|  |  |
| --- | --- |
| **A gráf definíciója.** | **A síknak véges sok pontjából és az őket összekötő vonalakból álló alakzatokat gráfnak nevezzük. A pontok a gráf pontjai (vagy csúcsai), az összekötő vonalak a gráf élei.** |
| **A többszörös él definíciója** | **Ha a gráf valamely két csúcsát egynél több él köti össze, akkor azt többszörös élnek nevezzük.** |
| **Mi a hurokél?** | **Hurokélnek nevezzük az olyan élt, amelynek a két végpontja ua.** |
| **Mit nevezünk egyszerű gráfnak?** | **Egy gráfot egyszerű gráfnak nevezünk, ha véges (azaz pontjainak és éleinek a száma véges), és sem hurokélt, sem többszörös élt nem tartalmaz.**  **Pl. Egyszerű gráf Pl. Nem egyszerű gráf** |
| **Mit nevezünk a pont fokszámának?** | **Egy gráf egy pontjának a fokszáma (foka) a pontban találkozó élek száma.**  **Pl.:** |
| **Mit nevezünk izolált pontnak?** | **Ha egy pontban nincs él, azt a pontot izolált pontnak nevezzük. Az izolált pont fokszáma 0.**  **Az élek száma: 5**    **A pontok fokszámának az összege:**  **1 + 4 + 1 + 2 + 2 + 0 = 10**  **Mivel minden él két pontba fut be, a pontok fokszámának az összege minden gráfban megegyezik, az élek számának a kétszeresével.** |
| **Mi a kapcsolat a pontok fokszáma és az élek száma között?** | **Tétel: Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese. (Hurokélnél a pont fokszáma 2, hiszen ha veszünk egy olyan gráfot, ami csak egy pontból és ahhoz tartozó hurokélből áll, akkor is teljesül a gráfok pontjaira és éleire vonatkozó összefüggés.)** |
| **Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.**  **Mik a tétel következményei?** | **Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám. (Naná! Bármely egész szám kétszerese páros.)**  **Minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. (Naná! Páratlan egész számok összege csak akkor páros, ha páros darabszámút adunk össze. Pl. 1 + 3 = 4; 1 + 3 + 5 = 9 )** |
| **Mit nevezünk teljes gráfnak?** | **Def.: Ha egy egyszerű gráf bármely két pontja össze van kötve éllel, akkor teljes gráfnak nevez­zük. (Az egyetlen pontból - ún. izolált pontból - álló gráf is teljes gráf.)**  **Pl. teljes gráfot kapunk, ha egy konvex sokszögnek megrajzoljuk minden átlóját. Minden csúcs fokszáma n-1.** |
| **Egy öt fős csapat buliba készül. Nagyon izgatottak, mert már két napja nem buliztak, ezért mindenki beszél telefonon mindenkivel. Ábrázoljuk a szituációt gráfként!** |  |
| **Egy öt fős csapat buliba készül. Nagyon izgatottak, mert már két napja nem buliztak, ezért mindenki beszél telefonon mindenkivel. Sára bekavart Klárának és ezért Klára nem fogadja a hívását. Ábrázoljuk a szituációt gráfként!** | **Ha Sára bekavart Klárának és ezért Klára nem fogadja a hívását, akkor a gráf már nem teljes.** |
| **Hány éle van egy n pontú teljes gráfnak?** | **Tétel: Az n pontú teljes gráf éleinek a száma:** |
| **Egy érettségi banketten a diákok és a tanárok közül sokan koccintottak egymással. Igazolja, hogy csak páros számú ember végezhetett páratlan számú koccintást!** | **Minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.** |
| **Rajzoljon olyan hat pontú egyszerű gráfot, mely csúcsainak fokszámai:**  **a) 1, 2, 3, 4, 5, 6**  **b) 5, 4, 4, 2, 0, 1** | **a) 1+2+3+4+5+6 = 21 Ilyen gráf nincs! Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám. (vagy hivatkozhatunk arra is, hogy minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.) Arra is hivatkozhatnánk, hogy egy 6 pontú egyszerű gráfban nincs 6 fokszámú pont.)**  **b) 5, 4, 4, 2, 0, 1,**  **Ez a pont egyikkel sincs összekötve. Ez a pont minden más ponttal össze van kötve.**  **Tehát ilyen gráf nincs!**  **Itt a pontok fokszáma páros, de ha van 5 fokszámú pont, akkor az minden más ponttal össze van kötve egy hat pontú egyszerű gráfban. Így nem lehet 0 fokú pontja.** |
| **Rajzoljon olyan hat pontú egyszerű gráfot, mely csúcsainak fokszámai:**  **c) 4, 4, 4, 2, 1, 1**  **e) 4, 4, 2, 2, 2, 1** | **c) Ilyen gráf nincs!**  **Ha egy hat pontú gráfban van 2 pont, aminek 4 a fokszáma, és egy aminek 5 a fokszáma, akkor kell lennie legalább egy pontnak, aminek 3 a fokszáma.**  **e) Ilyen gráf van. Pl.:**  **(4)**  **(4) (1)**    **(3)**  **(2) (2)** |
