目　录

第一章　Fourier 变换 ………………………………………… 1
　一　内容要点 ………………………………………… 1
　二　例题分析 ………………………………………… 10
　三　习题全解 ………………………………………… 25
　　习题一解答 ………………………………………… 25
　　习题二解答 ………………………………………… 31
　　习题三解答 ………………………………………… 47
　　习题四解答 ………………………………………… 56
　　习题五解答 ………………………………………… 67
第二章　Laplace 变换 ………………………………………… 85
　一　内容要点 ………………………………………… 85
　二　例题分析 ………………………………………… 92
　三　习题全解 ………………………………………… 107
　　习题一解答 ………………………………………… 107
　　习题二解答 ………………………………………… 115
　　习题三解答 ………………………………………… 133
　　习题四解答 ………………………………………… 145
　　习题五解答 ………………………………………… 152
附录 Ⅰ　Fourier 变换简表 ………………………………………… 193
附录 Ⅱ　Laplace 变换简表 ………………………………………… 201

第一章 Fourier 变换

一 内容要点

本章从讨论周期函数的 Fourier 级数的展开式出发，进而讨论非周期函数的 Fourier 积分公式及其收敛定理，并在此基础上引出 Fourier 变换的定义、性质、一些计算公式及某些应用.

本章的重点是求函数的 Fourier 变换及 Fourier 变换的某些应用. 函数的 Fourier 变换也是本章的一个难点，要解决好这个难点，必须掌握好 Fourier 变换的基本性质及一些常用函数(如单位脉冲函数，单位阶跃函数，正、余弦函数等)的 Fourier 变换及其逆变换的求法. 从而才能较好地运用 Fourier 变换进行频谱分析，解某些微分、积分方程和偏微分方程的定解问题.

1. Fourier 积分

(1) Fourier 级数的展开式

设 $f_T(t)$ 以 T 为周期且在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件(即在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足：1°连续或只有有限个第一类间断点；2°只有有限个极值点). 则 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上可以展成 Fourier 级数. 在 $f_T(t)$ 的连续点处，有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\quad(\text{三角形式})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t}, \qquad \text{（复数形式或称复指数形式）}$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, w_n = n\omega, c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}dt \qquad (n = 0, \pm 1, \cdots),$$

$c_0 = \dfrac{a_0}{2}, c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}(n = 1, 2, \cdots)$. 在 $f_T(t)$ 的间断点 t 处，上面的展开式左边 $f_T(t)$ 应以 $\frac{1}{2}[f_T(t+0) + f_T(t-0)]$ 代替.

(2) Fourier 积分定理

对于$(-\infty, +\infty)$上的任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T \to +\infty$ 时转化而来的. 由此，从 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式出发，能够得到一个非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分公式，其条件为：

若 $f(t)$ 在$(-\infty, +\infty)$上满足下列条件：

1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件；

2° $f(t)$ 在无限区间$(-\infty, +\infty)$上绝对可积（即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛），则在 $f(t)$ 的连续点处有如下的 Fourier 积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega.$$

在 $f(t)$ 的间断点 t 处，上面展开式左端的 $f(t)$ 应以 $\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$ 代替. 这个公式也称为 Fourier 积分公式的复数形式.

这个定理在教材中虽然未加证明，但应当看到它是 Fourier 变换的理论基础，必须深刻理解其含义，掌握它成立的条件，以便为学习 Fourier 变换奠定理论基础.

(3) Fourier 积分公式的其他形式

1) Fourier 积分公式的三角形式

利用 Euler 公式,由 Fourier 积分公式的复数形式可推出它的三角形式:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

2) Fourier 正弦积分公式

当 $f(t)$为奇函数时,利用三角函数的和差公式,由 Fourier 积分公式的三角形式可推出其 Fourier 正弦积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

3) Fourier 余弦积分公式

当 $f(t)$为偶函数时,同理可得

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

若 $f(t)$仅在$(0,+\infty)$上有定义,且满足 Fourier 积分收敛定理的条件,通过奇式(偶式)延拓,便可得到 $f(t)$的 Fourier 正弦(余弦)积分展开式.

2. Fourier 变换

(1) Fourier 变换的概念

Fourier 变换对的一般形式:

$$\begin{cases}\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega;\end{cases}$$

Fourier 正弦变换对:当 $f(t)$为奇函数时,有

$$\begin{cases}\mathscr{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin \omega t\,dt \\ f(t) = \mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin \omega t\,d\omega;\end{cases}$$

Fourier 余弦变换对：当 $f(t)$ 为偶函数时，有

$$\begin{cases}\mathscr{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos \omega t\,dt \\ f(t) = \mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)] = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos \omega t\,d\omega,\end{cases}$$

它们可分别简记为 $f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$，$f(t)\Leftrightarrow F_s(\omega)$ 及 $f(t)\Leftrightarrow F_c(\omega)$。显然，当 $f(t)$ 为奇函数时，$F(\omega) = -2\mathrm{j}F_s(\omega)$，当 $f(t)$ 为偶函数时，$F(\omega)=2F_c(\omega)$。

(2) 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

δ－函数的重要性质—筛选性质：若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)dt = f(0).$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t)dt = f(t_0).$$

由这一性质，可得 $\mathscr{F}[\delta(t)]=1$，$\mathscr{F}^{-1}[1]=\delta(t)$，表明 $\delta(t)$ 和 1 构成一个 Fourier 变换对，记为 $\delta(t)\Leftrightarrow 1$。同理，有 $\delta(t-t_0)\Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$。

需要指出的是 $\delta(t)$ 是一个广义函数，它的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换。在物理学和工程技术中有许多重要函数（如常数，符号函数，单位阶跃函数及正、余弦函数等）不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件（即不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$），然而其广义 Fourier 变换是存在的。利用单位脉冲函数及其Fourier变换就可以求出它们的 Fourier 变换。例如

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),\ \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0),$$

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega),\mathscr{F}[\mathrm{sgn}\,t]=\frac{2}{\mathrm{j}\omega},$$
$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)],$$
$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)].$$

3. Fourier 变换的物理意义—频谱

(1) 非正弦的周期函数 $f_T(t)$的频谱

在 $f_T(t)$的 Fourier 级数展开式中,称

$$a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

为第 n 次谐波,其中 $\omega_n=n\omega=\frac{2n\pi}{T}$. $A_0=\frac{|a_0|}{2}$, $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 称为频率为ω_n的第 n 次谐波的振幅,在 $f_T(t)$的 Fourier 级数的复数形式中,第 n 次谐波为 $c_n e^{\mathrm{j}\omega_n t}+c_{-n}e^{-\mathrm{j}\omega_n t}$,并且 $|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,从而 $f_T(t)$的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n=2|c_n|\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况.所谓频谱图,通常是指频率 ω_n与振幅 A_n 的关系图. A_n 也称为 $f_T(t)$的振幅频谱(简称为频谱).由于 $n=0,1,2,\cdots$,所以频谱 A_n 的图形是不连续的,称之为离散频谱,其频谱图清楚地表明了一个非正弦的周期函数$f_T(t)$包含了哪些频率分量及各分量所占的比重(如振幅的大小).

(2) 非周期函数 $f(t)$的频谱

非周期函数 $f(t)$的 Fourier 变换 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,在频谱分析中又称为 $f(t)$的频谱函数,它的模$|F(\omega)|$称为 $f(t)$的振幅频谱(简称频谱).由于 ω 是连续变化的,这种频谱称为连续频谱,频谱图为连续曲线.振幅频谱$|F(\omega)|$是频率 ω 的偶函数;相角频谱

$\varphi(\omega)=\arctan\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}$ 是频率 ω 的奇函数.对一个时间

函数作 Fourier 变换，就是求这个时间函数的频谱函数.

频谱图能清楚地表明时间函数的各频谱分量的相对大小，因此，频谱图在工程技术中有着广泛的应用. 作出一个非周期函数 $f(t)$ 的频谱图，其步骤如下：

1）先求出非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$；

2）选定频率 ω 的一些值，算出相应的振幅频谱 $|F(\omega)|$ 的值；

3）将上述各组数据所对应的点填入直角坐标系中，用连续曲线连接这些离散的点，就得到了该函数 $f(t)$ 的频谱图.

4．Fourier 变换的基本性质

为叙述方便，在下述性质中，凡是需要求 Fourier 变换的函数，假定都满足 Fourier 积分定理中的条件.

(1) 线性性质　设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，$\alpha,\beta$ 为常数，则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega);$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

(2) 位移性质　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm j\omega t_0}F(\omega);$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=f(t)e^{\pm j\omega_0 t}，(象函数的位移性质).$$

(3) 微分性质　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^nF(\omega);$$

$$F^{(n)}(\omega)=(-j)^n\mathscr{F}[t^nf(t)]，(象函数的微分性质).$$

特别，当 $n=1$ 有

$$\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega);$$

$$F'(\omega)=-j\mathscr{F}[tf(t)].$$

(4) 积分性质　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果当 $t\to+\infty$ 时，

$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \to 0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega);$$

当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)\neq 0$ 时，有

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega).$$

（5*）乘积定理　设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\overline{f_2(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega,$$

其中 $\overline{f_1(t)}$，$\overline{f_2(t)}$，$\overline{F_1(\omega)}$ 及 $\overline{F_2(\omega)}$ 分别为 $f_1(t)$，$f_2(t)$，$F_1(\omega)$ 及 $F_2(\omega)$ 的共轭函数. 特别，当 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 为实函数时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega.$$

（6*）能量积分　设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

这一等式又称为 Parseval 等式. 函数 $S(\omega)=|F(\omega)|^2$ 称为能量密度函数（或称能量谱密度）. 它可以决定函数 $f(t)$ 的能量分布规律. 将它对所有频率积分就得到 $f(t)$ 的总能量，因此，Parseval 等式又称为能量积分. 它表明非周期函数 $f(t)$ 在时间域内的能量与在频率域内的能量不因 $f(t)$ 取 Fourier 变换后而改变. 由于能量密度函数 $S(\omega)$ 是 ω 的偶函数，则能量积分可进一步写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

5. 卷积与相关函数

（1）卷积的概念

$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,且其运算满足

$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ （交换律）；

$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$ （结合律）；

$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$ （分配律）；

$|f_1(t)*f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|*|f_2(t)|$ （卷积不等式）.

（2）卷积定理　设 $f_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$满足 Fourier 积分定理中的条件，且 $\mathscr{F}[f_k(t)]=F_k(\omega)(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\cdot\cdots\cdot F_n(\omega);$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\cdots\cdot f_n(t)]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\omega)*F_2(\omega)*\cdots*$$

$F_n(\omega)$（象函数卷积定理）.

特别，

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega).$$

（3*）相关函数的概念

相关函数的概念和卷积的概念一样，也是频谱分析中的一个重要概念.记函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的互相关函数为

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t.$$

记函数 $f(t)$的自相关函数（简称为相关函数）为

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t.$$

显然，$R(\tau)=R(-\tau)$；$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$.

（4*）相关函数和能量谱密度的关系

1）自相关函数和能量谱密度构成一个 Fourier 变换对：$R(\tau)\Leftrightarrow S(\omega)$，即

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega; \\ S(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \end{cases}$$

利用 $R(\tau)$和 $S(\omega)$的偶函数性质,可进一步写为

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega;$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$R(\tau)$在 $\tau=0$ 时,可得 Parseval 等式,即

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt.$$

2) 互相关函数和互能量谱密度构成一个 Fourier 变换对.由乘积定理(当 $f_1(t)$和 $f_2(t)$为实函数时)知

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

记互能量谱密度为 $S_{12}(\omega) = \overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)$(而 $S_{21}(\omega) = F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}$),则

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega; \\ S_{12}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \end{cases}$$

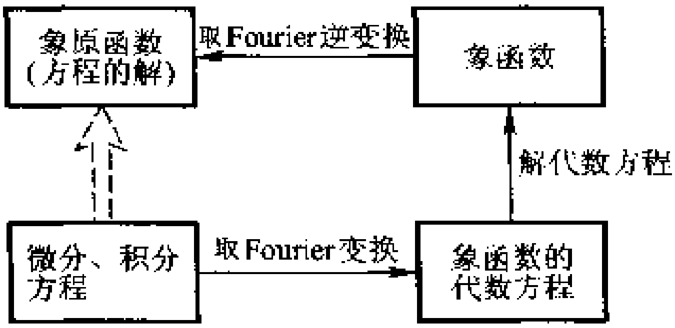
显然,互能量谱密度有 $S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}$.

6. Fourier 变换的应用

Fourier 变换是分析非周期函数频谱的理论基础.它在频谱分析中有着重要的应用,前面已列出其内容要点.这里的应用主要是用来求解某些微分、积分方程和偏微分方程(其未知函数为二元函数的情形)的定解问题.

(1) 微分、积分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质，对欲求解的方程两端取 Fourier 变换，将其转化为象函数的代数方程，通过解代数方程与求 Fourier 逆变换就可得到原方程的解. 这种解法如下图所示意：



(2*) 偏微分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换求解偏微分方程的定解问题类似于上述示意图中的三个步骤，即先将定解问题中的未知函数看作某一自变量的函数，对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换，把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题；再根据这个常微分方程和相应的定解条件，求出象函数；然后再取 Fourier 逆变换，得到原定解问题的解. 这里，要求变换的自变量在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化；如要求变换的自变量在 $(0,+\infty)$ 内变化，则根据定解条件的情形可运用 Fourier 正弦变换或 Fourier 余弦变换来求解该偏微分方程的定解问题.

二　例题分析

例 1－1　试求函数 $f(t)=\begin{cases} t, & |t|\leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

解　在 Fourier 积分定理的条件下，函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分表达式，可以用复数形式，也可以用三角形式来表达；由于函数

$f(t)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，还可以用 Fourier 正弦积分公式来表达；如果读者已经掌握 Fourier 变换的性质，则可根据教材第一章§1.1中的例1，利用象函数的微分性质求得结果.

方法1 利用 Fourier 积分公式的复数形式，在$f(t)$的连续点处，有

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau)d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\tau\sin\omega\tau d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t d\omega,(t\neq\pm1)
\end{aligned}$$

当$t=\pm1$时，$f(t)$应以$\frac{1}{2}[f(\pm1+0)+f(\pm1-0)]=\pm\frac{1}{2}$代替.

方法2 利用 Fourier 积分公式的三角形式，在$f(t)$的连续点处，有

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\tau(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)d\tau\right]d\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\omega t\left[\int_{0}^{1}\tau\sin\omega\tau d\tau\right]d\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t d\omega,(t\neq\pm1)
\end{aligned}$$

同样，当$t=\pm1$时，$f(t)$应以$\pm\frac{1}{2}$代替

方法3 由于$f(t)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，也可以利用

Fourier 正弦积分公式，在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{1}\tau\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,(t\neq\pm1) \end{aligned}$$

当 $t=\pm1$ 时，$f(t)$ 也应以 $\pm\frac{1}{2}$ 代替.

方法 4　利用象函数的微分性质，如记教材第一章 §1.1 例 1 中的函数为 $g(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant1\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令

$$\mathscr{F}[g(t)] = G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = 2\int_0^1\cos\omega t\mathrm{d}t = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

显然，本例中的函数 $f(t)=tg(t)$. 根据象函数的微分性质（也称为象函数的导数公式）：$G'(\omega)=-\mathrm{j}\mathscr{F}[tg(t)]$，即

$$\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}[tg(t)] = -\frac{1}{\mathrm{j}}G'(\omega) = -2\mathrm{j}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right).$$

从而，由 Fourier 积分公式的复数形式，在 $f(t)$ 的连续点处有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-2\mathrm{j}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{-\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

当 $t=\pm1$ 时，$f(t)$ 应以 $\pm\frac{1}{2}$ 代替.

根据上述结果，我们可以得到

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\mathrm{d}\omega = \begin{cases}\frac{\pi}{2}t, & |t|<1,\\ \frac{\pi}{4}, & t=1,\\ -\frac{\pi}{4}, & t=-1.\end{cases}$$

换言之，根据 $f(t)$ 的 Fourier 积分公式，可以推证出一些广义积分的结果. 这也是含参量广义积分的一种巧妙的解法.（另外，某些类型的广义积分还可以利用 Fourier 变换中的能量积分，终值定理及象函数的微分性质求得结果）. 通过上述解法，我们不仅掌握了各种求解方法，而且还可以对各种方法进行比较，从而更好地理解和掌握 Fourier 积分公式的含义和某些用途.

例 1－2 求函数 $f(t)=u(t)te^{-\alpha t}\cos\beta t$ 的 Fourier 变换，其中 $\alpha>0$.

解 求一个函数的 Fourier 变换，可以按定义直接做，也可以按 Fourier 变换的性质做. 当然，按后者做有一定的技巧性，还要掌握一些常见函数的 Fourier 变换. 现分别叙述如下.

方法 1 按 Fourier 变换的定义，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)te^{-\alpha t}\cos\beta t\, e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} te^{-(\alpha+j\omega)t}\cos\beta t\,dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} te^{-(\alpha+j\omega)t}\frac{1}{2}(e^{j\beta t}+e^{-j\beta t})dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} te^{-[\alpha+j(\omega-\beta)]t}dt + \\ &\quad \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} te^{-[\alpha+j(\omega+\beta)]t}dt\end{aligned}$$

利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty} te^{-[\alpha+j(\omega-\beta)]t}dt \\ &= -\frac{te^{-[\alpha+j(\omega-\beta)]t}}{\alpha+j(\omega-\beta)}\Bigg|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{\alpha+j(\omega-\beta)}\int_{0}^{+\infty} e^{-[\alpha+j(\omega-\beta)]t}dt \\ &= \frac{1}{[\alpha+j(\omega-\beta)]^2}.\end{aligned}$$

同理，$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-[\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)]t}\mathrm{d}t=\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)]^2}$. 所以

$$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{2}\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega-\beta)]^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)]^2}$$
$$=\frac{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2-\beta^2}{[(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 2　利用象函数的微分性质，记 $g(t)=u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t$，$\mathcal{F}[g(t)]=G(\omega)$，则 $G'(\omega)=-\mathrm{j}\mathcal{F}[tg(t)]=-\mathrm{j}\mathcal{F}[f(t)]$，而

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta t}]\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-[\alpha+\mathrm{j}(\omega-\beta)]t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-[\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)]t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\beta)}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)}\right]$$
$$=\frac{\alpha+\mathrm{j}\omega}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\beta^2},$$

所以

$$\mathcal{F}[f(t)]=-\frac{1}{\mathrm{j}}G'(\omega)=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\alpha+\mathrm{j}\omega}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\beta^2}\right]$$
$$=\frac{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2-\beta^2}{[(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 3　利用象函数的位移性质，由

$$\mathcal{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega},$$

从而由位移性质知

$$\mathcal{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t]=\mathcal{F}\left[u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta t}}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\mathcal{F}[u(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta t}]+$$

$$\frac{1}{2}\mathscr{F}[u(t)e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\omega-\beta)}+\frac{1}{\alpha+j(\omega+\beta)}\right]$$
$$=\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\beta^2}.$$

对照方法 2,再利用象函数的微分性质,即可得到结论,亦即

$$\mathscr{F}[f(t)]=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\beta^2}\right]$$
$$=\frac{(\alpha+j\omega)^2-\beta^2}{[(\alpha+j\omega)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 4　利用象函数的卷积公式,记 $f_1(t)=t\cos\beta t$, $f_2(t)=u(t)e^{-\alpha t}$,则 $\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$,其中 $F_i(\omega)=\mathscr{F}[f_i(t)]$, $i=1,2$. 由

$$\mathscr{F}[\cos\beta t]=\pi[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)]$$

及象函数的微分性质知

$$\mathscr{F}[f_1(t)]=\mathscr{F}[t\cos\beta t]=j\frac{d}{d\omega}[\pi(\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta))]$$
$$=j\pi[\delta'(\omega+\beta)+\delta'(\omega-\beta)].$$

而

$$\mathscr{F}[f_2(t)]=\mathscr{F}[u(t)e^{-\alpha t}]=\frac{1}{\alpha+j\omega},$$

从而,根据卷积的分配律、卷积的导数公式(见习题四的 1(6))及筛选性质,有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]$$
$$=\frac{1}{2\pi}[j\pi(\delta'(\omega+\beta)+\delta'(\omega-\beta))]*\frac{1}{\alpha+j\omega}$$
$$=\frac{j}{2}\left[\delta'(\omega+\beta)*\frac{1}{\alpha+j\omega}+\delta'(\omega-\beta)*\frac{1}{\alpha+j\omega}\right]$$
$$=\frac{j}{2}\frac{d}{d\omega}\left[\delta(\omega+\beta)*\frac{1}{\alpha+j\omega}\right]+$$

$$\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\delta(\omega-\beta)*\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau+\beta)\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]+$$

$$\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-\beta)\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\tau)}\bigg|_{\tau=-\beta}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\tau)}\bigg|_{\tau=\beta}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}(\omega-\beta)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)]^2}+\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega-\beta)]^2}\right\}$$

$$=\frac{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2-\beta^2}{[(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 5 利用象函数的卷积公式,还可以记 $f_1(t)=\cos\beta t$, $f_2(t)=u(t)t\mathrm{e}^{-\alpha t}$,而

$$\mathscr{F}[\cos\beta t]=\pi[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)],$$

$$\mathscr{F}[u(t)t\mathrm{e}^{-\alpha t}]=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2},$$

再使用方法 4,有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\pi(\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta))]*\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(\omega+\beta)*\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}+\delta(\omega-\beta)*\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau+\beta)\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega-\tau)]^2}\mathrm{d}\tau+\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-\beta)\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega-\tau)]^2}\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega+\beta)]^2}+\frac{1}{[\alpha+\mathrm{j}(\omega-\beta)]^2}\right\}$$

$$= \frac{(\alpha + j\omega)^2 - \beta^2}{[(\alpha + j\omega)^2 + \beta^2]^2}.$$

利用 Fourier 变换的性质来求函数的 Fourier 变换，虽然有一定的技巧性，如果我们能够较好地理解和掌握这些性质的含义与实质，就能运用自如. 例如本例中的函数 $f(t)$ 还可以改写为

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t)te^{-\alpha t}\cos\beta t \\ &= u(t)te^{-\alpha t}\frac{1}{2}(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) \\ &= \frac{1}{2}[t\cdot u(t)e^{-(\alpha-j\beta)t} + t\cdot u(t)e^{-(\alpha+j\beta)t}] \end{aligned}$$

再分别利用象函数的微分性质去做，读者可以自己做一下.

