Phân tích độ phức tạp thuật toán đệ qui

Nhóm 2-CS112.L23.KHCL

Trần Hồ Thiên Phước

Lê Văn Trí

Phạm Nguyễn Công Danh

TỔNG QUÁT

I/Nhắc lại về chương trình đệ quy

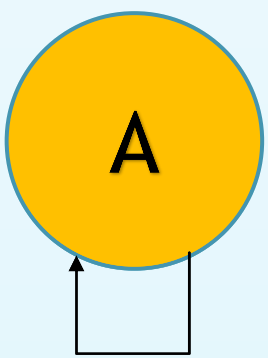
II/Các phương pháp:

1. Vẽ cây đệ quy
2. Các phương pháp sử dụng phương trình đệ quy.
   a. Phương pháp truy hồi
   b. Phương pháp tổng quát

I/Nhắc lại về chương trình đệ quy

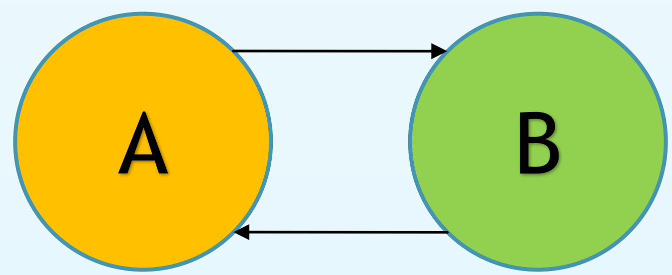
Có hai loại chương trình

+ Trực tiếp (Tính giai thừa, tháp Hà Nội, Fibonacci,...)



Tự gọi lại bản thân

+ Gián tiếp (xét tính chẵn lẻ,...)



Gọi nhau qua lại giữa nhiều hàm

II/Các phương pháp:
1. Vẽ cây đệ quy

Ví dụ: tính độ phức tạp thuật toán fibonacci.

Dãy Fibonacci: 0 1 1 2 3 5 8 13…

```python
def Fibonacci (n):
    if n<1:
        return n
    if n>1:
        return Fibonacci(n-1)+Fibonacci(n-2)
```

Ta có: $F(n)= \begin{cases} F(n-1)+F(n-2), \text{ nếu } n>1 \\ 1, \text{ nếu } n=1 \\ 0, \text{ nếu } n=0 \end{cases}$

Ta có: T(n)= T(n-1)+T(n-2)+C

Với n=4

F(4) $\xrightarrow{\text{Bâc 1}}$ Có 2^0 hàm được gọi

F(3) F(2) $\xrightarrow{\text{Bâc 2}}$ Có 2^1 hàm được gọi

F(2) F(1) F(1) F(0) $\xrightarrow{\text{Bâc 3}}$ Có 2^2 hàm được gọi

Bâc 3

$\underbrace{\text{F(1) F(0)}}$ $\xrightarrow{\text{Bâc 4}}$ Có < 2^3 hàm được gọi

Tại bậc 4 tuy chỉ có 2 hàm được gọi nhưng việc tính toán độ phức tạp cho phép việc tính toán không nhất thiết chính xác ta lấy đầy đủ tại bậc này là 16 hàm để dễ dàng cho việc tính toán

Từ cây nhị phân ta nhận thấy công thức tổng quát cho n:

T(n)< $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} < \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2.2^n - 2$

Áp dụng quy tắc lấy max và bỏ hằng số ta được

O(n)=2^n

Tóm lại: *cách tính độ phức tạp này dự vào việc nhìn cây đồ đệ quy mà phán đoán kết quả. Kết quả tính được không mang tính chính xác cao, nên không khuyến khích cách làm này*

2. Các phương pháp sử dụng phương trinh đệ quy

a. Phương pháp truy hồi

n! = n*(n-1)*(n-2)*.....*2*1

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ nếu } n = 0 \\ n(n-1)! \end{cases}$$

```python
def Factorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * Factorial(n - 1)
```

- Gọi T(n) là thời gian tính n!
- Thì T(n-1) là thời gian tính (n-1)!
- Khi n = 0 thì CT return 1 tốn O(1), do đó ta có T(0) = 1
- Khi n > 0 thì CT phải :
  - Tính (n-1)!, tốn thời gian T(n-1)
  - Tính n*(n-1)! và return kết quả tốn hằng thời gian, cho là 1

$$\mathrm{T(n)}\begin{cases} \mathbf{1} & \textbf{\textit{nếu n=0}} \\ \boldsymbol{T(n-1) + 1} & \textbf{\textit{nếu n>0}} \end{cases}$$

VÍ DỤ 1 VỀ GIẢI PT ĐỆ QUY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRUY HỒI

$$T(n)=\begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 0 \\ T(n-1)+1 & \text{nếu } n > 0 \end{cases}$$

T(n) = T(n-1) + 1

T(n) = [T(n-2) + 1] + 1 = T(n-2) + 2

T(n) = [T(n-3) + 1] + 2 = T(n-3) + 3

……

T(n) = T(n-i) + I

- Quá Trình nên kết thúc khi n – i = 0 ⇔ I = n.
- Khi đó ta có T(n) = T(0) + n = 1+n = O(n)

b. Phương pháp tổng quát

Lời giải tổng quát

- Giải thuật chia để trị:
  - Phân rã bài toán lớn thành các bài toán con
    - Một bài toán lớn có kích thước n, thành a bài toán con có kích thước n/b
  - Tổng hợp các lời giải của các bài toán con để có được lời giải của bài toán lớn
    - Thời gian tổng hợp a bài toán con tốn d(n) thời gian
- Phương trình đệ quy cho giải thuật trên:
  - $T(1)=1$
  - $T(n)=aT(n/b)+d(n)$

