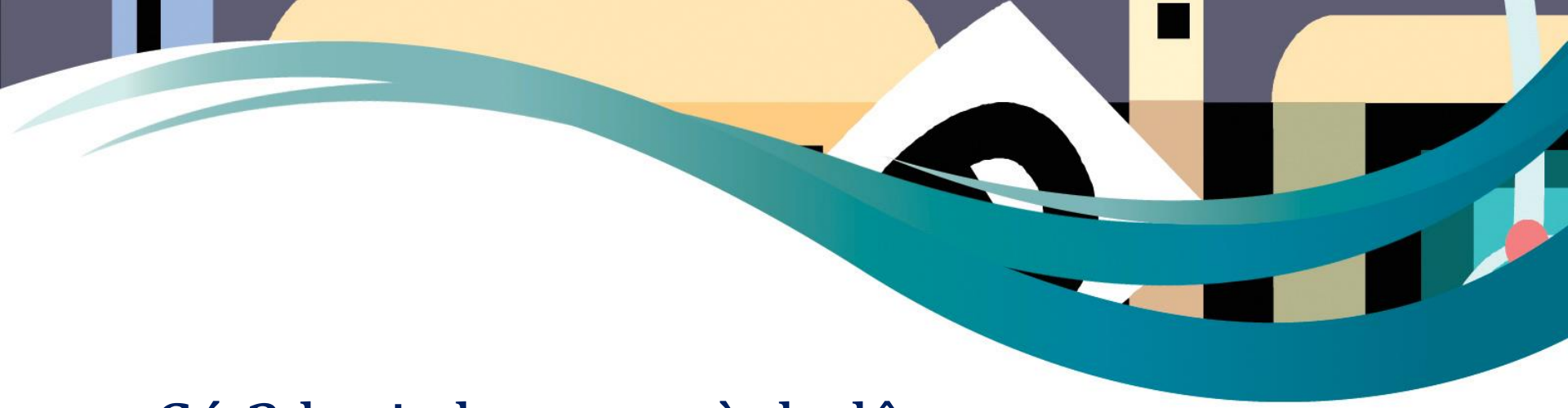
Phân tích độ phức tạp thuật toán đệ qui

Nhóm 2-CS112.L23.KHCL

Trần Hồ Thiên Phước

Lê Văn Trí

Phạm Nguyễn Công Danh



- Có 2 loại chương trình đệ quy
  - Trực tiếp (Tính giai thừa, tháp Hà Nội, Fibonacci,…)
  - Gián tiếp (xét tính chẵn lẻ,…)

Chúng ta cũng có thể chia ra: đệ quy tuyến tính, đệ quy đuôi, đệ quy nhị phân, đệ quy đa tuyến, đệ quy lồng, đệ quy tương hỗ.

- Làm sao để tính độ phức tạp chương trình đệ quy ?
  - Thành lập phương trình đệ quy T(n)
  - Giải phương trình đệ quy bằng:
    - Phương pháp truy hồi
    - Phương pháp đoán nghiệm
    - Áp dụng công thức đối với phương trình đệ quy đã có lời giải

VÍ DỤ VỀ GIẢI PT ĐỆ QUY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRUY HỒI

n! = n*(n-1)*(n-2)*....*2*1

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ nếu } n = 0 \\ n(n-1)! \end{cases}$$

```
1    def Factorial(n):
2        if n == 0:
3            return 1
4        return n * Factorial(n - 1)
5
```

- Gọi T(n) là thời gian tính n!
- Thì T(n-1) là thời gian tính (n-1)!
- Khi n = 0 thì CT return 1 tốn O(1), do đó ta có T(0) = 1
- Khi n > 0 thì CT phải :
  - Tính (n-1)!, tốn thời gian T(n-1)
  - Tính n*(n-1)! và return kết quả tốn hằng thời gian, cho là 1

$$\mathbf{T(n)} \begin{cases} \mathbf{1} & \textbf{nếu } \boldsymbol{n=0} \\ \boldsymbol{T(n-1)} + \mathbf{1} & \textbf{nếu } \boldsymbol{n>0} \end{cases}$$

VÍ DỤ 1 VỀ GIẢI PT ĐỆ QUY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRUY HỒI

$$T(n)=\begin{cases} 1 & nếu\ \ n=0 \\ T(n-1)+1 & nếu\ \ n>0 \end{cases}$$

$T(n) = T(n-1) + 1$

$T(n) = [T(n-2) + 1] + 1 = T(n-2) + 2$

$T(n) = [T(n-3) + 1] + 2 = T(n-3) + 3$

……

$T(n) = T(n-i) + I$

- Quá Trình nên kết thúc khi $n - i = 0 \Leftrightarrow I = n$.
- Khi đó ta có $T(n) = T(0) + n = 1+n = O(n)$

Lời giải tổng quát

- Giải thuật chia để trị:
  - Phân rã bài toán lớn thành các bài toán con
    - Một bài toán lớn có kích thước n, thành a bài toán con có kích thước n/b
  - Tổng hợp các lời giải của các bài toán con để có được lời giải của bài toán lớn
    - Thời gian tổng hợp a bài toán con tốn d(n) thời gian
- Phương trình đệ quy cho giải thuật trên:
  - $T(1)=1$
  - $T(n)=aT(n/b)+d(n)$