例 1-3 求下列函数的 Fourier 逆变换.

(1) $F(\omega) = \omega\cos\omega t_0$; (2) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + j\pi\delta'(\omega)$.

解 (1) 求一个函数的 Fourier 逆变换，通常可用 Fourier 逆变换公式，结合 Fourier 变换的某些性质来完成，有时也会用到一些常用函数的 Fourier 变换的结果或借助于 Fourier 变换表来完成.

方法 1 利用 Euler 公式，Fourier 变换的位移性质及微分性质得到结果. 因为

$$\cos\omega t_0 = \frac{1}{2}(e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0})$$

而我们已经知道 $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1$，由位移性质可得

$$\mathscr{F}[\delta(t + t_0)] = e^{j\omega t_0}, \mathscr{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0},$$

所以由线性性质，有

$$\mathscr{F}^{-1}[\cos\omega t_0] = \frac{1}{2}[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)].$$

如设 $G(\omega) = \mathscr{F}[g(t)] = \cos\omega t_0$，则由微分性质，有

$$\mathscr{F}[g'(t)] = j\omega\mathscr{F}[g(t)] = j\omega\cos\omega t_0.$$

从而

$$g'(t)=\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{j}\omega\cos\omega t_0]=\mathrm{j}\mathscr{F}^{-1}[\omega\cos\omega t_0],$$

即

$$\mathscr{F}^{-1}[\omega\cos\omega t_0]=\frac{1}{\mathrm{j}}g'(t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[\delta'(t+t_0)+\delta'(t-t_0)].$$

方法 2 利用 Fourier 变换的对称性质(见第一章习题三第 2 题结论)及象函数的微分性质也可以得到结果. 已知 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\omega\cos\omega t_0$, 由 Fourier 变换的对称性质: 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,则 $f(\pm\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$, 即 $\mathscr{F}[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega)$, 现将 $F(\omega)=\omega\cos\omega t_0$ 中的 ω 换成 $-t$, 有

$$\mathscr{F}[F(-t)]=-t\cos(-t)t_0=-t\cos(t_0 t)$$

令 $g(t)=\cos(t_0 t)$, 我们已经知道

$$G(\omega)=\mathscr{F}[\cos(t_0 t)]=\pi[\delta(\omega+t_0)+\delta(\omega-t_0)].$$

由象函数的微分性质知

$$\mathscr{F}[F(-t)]=-\mathrm{j}G'(\omega)=-\mathrm{j}\pi[\delta'(\omega+t_0)+\delta'(\omega-t_0)].$$

此即

$$2\pi f(\omega)=-\mathrm{j}\pi[\delta'(\omega+t_0)+\delta'(\omega-t_0)].$$

再将变量 ω 换成 t, 则有

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[\delta'(t+t_0)+\delta'(t-t_0)].$$

(2) 利用常见函数的 Fourier 变换可以求得结果, 由

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)\right]$$

$$=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]+\mathrm{j}\pi\mathscr{F}^{-1}[\delta'(\omega)]$$

我们已经知道(如见附录 I 中的公式(27)) $\mathscr{F}[t]=2\pi\mathrm{j}\delta'(\omega)$, 即 $t=2\pi\mathrm{j}\mathscr{F}^{-1}[\delta'(\omega)]$, 所以

$$\mathrm{j}\pi\mathscr{F}^{-1}[\delta'(\omega)]=\frac{t}{2},$$

而 $\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$(见第一章习题二第 8 题)，所以

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]=\frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\right]=\frac{1}{2}\operatorname{sgn} t.$$

因此 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} t+t).$$

由于符号函数 $\operatorname{sgn} t$ 可以用单位阶跃函数 $u(t)$ 来表示，即

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} t&=u(t)-u(-t)\\&=2u(t)-1,\end{aligned}$$

所以这个结果可以写为

$$f(t)=\frac{1}{2}[u(t)-u(-t)+t],$$

或

$$f(t)=u(t)+\frac{1}{2}(t-1).$$

这个结果还可以写成分段函数的形式，即

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t+1),t>0;\\[4pt]\frac{1}{2}(t-1),t<0.\end{cases}$$

例 1-4 求满足下列方程的解：

(1) $\int_0^{+\infty} y(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=f(t)$，其中 $f(t)=\begin{cases}1,0\leqslant t<1;\\2,1\leqslant t<2;\\0,t\geqslant 2.\end{cases}$

(2) $y'(t)-\int_{-\infty}^{t} y(t)\mathrm{d}t=h(t)$，其中 $h(t)$ 为已知函数，且 $-\infty<t<+\infty$.

解 (1) 这是一个含未知函数 $y(\omega)$ 的积分方程. 从方程的左端可以看出，我们能够利用 Fourier 余弦变换公式直接求得结果. 这里提供两种方法.

方法 1 原方程可改写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} y(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}f(t),$$

根据 Fourier 余弦积分公式可知$\frac{2}{\pi}f(t)$为 $y(\omega)$的 Fourier 余弦逆变换，即

$$\begin{aligned}y(\omega)&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\cos\omega t\,\mathrm{d}t+\int_1^2 2\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^1+\frac{2}{\omega}\sin\omega t\Big|_1^2\right]\\&=\frac{2(2\sin 2\omega-\sin\omega)}{\pi\omega}.\end{aligned}$$

方法 2 由于 $f(t)$为一个单侧函数，根据积分方程，我们可以将 $f(t)$在$(-\infty,0)$上作偶延拓. 实际上表明，我们可以用 Fourier 余弦积分公式来表示，即

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(u)\cos\omega u\,\mathrm{d}u\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1\cos\omega u\,\mathrm{d}u+\int_1^2 2\cos\omega u\,\mathrm{d}u\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega u\Big|_0^1+\frac{2}{\omega}\sin\omega u\Big|_1^2\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2(2\sin 2\omega-\sin\omega)}{\pi\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

对照原来的积分方程可知

$$y(\omega)=\frac{2(2\sin 2\omega-\sin\omega)}{\pi\omega}.$$

(2) 这是一个含未知函数 $y(t)$的微分积分方程. 按一般的求解步骤，首先利用 Fourier 变换的性质，如线性性质，微分性质，积分性质以及卷积定理等，将此类微分、积分方程化为 $y(t)$的象函

数的代数方程;其次是解这个代数方程得到象函数 $Y(\omega)=\mathscr{F}[y(t)]$;最后,求 $Y(\omega)$的 Fourier 逆变换,从而获得所求方程的解.为此,设

$$\mathscr{F}[y(t)]=Y(\omega);\mathscr{F}[h(t)]=H(\omega).$$

现对此方程两端取 Fourier 变换,可得

$$\mathrm{j}\omega Y(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}Y(\omega)=H(\omega)$$

从而解得

$$Y(\omega)=\frac{-\mathrm{j}\omega}{\omega^2+1}H(\omega)$$

再求 Fourier 逆变换,可得

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}[Y(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=-\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega H(\omega)}{\omega^2+1}e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

如果已知函数 $h(t)$的具体表达式,我们就能够算出 $y(t)$的具体结果.例如当 $h(t)=e^{-2|t|}$,则

$$H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|t|}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(2-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}e^{-(2+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{\omega^2+4}.$$

从而 $$y(t)=\frac{-\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\omega e^{\mathrm{j}\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{-2\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega e^{\mathrm{j}\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\mathrm{d}\omega$$

对于这种类型的积分可以用复变函数中的留数定理来计算[①].

当 $t>0$ 时，$R(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 在上半平面内有两个一级极点，即 $z_1=\mathrm{j}, z_2=2\mathrm{j}$. 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega e^{\mathrm{j}\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\mathrm{d}\omega=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{j}tz}, z_k]$$

其中

$$\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{j}tz}, z_1]=\lim_{z\to\mathrm{j}}(z-\mathrm{j})\frac{ze^{\mathrm{j}tz}}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{e^{-t}}{6},$$

$$\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{j}tz}, z_2]=\lim_{z\to2\mathrm{j}}(z-2\mathrm{j})\frac{ze^{\mathrm{j}tz}}{(z^2+1)(z^2+4)}=-\frac{e^{-2t}}{6}.$$

所以

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{-2\mathrm{j}}{\pi}2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{j}tz}, z_k]\\&=4\left(\frac{e^{-t}}{6}-\frac{e^{-2t}}{6}\right)=\frac{2}{3}(e^{-t}-e^{-2t}).\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}\mathrm{d}\omega=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[R(z), z_k],$$

其中 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的一级极点，即 $z_1=\mathrm{j}, z_2=2\mathrm{j}$，有

---

① 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{\mathrm{j}ax}\mathrm{d}x\,(a>0)$ 的积分，其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高一次，并且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点时，积分存在，而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{\mathrm{j}ax}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{j}\sum\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{j}az}, z_k],$$ 这里 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的极点.

当 $a=0$ 时，即形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 $R(x)$ 是 x 的有理函数，而分母的次数至少比分子的次数高二次，且 $R(z)$ 在实轴上没有孤立奇点时，积分存在，而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{j}\sum\mathrm{Res}[R(z), z_k],$$ 这里 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的极点.

详细情形，例如参看西安交通大学高等数学教研室编《工程数学—复变函数》(第四版)，1996 年，高等教育出版社，第 164～167 页.

$$\operatorname{Res}[R(z),z_1]=\lim_{z\to j}(z-j)\frac{z}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{1}{6}.$$

$$\operatorname{Res}[R(z),z_2]=\lim_{z\to 2j}(z-2j)\frac{z}{(z^2+1)(z^2+4)}=-\frac{1}{6}.$$

因此

$$y(t)=\frac{-2j}{\pi}2\pi j\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}[R(z),z_k]=4\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=0.$$

当 $t<0$ 时，令 $\omega=-u$，仿照 $t>0$ 时的计算过程，有

$$y(t)=\frac{-2j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega e^{j\omega t}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}d\omega=\frac{2j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u e^{ju(-t)}}{(u^2+1)(u^2+4)}du$$

$$=\frac{2j}{\pi}2\pi j\left(\frac{e^t}{6}-\frac{e^{2t}}{6}\right)=\frac{2}{3}(e^{2t}-e^t).$$

最后，求得的解为

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(e^{-t}-e^{-2t}), & t>0;\\ 0, & t=0;\\ \dfrac{2}{3}(e^{2t}-e^t), & t<0.\end{cases}$$

例 1－5 求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(-\infty<x<+\infty,t>0);\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

解 这是一类弦自由振动的初值问题．根据《内容要点》中“Fourier变换的应用”所列出的解题步骤，不难得到该定解问题的解．由于二元函数 $u(x,t)$ 中的一个变量 x 的变化范围为 $(-\infty,+\infty)$，因此对上述方程及初始条件关于 x 取 Fourier 变换．记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t);$$

$$\mathscr{F}[\varphi(x)]=\Phi(\omega),\mathscr{F}[\psi(x)]=\Psi(\omega);$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=(j\omega)^2U(\omega,t)=-\omega^2U(\omega,t);$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U(\omega,t).$$

这样,我们就能将原定解问题转化为求解含有参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2}=-a^2\omega^2 U,\\ U|_{t=0}=\Phi(\omega),\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\Psi(\omega).\end{cases}$$

这里,方程是 $U(\omega,t)$关于 t 的一个二阶常系数齐次微分方程,显然它的通解为

$$U(\omega,t)=c_1\sin\omega at+c_2\cos\omega at.$$

由初始条件可得

$$c_1=\frac{1}{a\omega}\Psi(\omega),\qquad c_2=\Phi(\omega).$$

因此,该常微分方程的初值问题的解为

$$\begin{aligned}U(\omega,t)&=\frac{1}{a\omega}\Psi(\omega)\sin\omega at+\Phi(\omega)\cos\omega at\\&=\Psi(\omega)\frac{\sin\omega at}{\omega a}+\Phi(\omega)\cos\omega at.\end{aligned}$$

现在,对上式求 Fourier 逆变换,即

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(\omega)\frac{\sin\omega at}{\omega a}\right]+\\&\quad\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\omega)\cos\omega at].\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau&=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}(\cos\omega\tau+\mathrm{j}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{a}\int_0^{at}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{\sin\omega at}{\omega a},\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\Psi(\omega)\frac{\sin\omega at}{\omega a}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\omega)\frac{\sin\omega at}{\omega a}e^{j\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\omega)\left[\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}e^{j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-at}^{at}\Psi(\omega)e^{j\omega(x+\tau)}d\tau\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\omega)e^{j\omega(x+\tau)}d\omega\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(x+\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi.$$

而

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\omega)\cos\omega at]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\cos\omega at\,e^{j\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\frac{1}{2}(e^{j\omega at}+e^{-j\omega at})e^{j\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)(e^{j\omega(x+at)}+e^{j\omega(x-at)})d\omega$$

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

从而

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

三 习 题 全 解

习题一解答

1. 试证:若 $f(t)$满足 Fourier 积分定理的条件,则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$$

证 利用 Fourier 积分公式的复数形式，有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[a(\omega)-\mathrm{j}b(\omega)](\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

由于

$$a(\omega)=a(-\omega),\qquad b(\omega)=-b(-\omega),$$

所以

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} b(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega\\&=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega+\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

注 本题也可以由 Fourier 积分公式的三角形式得到证明.

2. 求下列函数的 Fourier 积分：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2\leqslant 1;\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0.\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1;\\ -1, & -1<t<0;\\ 1, & 0<t<1;\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$

解 (1) 此题亦可写为 $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\leqslant 1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ 它是一个

连续的偶函数，利用 Euler 公式和分部积分法，由 Fourier 积分公式的复数形式，有

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}(1-\tau^2)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\omega\tau}{\omega}-\left(\frac{2\tau\cos\omega\tau}{\omega^2}-\frac{2\sin\omega\tau}{\omega^3}+\frac{\tau^2\sin\omega\tau}{\omega}\right)\right]\Bigg|_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega .
\end{aligned}
$$

(2) 函数 $f(t)$ 为一连续函数，用类似于(1)的方法，有

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\sin 2\tau\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}\sin 2\tau\,\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)\tau}\{-(1+\mathrm{j}\omega)\sin 2\tau-2\cos 2\tau\}}{(-(1+\mathrm{j}\omega))^2+4}\Bigg|_0^{+\infty}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{5-\omega^2+2\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)-\mathrm{j}2\omega}{[(5-\omega^2)+\mathrm{j}2\omega][(5-\omega^2)-\mathrm{j}2\omega]}(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t+\mathrm{j}(5-\omega^2)\sin\omega t-\mathrm{j}2\omega\cos\omega t}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}\mathrm{d}\omega .
\end{aligned}
$$

(3) 可以看出 $f(t)$ 为奇函数，且 $-1,0,1$ 为其间断点. 因此，

在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} -f(\tau)j\sin\omega\tau d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{1}\sin\omega\tau d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega, \end{aligned}$$

而在 $f(t)$ 的间断点 $t_0=-1,0,1$ 处，左边的 $f(t)$ 应以 $\frac{1}{2}(f(t_0+0)+f(t_0-0))$ 代替.

注　以上三小题，都可以利用 Fourier 积分公式的三角形式而求得结果.

3. 求下列函数的 Fourier 积分，并推证下列积分结果：

(1) $f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$；

(2) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$；

(3) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi,\end{cases}$

证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$

解　(1) $f(t)$ 为一连续偶函数，由 Fourier 积分公式的三角形

式，有

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[2\cos\omega t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}(-\beta\cos\omega\tau+\omega\sin\omega\tau)}{\beta^2+\omega^2}\Bigg|_0^{+\infty}\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2\beta}f(t)=\frac{\pi}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta|t|}$$

(2) $f(t)$为连续偶函数，由 Fourier 积分公式的三角形式，有

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos\tau(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos\tau\cos\omega t\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos\tau\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\frac{1}{2}(\cos(\omega+1)\tau+\cos(\omega-1)\tau)\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\tau}(-\cos(\omega+1)\tau+(\omega+1)\sin(\omega+1)\tau)}{1+(\omega+1)^2}\Bigg|_0^{+\infty}+\right.$$

$$\left.\frac{\mathrm{e}^{-\tau}(-\cos(\omega-1)\tau+(\omega-1)\sin(\omega-1)\tau)}{1+(\omega-1)^2}\Bigg|_0^{+\infty}\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+(\omega+1)^2}+\frac{1}{1+(\omega-1)^2}\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos \omega t\,d\omega.$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos \omega t\,d\omega = \frac{\pi}{2}f(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

(3) $f(t)$为一连续的奇函数，由 Fourier 积分公式的三角形式，有

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos \omega(t-\tau)\,d\tau\right]d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos \omega t\cos \omega\tau + \sin \omega t\sin \omega\tau)\,d\tau\right]d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} 2\left[\int_0^{\pi}\sin \tau\sin \omega\tau\,d\tau\right]\sin \omega t\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} 2\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(\omega-1)\tau - \cos(\omega+1)\tau)\,d\tau\right]\sin \omega t\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}\Big|_0^{\pi}\right]\sin \omega t\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(\omega-1)\pi}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)\pi}{\omega+1}\right)\sin \omega t\,d\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2}\sin \omega t\,d\omega.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin \omega\pi\sin \omega t}{1-\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2}f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi; \\ 0, & |t|>\pi. \end{cases}$$

注 以上三小题都可以由 Fourier 积分公式的复数形式获得结果.

4. 求函数 $f(t)=e^{-\beta t},(\beta>0,t\geqslant 0)$的 Fourier 正弦积分表达式和 Fourier 余弦积分表达式.

解 根据 Fourier 正弦积分公式，并利用分部积分法，有

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin \omega\tau\,d\tau\right]\sin \omega t\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\sin\omega\tau\,d\tau\right]\sin\omega t\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-\beta\tau}(\beta\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau)}{\beta^2+\omega^2}\Big|_0^{+\infty}\right]\sin\omega t\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t\,d\omega.$$

根据 Fourier 余弦积分公式,同理可得

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\right]\cos\omega t\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\,d\tau\right]\cos\omega t\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-\beta\tau}(\omega\sin\omega\tau-\beta\cos\omega\tau)}{\beta^2+\omega^2}\Big|_0^{+\infty}\right]\cos\omega t\,d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\,d\omega.$$

习题二解答

1. 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}A, 0\leqslant t\leqslant\tau;\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解 根据 Fourier 变换的定义,有

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\tau} Ae^{-j\omega t}dt=\frac{A}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau}).$$

2. 设 $F(\omega)$是函数 $f(t)$的 Fourier 变换,则 $F(\omega)$与 $f(t)$有相同的奇偶性.