| **A Repülő Elefántok Társaságának igazgatótanácsa tíztagú. Az igazgató­tanácsi ülésre érkezvén néhányan kezet fogtak egymással. A titkárnő a társaság minden tagját megkérdezte, hogy hány másikkal fogott kezet. A következőket jegyezte fel:**  **a) 3; 4; 6; 7; 6, 9; 5; 8; 7; 4.**  **Az igazgató leszidta a titkárnőt, hogy a feljegyzései pontatlanok voltak. Honnan tudta?**  **b) Lehetnek-e pontosak a titkárnő feljegyzései, ha a következőket írta:**  **2; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 9?** | **a) Nem lehet páratlan darabszámú páratlan fokú csúcs.**  **JP megoldás:**  **Egy kézfogásban két ember vesz részt, ezért ketten számítják be a kézfogásaik számába. Tehát a titkárnő által feljegyzett kézfogás­számok összege kétszerese kellene, hogy legyen a kézfogások számának, ezért nem lehet páratlan. A felsorolt számok közt 5 darab páratlan van, ezért az összegük páratlan, tehát a feljegyzés hibás volt. Ahhoz, hogy a kézfogások megvalósíthatók legyenek, szükséges, hogy a kézfogásszámok összege páros legyen.**  **b) Lehetnek-e pontosak a titkárnő feljegyzései, ha a következőket írta: 2; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 9?**  **Ez lehetséges, ha az utolsó mindenkivel kezet fogott, az első és a má­sodik pedig az utolsón kívül egymással fogott kezet.** |
| **A Repülő Elefántok Társaságának igazgatótanácsa tíztagú. Az igazgató­tanácsi ülésre érkezvén néhányan kezet fogtak egymással. A titkárnő a társaság minden tagját megkérdezte, hogy hány másikkal fogott kezet. A következőket jegyezte fel:**  **c) Lehetnek-e pontosak a titkárnő feljegyzései, ha a következőket írta: 0; 1; 2; 2; 3; 4;4 ;5 ;6 ;9?**  **d) Lehetnek-e pontosak a titkárnő feljegyzései, ha a következőket írta: 9; 6; 4; 9; 6; 9; 8; 9; 9; 3?** | **c) Ha valaki 0-t mondott, akkor senkivel nem fogott kezet, ha 9-et, akkor mindenkivel kezet fogott. Ugyanabban a társaságban nem szerepelhet egyszerre két ilyen ember, vagyis a feljegyzésekben hiba van, a 0 és a 9 egyszerre nem fordulhat elő egy 10 pontos gráfban.**  **d) Lehetnek-e pontosak a titkárnő feljegyzései, ha a következőket írta:**  **9; 6; 4; 9; 6; 9; 8; 9; 9; 3?**  **Mivel most 6 darab páratlan szám van, a kézfogások számának összege páros, a szükséges feltétel teljesül. A kézfogások mégsem megvalósít­hatók, mert 5 olyan ember van, aki 9 másikkal, vagyis mindenkivel kezet fogott. Tehát a társaságban mindenki kezet fogott ezzel az 5 em­berrel, így nem lehet olyan, aki 5-nél kevesebb emberrel fogott kezet.**  **Ahhoz, hogy a kézfogások megvalósíthatók legyenek, szükséges, de nem elégséges, hogy a kézfogások számának összege páros legyen.** |
| **Def. összefüggő gráf, nem összefüggő gráf** | **Egy gráf összefüggő, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk egy úton.**  **Összefüggő gráf:**  **Nem összefüggő gráf :** |
| **Def. séta** | **Sétának nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatla­kozó sorozatát, amelyben ugyanazok az élek és pon­tok többször is előfordulhatnak.** |
| **Def. Vonal** | **Vonalnak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben minden él legfeljebb egyszer fordulhat elő, de lehetnek olyan pontok, amelye többször is előfordulnak.** |
| **Def. Euler-vonal, zárt Euler-vonal, nyitott Euler-vonal** | **Euler-vonalnak nevezzük a gráfban az élek egy olyan egymáshoz csatlakoztatott bejárását, melynek során minden élen pontosan egyszer haladunk keresztül. Ha e bejárás során a kiindulópont megegyezik a végponttal, akkor az Euler-vonal zárt, ha a kiindulópont és a végpont nem azonos, akkor az Euler-vonal nyított.** |
| **Mi a zárt Euler-vonal létezésének a feltétele?** | **Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha minden pont fokszáma páros.** |
| **Mi a nyilt Euler-vonal létezésének a feltétele?** | **Egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van nyílt Euler-vonal, ha két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros.** |
| **Meg lehet-e egyetlen vonallal rajzolni a köv. ábrát?** | **Ezt igen. Pl.:**  **Gráfos mo.: Igen. Két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros, a gráfnak van nyílt Euler-vonala.** |
| **Meg lehet-e egyetlen vonallal rajzolni a köv. ábrát?** | **Nem.**  **Kettőnél több páratlan fokú pontja van, tehát nincs nyílt Euler-vonala!** |
| **Meg lehet-e egyetlen vonallal rajzolni a köv. ábrát?** | **Igen.**  **Két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma pedig páros, a gráfnak van nyílt Euler-vonala.** |
| **Def.: út** | **Def.: Útnak nevezzük a gráf éleinek olyan egymáshoz csatlakoztatott sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.** |
| **Def.: kör** | **Def.: Körnek nevezzük a gráf éleinek olyan egymáshoz csatla­kozó sorozatát, amelyben a kiindulási pont megegye­zik a végponttal, de minden él és minden más pont legfeljebb egyszer fordul elő.** |
| **Mikor lehet a gráfban kör?** | **Tétel: Ha egy összefüggő véges gráfban minden pont fok­száma legalább kettő, akkor a gráfban van kör.**  **Következmény: Ha egy összefüggő gráfban nincs kör, akkor van első­fokú pontja.** |