir damit, die endlichdimensionalen Darstellungen genauer zu studieren. Dies wirkt auf den ersten Blick stark einschränkend. Wir werden jedoch sehen, wie mächtig diese Darstellungen auf kompakten Gruppen sind.
Bevor wir damit jedoch starten können, müssen wir zumindest kurz über die Haarmaße auf kompakten Gruppen reden. A priori ist nämlich nicht klar, ob es einen Unterschied zwischen linken und rechten Haarmaßen gibt oder nicht. Dazu brauchen wir einige Hilfsmittel.

Definition 3.1 (modulare Funktion, unimodulare Gruppen)**.** Sei G eine lokalkompakte Gruppe und μ ein Haarmaß auf G. Für $x \in G$ definieren wir das Maß μ_x durch $\mu_x(A) = \mu(Ax)$, wobei es sich ebenfalls um ein Haarmaß handelt. Somit gibt es durch die Eindeutigkeit des Haarmaßes eine Zahl $\Delta(x) > 0$, mit $\mu_x = \Delta(x)\mu$. Dies definiert eine Abbildung $\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$, welche die modulare Funktion der Gruppe G genannt wird.
Wenn $\Delta \equiv 1$, dann heißt G eine unimodulare Gruppe .

Bemerkung 2. Für unimodulare Gruppen stimmen linke und rechte Haarmaße überein.

Damit wir uns keine Gedanken über das Maß machen müssen, wollen wir zeigen, dass kompakte Gruppen unimodular sind.

Satz 3.2. Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit modularer Funktion $\Delta : G \to \mathbb{R}^\times_{>0}$. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. Für $y \in G$ und $f \in \mathrm{L}^1(G)$ ist $R_y f \in \mathrm{L}^1(G)$ und es gilt
$$\int_G R_y f(x)\ \mathrm{d}x = \int_G f(xy)\ \mathrm{d}x = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x)\ \mathrm{d}x,$$
wobei $R_y f : G \to \mathbb{R}, x \mapsto f(xy)$.
2. Δ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.
3. Kompakte Gruppen sind unimodular.

Beweis. 1. Für charakteristische Funktionen $\mathbb{1}_A$ gilt:
$$\begin{aligned}\int_G \mathbb{1}_A(xy)\ \mathrm{d}x &= \int_A xy\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{Ay^{-1}} x\ \mathrm{d}x\\ &= \mu(Ay^{-1})\\ &= \Delta(y^{-1})\mu(A)\\ &= \Delta(y^{-1}) \int_G \mathbb{1}_A(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Für beliebige integrierbare Funktionen folgt die Aussage mit maßtheoretischer Induktion.

2. Für $x, y \in G$ und eine messbare Menge $A \subseteq G$ gilt
$$\begin{aligned}\Delta(xy)\mu(A) &= \mu_{xy}(A)\\ &= \mu(Axy)\\ &= \mu_y(Ax)\\ &= \Delta(y)\mu(Ax)\\ &= \Delta(y)\Delta(x)\mu(A).\end{aligned}$$

Durch Wahl einer beliebigen Menge A mit $0 < \mu(A) < \infty$ gilt dann

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y).$$

Zur Stetigkeit in y wähle eine Funktion $f \in C_c(G)$ mit $c = \int_G f(x)\ \mathrm{d}x >\neq 0$. Dann folgt durch den ersten Teil der Aussage

$$\Delta(y) = \frac{1}{c}\int_G f(xy^{-1})\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_G R_{y^{-1}}f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dieser Ausdruck ist stetig in y, weswegen auch Δ stetig in y sein muss.

3. Sei nun G kompakt. Da Δ ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, muss $\Delta(G)$ eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}^{\times}_{>0}$ sein. Die einzige kompakte Untergruppe dieser Gruppe ist jedoch $\{1\}$.

□

Dass wir nicht zwischen linken und rechten Haarmaßen unterscheiden müssen, erleichtert die Situation erheblich, weswegen wir uns nun den endlichdimensionalen Darstellungen widmen können. Sei also im Folgenden stets K eine kompakte (also insbesondere lokalkompakte) topologische Gruppe sowie (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung, sofern nicht anders gefordert.

Lemma 3.3. Auf V gibt es stets ein Skalarprodukt, sodass ρ eine unitäre Darstellung wird. Falls ρ irreduzibel ist, dann ist dieses Skalarprodukt eindeutig bis auf eine positive Konstante bestimmt.

Beweis. Wir wählen ein beliebiges Skalarprodukt $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$. Dann definieren wir ein neues Skalarprodukt durch den Ausdruck

$$\langle v, w\rangle := \int_K (\rho(k)v, \rho(k)w)\ \mathrm{d}k$$

bezüglich des Haarmaßes μ, für das $\mu(K) = 1$ gilt. Wir zeigen nun, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt definiert:

1. Die Linearität folgt direkt aus der Linearität von $(\cdot,\cdot)$ und des Integrals.

2. Dass das Skalarprodukt hermitesch ist, folgt unmittelbar aus der Hermitizität des ursprünglichen Skalarproduktes und dem Fakt, dass Konjugieren und Integrieren kommutieren.

3. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die so definierte Abbildung positiv definit ist. Dabei ist die Positivität ebenfalls klar. Sei also $v \in V$, sodass $\langle v, v\rangle = 0$. Dann gilt

$$0 = \langle v, v\rangle = \int_K (\tau(k)v, \tau(k)v)\ \mathrm{d}k.$$

Die Abbbildung $k \mapsto (\tau(k)v, \tau(k)v)$ ist stetig und somit können wir obiges Korollar aus der Maßtheorie verwenden und erhalten, dass $k \mapsto (\tau(k)v, \tau(k)v)$ gleich der Nullabbildung ist. Insbesondere gilt also für $k = 1_G$, dass $\tau(1_G) = \mathrm{id}_V$. Somit folgt also ebenfalls $(v, v) = 0$. Da $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt ist, folgt $v = 0$.

Damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und wir müssen nur noch zeigen, dass ρ unitär bezüglich diesen Skalarprodukts ist. Dazu sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
\langle \tau(x)v, \tau(x)w\rangle &= \int_K (\tau(k)\tau(x)v, \tau(k)\tau(x)w)\ \mathrm{d}k\\
&= \int_K (\tau(kx)v, \tau(kx)w)\ \mathrm{d}k\\
&= \int_K (\tau(k)v, \tau(k)w)\ \mathrm{d}k\\
&= \langle v, w\rangle,
\end{aligned}$$

da die Gruppe K unimodular ist und es sich mit $f : K \to \mathbb{C}, k \mapsto (\tau(k)v, \tau(k)w)$ bei $R_x f : K \to \mathbb{C}$ genau um $k \mapsto (\tau(kx)v, \tau(kx)w)$ handelt und wir somit Satz 3.2 anwenden können. Was noch zu zeigen ist, ist die Eindeutigkeit bis auf positive Konstanten im Fall irreduzibler Darstellungen. Dazu seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ Darstellungen, die sich nur im unitären Skalarprodukt auf V unterscheiden. Bezeichne diese Skalarprodukte mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Betrachte nun die lineare Abbildung $\mathrm{id} : V_1 \to V_2, v \mapsto v$. Da V_1 und V_2 endlichdimensional ist, ist id stetig und ein G-Homomorphismus zwischen ρ_1 und ρ_2. Nun nutzen wir Korollar 2.4, um zu folgern, dass es ein $c > 0$ gibt, sodass $c \cdot \mathrm{id}$ unitär zwischen den beiden Darstellungen ist. Insbesondere folgt dann also, dass

$$\begin{aligned} c^2 \langle v_1, v_2 \rangle_2 &= \langle cv_1, cv_2 \rangle_2 \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle_1 \end{aligned}$$

Damit sind die Skalarprodukte bis auf positive Konstante gleich. □

Zusätzlich lassen sich die endlichdimensionalen Darstellungen gut in „Atome" – die irreduziblen Darstellungen – zerlegen.

Lemma 3.4. Sei (ρ, V) eine endlichdimensionale Darstellung von K. Dann gibt es irreduzible Darstellungen $(\rho_i, V_i)_{i \in I}$, sodass

$$\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$$

.

Beweis. Sei K eine kompakte, topologische Gruppe und (ρ, V) eine Darstellung von K. Da V endlichdimensional ist, können wir die Aussage mit Induktion über $\dim(V)$ führen.
I.A. ($\dim(V) = 1$): Dieser Fall ist klar, da die einzigen Unterräume von V $\{0\}$ und V sind. Somit muss jede eindimensionale Darstellung schon direkt irreduzibel sein.
I.S.: Sei V ein Vektorraum der Dimension $n + 1$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen, wir haben die Aussage schon für alle Vektorräume der Dimension kleiner gleich n gezeigt. Zusätzlich können wir mit Lemma 3.3 annehmen, dass ρ eine unitäre Darstellung ist. Falls ρ bereits irreduzbiel ist, sind wir fertig. Ansonsten gibt es einen $\rho(K)$-invarianten Untervektorraum $\{0\} \subsetneq U \subsetneq V$. Betrachte dessen orthogonales Komplement $U^\perp$. Auch dieser ist abgeschlossen unter $\rho(K)$, denn für $g \in K, u \in U, v \in U^\perp$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle u, \rho(g)v \rangle &= \langle \rho(g)^* u, v \rangle \\ &= \langle \rho(g^{-1}) u, v \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass $\rho(g)$ unitär ist, und im letzten Schritt, dass U $\rho(K)$-invariant ist. Nun können wir die Induktionsvoraussetzung auf U und $U^\perp$ anwenden und erhalten durch $V = U \oplus U^\perp$ die gewünschte Aussage. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Definitionen und einem Korollar:

Definition 3.5 (unitäres Dual, endliches unitäres Dual)**.** Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann bezeichnen wir mit $\widehat{G}$ die Menge aller Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen auf G bezüglich unitärer Äquivalenz. Wir nennen $\widehat{G}$ unitäres Dual zu G.
Zusätzlich bezeichnen wir für eine kompakte Gruppe K die Äquivalenzklassen der endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen mit $\widehat{K}_{\text{fin}}$ und nennen dies das endliche, unitäre Dual von K. Darstellungen

Bemerkung 3. A priori gibt es ein kleines mengentheoretisches Problem bei der Definition dieser beiden Mengen, da nicht trivial ist, dass es sich wirklich um Mengen handelt. Um dies zu beheben, müssten wir ein wenig in die Theorie der Kardinalzahlen eintauchen. Dies wollen wir hier nicht weiter vertiefen.

Ein wesentliches Ziel des Vortrags ist es zu zeigen, dass $\widehat{K} = \widehat{K}_{\text{fin}}$ gilt.

Korollar 3.6. Es gilt stets $\widehat{K}_{\text{fin}} \subseteq \widehat{K}$.

Beweis. Zu zeigen ist bloß, dass alle endlichdimensionalen Darstellungen auch unitär sind. Dies haben wir bereits in Lemma 3.3 gezeigt. □

4. Der Satz von Peter-Weyl

4.1 Orthogonalitätseigenschaften

Index