证 因为 $f(t)$与 $F(\omega)$是一个 Fourier 变换对,即

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

如果 $F(\omega)$为奇函数,即 $F(-\omega)=-F(\omega)$,则

$$
\begin{aligned}
f(-t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega(-t)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -F(-\omega)e^{j(-\omega)t}\,d\omega \\
(\text{令} -\omega = u)\quad &= \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} F(u)e^{jut}\,du \\
(\text{换积分变量 } u \text{ 为 } \omega)\quad &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= -f(t).
\end{aligned}
$$

所以 $f(t)$亦为奇函数.

如果 $f(t)$为奇函数,即 $f(-t)=-f(t)$,则

$$
\begin{aligned}
F(-\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -f(-t)e^{-j\omega(-t)}\,dt \\
(\text{令} -t = u)\quad &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du \\
(\text{换积分变量 } u \text{ 为 } t)\quad &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \\
&= -F(\omega).
\end{aligned}
$$

所以 $F(\omega)$亦为奇函数.

同理可证 $f(t)$与 $F(\omega)$同为偶函数.

3. 求下列函数的 Fourier 变换,并推证下列积分结果:

(1) $f(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\beta t}, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 证明

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,d\omega=\begin{cases}\pi e^{-\beta t}, & t>0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0;\\ 0, & t<0.\end{cases}
$$

(2) $f(t)=\begin{cases}\cos t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin \omega\pi \cos \omega t}{1-\omega^2} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos t, & |t| \leqslant \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

解　(1) 由 Fourier 变换的定义,有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\beta t} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-(\beta + j\omega)t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha e^{-(\beta+j\omega)t}}{-(\beta+j\omega)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{\beta + j\omega} = \frac{\alpha(\beta - j\omega)}{\beta^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

由 Fourier 积分公式,并利用奇偶函数的积分性质,在 $f(t)$的连续点处,有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\beta - j\omega)}{\beta^2+\omega^2} e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\right)(\cos \omega t + j\sin \omega t)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\beta\cos \omega t}{\beta^2+\omega^2} + \frac{\omega \sin \omega t}{\beta^2+\omega^2}\right) + j\left(\frac{\beta \sin \omega t}{\beta^2+\omega^2} - \frac{\omega\cos \omega t}{\beta^2+\omega^2}\right)\right]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\beta\cos \omega t + \omega \sin \omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$

在间断点 $t=0$ 处,左端 $f(t)$应以$\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)] = \frac{\alpha}{2}$代替.由此可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta\cos \omega t + \omega\sin \omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{\alpha} f(t)$$

$$
=\begin{cases} \pi e^{-t}, & t>0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0; \\ 0, & t<0. \end{cases}
$$

(2) $f(t)$为一连续的偶函数,则

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos t(\cos \omega t - j\sin \omega t)\,dt \\
&= 2\int_{0}^{\pi} \cos t\cos \omega t\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} [\cos(1-\omega)t + \cos(1+\omega)t]\,dt \\
&= \frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega}\bigg|_0^{\pi} + \frac{\sin(1+\omega)t}{1+\omega}\bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega} + \frac{\sin(1+\omega)\pi}{1+\omega} \\
&= \frac{2\omega\sin \omega\pi}{1-\omega^2}.
\end{aligned}
$$

由 Fourier 积分公式,有

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega\sin \omega\pi}{1-\omega^2}(\cos \omega t + j\sin \omega t)\,d\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\omega\sin \omega\pi}{1-\omega^2}\cos \omega t\,d\omega,
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\int_{0}^{+\infty} \frac{\omega\sin \omega\pi\cos \omega t}{1-\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cos t, & |t|\leqslant\pi; \\ 0, & |t|>\pi. \end{cases}
$$

4. 求函数 $f(t)=e^{-t}(t\geqslant 0)$的 Fourier 正弦变换,并推证

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega\sin \alpha\omega}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha}, (\alpha>0).$$

解 由 Fourier 正弦变换公式，有

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \mathscr{F}_s[f(t)] \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\sin \omega t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin \omega t\,\mathrm{d}t \\ &= \left.\frac{\mathrm{e}^{-t}(-\sin \omega t-\omega\cos \omega t)}{1+\omega^2}\right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\omega}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

由 Fourier 正弦逆变换公式，有

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin \omega t\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega\sin \omega t}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$

由此，当 $t=\alpha>0$ 时，可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega\sin \alpha\omega}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}f(\alpha) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha}, (\alpha>0).$$

5．设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，试证明

(1) $f(t)$为实值函数的充要条件是 $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$；

(2) $f(t)$为虚值函数的充要条件是 $F(-\omega)=-\overline{F(\omega)}$.

证 在一般情况下，记

$$f(t)=f_r(t)+\mathrm{j}f_i(t),$$

其中 $f_r(t)$和 $f_i(t)$均为 t 的实值函数，且分别为 $f(t)$的实部与虚部．因此

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_r(t)+\mathrm{j}f_i(t)][\cos \omega t-\mathrm{j}\sin \omega t]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_r(t)\cos \omega t + f_i(t)\sin \omega t]\mathrm{d}t -$$
$$\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} [f_r(t)\sin \omega t - f_i(t)\cos \omega t]\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{Re}[F(\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(\omega)],$$

其中

$$\mathrm{Re}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_r(t)\cos \omega t + f_i(t)\sin \omega t]\mathrm{d}t, \qquad (a)$$

$$\mathrm{Im}[F(\omega)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} [f_r(t)\sin \omega t - f_i(t)\cos \omega t]\mathrm{d}t. \qquad (b)$$

(1) 若 $f(t)$为 t 的实值函数,即 $f(t)=f_r(t)$, $f_i(t)=0$. 此时,(a)式和(b)式分别为

$$\mathrm{Re}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\cos \omega t\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{Im}[F(\omega)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\sin \omega t\,\mathrm{d}t.$$

所以

$$F(-\omega) = \mathrm{Re}[F(-\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(-\omega)]$$
$$= \mathrm{Re}[F(\omega)] - \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(\omega)] = \overline{F(\omega)}.$$

反之,若已知 $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$,则有

$$\mathrm{Re}[F(-\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(-\omega)] = \mathrm{Re}[F(\omega)] - \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(\omega)],$$

此即表明 $F(\omega)$的实部是关于 ω 的偶函数;$F(\omega)$的虚部是关于 ω 的奇函数. 因此,必定有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\cos \omega t\,\mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\sin \omega t\,\mathrm{d}t,$$

亦即表明 $f(t)=f_r(t)$为 t 的实值函数. 从而结论(1)获证.

(2) 若 $f(t)$为 t 的虚值函数,即 $f(t)=\mathrm{j}f_i(t)$, $f_r(t)=0$. 此时,(a)式和(b)式分别为

$$\mathrm{Re}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\sin \omega t\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{Im}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\cos \omega t \mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned} F(-\omega) &= \mathrm{Re}[F(-\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(-\omega)] \\ &= -\mathrm{Re}[F(\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(\omega)] \\ &= -\{\mathrm{Re}[F(\omega)] - \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(\omega)]\} \\ &= -\overline{F(\omega)}. \end{aligned}$$

反之,若已知 $F(-\omega) = -\overline{F(\omega)}$,则有

$$\mathrm{Re}[F(-\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(-\omega)] = -\mathrm{Re}[F(\omega)] + \mathrm{j}\mathrm{Im}[F(\omega)],$$

此即表明 $F(\omega)$的实部是关于 ω 的奇函数;$F(\omega)$的虚部是关于 ω 的偶函数.因此,必定有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\sin \omega t \mathrm{d}t + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\cos \omega t \mathrm{d}t,$$

亦即表明 $f(t) = \mathrm{j}f_i(t)$为 t 的虚值函数.从而结论(2)获证.

注 本题与第 2 题,在有些书中统称为复函数 Fourier 变换的奇偶虚实性质,即

1° $f(t)$和 $F(\omega)$有相同的奇偶性;

2° $f(t)$为 t 的实值函数的充要条件是 $F(\omega)$的实部为 ω 的偶函数,虚部为 ω 的奇函数;

3° $f(t)$为 t 的虚值函数的充要条件是 $F(\omega)$的实部为 ω 的奇函数,虚部为 ω 的偶函数.

在这个性质中,还有一些结论就不再一一列举了.

6. 已知某函数的 Fourier 变换为 $F(\omega) = \dfrac{\sin \omega}{\omega}$,求该函数 $f(t)$.

解 由 Fourier 逆变换公式,有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega}(\cos \omega t + \mathrm{j}\sin \omega t)\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+t)\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-t)\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega.$$

由单位阶跃函数 $u(t)$的 Fourier 积分表达式可知：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega = u(t) - \frac{1}{2}, (t \neq 0),$$

从而

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+t)\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = u(1+t) - \frac{1}{2}, (t \neq -1),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-t)\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = u(1-t) - \frac{1}{2}, (t \neq 1),$$

因此

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[u(1+t) - \frac{1}{2} + u(1-t) - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[u(1+t) + u(1-t) - 1], (|t| \neq 1),$$

而当 $t=-1,1$ 时，左端 $f(t)$应以$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\frac{1}{4}$代替，即

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[u(1+t) + u(1-t) - 1], & |t| \neq 1; \\ \frac{1}{4}, & |t| = 1. \end{cases}$$

注 1 此题也可以利用 Dirichlet 积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$求得结果.

注 2 本题的结果也可以写为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1; \\ \frac{1}{4}, & |t| = 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

7. 已知某函数的 Fourier 变换 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，求该函数 $f(t)$.

解　利用 δ - 函数的筛选性质，由 Fourier 逆变换公式，有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2}e^{j\omega t}\Big|_{\omega=-\omega_0}+\frac{1}{2}e^{j\omega t}\Big|_{\omega=\omega_0}\\&=\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}=\cos\omega_0 t.\end{aligned}$$

8. 求符号函数（又称正负号函数）$\operatorname{sgn}t=\frac{t}{|t|}=\begin{cases}-1, & t<0;\\ 1, & t>0,\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解　因为符号函数和单位阶跃函数有下列关系，即

$$\operatorname{sgn}t=2u(t)-1$$

利用 $u(t)$ 及 1 的 Fourier 变换及线性性质，有

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[\operatorname{sgn}t]=2\mathscr{F}[u(t)]-\mathscr{F}[1]\\&=2\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)-2\pi\delta(\omega)\\&=\frac{2}{j\omega}.\end{aligned}$$

注　利用 $\operatorname{sgn}t=u(t)-u(-t)$ 及 δ - 函数是偶函数的性质也能求得结果.

9. 求函数 $f(t)=\frac{1}{2}\left[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)+\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\right]$ 的 Fourier 变换.

解　利用 δ - 函数的筛选性质，有

$$
\begin{aligned}
F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\right.\\
&\qquad\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=-a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=-\frac{a}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=\frac{a}{2}}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{a}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{a}{2}}\right]\\
&=\cos\omega a+\cos\frac{\omega a}{2}.
\end{aligned}
$$

10. 求函数 $f(t)=\cos t\sin t$ 的 Fourier 变换.

解 利用正弦函数的 Fourier 变换,即

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)],$$

有

$$
\begin{aligned}
F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\mathscr{F}[\cos t\sin t]\\
&=\frac{1}{2}\mathscr{F}[\sin 2t]\\
&=\mathrm{j}\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)].
\end{aligned}
$$

11. 求函数 $f(t)=\sin^3 t$ 的 Fourier 变换.

解 因为

$$\sin^3 t=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}\right)^3=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t,$$

利用正弦函数的 Fourier 变换,有

$$
\begin{aligned}
F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[\sin^3 t]\\
&=\frac{3}{4}\mathscr{F}[\sin t]-\frac{1}{4}\mathscr{F}[\sin^3 t]\\
&=\frac{3}{4}\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]-\frac{1}{4}\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]
\end{aligned}
$$

$$-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}[3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)].$$

12. 求函数 $f(t)=\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)$的 Fourier 变换.

解 利用正弦函数及余弦函数的 Fourier 变换,有

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&=\mathscr{F}\left[\sin 5t\cos\frac{\pi}{3}+\cos 5t\sin\frac{\pi}{3}\right]\\&=\mathscr{F}\left[\frac{1}{2}\sin 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]\\&=\frac{\pi}{2}[(\sqrt{3}+\mathrm{j})\delta(\omega+5)+(\sqrt{3}-\mathrm{j})\delta(\omega-5)].\end{aligned}$$

13. 证明 δ－函数的下列性质:

(1) δ－函数是偶函数,即 $\delta(t)=\delta(-t)$;

(2) $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t)$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)$,其中 $u(t)$为单位阶跃函数;

(3) 若 $f(t)$为无穷次可微函数,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0).$$

证 (1) δ－函数可以看成一个 δ－型序列的弱极限,现取 δ－型序列

$$G_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & |t|>\varepsilon;\\ \frac{1}{2\varepsilon}, & |t|<\varepsilon.\end{cases}\quad(\varepsilon>0),$$

即对于任何一个在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微的函数 $f(t)$,如满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\varepsilon(t)f(t)\mathrm{d}t, \tag{a}$$

则称 $G_\varepsilon(t)$的弱极限为 δ－函数，记为 $\delta(t)$，亦即

$$G_\varepsilon(t)\overset{\text{弱}}{\underset{\varepsilon\to0}{\Rightarrow}}\delta(t)\text{或简记为}\lim_{\varepsilon\to0}G_\varepsilon(t)=\delta(t).$$

显然，对于任何一个在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微函数 $f(t)$来说，$f(-t)$也是$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微的函数，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(-t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\varepsilon(t)f(-t)\mathrm{d}t.$$

令 $t=-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-u)f(u)\mathrm{d}u=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\varepsilon(-u)f(u)\mathrm{d}u,$$

即
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\varepsilon(-t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$(\text{注意到 }G_\varepsilon(t)=G_\varepsilon(-t))=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\varepsilon(t)f(t)\mathrm{d}t.\tag{b}$$

由(a)，(b)二式可得 $\delta(t)=\delta(-t)$，即 δ－函数为偶函数.

注 1　上面的证明是从 δ－函数的定义出发的.也可以利用 δ－函数的筛选性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(t)|_{t=0}=f(0)$加以证明.因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u)f(-u)\mathrm{d}u(\text{令 }t=-u)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(-t)\mathrm{d}t\\(\text{由筛选性质})&=f(-t)|_{t=0}=f(0),\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0),\\\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\mathrm{d}t=f(0),\end{cases}$$

从而可以推得　　$\delta(t)=\delta(-t).$

注 2　还可以利用 δ－函数的 Fourier 变换加以证明.因为

$\mathscr{F}[\delta(t)]=1$，所以 δ－函数的 Fourier 逆变换为

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{j\omega(-t)}d\omega=\delta(-t).$$

（因为在主值意义下 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega$）

注 3　下面二小题，我们不从 δ－函数的定义出发，而是利用已有的结果或从形式上给出证明.

(2) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ 可知

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=1,t>0,$$
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=0,t<0$$

由此可以看出

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t).$$

将上式两边对 t 求导，可得 $\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$.

(3) 根据 δ－函数的筛选性质，并注意到 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$，且 $t\neq0$ 时，$\delta(t)=0$，利用分部积分法可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)dt=\delta(t)f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f'(t)dt$$
$$=-f'(t)\big|_{t=0}=-f'(0).$$

14. 证明：若 $\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)$，其中 $\varphi(t)$ 为一实函数，则

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}],$$

其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(-\omega)$ 的共轭函数.

证　利用 Euler 公式，有

$$F(\omega)=\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]+j\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]. \tag{a}$$

而

$$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\varphi(t)}\cdot e^{-j(-\omega)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\varphi(t)}\cdot e^{j\omega t}dt.$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{F(-\omega)}&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\varphi(t)}\cdot e^{-j\omega t}dt=\mathscr{F}[e^{-j\varphi(t)}]\\&=\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]-j\mathscr{F}[\sin\varphi(t)].\end{aligned} \tag{b}$$

显然，(a) ± (b)分别可得

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}].$$

15. 证明周期为 T 的非正弦函数 $f_T(t)$ 的频谱函数为

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0),$$

其中 c_n 为 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数展式中的系数.

证　根据 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega_0 t},$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt,$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

则

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f_T(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(t)e^{-j\omega t}dt$$

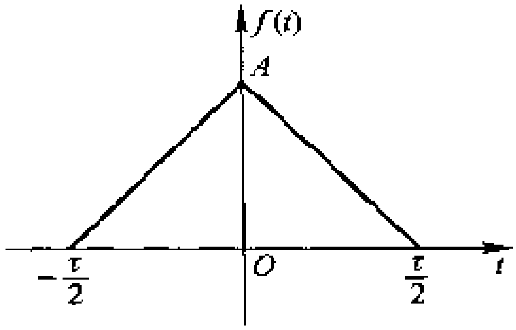
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

16. 求如图所示的三角形脉冲的频谱函数.

解 由图形可知 $f(t)$为一连续偶函数,且其表达式为



(第 16 题)

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2A}{\tau}\left(\dfrac{\tau}{2}+t\right), & -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t<0;\\ \dfrac{2A}{\tau}\left(\dfrac{\tau}{2}-t\right), & 0\leqslant t<\dfrac{\tau}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $f(t)$的频谱函数

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos \omega t \, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2} - t\right)\cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{4A}{\tau}\left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{\tau}{2}\cos \omega t \, dt - \int_0^{\frac{\tau}{2}} t\cos \omega t \, dt\right]$$

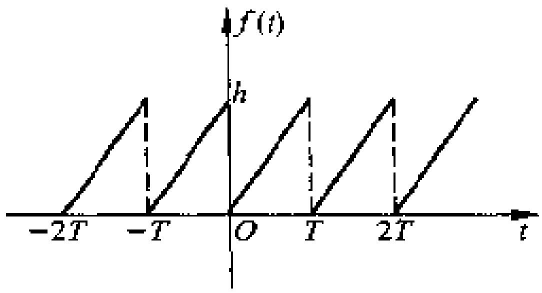
$$= \frac{4A}{\tau}\cdot\frac{\tau}{2}\frac{1}{\omega}\sin \omega t\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \frac{4A}{\tau}\left[\frac{t\sin \omega t}{\omega} + \frac{\cos \omega t}{\omega^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{4A}{\tau\omega^2}\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right)$$

17. 求作如图所示的锯齿形波的频谱图.

解　该波形在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \frac{h}{T}t, t \in [0, T)$$



(第 17 题)

为了求出 $f(t)$ 的频谱或作出频谱图，这里只需要确定 $f(t)$ 的 Fourier 系数 c_n，即

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{h}{T}t\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2};$$

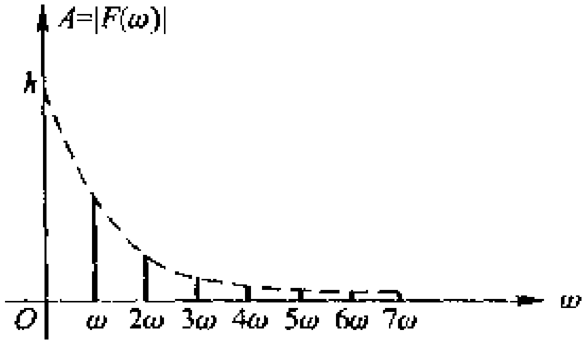
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t = \frac{h}{T^2}\int_0^T t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{h}{2n\pi}\mathrm{j}.$$

所以，$A_0 = 2|c_0| = h$，$A_n = 2|c_n| = \frac{h}{n\pi}$，$\omega_n = n\omega = \frac{2n\pi}{T}(n = 1, 2, \cdots)$现列表如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
ω_n	0	ω	2ω	3ω	4ω	5ω	6ω	7ω	…
A_n	h	$\frac{h}{\pi}$	$\frac{h}{2\pi}$	$\frac{h}{3\pi}$	$\frac{h}{4\pi}$	$\frac{h}{5\pi}$	$\frac{h}{6\pi}$	$\frac{h}{7\pi}$	…

据此可作出频谱图如下(只作出 $\omega\geqslant 0$ 的部分).



18. 求 Gauss 分布函数

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

的频谱函数.