Lời giải tổng quát

- Áp dụng phương pháp truy hồi:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + d(n) \\
&= a[T(n/b/b) + d(n/b)] + d(n) \\
&= a^2T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n) \\
&= a^2[aT(n/b^3) + d(n/b^2)] + ad(n/b) + d(n) \\
&= a^3T(n/b^3) + a^2d(n/b^2) + ad(n/b) + d(n) \\
&= \dots \\
&= a^kT(n/b^k) + \sum a^id(n/b^i)
\end{aligned}
$$

Lời giải tổng quát

- Áp dụng phương pháp truy hồi:

$$T(n) = aT(n/b) + d(n)$$
$$= a^k T(n/b^k) + \sum a^i d(n/b^i)$$

– Quá trình kết thúc khi $n/b^k = 1$ hay $k = \log_b n$

$$T(n) = a^k + \sum a^i d(n/b^i)$$

Lời giải tổng quát

- Nghiệm thuần nhất (homogeneous solutions):

  $n^{log_b a}$

- d(n): hàm tiến triển (driving function)
- Nghiệm chính xác sẽ là nghiệm chính xác nếu d(n) = 0, với mọi n
- Nếu d(n) > 0, ta có nghiệm riêng:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(\frac{n}{b^i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(\frac{b^k}{b^i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(b^{k-i}\right)$$

Lời giải tổng quát

- Nếu nghiệm thuần nhất lớn nghiệm riêng thì độ phức tạp là nghiệm thuần nhất
- Nếu nghiệm riêng lớn hơn nghiệm thuần nhất thì độ phức tạp là nghiệm riêng
- Tuy nhiên, tính nghiệm không phải lúc nào cũng dễ!

Lời giải tổng quát

- Ta sẽ tính nghiệm riêng trong trường hợp d(n) có dạng đặc biệt
- Hàm nhân, hàm có tính chất nhân (multiplicative function):
  - Hàm d(n) có tính nhân nếu và chỉ nếu d(x.y) = d(x).d(y)
  - Ví dụ:
    - d(n) = n2 là hàm nhân vì d(x.y) = (x.y)2 = x2 .y2 = d(x).d(y)
    - d(n) = 3n2 không phải là hàm nhân

Lời giải tổng quát

- Nếu d(n) là hàm nhân, ta có nghiệm riêng:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i \mathrm{d}\left(b^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i \left[d(b)\right]^{k-i}$$

$$= \left[d(b)\right]^k \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{a}{d(b)}\right]^i$$

$$= \frac{a^k - \left[d(b)\right]^k}{\frac{a}{d(b)} - 1}$$

Lời giải tổng quát

- Nếu a > d(b), $a^k > [d(b)]^k$

$$T(n)=O(a^k) = O(a^{log_b^n})=O(n^{log_b^a})$$

- Nếu a < d(b)

$$T(n)=O(d(b)^k) = O\left(d(b)^{log_b^n}\right) = O(n^{log_b^{d(b)}})$$

- Nếu a = d(b)

$$\sum_{i=0}^{k-1} a^i d\left(b^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i [d(b)]^{k-i} = [d(b)]^k \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{a}{d(b)}\right]^i$$

$$= d(b)^k k = a^k k$$

$$T(n) = O(n^{log_b^a} log\, n)$$

Lời giải tổng quát

- TH d(b) không phải hàm nhân?

-> Tính trực tiếp nghiệm riêng và nghiệm thuần nhất.


WHEN? WHY? WHERE? WHY?
WHO? WHERE? WHAT? HOW?
WHAT? HOW? WHY?
WHEN?
WHO?
WHAT?
WHERE?
WHEN?
HOW?
WHERE?
WHICH?
WHEN? WHERE?
HOW?
WHAT? HOW? WHY?
WHO? WHERE? WHAT? HOW?
WHY? HOW?
WHAT? HOW? WHY?
WHO? WHERE? WHAT? HOW?
WHERE? WHICH? WHOSE? WHEN? WHY?
WHY? HOW? WHERE?
WHO? WHOSE?
WHERE? WHAT? HOW?
WHAT?
WHY?
HOW?
WHERE?
WHO?
WHERE? WHAT? HOW?
WHERE? WHICH? WHOSE? WHEN? WHY?
WHERE?
HOW?
HOW? WHO?
WHO? WHERE? WHAT? HOW?
WHAT? HOW? WHY?
WHERE?
WHAT?
HOW?
HOW?
HOW?
WHERE?


def mergeSort(arr):
if len(arr) > 1:
mid = len(arr)//2
L = arr[:mid]
R = arr[mid:]
mergeSort(L)
mergeSort(R)
i = j = k = 0
while i < len(L) and j < len(R):
if L[i] < R[j]:
arr[k] = L[i]
i += 1
else:
arr[k] = R[j]
j += 1
k += 1
while i < len(L):
arr[k] = L[i]
i += 1
k += 1
while j < len(R):
arr[k] = R[j]
j += 1
k += 1

```
Mergesort(A):
    n ← length(A)
    if ( n<2 ) return
    mid ← n/2
    left ← array of size (mid)
    right ← array of size (n-mid)
    for i ←0 to mid – 1
            left[i] ←A[i]
     for i ←mid to n - 1
            right[i] ←A[i]
    Mergesort(left)
    Mergesort(right)
    Merge(left, right, A)
```

$$T(n)=\begin{cases} c & \text{nếu } n=1 \\ 2T(n/2)+c'n & \text{nếu } n>1 \end{cases}$$

Reference

- **http://www.cit.ctu.edu.vn/~dtnghi/ctdl/dophuctap.pdf**

- https://youtu.be/i6a9O0gTstw