Lời giải tổng quát

- Áp dụng phương pháp truy hồi:

$$T(n) = aT(n/b) + d(n)$$
$$= a[T(n/b/b) + d(n/b)] + d(n)$$
$$= a^2T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n)$$
$$= a^2[aT(n/b^3) + d(n/b^2)] + ad(n/b) + d(n)$$
$$= a^3T(n/b^3) + a^2d(n/b^2) + ad(n/b) + d(n)$$
$$= \dots$$
$$= a^kT(n/b^k) + \sum a^i d(n/b^i)$$

Lời giải tổng quát

- Áp dụng phương pháp truy hồi:

$$T(n) = aT(n/b) + d(n)$$
$$= a^k T(n/b^k) + \sum a^i d(n/b^i)$$

– Quá trình kết thúc khi $n/b^k = 1$ hay $k = \log_b n$

$$T(n) = a^k + \sum a^i d(n/b^i)$$

Lời giải tổng quát

- Nghiệm thuần nhất (homogeneous solutions):

  $n^{log_b a}$

- d(n): hàm tiến triển (driving function)
- Nghiệm chính xác sẽ là nghiệm chính xác nếu d(n) = 0, với mọi n
- Nếu d(n) > 0, ta có nghiệm riêng:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(\frac{n}{b^i}\right)=\sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(\frac{b^k}{b^i}\right)=\sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(b^{k-i}\right)$$

Lời giải tổng quát

- Nếu nghiệm thuần nhất lớn nghiệm riêng thì độ phức tạp là nghiệm thuần nhất
- Nếu nghiệm riêng lớn hơn nghiệm thuần nhất thì độ phức tạp là nghiệm riêng
- Tuy nhiên, tính nghiệm không phải lúc nào cũng dễ!

Lời giải tổng quát

- Ta sẽ tính nghiệm riêng trong trường hợp d(n) có dạng đặc biệt
- Hàm nhân, hàm có tính chất nhân (multiplicative function):
  - Hàm d(n) có tính nhân nếu và chỉ nếu d(x.y) = d(x).d(y)
  - Ví dụ:
    - d(n) = n2 là hàm nhân vì d(x.y) = (x.y)2 = x2 .y2 = d(x).d(y)
    - d(n) = 3n2 không phải là hàm nhân

Lời giải tổng quát

- Nếu d(n) là hàm nhân, ta có nghiệm riêng:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(b^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i \left[d(b)\right]^{k-i}$$

$$= \left[d(b)\right]^k \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{a}{d(b)}\right]^i$$

$$= \frac{a^k - \left[d(b)\right]^k}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

Lời giải tổng quát

- Nếu a > d(b),$a^k > [d(b)]^k$

$$T(n)=O(a^k) = O(a^{log_b^n})=O(n^{log_b^a})$$

- Nếu a < d(b)

$$T(n)=O(d(b)^k) = O\left(d(b)^{log_b^n}\right) = O(n^{log_b^{d(b)}})$$

- Nếu a = d(b)

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i d\left(b^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i [d(b)]^{k-i} = [d(b)]^k \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{a}{d(b)}\right]^i$$

$$= d(b)^k k = a^k k$$

$$T(n) = O(n^{log_b^a} log\, n)$$

Lời giải tổng quát

- TH d(b) không phải hàm nhân?

-> Tính trực tiếp nghiệm riêng và nghiệm thuần nhất.


WHY?
WHEN?
WHAT? HOW? WHY?
WHAT?
WHERE?
WHEN?
WHO?
HOW?
WHERE?
WHICH?
WHEN? WHERE?
HOW?
HOW?
WHAT? HOW? WHY?
WHY? HOW?
WHAT? HOW? WHY?
WHO? WHERE? WHAT? HOW?
WHAT?
WHY? HOW? WHERE?
WHO? WHOSE?
WHO?
WHERE?
HOW? WHO?
WHO? WHERE? WHAT? HOW?
WHAT? HOW? WHY?
HOW?

```python
def mergeSort(arr):
    if len(arr) > 1:
        mid = len(arr)//2
        L = arr[:mid]
        R = arr[mid:]
        mergeSort(L)
        mergeSort(R)
        i = j = k = 0
        while i < len(L) and j < len(R):
            if L[i] < R[j]:
                arr[k] = L[i]
                i += 1
            else:
                arr[k] = R[j]
                j += 1
            k += 1

        while i < len(L):
            arr[k] = L[i]
            i += 1
            k += 1

        while j < len(R):
            arr[k] = R[j]
            j += 1
            k += 1
```

```
Mergesort(A):
    n ← length(A)
    if ( n<2 ) return
    mid ← n/2
    left ← array of size (mid)
    right ← array of size (n-mid)
    for i ←0 to mid – 1
        left[i] ←A[i]
     for i ←mid to n - 1
        right[i] ←A[i]
    Mergesort(left)
    Mergesort(right)
    Merge(left, right, A)
```

$$\mathrm{T(n)}=\begin{cases} c & \text{nếu } n = 1 \\ 2T(n/2) + c'n & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Reference

- **http://www.cit.ctu.edu.vn/~dtnghi/ctdl/dophuctap.pdf**
- https://youtu.be/i6a9O0gTstw