解 因为 $f(t)$的 Fourier 变换,在频谱分析中就称为 $f(t)$的频谱函数,利用教材中已求得的钟形脉冲函数的 Fourier 变换的结果,即

$$\mathscr{F}[Ae^{-\beta t^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}},(A>0,\beta>0)$$

由此,取 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, $\beta=\frac{1}{2\sigma^2}$,即为 Gauss 分布函数 $f(t)$. 从而 $f(t)$的频谱函数为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$=e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

注 此题也可以利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$的结果,按 Fourier 变换定义直接去做.

习题三解答

1. 若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$, α,β 是常数,

证明(线性性质):

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),$$
$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

证 根据 Fourier 变换与逆变换的公式分别有

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]e^{-j\omega t}dt$$
$$=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-j\omega t}dt+\beta\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),$$
$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\alpha\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]+\beta\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$$
$$=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

2. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,证明(对称性质):

$$f(\pm\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)e^{-j\omega t}dt,$$

即
$$\mathscr{F}[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega)$$

证 由 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{a}$$

且
$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega. \tag{b}$$

在(a)式中 t 与 ω 互换,有

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{j\omega t}dt$$

(令 $t=-u$) $$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-u)e^{-j\omega u}du$$

(u 换为 t) $$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-t)e^{-j\omega t}dt,$$

此即表明 $\mathscr{F}[F(-t)]=2\pi f(\omega)$.

在(b)式中 t 与 ω 互换，有

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

此即表明 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$.

因此 $$\mathscr{F}[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega).$$

3. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$a$ 为非零常数，证明(相似性质)：

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

证 当 $a>0$ 时，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(at)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-j\omega t}\,dt\\(\text{令 } at=u)&=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}\,du\\(u\text{ 换为 }t)&=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t}\,dt\\&=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

当 $a<0$ 时，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(at)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-j\omega t}\,dt\\(\text{令 } at=u)\quad&=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}\,du\\(u\text{ 换为 }t)\quad&=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t}\,dt=\frac{1}{-a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

因此 $$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(象函数的位移性质)：

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=e^{\pm j\omega_0 t}f(t),$$

即 $$F(\omega\mp\omega_0)=\mathscr{F}[e^{\pm j\omega_0 t}f(t)].$$

证 根据定义，有

$$\mathscr{F}[e^{\pm j\omega_0 t}f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\pm j\omega_0 t}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j(\omega\mp\omega_0)t}dt=F(\omega\mp\omega_0).$$

5. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(象函数的微分性质)：

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-jtf(t)].$$

证　根据定义，并交换微分与积分运算的次序，有

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\omega}(f(t)e^{-j\omega t})dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}-jtf(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\mathscr{F}[-jtf(t)].$$

6. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明(翻转性质)：

$$F(-\omega)=\mathscr{F}[f(-t)].$$

证　$\mathscr{F}[f(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)e^{-j\omega t}dt$

$$(\text{令} -t=u)\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-j\omega(-u)}du$$

$$(\text{换 } u \text{ 为 } t)\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j(-\omega)t}dt$$

$$=F(-\omega)$$

注　事实上，在第 3 题中令 $a=-1$，即得本题结论.

7. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，证明：

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)],$$

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2j}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)].$$

证　利用线性性质及象函数的位移性质(第 4 题)，有

$$\mathscr{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \mathscr{F}\left[f(t)\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathscr{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)].$$

同理可得

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t] = \mathscr{F}\left[f(t)\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathscr{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2j}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

8. 若 $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$，$a$ 为非零常数，试证明：

(1) $\mathscr{F}[f(at - t_0)] = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$，

(2) $\mathscr{F}[f(t_0 - at)] = \dfrac{1}{|a|}F\left(-\dfrac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$.

证 (1) 由定义，有

$$\mathscr{F}[f(at - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at - t_0)e^{-j\omega t}dt$$

$$(\text{令 } at - t_0 = u,\text{且 } a>0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\omega\frac{u+t_0}{a}}\frac{1}{a}du$$

$$(u\text{ 换为 } t) \qquad = \frac{1}{a}e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t}dt$$

$$= \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0},$$

当 $a<0$ 时，同理可得 $\mathscr{F}[f(at - t_0)] = -\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$

因此 $$\mathscr{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$$

注 也可用位移性质和相似性质加以证明. 例如令

$g(t)=f(at)$,由位移性质得

$$\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\mathscr{F}\left[f\left(a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right)\right]=\mathscr{F}\left[g\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]$$

$$=\mathscr{F}[g(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{t_0}{a}}=\mathscr{F}[f(at)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}t_0}$$

(由相似性质) $$=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}t_0}.$$

(2) 在结论(1)中取 a,t_0 分别为 $-a,-t_0$ 即可得到结论.

注 此题也可以从定义出发,或利用位移性质及相似性质获得结果.

9. 设函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1;\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$ 利用对称性质,证明

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1;\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

证 因为

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^1\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\omega},$$

由对称性质:若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$,有

$$\mathscr{F}[F(t)]=\mathscr{F}\left[\frac{2\sin t}{t}\right]=2\pi f(-\omega),$$

即 $$\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\pi f(-\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1;\\ 0, & |\omega|>1.\end{cases}$$

10. 利用象函数的微分性质,求 $f(t)=t\mathrm{e}^{-t^2}$ 的 Fourier 变换.

解 由钟形脉冲函数的 Fourier 变换:

$$\mathscr{F}[Ae^{-\beta t^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}},$$

取 $A=1,\beta=1$，有 $\mathscr{F}[e^{-t^2}]=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$，再利用象函数的微分性质：$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\mathscr{F}[-jtf(t)]=-j\mathscr{F}[te^{-t^2}]$，有

$$\mathscr{F}[te^{-t^2}]=-\frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\omega}{2j}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

注 此题也可以按 Fourier 变换的定义做，但较麻烦.

11. 若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，利用 Fourier 变换的性质求下列函数 $g(t)$ 的 Fourier 变换：

(1) $g(t)=tf(2t)$； (2) $g(t)=(t-2)f(t)$；

(3) $g(t)=(t-2)f(-2t)$； (4) $g(t)=t^3f(2t)$；

(5) $g(t)=tf'(t)$； (6) $g(t)=f(1-t)$；

(7) $g(t)=(1-t)f(1-t)$； (8) $g(t)=f(2t-5)$.

解 (1) 由相似性质：$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$，有

$$\mathscr{F}[f(2t)]=\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

再由象函数的微分性质：$\mathscr{F}[tf(t)]=-\frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}F(\omega)$，有

$$\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[tf(2t)]=-\frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]=\frac{j}{2}\frac{d}{d\omega}F\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(2) 由线性性质及象函数的微分性质，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]&=\mathscr{F}[(t-2)f(t)]=\mathscr{F}[tf(t)]-2\mathscr{F}[f(t)]\\&=-\frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}F(\omega)-2F(\omega)=j\frac{d}{d\omega}F(\omega)-2F(\omega).\end{aligned}$$

(3) 由相似性质，有

$$\mathscr{F}[f(-2t)]=\frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega}{2}\right),$$

再利用线性性质及象函数的微分性质，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]&=\mathscr{F}[(t-2)f(-2t)]\\&=\mathscr{F}[tf(-2t)]-2\mathscr{F}[f(-2t)]\\&=-\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)\right]-2\cdot\frac{1}{2}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)\\&=\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)-F\left(-\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

(4) 由相似性质，有 $\mathscr{F}[f(2t)]=\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$. 再利用象函数的高阶导数公式：$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega)=(-\mathrm{j})^n\mathscr{F}[t^nf(t)]$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]&=\mathscr{F}[t^3f(2t)]\\&=\frac{1}{(-\mathrm{j})^3}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\omega^3}\left[\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}\omega^3}F\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

(5) 由微分性质，有 $\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{j}\omega F(\omega)$；再由象函数的微分性质，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[tf'(t)]&=-\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\mathrm{j}\omega F(\omega)]\\&=-F(\omega)-\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega).\end{aligned}$$

(6) 利用第 8 题的(2)，取 $t_0=1$、$a=1$，有

$$\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[f(1-t)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega).$$

(7) 同(6)，再利用线性性质及象函数的微分性质，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g(t)]&=\mathscr{F}[(1-t)f(1-t)]\\&=\mathscr{F}[f(1-t)]-\mathscr{F}[tf(1-t)]\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega)-\left[-\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega))\right]\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega)-\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F(-\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(-\omega)\right]\\&=-\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(-\omega).\end{aligned}$$

(8) 利用第 8 题的(1)，取 $a=2, t_0=5$，有

$$\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[f(2t-5)]=\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}i\omega}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

注 1　从上述各题求解的过程可以看出：

(i) 幂函数 t^m(包括多项式)与函数 $f(t)$ 相乘，即 $t^m f(t)$，($m=1,2,\cdots$)取 Fourier 变换，可以利用象函数的高阶导数公式求解；

(ii) 如常数 a 与函数 $f(t)$ 的自变量 t 相乘，即 $f(at)$ 取 Fourier 变换，可以利用相似性质求解.

注 2　第(6)，(8)二小题，除利用第 8 题的结论(1)，(2)求解外，也可以利用定义直接做.

12. 利用能量积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$，求下列积分的值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解　(1)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{令}\frac{x}{2}=t\right)\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathscr{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]\right|^2\mathrm{d}\omega$$

$$(\text{见第 9 题})\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\mathrm{d}\omega$$

$$=\pi$$

(2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x\cos x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$(\text{由(1)的结果}) = \pi - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

$$(\text{再由(1)的结果}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]\right|^2\mathrm{d}\omega,$$

其中 $$\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$(\text{见习题一的 }3(1)) = 2\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|\omega|} = \pi\mathrm{e}^{-|\omega|},$$

从而 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}|^2\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\pi^2\mathrm{e}^{-2\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2\omega}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$(\text{由(3)的结果}) = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

习题四解答

1. 证明下列各式：

(1) $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$;

(2) $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$;

(3) $a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]$,($a$ 为常数);

(4) $e^{at}[f_1(t)*f_2(t)]=[e^{at}f_1(t)]*[e^{at}f_2(t)]$,($a$ 为常数);

(5) $[f_1(t)+f_2(t)]*[g_1(t)+g_2(t)]=f_1(t)*g_1(t)+f_2(t)*g_1(t)+f_1(t)*g_2(t)+f_2(t)*g_2(t)$;

(6) $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{d}{dt}f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\frac{d}{dt}f_2(t)$;

(7) $f(t)*\delta(t)=f(t)$;

(8) $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$;

(9) $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$;

(10) $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$.

证 (1) $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$(\text{令 } t-\tau=u)=-\int_{+\infty}^{-\infty}f_1(t-u)f_2(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$$

$$=f_2(t)*f_1(t).$$

(2) $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)[f_2(t-\tau)*f_3(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_3(u)f_2(t-\tau-u)du\right]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_3(u)f_2(t-\tau-u)dud\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-u-\tau)\mathrm{d}\tau\right] f_3(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t-u) * f_2(t-u)] f_3(u)\mathrm{d}u$$

$$= [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t).$$

(3) $$a[f_1(t) * f_2(t)] = a\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[af_1(\tau)] f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = [af_1(t)] * f_2(t)$$

或 $$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)[af_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau = f_1(t) * [af_2(t)].$$

(4) $$\mathrm{e}^{at}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathrm{e}^{at}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{e}^{a\tau} f_1(\tau)][\mathrm{e}^{a(t-\tau)} f_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$= [\mathrm{e}^{at} f_1(t)] * [\mathrm{e}^{at} f_2(t)]$$

(5) $$[f_1(t) + f_2(t)] * [g_1(t) + g_2(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(\tau) + f_2(\tau)][g_1(t-\tau) + g_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(\tau)g_1(t-\tau) + f_2(\tau)g_1(t-\tau) + f_1(\tau)g_2(t-\tau) + f_2(\tau)g_2(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$= f_1(t) * g_1(t) + f_2(t) * g_1(t) + f_1(t) * g_2(t) + f_2(t) * g_2(t)$$

(6) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f_1(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_2(t),$$

又

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_2(t) * f_1(t)]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f_2(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)*f_2(t).$$

(7) $$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$(\delta(t)\text{为偶函数})=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)\mathrm{d}\tau$$

$$=f(\tau)|_{\tau=t}=f(t).$$

(8) $$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))\mathrm{d}\tau$$

$$=f(t-t_0).$$

(9) 利用结论(6),有

$$f(t)*\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)*\delta(t)]$$

$$(\text{由结论}(7))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f'(t).$$

(10) $$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\left(u(t-\tau)=\begin{cases}1, & \tau<t;\\ 0, & \tau>t.\end{cases}\right)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

2. 若 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$, $f_2(t)=\sin t u(t)$,求 $f_1(t)*f_2(t)$.

解 由 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$

$$f_2(t)=\sin t u(t)=\begin{cases}\sin t, & t>0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

所以 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

现在的问题是要确定 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)\neq 0$ 的区间.这里采用解不等式组的方法,因为 $\tau>0, f_2(\tau)\neq 0$; $t-\tau>0, f_1(t-\tau)\neq 0$,即必须满足

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ t-\tau > 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ \tau < t. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) - f_2(t) * f_1(t) & \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \sin\tau \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \sin\tau \mathrm{e}^{\alpha\tau}\mathrm{d}\tau \\ \text{(分部积分法)} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\frac{\mathrm{e}^{\alpha\tau}(\alpha\sin\tau - \cos\tau)}{\alpha^2+1}\right]\Bigg|_0^t \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\frac{\mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha\sin t - \cos t)}{\alpha^2+1} + \frac{1}{\alpha^2+1}\right] \\ &= \frac{\alpha\sin t - \cos t + \mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha^2-1}. \end{aligned}$$

3. 若 $f_1(t) = \begin{cases} 0, & t<0; \\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0. \end{cases}$ 与 $f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $f_1(t) * f_2(t)$.

解 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

采用与上题同样的方法找出 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)\neq 0$ 的区间. 即必须满足下述不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \tau\leqslant t\end{cases}$$

当 $t\leqslant 0$ 时,则 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)=0$;当 $0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时,则 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)\neq 0$ 的区间为$[0,t]$;当 $t>\dfrac{\pi}{2}$时,则 $f_2(\tau)f_1(t-\tau)\neq 0$ 的区间为$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,因此

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{-\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ \displaystyle\int_0^t \sin\tau\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & 0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\tau\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & t>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{2}(\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-t}), & 0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}), & t>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

4. 若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$,$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$,证明

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega).$$

证 由 Fourier 变换的定义,有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\mathrm{d}\omega_1\right]f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega_1)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_1)t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega_1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega_1)F_2(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 \\ &= \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega).\end{aligned}$$

注　也可以由 Fourier 逆变换 $\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)\right]$而获得证明.

5. 求下列函数的 Fourier 变换：

(1) $f(t)=\sin\omega_0 t\cdot u(t)$；　(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0 t\cdot u(t)$；

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$；(4) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}u(t)$；

(5) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}u(t-t_0)$；　(6) $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}tu(t)$.

解　(1) 利用 $\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$及习题三第 7 题的结论：$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$，其中 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin\omega_0 t\cdot u(t)] &= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)-\frac{1}{\mathrm{j}(\omega+\omega_0)}-\pi\delta(\omega+\omega_0)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega+\omega_0}-\frac{1}{\omega-\omega_0}\right)+\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)] \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)].\end{aligned}$$

注 本小题也可以利用第 4 题的结论做.

(2) 由 Fourier 变换的定义,有

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t}\sin\omega_0 t\cdot u(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}\sin\omega_0 t\cdot u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin\omega_0 t e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{e^{-(\beta+j\omega)t}[-(\beta+j\omega)\sin\omega_0 t-\omega_0\cos\omega_0 t]}{(\beta+j\omega)^2+\omega_0^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\omega_0}{(\beta+j\omega)^2+\omega_0^2}.$$

(3) 类似于第(2)小题的方法,有

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\cos\omega_0 t e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{e^{-(\beta+j\omega)t}[-(\beta+j\omega)\cos\omega_0 t+\omega_0\sin\omega_0 t]}{(\beta+j\omega)^2+\omega_0^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\beta+j\omega}{(\beta+j\omega)^2+\omega_0^2}.$$

(4) 利用象函数的位移性质及 $u(t)$的 Fourier 变换,有

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}u(t)]=\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(5) 利用位移性质及 $u(t)$的 Fourier 变换,有

$$\mathscr{F}[u(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}\mathscr{F}[u(t)]$$

$$=e^{-j\omega t_0}\left(\frac{1}{j\omega}-\pi\delta(\omega)\right),$$

再由象函数的位移性质,有

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}u(t-t_0)]=e^{-j(\omega-\omega_0)t_0}\left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right].$$

(6) 由象函数的微分性质,有

$$\mathscr{F}[tu(t)] = -\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}[u(t)]$$
$$= \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$$
$$= \mathrm{j}\left(\frac{-1}{\mathrm{j}\omega^2} + \pi\delta'(\omega)\right)$$
$$= -\frac{1}{\omega^2} + \pi\mathrm{j}\delta'(\omega).$$

再由象函数的位移性质,有

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}tu(t)] = -\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2} + \pi\mathrm{j}\delta'(\omega-\omega_0).$$

6. 证明互相关函数和互能量谱密度的下列性质:

$$R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau),$$
$$S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}.$$

证 由互相关函数的定义,有

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)f_1(t+\tau)\mathrm{d}t$$
$$(令\ t+\tau=u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u-\tau)f_1(u)\mathrm{d}u$$
$$(u\ 换为\ t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+(-\tau))\mathrm{d}t$$
$$= R_{12}(-\tau).$$

由互能量谱密度的公式,有

$$S_{21}(\omega) = \overline{F_2(\omega)}F_1(\omega) = \overline{F_2(\omega)\overline{F_1(\omega)}} = \overline{\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)}$$
$$= \overline{S_{12}(\omega)}.$$

7. 已知某信号的相关函数 $R(\tau) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2a|\tau|}$,求它的能量谱密度 $S(\omega)$,其中 $a>0$.

解 由定义知

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2a\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{-2a\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\frac{e^{(2a-j\omega)\tau}}{2a-j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{4}\frac{e^{-(2a+j\omega)\tau}}{-(2a+j\omega)}\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a-j\omega} + \frac{1}{2a+j\omega}\right) = \frac{a}{4a^2+\omega^2}.$$

8. 已知某波形的相关函数 $R(\tau)=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$（$\omega_0$ 为常数），求这个波形的能量谱密度.

解　$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega_0\tau e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{F}[\cos\omega_0\tau]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

9. 求函数 $f(t)=e^{-at}u(t)$，$(a>0)$的能量谱密度.

解　因为 $f(t)=e^{-at}u(t)=\begin{cases} e^{-at}, & t>0; \\ 0, & t<0. \end{cases}$

$$f(t+\tau)=e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau)=\begin{cases} e^{-a(t+\tau)}, & t>-\tau; \\ 0, & t<-\tau. \end{cases}$$

当 $\tau>0$ 时，$f(t)f(t+\tau)\neq 0$ 的区间为$(0,+\infty)$，所以

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-a(t+\tau)}dt$$

$$= e^{-a\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-2at}dt = e^{-a\tau}\frac{1}{-2a}e^{-2at}\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a\tau}$$

当 $\tau<0$ 时，$f(t)f(t+\tau)\neq 0$ 的区间为$(-\tau,+\infty)$，所以

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\alpha(t+\tau)} \mathrm{d}t \\
&= e^{-\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2\alpha t} \mathrm{d}t \\
&= e^{-\alpha\tau} \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_{-\tau}^{+\infty} \\
&= e^{-\alpha\tau} \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha\tau} \\
&= \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha\tau}.
\end{aligned}
$$

因此 $R(\tau)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$，现在可以求得 $f(t)$的能量谱密度，即

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-j\omega)\tau} \mathrm{d}\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} \mathrm{d}\tau \right] \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\alpha-j\omega} e^{(\alpha-j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(\alpha+j\omega)} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} \Big|_{0}^{+\infty} \right] \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}.
\end{aligned}
$$

10. 若函数 $f_1(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}t, & 0\leqslant t\leqslant a;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 与 $f_2(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant a;\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ 求 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的互相关函数 $R_{12}(\tau)$.

解　$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) \mathrm{d}t$，

为了确定 $f_1(t)f_2(t+\tau)\neq 0$ 的区间，仍采用解下列不等式组的

方法,即

$$\begin{cases}0\leqslant t\leqslant a,\\0\leqslant t+\tau\leqslant a.\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}0\leqslant t\leqslant a,\\-\tau\leqslant t\leqslant a-\tau.\end{cases}$$

当$|\tau|>a$ 时,即 $\tau>a$ 及 $\tau<-a$,上不等式组无解(即两个不等式无公共部分),从而只能是 $f_1(t)f_2(t+\tau)=0$;

当 $0<\tau\leqslant a$ 时,上不等式组的解为 $0\leqslant t\leqslant a-\tau$;

当 $-a\leqslant\tau\leqslant 0$ 时,上不等式组的解为 $-\tau\leqslant t\leqslant a$.

综上所述,

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}\int_a^{-\tau}\dfrac{b}{a}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{b}{2a}(a^2-\tau^2), & -a\leqslant\tau\leqslant 0;\\ \int_0^{a-\tau}\dfrac{b}{a}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{b}{2a}(a-\tau)^2, & 0<\tau\leqslant a;\\ 0, & |\tau|>a.\end{cases}$$

习题五解答

1. 求微分方程 $x'(t)+x(t)=\delta(t)$,$(-\infty<t<+\infty)$的解.

解 在内容要点中已经说明,运用 Fourier 变换的有关性质,对欲求解的方程(或偏微分方程)两端取 Fourier 变换,将其转化为象函数的代数方程(或常微分方程),通过解代数方程(或常微分方程)及再求其 Fourier 逆变换而获得原方程的解.习题五的习题(除第 3 题)都是这样的解题思路和步骤.设 $\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega)$,对方程两边取 Fourier 变换,并利用 Fourier 变换的微分性质及 δ－函数的 Fourier 变换结果,可得

$$\mathrm{j}\omega X(\omega)+X(\omega)=1.$$

所以
$$X(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}.$$
从而,其逆变换为(见教材 §1.2 例 1)
$$x(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

2. 设 $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$,利用象函数的导数公式,求 $f(t)$的 Fourier 变换.

解 函数 $f(t)$是一个特殊的钟形脉冲函数,它的 Fourier 变换已经解决(见教材 §1.2 例 2).这里,要求利用象函数的导数公式,使得 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$满足一个常微分方程,通过解此方程而求得它的 Fourier 变换.这也是利用 Fourier 变换的性质求某些函数的 Fourier 变换的一种技巧.

设 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$,利用象函数的导数公式与分部积分法可得

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ \text{(分部积分法)}\quad&=\frac{\mathrm{j}}{\omega}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2\mathrm{j}}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ &=\frac{2\mathrm{j}}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\ &=\frac{2\mathrm{j}}{\omega}\mathscr{F}[tf(t)]\\ &=\frac{2\mathrm{j}}{\omega}\left(\frac{1}{-\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)\right)\\ &=-\frac{2}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega).\end{aligned}$$

而且当 $\omega=0$ 时,有 $F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$. 因此,$F(\omega)$满足下列常微分方程:

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)+\frac{\omega}{2}F(\omega)=0,\text{且 } F(0)=\sqrt{\pi}.$$

由此可解得

$$F(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}},$$

即
$$\mathscr{F}[e^{-t^2}]=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

3. 利用 Fourier 变换，解下列积分方程：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{\sin t}{t}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,d\omega=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1;\\ 2, & 1\leqslant t<2;\\ 0, & t\geqslant 2.\end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\begin{cases}1-t, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & 0\leqslant t<\pi;\\ -\frac{\pi}{4}, & t=\pi;\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$

解 (1) 从积分方程的左端可以看出，可利用 Fourier 余弦变换公式直接求得结果. 原方程可改写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\frac{\sin t}{t}$$

对照 Fourier 余弦积分公式知，$\frac{2}{\pi}\frac{\sin t}{t}$ 为 $g(\omega)$ 的 Fourier 余弦逆变换，即

$$g(\omega)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin t}{t}\cos\omega t\,dt$$

$$(\text{利用积化和差})=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2t}(\sin(1-\omega)t+\sin(1+\omega)t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\omega)t}{t}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+\omega)t}{t}dt\right]$$

$\left(利用\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du+\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right), & 0<\omega<1;\\ \frac{1}{2}[g(1+0)+g(1-0)], & \omega=1;\\ \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{-\infty}\frac{\sin u}{u}du+\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right), & \omega>1.\end{cases}$$

(当 $\omega>1$ 时,第一项中令 $u=-t$)

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right), & 0<\omega<1;\\ \frac{1}{2}[g(1+0)+g(1-0)], & \omega=1;\\ \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right), & \omega>1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0<\omega<1;\\ \frac{1}{2}, & \omega=1;\\ 0, & \omega>1.\end{cases}$$

(2) 设积分方程右端的分段函数为 $f(t)$,即

$$\int_0^{+\infty}g(\omega)\sin\omega t\,d\omega=f(t),$$

则

$$g(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\sin\omega t\,dt+\int_1^2 2\sin\omega t\,dt\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^1+\frac{-2}{\omega}\cos\omega t\Big|_1^2\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\cos\omega-\frac{1}{\omega}2\cos 2\omega\right]$$

$$=\frac{2}{\pi\omega}(1+\cos\omega-2\cos 2\omega)$$

(3) 设 $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$ 依同理可得

$$g(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\cos\omega t\,dt-\int_0^1 t\cos\omega t\,dt\right)$$

(第二项用分部积分法) $=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega-1)\right]$

$$=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega).$$

(4) 设 $f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos t, & 0\leqslant t<\pi;\\ -\frac{\pi}{4}, & t=\pi;\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$ 同理可得

$$g(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos t\sin\omega t\,dt$$

(利用积化和差) $=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(\omega-1)t+\sin(\omega+1)t]dt$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-(\omega-1)}\cos(\omega-1)t+\frac{1}{-(\omega+1)}\cos(\omega+1)t\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\pi-\omega\pi)}{1-\omega}-\frac{\cos(\pi+\omega\pi)}{1+\omega}+\frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\omega+1}\right]$$

$$=\frac{\omega}{\omega^2-1}(1+\cos\omega\pi).$$

4. 求解下列积分方程：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{t^2+b^2},(0<a<b)$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-\tau|}y(\tau)\mathrm{d}\tau=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

解 (1) 利用卷积定理可以求解此类积分方程. 显然，方程的左端是未知函数 $y(t)$ 与 $\frac{1}{t^2+a^2}$ 的卷积，即 $y(t)*\frac{1}{t^2+a^2}$. 设 $\mathscr{F}[y(t)]=Y(\omega)$，对方程两边取 Fourier 变换，有

$$\mathscr{F}\left[y(t)*\frac{1}{t^2+a^2}\right]=\mathscr{F}\left[\frac{1}{t^2+b^2}\right],$$

即
$$\mathscr{F}[y(t)]\cdot\mathscr{F}\left[\frac{1}{t^2+a^2}\right]=\mathscr{F}\left[\frac{1}{t^2+b^2}\right],$$

利用第一章习题一的 3(1)的结果：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta|t|}$，有

$$Y(\omega)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+b^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,$$

即

$$Y(\omega)\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{t^2+b^2}\mathrm{d}t.$$

所以

$$Y(\omega)=\frac{\frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-b|\omega|}}{\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}}=\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}.$$

由上可知 $\mathscr{F}\left[\frac{1}{t^2+a^2}\right]=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}$，

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{a}{b}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right]\\&=\frac{a}{b}\cdot\frac{b-a}{\pi}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{b-a}\mathrm{e}^{-(b-a)|\omega|}\right]\\&=\frac{a(b-a)}{\pi b[t^2+(b-a)^2]}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\mathscr{F}[y(t)]=Y(\omega)$,对方程两边取 Fourier 变换,同理可得

$$\mathscr{F}[y(t)*\mathrm{e}^{-|t|}]=\mathscr{F}[\sqrt{2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}].$$

利用钟形脉冲函数的 Fourier 变换:$\mathscr{F}[A\mathrm{e}^{-\beta t^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$ 及由 Fourier 变换的定义可求得:$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\beta|t|}]=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$,从而

$$\mathscr{F}[y(t)]\cdot\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-|t|}]=\mathscr{F}[\sqrt{2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}],$$

即

$$Y(\omega)=\frac{2\pi\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\frac{2}{1+\omega^2}}=\pi(1+\omega^2)\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}$$
$$=\pi\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}-\pi(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

从而

$$y(t)=\pi\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}]-\pi\mathscr{F}^{-1}[(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}],$$

其中,记 $\mathscr{F}[f(t)]=\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}$,则 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$;上式中第二项可利用微分性质:$\mathscr{F}[f''(t)]=(\mathrm{j}\omega)^2\mathscr{F}[f(t)]=(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}$,则

$$\mathscr{F}^{-1}[(\mathrm{j}\omega)^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}]=f''(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$
$$=\frac{t^2-1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

因此

$$y(t)=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}-\pi\frac{t^2-1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$=\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

5. 求下列微分积分方程的解 $x(t)$:

(1) $x'(t)-4\int_{-\infty}^{t} x(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-|t|}$，$-\infty<t<+\infty$；

(2) $ax'(t)+b\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=ch(t)$，其中 $f(t)$，$h(t)$为已知函数；a,b,c 均为已知常数.

解 (1) 利用 Fourier 变换的线性性质，微分性质及积分性质，对方程两端取 Fourier 变换，并假设 $\mathscr{F}[x(t)]=X(\omega)$，则有

$$\mathrm{j}\omega X(\omega)-4\frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(\omega)=\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-|t|}]$$

$$(\text{见上面 }4(2))=\frac{2}{1+\omega^2},$$

即

$$X(\omega)=\frac{\dfrac{2}{1+\omega^2}}{\mathrm{j}\left(\omega+\dfrac{4}{\omega}\right)}=\frac{-2\omega\mathrm{j}}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}.$$

从而

$$x(t)=\mathscr{F}^{-1}[X(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2\omega\mathrm{j}}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{-\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

对于这种类型的积分可以用复变函数中的留数定理来计算(详细情形可见例题分析中的例 1－4(2)).

当 $t>0$ 时，$R(z)=\dfrac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}$在上半平面内有两个一级极点：$z_1=\mathrm{j}$，$z_2=2\mathrm{j}$，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}tz},z_k]$$

$$=2\pi\mathrm{j}\left[\lim_{z\to\mathrm{j}}(z-\mathrm{j})\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{j}tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}+\right.$$

$$\left.\lim_{z\to2\mathrm{j}}(z-2\mathrm{j})\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{j}tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}\right]$$

$$= 2\pi j\left(\frac{e^{-t}}{6} - \frac{e^{-2t}}{6}\right)$$

$$= \pi j\left(\frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{3}\right).$$

所以

$$x(t) = \frac{-j}{\pi}\cdot\pi j\left(\frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{3}\right) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-2t}).$$

当 $t=0$ 时，则

$$x(t) = \frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}d\omega = 0(\text{被积函数为奇函数});$$

当 $t<0$ 时，令 $\omega=-u$，仿照 $t>0$ 时的计算过程，有

$$x(t) = \frac{-j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(u^2+4)(u^2+1)}e^{ju(-t)}du$$

$$= \frac{j}{\pi}2\pi j\left(\frac{e^{t}}{6} - \frac{e^{2t}}{6}\right) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{t}).$$

因此

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{t}), & t<0; \\ 0, & t=0; \\ \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-2t}), & t>0. \end{cases}$$

(2) 设 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，$\mathscr{F}[h(t)] = H(\omega)$，$\mathscr{F}[x(t)] = X(\omega)$. 方程两边取 Fourier 变换，可得

$$aj\omega X(\omega) + bX(\omega)F(\omega) = cH(\omega),$$

即

$$X(\omega) = \frac{cH(\omega)}{aj\omega + bF(\omega)},$$

所以

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{cH(\omega)}{aj\omega + bF(\omega)}e^{j\omega t}d\omega.$$

注　如果 $f(t)$和 $h(t)$是一个已知的具体函数,就能计算出该积分的结果,实际上这里提供了求该微分积分方程解的一个计算公式.

6. 求解下列偏微分方程的定解问题:

(1) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\sin x & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x.\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Au & (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=\delta(\xi-x),\end{cases}$$

其中 a,A 均为常数.

(3) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (-\infty<x<+\infty,y>0),\\ u|_{y=0}=f(x),\\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}u=0.\end{cases}$$

(i) $$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$$

(ii) $$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1, & -1<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

(4) $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<+\infty,t>0),\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\\ u|_{t=0}=\begin{cases}A, & 0<x<1,\\ 0, & 1<x<+\infty,\end{cases}\end{cases}$$

其中 a,A 均为常数.

(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<+\infty, t>0), \\ u|_{x=0}=0, \\ u|_{t=0}=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & x>1. \end{cases} \end{cases}$

解 利用 Fourier 变换求偏微分方程的定解问题，不仅要考虑要求变换的自变量的变化范围，同时还要考虑所给的定解条件，如自变量在$(-\infty,+\infty)$内变化，则关于该自变量取 Fourier 变换；如自变量在$(0,+\infty)$内变化，则要根据定解条件的不同情形而采用 Fourier 正弦变换，Fourier 余弦变换，乃至于下一章要介绍的 Laplace 变换．因此一个偏微分方程的定解问题，可能有多种解法．

(1) 由于二元函数 $u(x,t)$中的一个自变量 x 的变化范围为$(-\infty,+\infty)$，因此对上述方程及初始条件关于 x 取 Fourier 变换．记

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\omega,t);$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=(\mathrm{j}\omega)^2 U(\omega,t)=-\omega^2 U(\omega,t);$$

$$\mathscr{F}[\sin x]=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)];$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}[u(x,t)]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U(\omega,t).$$

这样，我们就能将原定解问题转化为含参数 ω 的常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 U=\pi\mathrm{j}t[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)], \\ U|_{t=0}=0, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]. \end{cases}$$

这里，方程是 $U(\omega,t)$关于 t 的一个二阶常系数非齐次微分方程．它所对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 U=0.$$

由于它的特征根是一对共轭虚根，其通解为

$$\overline{U}(\omega,t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

而非齐次方程的一个特解，根据自由项可设为 $U^*=at+b$，将它代入非齐次方程，有

$$\omega^2(at+b)=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]t.$$

比较等式两边可得

$$b=0,a=\frac{\pi\mathrm{j}}{\omega^2}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$$

从而非齐次方程的通解为

$$\begin{aligned}U(\omega,t)&=\overline{U}+U^*\\&=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\frac{\pi\mathrm{j}}{\omega^2}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]t.\end{aligned}$$

由初始条件可得

$$c_1=0,c_2=\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)].$$

因此，该常微分方程初值问题的解为

$$\begin{aligned}U(\omega,t)&=\pi\mathrm{j}[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin\omega t+\frac{t}{\omega^2}\right)\\&=\pi\mathrm{j}\left[\delta(\omega+1)\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin\omega t+\frac{t}{\omega^2}\right)\right.\\&\qquad\left.-\delta(\omega-1)\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin\omega t+\frac{t}{\omega^2}\right)\right].\end{aligned}$$

对上式取 Fourier 逆变换，并借助于 δ－函数的筛选性质可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\mathrm{j}\left[\delta(\omega+1)\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin\omega t+\frac{t}{\omega^2}\right)-\right.\\&\qquad\left.\delta(\omega-1)\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin\omega t+\frac{t}{\omega^2}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{j}}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega+1)\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin \omega t + \frac{t}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega - \right.\\
&\left.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-1)\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin \omega t + \frac{t}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\right] \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2}\left[\left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin \omega t + \frac{t}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\bigg|_{\omega=-1} - \right.\\
&\left.\quad \left(\frac{\omega^2-1}{\omega^3}\sin \omega t + \frac{t}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\bigg|_{\omega=1}\right] \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2}(t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} - t\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}) = t\sin x.
\end{aligned}
$$

注　在教材中，偏微分方程的定解问题仅仅是作为积分变换(Fourier 变换与 Laplace 变换)的应用而提出的. 实际上有许多方法能解决此类定解问题，例如 Green 函数法、保角映射法以及视察法都是解偏微分方程定解问题的一些常用方法. 下面我们将以视察法为例，可以简便地求出本题定解问题的解. 所谓视察法是利用偏微分方程定解问题解的惟一性定理，根据定解问题的方程及定解条件，写出包含待定常数或待定函数的试探解，然后再由方程及定解条件定出确定的解，由解的惟一性知这个解就是所求定解问题的解. 在本题中，根据方程的特点及方程的自由项是 $t\sin x$，可设试探解为

$$u(x,t) = T(t)\sin x$$

代入该定解问题可得如下的常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} T''(t) + T(t) = t, \\ T(0) = 0, T'(0) = 1. \end{cases}$$

容易看出(或用上面的常微分方程初值问题的求解方法)，该初值问题的解为 $T(t) = t$. 从而该定解问题的解为

$$u(x,t) = t\sin x.$$

这里，应当指出并非所有定解问题使用视察法都如此简单，更何况有些定解问题无法写出试探解，有兴趣的读者可参看有关书籍.

(2) 对该定解问题关于 x 取 Fourier 变换，记 $\mathscr{F}[u(x,t)] =$

$U(\omega,t)$，且 $\mathscr{F}[\delta(\xi-x)]=\mathscr{F}[\delta(x-\xi)]=e^{-j\omega\xi}$. 利用和上题同样的方法，将原定解问题转化为含有参数 ω 的常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+(a^2\omega^2-A)U=0,\\ U|_{t=0}=e^{-j\omega\xi}.\end{cases}$$

显然，该常微分方程的通解为

$$U(\omega,t)=ce^{-(a^2\omega^2-A)t}$$

由初始条件可得 $c=e^{-j\omega\xi}$，从而

$$U(\omega,t)=e^{-j\omega\xi-(a^2\omega^2-A)t}.$$

取其逆变换可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,t)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega,t)e^{j\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega\xi-(a^2\omega^2-A)t+j\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}e^{At}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\omega^2t}\cdot e^{j\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\omega\\&=e^{At}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\omega^2t}\cdot e^{j\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\omega\right]\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{At-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.\end{aligned}$$

其中最后一个等号利用了下面的结果(注意是关于 x 取 Fourier 变换)：

$$\mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\omega^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

这里，只要验证 $\mathscr{F}\left[\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]=e^{-a^2\omega^2t}$ 即可. 请读者按 Fourier 变换的定义，并借助于 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$ 的结果，自己验证.

(3) 对该定解问题关于 x 取 Fourier 变换. 记

$$\mathscr{F}[u(x,y)]=U(\omega,y),\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega).$$

这样,我们就能将原定解问题转化为含有参数 ω 的常微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}-\omega^2 U=0,\\ U|_{y=0}=F(\omega),\\ \lim\limits_{y\to+\infty} U=0.\end{cases}$$

上述方程的通解为

$$U(\omega,y)=c_1\mathrm{e}^{|\omega|y}+c_2\mathrm{e}^{-|\omega|y}.$$

由边值条件容易得到 $c_1=0,c_2=F(\omega)$,从而该边值问题的解为

$$U(\omega,y)=F(\omega)\cdot\mathrm{e}^{-|\omega|y},$$

取其逆变换可得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\mathscr{F}^{-1}[U(\omega,y)]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\cdot\mathrm{e}^{-|\omega|y}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-|\omega|y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

(换方括号中 x 为 ξ) $=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-|\omega|y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega$

(交换积分次序) $=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\Big[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\omega(y+\mathrm{j}x-\mathrm{j}\xi)}\mathrm{d}\omega+$

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega(y-\mathrm{j}x+\mathrm{j}\xi)}\mathrm{d}\omega\Big]\mathrm{d}\xi$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\Big[\frac{\mathrm{e}^{\omega(y+\mathrm{j}x-\mathrm{j}\xi)}}{y+\mathrm{j}x-\mathrm{j}\xi}\Big|_{-\infty}^{0}+\\&\qquad\frac{\mathrm{e}^{-\omega(y-\mathrm{j}x+\mathrm{j}\xi)}}{-(y-\mathrm{j}x+\mathrm{j}\xi)}\Big|_{0}^{+\infty}\Big]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\left(\frac{1}{y+\mathrm{j}x-\mathrm{j}\xi}+\frac{1}{y-\mathrm{j}x+\mathrm{j}\xi}\right)\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(\xi-x)^2}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

(i) 当 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x>0\end{cases}$ 时，对任何一个 $x\in(-\infty,+\infty)$ 及 $y>0$，有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(\xi-x)^2}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{-y}{y^2+(\xi-x)^2}\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(\xi-x)^2}\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

(ii) 当 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1, & -1<x<1,\\ 0, & x>1\end{cases}$ 时，依同理容易得到

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(\xi-x)^2}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{y^2+(\xi-x)^2}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right)+\arctan\left(\frac{1+x}{y}\right)\right].\end{aligned}$$

(4) 该定解问题实际上是一个半有界杆的热传导问题. 根据热传导问题的物理意义，可设 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=0$. 由 x 的变化范围为$(0,+\infty)$及定解条件$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$，该定解问题关于 x 取 Fourier 余弦变换. 利用上述条件及分部积分法，可得如下结果，且记为

$$\mathscr{F}_c[u(x,t)]=U_c(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}x=-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}-\omega^2 U_c,$$

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\cos\omega x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_c,$$

$$\mathscr{F}_c[u|_{t=0}]=\int_0^{+\infty}u|_{t=0}\cos\omega x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 A\cos\omega x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A\sin\omega}{\omega}.$$

这样,我们就能将原定解问题转化为含参数 ω 的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}=-a^2\omega^2U_c\\ U_c|_{t=0}=A\dfrac{\sin\omega}{\omega},\end{cases}$$

该方程的通解为

$$U_c=Ce^{-a^2\omega^2t}$$

由初始条件可得 $C=A\dfrac{\sin\omega}{\omega}$,从而

$$U_c(\omega,t)=A\frac{\sin\omega}{\omega}e^{-a^2\omega^2t}.$$

取其逆变换可得

$$u(x,t)=\mathscr{F}_c^{-1}[U_c(\omega,t)]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}A\frac{\sin\omega}{\omega}e^{-a^2\omega^2t}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}e^{-a^2\omega^2t}\,\mathrm{d}\omega.$$

(5) 由 x 的变化范围为$(0,+\infty)$及定解条件 $u|_{x=0}=0$,该定解问题关于 x 取 Fourier 正弦变换,与第(4)小题同理,可得如下结果,且记为

$$\mathscr{F}_s[u(x,t)]=U_s(\omega,t),$$

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\omega x\,\mathrm{d}x=\omega u\Big|_{x=0}-\omega^2U_s,$$

$$\mathscr{F}_s\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\sin\omega x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_s,$$

$$\mathscr{F}_s[u|_{t=0}]=\int_0^{+\infty}u|_{t=0}\sin\omega x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\omega x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1-\cos\omega}{\omega}.$$

这样,我们就能将原定解问题转化为含参数 ω 的一个常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U_s}{\mathrm{d}t}=-\omega^2U_s,\\ U_s|_{t=0}=\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}.\end{cases}$$

容易得到该常微分方程的解为

$$U_s(\omega,t)=\frac{1-\cos\omega}{\omega}\mathrm{e}^{-\omega^2t}$$

取其逆变换可得

$$u(x,t)=\mathscr{F}_s^{-1}[U_s(\omega,t)]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\mathrm{e}^{-\omega^2t}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

第二章 Laplace 变换

一 内容要点

对一个函数作 Fourier 变换，除了满足 Dirichlet 条件外，还要该函数在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积才存在古典意义下的 Fourier 变换，然而许多函数，即使是一些简单的函数，如单位阶跃函数、正、余弦函数及线性函数等都不满足这个条件；另外，还要求进行 Fourier 变换的函数必须在整个数轴上有定义，这对于许多以时间 t 为变量的函数来说，往往 $t<0$ 是无意义的或不需要考虑.针对上述两种情况，从而引出本章要介绍的 Laplace 变换.因此，在学习本章之前应深刻理解 Laplace 变换与 Fourier 变换之间的关系；同时也应看到 Laplace 变换在某些工程和科学技术领域中有着更为广泛的应用.

本章在 Laplace 变换的定义及其存在定理的基础上，给出了 Laplace 变换的一些基本性质、Laplace 逆变换的积分表达式—复反演积分公式及 Laplace 变换的某些应用.

本章的重点是求函数的 Laplace 变换及 Laplace 变换的某些应用.为此，就必须掌握好 Laplace 变换的基本性质及一些常用函数（如单位脉冲函数、单位阶跃函数、正余弦函数、指数函数及幂函数等）的 Laplace 变换及其逆变换的求法，从而才能较好地运用 Laplace 变换求解某些微分、积分方程，偏微分方程的定解问题及进行线性系统的分析与研究.

1．Laplace 变换的概念

(1) Laplace 变换的定义

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,(s=\beta+j\omega \text{ 为一复参量}),$$

$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$. $f(t)$与 $F(s)$形成一个 Laplace 变换对，可简记为 $f(t)\Leftrightarrow F(s)$. 可以看出，$f(t)(t\geqslant 0)$的 Laplace 变换，实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$的 Fourier 变换.

(2) Laplace 变换的存在定理

若函数 $f(t)$满足下列条件：

1° 在 $t\geqslant 0$ 的任一有限区间上分段连续；

2° 当 $t\to+\infty$时，$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数，亦即存在常数 $M>0$ 及 $c\geqslant 0$，使得

$$|f(t)|\leqslant Me^{ct},0\leqslant t<+\infty$$

成立(满足此条件的函数，称它的增大是不超过指数级的，c 为它的增长指数)，则 $f(t)$的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在，右端的积分在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 上绝对且一致收敛，并且在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 的半平面内，$F(s)$为解析函数.

(3) 一些常用函数的 Laplace 变换

$\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}(\mathrm{Re}(s)>0)$；$\mathscr{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}(\mathrm{Re}(s)>k)$；

$\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}(\mathrm{Re}(s)>0)$；

$\mathscr{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}(\mathrm{Re}(s)>0)$；

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$$ ① $(\mathrm{Re}(s)>0, m>-1)$；$\mathscr{L}[\delta(t)]=1$.

(4) 周期函数的 Laplace 变换公式

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

这里，$f(t)$以 T 为周期，且在一个周期上分段连续.

(5) 关于 Laplace 变换的积分下限问题

函数 $f(t)$满足 Laplace 变换存在定理条件且在 $t=0$ 处有界时，积分

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

中的下限取 0^+ 还是 0^- 不会影响其结果. 但当 $f(t)$在 $t=0$ 处包含了脉冲函数时，则 Laplace 变换的积分下限必须明确指出是 0^+ 还是 0^-. 因此，有

$$\mathscr{L}_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\mathscr{L}_+[f(t)].$$

显然，当 $f(t)$在 $t=0$ 处有界时，

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\mathscr{L}_+[f(t)];$$

当 $f(t)$在 $t=0$ 处包含了脉冲函数时，

$$\mathscr{L}_-[f(t)]\neq\mathscr{L}_+[f(t)].$$

2. Laplace 变换的基本性质

(1) 线性性质 设 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，$\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，

---

① 称积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m-1}\mathrm{d}t$ 为 Gamma 函数，记为 $\Gamma(m)$，即

$$\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m-1}\mathrm{d}t，其中\ m>0.$$

它满足下述递推关系：$\Gamma(m+1)=m\Gamma(m)$. 当 m 为正整数时，$\Gamma(m+1)=m!$.

且 α,β 为常数,则

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s);\\&\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)],\end{aligned}\right\}(\mathrm{Re}(s)>c).$$

(2) 微分性质 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(\omega)$,则有

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}f^{(i)}(0);\\&F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],(\text{象函数的微分性质}),\end{aligned}\right\}(\mathrm{Re}(s)>c).$$

特别,当 $n=1$ 时,有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0);$$
$$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)].$$

当初值 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时,有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s).$$

(3) 积分性质 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则有

$$\mathscr{L}\Big[\underbrace{\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n\text{次}}f(t)\mathrm{d}t\Big]=\frac{1}{s^n}F(s),(\mathrm{Re}(s)>c);$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^\infty\mathrm{d}s\int_s^\infty\mathrm{d}s\cdots\int_s^\infty}_{n\text{次}}F(s)\mathrm{d}s(\text{象函数的积分性质})$$

或

$$f(t)=t^n\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^\infty\mathrm{d}s\int_s^\infty\mathrm{d}s\cdots\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s\right],(\mathrm{Re}(s)>c).$$

特别,当 $n=1$ 时,有

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s);$$
$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s$$

或

$$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s\right].$$

(4) 位移性质 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则有

$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)(\mathrm{Re}(s-a)>c)$,(又称频移性质).

(5) 延迟性质　设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则对任一非负实数 τ,有

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s),\\ \text{或}\ &\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau),\end{aligned}\right\}(\mathrm{Re}(s)>c),\text{(又称时移性质)}.$$

(6*) 初值定理与终值定理

1) 初值定理　设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在,则

$$\lim_{t\to 0}f(t)\xlongequal{\Delta}f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s).$$

2) 终值定理　设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,且 $sF(s)$的所有奇点全在 s 平面的左半部,则

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)\xlongequal{\Delta}f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s).$$

3. Laplace 逆变换

(1) Laplace 反演积分公式　设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ t>0.$$

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

它们构成一个 Laplace 变换对,简记为 $f(t)\Leftrightarrow F(s)$.

(2) 计算 Laplace 反演积分公式的方法　设 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 为函数 $F(s)$的所有奇点(适当选取 β 使这些奇点全在 $\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的范围内),且当 $s\to\infty$时,$F(s)\to 0$,则有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}],$$

即在 $f(t)$的连续点 t 处有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}],t>0,$$

而左端 $f(t)$在它的间断点 t 处应以$\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$来代替.

4. 卷积

(1) 卷积的概念

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

卷积运算满足交换律、结合律及对加法的分配律.

(2) 卷积定理　设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 满足 Laplace 变换存在定理中的条件,且 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$,则有

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s),$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t).$$

推论　设 $f_k(t)(k = 1,2,\cdots,n)$ 满足 Laplace 变换存在定理中的条件,且 $\mathscr{L}[f_k(t)] = F_k(s)$, $(k = 1,2,\cdots,n)$ 则有

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t) * \cdots * f_n(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot \cdots \cdot F_n(s),$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s) \cdot \cdots \cdot F_n(s)] = f_1(t) * f_2(t) * \cdots * f_n(t).$$

5. Laplace 变换的应用

Laplace 变换在线性系统的分析与研究中有着重要的应用.本书主要用来求解某些微分、积分方程,某些偏微分方程(其未知函数为二元函数的情形)的定解问题和建立线性系统的传递函数.

(1) 微分、积分方程的 Laplace 变换解法

运用 Laplace 变换的性质(如线性性质、微分性质和积分性质等),对欲求解的方程两端取 Laplace 变换,将其转化为象函数的代数方程,通过解代数方程与求 Laplace 逆变换就可得到原方程的解.这种解法完全类似于微分、积分方程的 Fourier 变换解法.

(2*) 偏微分方程的 Laplace 变换解法

运用 Laplace 变换求解偏微分方程的定解问题完全类似于偏微分方程的 Fourier 变换解法,这里不再叙述.但要求变换的自变

量在$(0,+\infty)$内变化.因此,这样的定解问题可以运用 Laplacc 变换,也可以运用 Fourier 正弦变换或 Fourier 余弦变换来求解该偏微分方程的定解问题,读者应当注意到各类变换解法对定解条件的要求,以便选择适当的方法.

(3*)线性系统的传递函数

1)传递函数的概念

线性系统随时间 t 变化的输入函数 $x(t)$ 称为激励;而线性系统随时间 t 变化的输出函数 $y(t)$ 称为响应.一个线性系统的响应是由激励与系统本身的特性(包括元件的参量和连接方式)所决定的;对于不同的线性系统,即使在同一激励下,其响应也可能是不同的.在分析线性系统时,要研究激励和响应同系统本身特性之间的联系,而传递函数正是刻画系统本身特性的一个重要概念,它与系统的初始条件及激励无关.

设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$,$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,则在零初始条件下,系统的传递函数定义为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)},$$

即系统的传递函数等于其响应的 Laplace 变换与其激励的 Laplace 变换之比.

2)脉冲响应函数

线性系统本身的特性除用传递函数 $G(s)$ 表征外,还可以用传递函数的逆变换 $g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ 来表征.因为

$$Y(s)=G(s)\cdot X(s),$$

由卷积定理知

$$y(t)=g(t)*x(t).$$

因此,传递函数的逆变换 $g(t)$ 又称为系统的脉冲响应函数,即脉冲响应函数 $y(t)$ 就是在零初始条件下,激励为 $\delta(t)$ 时的响应 $y(t)$.

3)频率响应

在系统的传递函数中,令 $s=\mathrm{j}\omega$,则称

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

为系统的频率响应.在工程技术中,它又称为正弦传递函数.总之,任何线性系统的频率响应(即正弦传递函数)都可以由该系统的传递函数取 s 为 $j\omega$ 得到.可见,系统的传递函数、脉冲响应函数及频率响应都是表征线性系统的重要概念.

二 例题分析

例 2-1 求下列函数的 Laplace 变换:

(1) $f(t)=te^{\alpha t}\cos\beta t$,($\alpha,\beta$ 均为实数);

(2) $f(t)=|\cos t|$;

(3) $f(t)=\delta(t)\cos t+ke^{kt}u(t)$,$(k>0)$;

(4) $f(t)=\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

解 求函数的 Laplace 变换,可以根据 Laplace 变换的定义直接求得结果,也可以利用 Laplace 变换的性质间接得到结果.这就要求掌握 Laplace 变换的基本性质及一些常用函数的 Laplace 变换,只有深刻理解和熟悉这些基本性质的各自特点,在解题过程中才能运用自如.

(1) 方法 1 利用 Laplace 变换的定义,并借助于 Euler 公式,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\int_0^{+\infty}te^{\alpha t}\cos\beta t\,e^{-st}dt\\&=\int_0^{+\infty}te^{\alpha t}\frac{1}{2}(e^{j\beta t}+e^{-j\beta t})e^{-st}dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-[(s-\alpha)-j\beta]t}dt+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-[(s-\alpha)+j\beta]t}dt\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{te^{-[(s-\alpha)-j\beta]t}}{-[(s-\alpha)-j\beta]}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{(s-\alpha)-j\beta}\int_0^{+\infty}e^{-[(s-\alpha)-j\beta]t}dt\right]+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{t\mathrm{e}^{-[(s-\alpha)+\mathrm{j}\beta]t}}{-[(s-\alpha)+\mathrm{j}\beta]}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{(s-\alpha)+\mathrm{j}\beta}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-[(s-\alpha)+\mathrm{j}\beta]t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{[(s-\alpha)-\mathrm{j}\beta]^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{[(s-\alpha)+\mathrm{j}\beta]^2}$$

$$=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 2　设 $f_1(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$，记 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$.

利用位移性质及象函数的微分性质，因为 $\mathscr{L}[\cos\beta t]=\frac{s}{s^2+\beta^2}$，所以

$$F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t]=\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

因此

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[tf_1(t)]=-F_1'(s)=-\frac{[(s-\alpha)^2+\beta^2]-2(s-\alpha)^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 3　也可以先利用象函数的微分性质，因为 $\mathscr{L}[\cos\beta t]=\frac{s}{s^2+\beta^2}$，所以

$$\mathscr{L}[t\cos\beta t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s}{s^2+\beta^2}\right]=\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

再利用位移性质，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha t}t\cos\beta t]=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

方法 4　利用 Laplace 变换表也能获得解决. 例如由附录 Ⅱ 中公式(10)，再利用位移性质得到结果；或者由附录 Ⅱ 中公式(16)，再利用象函数的微分性质得到结果. 读者可自行试之.

(2) $f(t)=|\cos t|$ 可以看成一个以 π 为周期的函数. 我们已经知道，以 T 为周期的函数 $f(t)$，当 $f(t)$ 在一个周期上分段连续

时，其 Laplace 变换为

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}(s)>0),$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[|\cos t|]&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\pi}}\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\pi}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\\
&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\pi}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{1+s^2}(\sin t-s\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{1+s^2}(\sin t-s\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]\\
&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\pi}}\left[\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{s\pi}{2}}}{1+s^2}+\frac{s}{1+s^2}(1-\mathrm{e}^{-s\pi})\right]\\
&=\frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{s\pi}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-s\pi}}+\frac{s}{1+s^2}\\
&=\frac{1}{1+s^2}\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{s\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{s\pi}{2}}}+\frac{s}{1+s^2}\\
&=\frac{1}{1+s^2}\left(s+\operatorname{csch}\frac{s\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

(3) 利用单位脉冲函数的性质，按 Laplace 变换的定义，有

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)]&=\int_0^{+\infty}[\delta(t)\cos t+k\mathrm{e}^{kt}u(t)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}\delta(t)\cos t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kt}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cos t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\
&=\cos t\mathrm{e}^{-st}\big|_{t=0}+\frac{k}{s-k}\\
&=1+\frac{k}{s-k}=\frac{s}{s-k}.
\end{aligned}$$

(4) 这是一个正弦积分，从附录 II 中公式(87)，我们已经知道

它的 Laplace 变换. 现在, 利用象函数的积分性质和象原函数的积分性质来求证这一结果. 因为 $\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$, 所以

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\arctan s\Big|_s^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan s.$$

再利用象原函数的积分性质, 有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}\left[\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan s\right)=\frac{1}{s}\operatorname{arccot} s.$$

例 2-2　求下列函数的 Laplace 逆变换:

(1) $F(s)=\frac{s^2+1}{s^2+2s+1}$;　　(2) $F(s)=\frac{s}{s^4+4}$;

(3) $F(s)=\arctan\frac{a}{s}$;　　(4) $F(s)=\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$.

解　求一个函数的 Laplace 逆变换, 可以通过 Laplace 反演积分的一般公式, 当 $F(s)$ 满足一定条件时, 可以利用留数方法来计算这个反演积分; 也可以利用 Laplace 变换的基本性质(包括卷积定理)求得结果, 这里的要求和例 2-1 中开始的说明完全一样; 当然, 利用查 Laplace 变换表获得结果也是一种方法, 但不是初学阶段的主要方法.

(1) 方法 1　利用留数的方法, 必须要求 $F(s)$ 是一个有理真分式. 因此

$$F(s)=1-\frac{2s}{(s+1)^2}.$$

这里, $s=-1$ 是 $F(s)$ 的一个二级极点, 根据 Laplace 变换的线性性质及 δ-函数的 Laplace 变换的结果, 有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}[1]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s+1)^2}\right]$$

$$=\delta(t)-\lim_{s\to-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{2s}{(s+1)^2}e^{st}(s+1)^2\right]$$

$$= \delta(t) - \lim_{s\to -1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[2s\mathrm{e}^{st}]$$

$$= \delta(t) - \lim_{s\to -1}[2\mathrm{e}^{st} + 2st\mathrm{e}^{st}]$$

$$= \delta(t) - 2\mathrm{e}^{-t} + 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

方法 2　利用部分分式的方法，这也是求一个函数的 Laplace 逆变换经常采用的方法. 因为

$$\frac{2s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2},$$

可以求得 $A=2, B=-2$，所以

$$\frac{2s}{(s+1)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}.$$

再利用位移性质，有

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[1 - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}\right]$$

$$= \delta(t) - 2\mathrm{e}^{-t} + 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

(2) 方法 1　利用部分分式的方法，因为

$$\begin{aligned} s^4+4 &= s^4+4s^2+4-4s^2 = (s^2+2)^2-(2s)^2 \\ &= (s^2+2s+2)(s^2-2s+2) \\ &= [(s+1)^2+1][(s-1)^2+1] \\ &= (s+1+\mathrm{j})(s+1-\mathrm{j})(s-1+\mathrm{j})(s-1-\mathrm{j}), \end{aligned}$$

所以

$$F(s) = \frac{s}{s^4+4} = \frac{A}{s+1+\mathrm{j}} + \frac{B}{s+1-\mathrm{j}} + \frac{C}{s-1+\mathrm{j}} + \frac{D}{s-1-\mathrm{j}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{\mathrm{j}}{s+1+\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{j}}{s+1-\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{j}}{s-1-\mathrm{j}} - \frac{\mathrm{j}}{s-1-\mathrm{j}}\right).$$

由位移性质，有

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= \frac{\mathrm{j}}{8}(-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j})t} + \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{j})t} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{j})t} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})t})$$

$$= \frac{\mathrm{j}}{8}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{t}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})]$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{8}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}t})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}$$

$$=\frac{1}{2}\sinh t\sin t.$$

方法 2 利用部分分式的方法，也可以这样进行，即

$$F(s)=\frac{s}{s^4+4}=\frac{s}{(s^2+2s+2)(s^2-2s+2)}$$
$$=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2},$$

由此可以确定

$$A=C=0,B=-\frac{1}{4},D=\frac{1}{4},$$

因此

$$F(s)=\frac{-\frac{1}{4}}{(s+1)^2+1}+\frac{\frac{1}{4}}{(s-1)^2+1}.$$

由位移性质，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$
$$=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\sin t+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t}\sin t$$
$$=\frac{1}{4}\sin t(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})$$
$$=\frac{1}{2}\sinh t\sin t.$$

方法 3 利用卷积定理和微分性质，因为

$$\frac{s}{s^4+4}=s\frac{1}{(s+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+1},$$

记 $F_1(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+1}$，由卷积定理及位移性质，有

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=\mathrm{e}^{-t}\sin t*\mathrm{e}^{t}\sin t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t e^{\tau}\sin\tau e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau \\
&= e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\sin(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}[\cos(2\tau-t)-\cos t]d\tau \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\left[\int_0^t e^{2\tau}\cos(2\tau-t)d\tau-\cos t\int_0^t e^{2\tau}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{8}e^{t}(\sin t-\cos t)+\frac{1}{8}e^{-t}(\sin t+\cos t) \\
&= \frac{1}{4}\sin t\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}-\frac{1}{4}\cos t\frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(\sin t\cosh t-\cos t\sinh t).
\end{aligned}
$$

其中倒数第四个等号的第一项中的积分，使用两次分部积分，即

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{2\tau}\cos(2\tau-t)d\tau \\
&\quad = \frac{1}{4}e^{2t}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{4}(\sin t-\cos t).
\end{aligned}
$$

由微分性质，有 $\mathscr{L}[f_1'(t)]=s\mathscr{L}[f_1(t)]-f_1(0)$，注意到 $f_1(0)=0$，因此，

$$
\mathscr{L}[f_1'(t)]=sF_1(s)=F(s)=\frac{s}{s^4+4},
$$

上式两边取 Laplace 逆变换，有

$$
f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f_1'(t)=\frac{1}{2}\sinh t\sin t.
$$

(3) 从附录 Ⅱ 中公式(58)，我们已经知道它的 Laplace 逆变换，现在利用象函数的微分性质来求证这一结果. 因为(设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$)

$$
F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)],
$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t).$$

即

$$\begin{aligned}
f(t) &= -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)] \\
&= -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\arctan\frac{a}{s}\right] \\
&= -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}\cdot\left(-\frac{a}{s^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] \\
&= \frac{1}{t}\sin at.
\end{aligned}$$

(4) 从附录Ⅱ中公式(66),我们也已经知道它的 Laplace 逆变换,现在利用幂函数的 Laplace 变换,位移性质及积分性质来求证这一结果.设 $F_1(s)=\frac{1}{\sqrt{s+a}}$,首先求 $\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]$,为此,根据幂函数的 Laplace 变换式:

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}, m > -1,$$

取 $m=-\frac{1}{2}>-1$,有

$$\mathscr{L}[t^{-\frac{1}{2}}] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

所以,上式两边取 Laplace 逆变换,有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}},$$

由位移性质,可以得到

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s+a}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-at}t^{-\frac{1}{2}}.$$

根据积分性质：$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F_1(s)$，所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F_1(s)\right]=\int_0^t f_1(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t\quad(\text{令 } at=u^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{at}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{erf}(\sqrt{at}),$$

这里，$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 称为误差函数．

例 2－3 利用 Laplace 变换，计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos t}{t}\mathrm{d}t$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$；

(3) $\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-2t}\cos t\mathrm{d}t$； (4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t\sin t)^3\mathrm{d}t$．

解 利用 Laplace 变换求解某些广义积分的值是十分有效的．一般是通过 Laplace 变换的积分性质（象函数的积分性质）及终值定理来完成．对于广义积分的被积函数形如

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t f(t);\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t f(t)$$

的类型还可以得到更为简便的计算方法．

(1) 方法 1 利用 Laplace 变换的定义及积分性质，因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$$

由积分性质知

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s,\text{其中 }\mathscr{L}[f(t)]=F(s).$$

因此

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_s^{\infty}\mathscr{L}[\sin 2t]\mathrm{d}s$$

$$= \int_s^{\infty} \frac{2}{s^2+4} \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2}, (\mathbf{Re}(s) > 0).$$

令 $s \to 0^+$,则

$$\lim_{s \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{s \to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

即
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos t}{t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

方法 2 由积分性质和终值定理,可以直接得到

$$\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \lim_{s \to 0} F(s), \text{其中 } F(s) = \mathscr{L}[f(t)].$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos t}{t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} \mathrm{d}t,$$

而
$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right] = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2},$$

同样,有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos t}{t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[\lim_{s \to 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 方法 1 利用 Laplace 变换的定义及积分性质,因为

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s) \mathrm{d}s = \int_s^{\infty} \frac{1}{s^2+1} \mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} - \arctan s,$$

即

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan s,$$

由于 $s=1$ 在半平面 $\mathbf{Re}(s)>0$ 内,因此,在 $s=1$ 时,有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

方法 2　我们已经知道 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\frac{\pi}{2}-\arctan s$，由位移性质，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}e^{-t}\right]=\frac{\pi}{2}-\arctan(s+1).$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-t}dt=\lim_{s\to 0}\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}e^{-t}\right]$$

$$=\lim_{s\to 0}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(s+1)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 根据例 2-1 的第(1)小题，我们已经求得

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[te^{\alpha t}\cos\beta t]=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

而本小题取 $\alpha=-2,\beta=1$，完全可以按上述两小题的两种方法求得该广义积分的结果，但对于广义积分的被积函数为 $e^{\alpha t}\cos\beta t f(t)$ 及 $e^{\alpha t}\sin\beta t f(t)$ 类型，这里介绍一种更简便的计算方法(但必须 $f(t)$ 的 Laplace 变换容易求得)．根据 Laplace 变换的定义，有

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt.$$

现取复变量 $s=\alpha+j\beta$，$(\mathrm{Re}(s)=\alpha>c)$，即

$$F(\alpha+j\beta)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos\beta t f(t)dt-j\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\sin\beta t f(t)dt.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos\beta t f(t)dt=\mathrm{Re}[F(\alpha+j\beta)],(\mathrm{Re}(s)=\alpha>c),$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\sin\beta t f(t)dt=-\mathrm{Im}[F(\alpha+j\beta)],(\mathrm{Re}(s)=\alpha>c),$$

特别，当 $\alpha=0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\cos\beta t f(t)dt=\mathrm{Re}[F(j\beta)],\quad(\mathrm{Re}(s)=0>c)$$

$$\int_0^{+\infty} \sin \beta t f(t)\mathrm{d}t = -\operatorname{Im}[F(\mathrm{j}\beta)],(\operatorname{Re}(s) = 0 > c)$$

当 $\beta=0$ 时,有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} f(t)\mathrm{d}t = \operatorname{Re}[F(\alpha)] = F(\alpha),\operatorname{Re}(s) = \alpha > c,$$

而当 $\alpha=\beta=0$ 时,实际上就是由终值定理得出的结果:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = F(0) = \lim_{s\to 0} F(s).$$

本小题根据上面的计算公式,有 $f(t)=t,\alpha=2,\beta=1$,所以

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s^2}, s = 2+\mathrm{j},$$

从而

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\cos t\mathrm{d}t = \operatorname{Re}[F(s)] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{(2+\mathrm{j})^2}\right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{3+4\mathrm{j}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{3-4\mathrm{j}}{25}\right] = \frac{3}{25}.$$

(4) 因为

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t\sin t)^3\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\sin^3 t\mathrm{d}t,$$

而由 Euler 公式,有

$$\sin^3 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}\right)^3 = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t.$$

根据第(3)小题的方法,有

$$\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\sin^3 t\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\sin 3t\mathrm{d}t$$

而 $f(t)=t^3$,有 $\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4}$,对于上式第一项 $s=1+\mathrm{j}$,有

$$\frac{6}{s^4} = \frac{6}{(1+\mathrm{j})^4} = -\frac{3}{2},$$

对于上式第二项 $s=1+3\mathrm{j}$,有

$$\frac{6}{s^4}=\frac{6}{(1+3j)^4}=\frac{6}{28-96j}=\frac{21}{1\ 250}+\frac{36}{625}j.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\sin^3 t = \frac{-3}{4}\mathrm{Im}\left[\frac{6}{(1+j)^4}\right]+\frac{1}{4}\mathrm{Im}\left[\frac{6}{(1+3j)^4}\right]$$
$$=-\frac{3}{4}\mathrm{Im}\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{Im}\left[\frac{21}{1\ 250}+\frac{36}{625}j\right]$$
$$=0+\frac{1}{4}\cdot\frac{36}{625}=\frac{9}{625}.$$

例 2-4　利用 Laplace 变换求下列微分、积分方程的解：

(1) $y''+2y'+y=te^{-t}, y(0)=1, y'(0)=-2$;

(2) $\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = t\cos t$;

(3) $y'+2y=\sin t-\int_0^t y(\tau)d\tau, y(0)=0.$

解　利用 Laplace 变换求解微分、积分方程的优点在教材中已作了较详细的说明．这里主要是利用 Laplace 变换的基本性质，特别是线性性质、微分性质、积分性质及卷积定理来求这些方程的解．

(1) 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取 Laplace 变换，有

$$(s^2Y(s)-s+2)+2(sY(s)-1)+Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2},$$

$$(s^2+2s+1)Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}+s,$$

所以

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^4}+\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{1}{(s+1)^4}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2},$$

从而

$$y(t)=\frac{1}{3!}t^3e^{-t}+e^{-t}-te^{-t}$$
$$=e^{-t}\left(\frac{1}{6}t^3-t+1\right).$$

(2) 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，由附录Ⅱ中公式(10)可知 $\mathscr{L}[t\cos t]=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$(实际上由 Euler 公式、位移性质或象函数的微分性质可以直接求得此结果)．根据卷积定理，有

$$\mathscr{L}[\cos t * y(t)]=\mathscr{L}[t\cos t]=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2},$$

即

$$\frac{s}{s^2+1}\cdot Y(s)=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

所以

$$Y(s)=\frac{s^2-1}{s(s^2+1)}=\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s}.$$

因此

$$y(t)=2\cos t-1.$$

(3) 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，由微分性质和积分性质，有

$$sY(s)+2Y(s)=\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s}Y(s),$$

即

$$\left(s+2+\frac{1}{s}\right)Y(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

$$Y(s)=\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}-\frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2}.$$

因此

$$y(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}te^{-t}=\frac{1}{2}(\sin t-te^{-t}).$$

例 2-5 求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=2xt;(0<x,t<+\infty)\\ u|_{t=0}=x^2;\\ u|_{x=0}=3t.\end{cases}$$

解 设二元函数 $u=u(x,t)$，这里 x,t 的变化范围均为 $(0,+\infty)$；由所给的定解条件可以看出，本例题关于 x，关于 t 都可以取 Laplace 变换.

方法 1 该定解问题关于 x 取 Laplace 变换，记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(s,t),$$

由微分性质及已知条件 $u|_{x=0}=3t$，可以推出 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=3$，从而

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]=\mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]$$

$$=s\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]-\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=s\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-3.$$

这样，原定解问题转化为含有参数 s 的一阶常系数线性微分方程的初值问题，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t}{s^3}+\dfrac{3}{s};\\ U|_{t=0}=\dfrac{2}{s^3}.\end{cases}$$

解此微分方程，可得其通解为

$$U=\frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{s}t+c_0,(c_0\text{为待定常数})$$

结合初始条件，可得 $c_0=\frac{2}{s^3}$. 因此

$$U=\frac{2}{s^3}\cdot\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{s}t+\frac{2}{s^3}.$$

从而

$$u(x,t)=\frac{1}{2}x^2t^2+3t+x^2=\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)x^2+3t.$$

方法 2 该定解问题关于 t 取 Laplace 变换，记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

同样，由微分性质及已知条件 $u|_{t=0}=x^2$，可以推出 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=2x$，

从而

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right]=\mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=s\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}$$

$$=s\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}-2x.$$

这样,原定解问题转化为含有参数 s 的一阶常系数线性微分方程的初值问题,即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{s^3}x+\dfrac{2}{s}x;\\ U|_{x=0}=\dfrac{3}{s^2}.\end{cases}$$

解此微分方程,并结合初始条件,可得

$$U=\frac{1}{s^3}x^2+\frac{1}{s}x^2+\frac{3}{s^2}$$

从而

$$u(x,t)=\frac{1}{2}t^2x^2-x^2+3t=\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)x^2+3t.$$

总之,用积分变换(这里主要指 Fourier 变换,Laplace 变换及 Fourier 正弦变换和 Fourier 余弦变换)求解偏微分方程的定解问题,要根据自变量的变化范围和方程及定解条件的具体情况来决定选取某种变换.因而对一个偏微分方程的定解问题可能存在多种变换解法,这在教材中都已做了较详细的说明.选用解题方法时必须加以注意.

三 习题全解

习题一解答

1. 求下列函数的 Laplace 变换,并给出其收敛域,再用查表的方法来验证结果.

(1) $f(t)=\sin\frac{t}{2}$; (2) $f(t)=e^{-2t}$;

(3) $f(t)=t^2$; (4) $f(t)=\sin t\cos t$;

(5) $f(t)=\sinh kt$,(k 为实常数);(6) $f(t)=\cosh kt$,(k 为复常数);

(7) $f(t)=\cos^2 t$; (8) $f(t)=\sin^2 t$.

解 利用 Laplace 变换的定义求函数 $f(t)$的 Laplace 变换,并且给出结果存在的收敛范围,这些都是最基本的要求.为了方便起见,以后的习题如无特别需要,可以不写出它的收敛域.另外,用查表的方法来验证结果,其主要目的是学会使用 Laplace 变换表,请读者自行验证.

(1) 由 Laplace 变换定义,有

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin\frac{t}{2}e^{-st}dt$$

(用两次分部积分)$=\dfrac{2}{4s^2+1}$,($\mathrm{Re}(s)>0$).

(2) $$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-2t}e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(s+2)t}dt$$

$$=\frac{1}{-(s+2)}e^{-(s+2)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{s+2},(\mathrm{Re}(s)>-2).$$

(3) $$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}t^2e^{-st}dt$$

(用两次分部积分)$=\dfrac{2}{s^3}$,($\mathrm{Re}(s)>0$).

(4) $$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\sin t\cos t\,e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin 2t\,e^{-st}\,dt$$

$$(\text{仿照(1)的方法}) = \frac{1}{s^2+4},\ (\mathrm{Re}(s)>0).$$

(5) $F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \sinh kt\,e^{-st}\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s+k)t}\,dt.$$

上式右端第一个积分要收敛,必须 $\mathrm{Re}(s)>k$,而第二个积分要收敛,必须 $\mathrm{Re}(s)>-k$,因此

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[\sinh kt]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\frac{e^{-(s+k)t}}{-(s+k)}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2(s-k)} - \frac{1}{2(s+k)}$$

$$= \frac{k}{s^2-k^2},\ (\mathrm{Re}(s)>|k|).$$

(6) $F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \cosh kt\,e^{-st}\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s+k)t}\,dt.$$

由于 k 为复常数,上式右端第一个积分要收敛,必须 $\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(k)$,而第二个积分要收敛,必须 $\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(k)$,因此

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[\cosh kt]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\frac{e^{-(s+k)t}}{-(s+k)}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2(s-k)} + \frac{1}{2(s+k)} = \frac{s}{s^2-k^2},\ (\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Re}(k)|).$$

(7) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\cos^2 t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos 2t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t}}{2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{1}{4}\int_0^{-\infty}\mathrm{e}^{-(s-2\mathrm{j})t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-2\mathrm{j})t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2s}+\frac{s}{2(s^2+4)}$$

$$=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)},\ (\mathrm{Re}(s)>0).$$

(8) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\sin^2 t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos 2t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$(\text{同(7)})=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(s^2+4)}$$

$$=\frac{2}{s(s^2+4)},\ (\mathrm{Re}(s)>0).$$

注　如果已经掌握了一些常见函数的 Laplace 变换式，例如

$$\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2};\ \mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2};$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}]=\frac{1}{s+a};\ \mathscr{L}[t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$$

等，则以上各小题就能更方便地得到结果.

2．求下列函数的 Laplace 变换：

(1) $f(t)=\begin{cases}3, 0\leqslant t<2;\\-1, 2\leqslant t<4;\\0, t\geqslant 4;\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}3, t<\dfrac{\pi}{2};\\ \cos t, t>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

(3) $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$; (4) $f(t)=\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t)$.

解 (1) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

$$=\int_0^2 3e^{-st}\,dt+\int_2^4 -e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{3e^{-st}}{-s}\bigg|_0^2-\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_2^4$$

$$=\frac{1}{s}(3-4e^{-2t}+e^{-4t}).$$

(2) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3e^{-st}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\cos t e^{-st}\,dt$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第二项用分部积分}\\ \text{或查积分表}\end{array}\right)=\dfrac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi t}{2}})-\dfrac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi t}{2}}$.

(3) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}(e^{2t}+5\delta(t))e^{-st}\,dt$

$$=\int_0^{+\infty} e^{2t}e^{-st}\,dt+5\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{s-2}+5\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\,dt$$

(利用 δ - 函数筛选性质) $=\dfrac{1}{s-2}+5(e^{-st})\Big|_{t=0}$

$$=\frac{5s-9}{s-2}.$$

(4) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}(\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t))e^{-st}\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t))e^{-st}dt$$

$$=\cos t\cdot e^{-st}\big|_{t=0}-\int_0^{+\infty}\sin te^{-st}dt$$

$$=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}.$$

3. 设 $f(t)$是以 2π 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t,0<t\leqslant\pi;\\ 0,\pi<t<2\pi.\end{cases}$$

求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解　根据周期函数的 Laplace 变换公式，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin te^{-st}dt$$

$$(\text{用分部积分法})=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}.$$

4. 求下列各图所示周期函数的 Laplace 变换：

解　(1) 由图可知

$$f(t)=t;0\leqslant t<b\text{ 且 }f(t+b)=f(t)$$

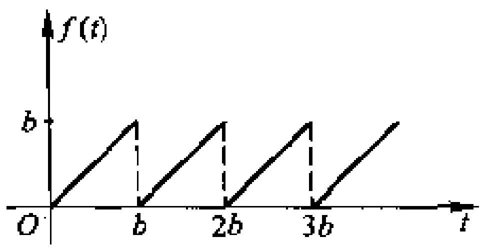
根据周期函数的 Laplace 变换公式，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

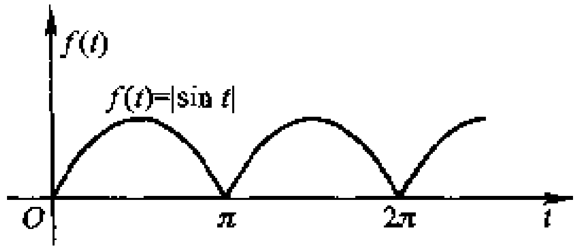
$$=\frac{1}{1-e^{-bs}}\int_0^b te^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-bs}}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^b+\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}dt\right]$$

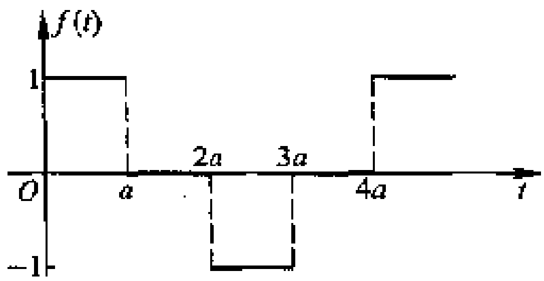
(1)



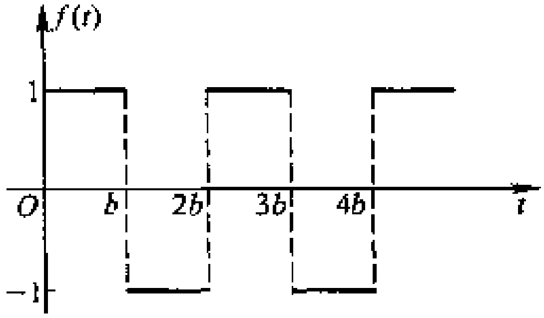
(2)



(3)



(4)



$$=\frac{1}{1-e^{-bs}}\cdot\frac{1-(1+bs)e^{-bs}}{s^2}$$

$$=\frac{(1+bs)-(1+bs)e^{-bs}-bs}{(1-e^{-bs})s^2}$$

$$=\frac{(1+bs)(1-e^{-bs})-bs}{(1-e^{-bs})s^2}$$

$$=\frac{1+bs}{s^2}-\frac{b}{s(1-e^{-bs})}.$$

(2) 由图可知 $f(t)=|\sin t|, 0\leqslant t<\pi$，且 $f(t+\pi)=f(t)$，所以

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi}|\sin t|e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\frac{e^{-st}(-s\sin t-\cos t)}{1+s^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{e^{-\pi s}+1}{1+s^2}$$

$$=\frac{1}{1+s^2}\coth\frac{\pi s}{2}.$$

(3) 由图可知

$$f(t)=\begin{cases}1,0\leqslant t<a;\\0,a\leqslant t<2a;\\-1,2a\leqslant t<3a;\\0,3a\leqslant t<4a.\end{cases}$$

且　$f(t+4a)=f(t)$，所以

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-4as}}\int_0^{4a}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4as}}\left[\int_0^a e^{-st}dt+\int_{2a}^{3a}-e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4as}}\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^a+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{2a}^{3a}\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4as}}\left[\frac{1-e^{-as}}{s}+\frac{e^{-3as}-e^{-2as}}{s}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-2as})(1+e^{-2as})}\cdot\frac{(1-e^{-as})(1-e^{-2as})}{s}$$

$$=\frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-2as})}$$

$$=\frac{1-e^{-2as}}{s(1+e^{-as})(1-e^{-2as})}$$

$$=\frac{1}{s(1+e^{-as})}\cdot\frac{e^{as}-e^{-as}}{e^{as}+e^{-as}}$$

$$=\frac{1}{s(1+e^{-as})}\tanh as.$$

(4) 由图可知 $f(t)=\begin{cases}1,0\leqslant t<b;\\-1,b\leqslant t<2b,\end{cases}$ 且 $f(t+2b)=f(b)$，

所以

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\left[\int_0^b e^{-st}dt-\int_b^{2b}e^{-st}dt\right]$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\left[\frac{1-e^{-bs}}{s}+\frac{e^{-2bs}-e^{-bs}}{s}\right]$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\cdot\frac{(1-e^{-bs})^2}{s}$$
$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-bs}}{1+e^{-bs}}$$
$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{bs}{2}}-e^{-\frac{bs}{2}}}{e^{\frac{bs}{2}}+e^{-\frac{bs}{2}}}$$
$$=\frac{1}{s}\tanh\frac{bs}{2}.$$

习题二解答

1. 求下列函数的 Laplace 变换式：

(1) $f(t)=t^2+3t+2$；　(2) $f(t)=1-te^t$；

(3) $f(t)=(t-1)^2e^t$；　(4) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at$；

(5) $f(t)=t\cos at$；　(6) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$；

(7) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$；　(8) $f(t)=e^{-4t}\cos 4t$；

(9) $f(t)=t^n e^{at}$；　(10) $f(t)=u(3t-5)$；

(11) $f(t)=u(1-e^{-t})$；　(12) $f(t)=\frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$.

解　本题主要是利用 Laplace 变换的性质来求函数的 Laplace 变换,这比使用 Laplace 变换的定义来求函数的 Laplace 变换要方便得多.但必须对 Laplace 变换的性质有较好的理解,还要熟悉和掌握一些常见函数的 Laplace 变换.

(1) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$

$$
\begin{aligned}
&= \mathscr{L}[t^2+3t+2] \\
&= \mathscr{L}[t^2]+3\mathscr{L}[t]+2\mathscr{L}[1] \\
&= \frac{2!}{s^3}+3\,\frac{1}{s^2}+2\,\frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s^3}(2s^2+3s+2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad F(s) &= \mathscr{L}[f(t)] \\
&= \mathscr{L}[1]-\mathscr{L}[te^t] \\
&= \frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}.
\end{aligned}
$$

注 这里 $\mathscr{L}[te^t]=\dfrac{1}{(s-1)^2}$ 是利用了位移性质.如使用象函数的微分性质:$\mathscr{L}[tg(t)]=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G(s)$,其中 $G(s)=\mathscr{L}[g(t)]$ 也能得到同样的结果.

$$
\begin{aligned}
(3)\quad F(s) &= \mathscr{L}[f(t)] \\
&= \mathscr{L}[(t-1)^2e^t] \\
&= \mathscr{L}[(t^2-2t+1)e^t] \\
&= \mathscr{L}[t^2e^t]-2\mathscr{L}[te^t]+\mathscr{L}[e^t] \\
&= \frac{2}{(s-1)^3}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1} \\
&= \frac{1}{(s-1)^3}[2-2(s-1)+(s-1)^2] \\
&= \frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad F(s) &= \mathscr{L}[f(t)] \\
&= \mathscr{L}\left[\frac{t}{2a}\sin at\right] \\
&= \mathscr{L}\left[\frac{t}{2a}\cdot\frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{4aj}\mathscr{L}[te^{jat}-te^{-jat}]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{4a\mathrm{j}}\left(\frac{1}{(s-\mathrm{j}a)^2}-\frac{1}{(s+\mathrm{j}a)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4a\mathrm{j}}\frac{4a\mathrm{j}s}{(s^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}.$$

注　此小题也可利用象函数的微分性质得到结果.

(5)　$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

$$=\mathcal{L}[t\cos at]$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{由 }\mathcal{L}[\cos at]\\ \quad=\dfrac{s}{s^2+a^2}\\ \text{及微分性质}\end{array}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)$$

$$=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}.$$

注　此小题也可以利用位移性质及 $\cos at=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{2}$ 获得结果.

(6) $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

$$=\mathcal{L}[5\sin 2t-3\cos 2t]$$

$$=5\cdot\frac{2}{s^2+4}-3\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

$$=\frac{10-3s}{s^2+4}.$$

(7) $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

$$=\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-2t}\sin 6t]$$

$$(\text{由位移性质})=\frac{6}{(s+2)^2+36}.$$

(8) $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

$$=\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-4t}\cos 4t]$$

$$=\frac{s+4}{(s+4)^2+16}.$$

(9) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$

$$=\mathscr{L}[t^n e^{at}]$$

$$=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad(n\text{ 为正整数}).$$

注 由 $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$ 及微分性质也能获得结果.

(10)
$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$
$$=\mathscr{L}[u(3t-5)]$$
$$=\mathscr{L}\left[u\left(3\left(t-\frac{5}{3}\right)\right)\right]$$

(由 $u(at)=u(t)$, a 为正实数) $=\mathscr{L}\left[u\left(t-\dfrac{5}{3}\right)\right]$

(用延迟性质) $=\dfrac{1}{s}e^{-\frac{5}{3}s}$.

(11)
$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$
$$=\mathscr{L}[u(1-e^{-t})]$$

(由 $u(1-e^{-t})=u(t)$) $=\mathscr{L}[u(t)]$

$$=\frac{1}{s}.$$

(12) $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$

$$=\mathscr{L}\left[\frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}\right]$$

$$=\mathscr{L}[t^{-\frac{1}{2}}e^{3t}]$$

(由位移性质) $=\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{(s-3)^{-\frac{1}{2}+1}}$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(s-3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{s-3}},$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt \xlongequal{\sqrt{t}=u} 2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}du=\sqrt{\pi}.$$

2. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，a 为正实数，证明(相似性质)

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

并利用此结论，计算下列各式：

(1) 已知 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\arctan\frac{1}{s}$，求 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]$；

(2) 求 $\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]$，$b$ 为正实数；

(3) 求 $\mathscr{L}\left[e^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$；

(4) 求 $\mathscr{L}\left[e^{-at}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$.

证 按定义，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(at)]&=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}dt\\(\text{令 } at=u)&=\int_0^{+\infty}f(u)e^{-s\frac{u}{a}}\frac{1}{a}du\\(\text{换 } u \text{ 为 } t)&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\frac{s}{a}t}dt\\&=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned}$$

(1) 因为 $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\arctan\frac{1}{s}$，所以由相似性质，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{at}\right]=\frac{1}{a}\arctan\frac{1}{\frac{s}{a}},$$

即

$$\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]=\frac{1}{a}\arctan\frac{a}{s},$$

从而

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right]=\arctan\frac{a}{s}.$$

(2) 由于在延迟性质的条件中附加了 $t<0$ 时，$f(t)=0$. 这就意味着

$$\mathscr{L}[f(t-b)u(t-b)]=\mathscr{L}[f(t-b)]=\mathrm{e}^{-bs}F(s).$$

由相似性质，有

$$\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]=\mathscr{L}[f(at-b)]$$
$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-b\frac{s}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right)=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

(3) 根据位移性质：$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-t}f(t)]=F(s+1)$. 从而由相似性质可得

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}t}f\left(\frac{1}{a}t\right)\right]=\frac{1}{\frac{1}{a}}F\left(\frac{s}{\frac{1}{a}}+1\right),$$

即

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as+1).$$

(4) 因为 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，由相似性质，有

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as).$$

再利用位移性质可得

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-at}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(a(s+a))=aF(as+a^2).$$

3. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，证明(象函数的微分性质)

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\mathrm{Re}(s)>c.$$

特别，$\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s)$，或 $f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]$，并利用此结论，计算下列各式：

(1) $f(t)=t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$，求 $F(s)$；

(2) $f(t)=t\int_0^t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$，求 $F(s)$；

(3) $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$，求 $f(t)$；

(4) $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,dt$，求 $F(s)$.

证 由 Laplace 变换的定义，有

$$\begin{aligned}(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)]&=\mathscr{L}[(-t)^n f(t)]\\&=\int_0^{+\infty}(-t)^n f(t)e^{-st}\,dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{ds^n}[f(t)e^{-st}]\,dt\end{aligned}$$

$$(\text{变换积分与微分次序})=\frac{d^n}{ds^n}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\,dt=F^{(n)}(s).$$

显然，$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)]$，即

$$\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s),\text{或 } f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)].$$

(1) 因为(由位移性质)

$$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

所以利用象函数的微分性质，有

$$\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]=\frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}.$$

(2) 因为(由积分性质)

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

所以

$$\mathscr{L}\left[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt\right]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{s[(s+3)^2+4]}\right]=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}.$$

(3) 因为

$$f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)],$$

所以

$$\begin{aligned}f(t)&=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\ln\frac{s+1}{s-1}\right)\right]\\&=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right]\\&=-\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t})\\&=\frac{2}{t}\cdot\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2}\\&=\frac{2}{t}\sinh t.\end{aligned}$$

(4) 因为(由积分性质)

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]$$

$$(\text{由第(1)小题结论})=\frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2+4]^2}.$$

4. 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,证明(象函数的积分性质)

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s,\text{或 } f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s\right].$$

并利用此结论,计算下列各式:

(1) $f(t)=\dfrac{\sin kt}{t}$,求 $F(s)$;

(2) $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}$,求 $F(s)$;

(3) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2-1)^2}$,求 $f(t)$;

(4) $f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$,求 $F(s)$.

证 由定义知

$$\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s = \int_s^{\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s$$

$$(\text{交换积分次序}) = \int_0^{+\infty}\left[\int_s^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\left[-\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-st}\Big|_s^{\infty}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right],$$

亦即有

$$f(t) = t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s\right].$$

(1) 利用象函数的积分性质，有

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}\left[\frac{\sin kt}{t}\right]$$

$$= \int_s^{\infty}\mathscr{L}[\sin kt]\mathrm{d}s$$

$$= \int_s^{\infty}\frac{k}{s^2+k^2}\mathrm{d}s$$

$$= \arctan\frac{s}{k}\Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{k}$$

$$= \operatorname{arccot}\frac{s}{k}.$$

(2) $F(s) = \mathscr{L}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}\right]$

$$= \int_s^{\infty}\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]\mathrm{d}s$$

$$= \int_s^{\infty}\frac{2}{(s+3)^2+4}\mathrm{d}s$$

$$-\arctan\frac{s+3}{2}\Big|_s^{\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}$$

$$=\operatorname{arccot}\frac{s+3}{2}.$$

(3) 由公式

$$f(t)=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$=t\mathscr{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty}\frac{s}{(s^2-1)^2}\mathrm{d}s\right]$$

$$=t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2-1}\right]$$

$$=t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=\frac{t}{4}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})$$

$$=\frac{t}{2}\sinh t.$$

(4) $$F(s)=\mathscr{L}\left[\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t}{t}\right]$$

(由第(2)小题) $=\dfrac{1}{s}\operatorname{arccot}\dfrac{s+3}{2}.$

5. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t$； (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}\cos bt-\mathrm{e}^{-mt}\cos nt}{t}\mathrm{d}t$； (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t$；

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$； (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$；

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\sinh t\sin t}{t}dt$；　　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt$；

(9) $\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\sin t\,dt$；　　(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$；

(11) $\int_0^{+\infty}e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\,dt$，其中 $\operatorname{erf}\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$ 称为误差函数；

(12) $\int_0^{+\infty}J_0(t)dt$，其中 $J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$ 称为零阶 Bessel 函数.

解 根据 Laplace 变换的性质及例 2-3 的分析与计算可以归纳一下求某些类型的广义积分的计算公式.

设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，由象函数的积分性质可以推得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{\infty}F(s)ds. \tag{1°}$$

由积分性质及终值定理可以推得

$$\int_0^{+\infty}f(t)dt=\lim_{s\to 0}F(s). \tag{2°}$$

若复变量 $s=\alpha+j\beta$，则

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cos\beta t f(t)dt=\operatorname{Re}[F(\alpha+j\beta)], \tag{3°}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\sin\beta t f(t)dt=-\operatorname{Im}[F(\alpha+j\beta)]. \tag{4°}$$

特别，当 $\alpha=0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}\cos\beta t f(t)dt=\operatorname{Re}[F(j\beta)], \tag{5°}$$

$$\int_0^{+\infty}\sin\beta t f(t)dt=-\operatorname{Im}[F(j\beta)]. \tag{6°}$$

当 $\beta=0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}f(t)dt=\operatorname{Re}[F(\alpha)]=F(\alpha). \tag{7°}$$

而当 $\alpha=\beta=0$ 时，所得关系式就是(2°).

从这些公式中可以看出，不论利用哪一个公式来计算广义积分，只要 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ 能够求得，则相应的广义积分就不难计算出来.

(1) 由公式(1°)，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt=\int_0^{\infty}\mathscr{L}[e^{-t}-e^{-2t}]ds$$
$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)ds$$
$$=\ln\frac{s+1}{s+2}\Big|_0^{\infty}=\ln 2.$$

(2) 由公式(1°)，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt=\int_0^{\infty}\mathscr{L}[(1-\cos t)e^{-t}]ds$$
$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)ds$$
$$=\ln\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+1}}\Big|_0^{\infty}=\ln\sqrt{2}.$$

(3) 由公式(1°)，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt}{t}dt$$
$$=\int_0^{\infty}\mathscr{L}[e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt]ds$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}-\frac{s+m}{(s+m)^2+n^2}\right]ds$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(s+a)^2+b^2}{(s+m)^2+n^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{m^2+n^2}{a^2+b^2}.$$

(4) 由公式(7°)，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 2t\,dt=\mathscr{L}[\cos 2t]\Big|_{s=a=3}=\frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=a=3}=\frac{3}{13}.$$

(5) 由公式(7°)，有

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \mathscr{L}[t]\Big|_{s=a=2} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=a=2} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由公式(4°)，有

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{Im}\left[\mathscr{L}(t)\Big|_{s=3+2j}\right] = -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{s^2}\Big|_{s=3+2j}\right]$$

$$= -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(3+2\mathrm{j})^2}\right] = -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{5+12\mathrm{j}}\right]$$

$$= -\mathrm{Im}\left[\frac{5}{169} - \mathrm{j}\frac{12}{169}\right] = \frac{12}{169}.$$

(7) 由公式(1°)，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}\sinh t\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-(\sqrt{2}-1)t}\sin t - \mathrm{e}^{-(\sqrt{2}+1)t}\sin t]\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(s+\sqrt{2}-1)^2+1} - \frac{1}{(s+\sqrt{2}+1)^2+1}\right]\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arctan(s+\sqrt{2}-1)\Big|_0^{\infty} - \arctan(s-\sqrt{2}+1)\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arctan(\sqrt{2}+1) - \arctan(\sqrt{2}-1)\right] = \frac{\pi}{8},$$

其中，令 $\arctan(\sqrt{2}+1) = A$，$\arctan(\sqrt{2}-1) = B$，则

$$\tan A = \sqrt{2}+1,\quad \tan B = \sqrt{2}-1,$$

由 $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B} = \dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{1+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 1$，

所以 $\quad A - B = \arctan(\sqrt{2}+1) - \arctan(\sqrt{2}-1) = \dfrac{\pi}{4}.$

(8) 由公式(1°)，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1-\cos 2t}{2}\right]\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+4}}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{4}\ln 5.$$

(9) 由公式(4°),有

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\sin t\,dt = -\operatorname{Im}\left[\mathscr{L}[t^3]\big|_{s=1+j}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{3!}{s^4}\bigg|_{s=1+j}\right]$$

$$= -\operatorname{Im}\left[\frac{6}{(1+j)^4}\right] = -\operatorname{Im}\left[-\frac{3}{2}\right] = 0.$$

(10) 由象函数的积分性质,有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right] = \int_s^{\infty}\mathscr{L}[\sin^2 t]ds = \int_s^{\infty}\mathscr{L}\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right]ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)ds$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4}\bigg|_s^{\infty} = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2},$$

再由公式(1°),有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \int_0^{\infty}\mathscr{L}\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]ds$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}ds$$

$$(\text{用分部积分}) = \frac{1}{4}\left[s\ln\frac{s^2+4}{s^2}\bigg|_0^{\infty} + 8\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+4}ds\right]$$

$$= 2\int_0^{\infty}\frac{1}{4\left[1+\left(\frac{s}{2}\right)^2\right]}2d\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{s}{2}\right)\bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(11) 由附表Ⅱ中公式(66),有 $\mathscr{L}\left[\operatorname{erf}\sqrt{t}\right] = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$(读者也可利用卷积定理加以验证),再由公式(7°),有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\,dt = \mathscr{L}\left[\operatorname{erf}\sqrt{t}\right]\Big|_{s=1} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(12) 由附表Ⅱ中公式(74),有 $\mathscr{L}[J_0(t)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$,再由公式(7°),有

$$\int_0^{+\infty} J_0(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-0\cdot t}\mathrm{d}t=\mathscr{L}[J_0(t)]\Big|_{s=0}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Big|_{s=0}=1.$$

注 通过上述各题的计算可以发现,这些广义积分能够用不同的公式或方法求得结果.现以第(5)小题为例:由于 $\mathscr{L}[te^{-2t}]=\frac{1}{(s+2)^2}$,所以由公式(2°),有

$$\int_0^{+\infty} te^{-2t}\mathrm{d}t=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{1}{4}.$$

也可以由定义得到结果,因为 $\mathscr{L}[t]=\int_0^{+\infty} te^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s^2}$,

取 $s=2$ 时,有 $\int_0^{+\infty} te^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s^2}\Big|_{s=2}=\frac{1}{4}$.

其余各小题,有兴趣的读者可用不同公式或方法再做一下.

6. 求下列函数的 Laplace 逆变换:

(1) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$; (2) $F(s)=\frac{1}{s^4}$;

(3) $F(s)=\frac{1}{(s+1)^4}$; (4) $F(s)=\frac{1}{s+3}$;

(5) $F(s)=\frac{2s+3}{s^2+9}$; (6) $F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}$;

(7) $F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}$; (8) $F(s)=\frac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

解 (1) 因为

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2},$$

所以
$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}\sin 2t.$$

(2) 因为 $F(s)=\frac{1}{s^4}=\frac{1}{3!}\frac{3!}{s^4}$,所以

$$f(t)=\frac{1}{6}t^3.$$

(3) 由上题可知

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{6}t^3e^{-t}.$$

(4) 由 $F(s)=\frac{1}{s+3}$,所以 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=e^{-3t}$.

(5) 因为

$$F(s)=\frac{2s+3}{s^2+9}=2\frac{s}{s^2+3^2}+\frac{3}{s^2+3^2},$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2+9}\right]=2\cos 3t+\sin 3t.$$

(6) 因为 $F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-3}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$,所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

(7) 因为 $F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}=\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$

$$=\frac{3}{5}\frac{1}{s-2}+\frac{2}{5}\frac{1}{s+3},$$

所以 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{-3t}=\frac{1}{5}(3e^{2t}+2e^{-3t})$.

(8) 因为 $F(s)=\frac{2s+5}{s^2+4s+13}=\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}+$

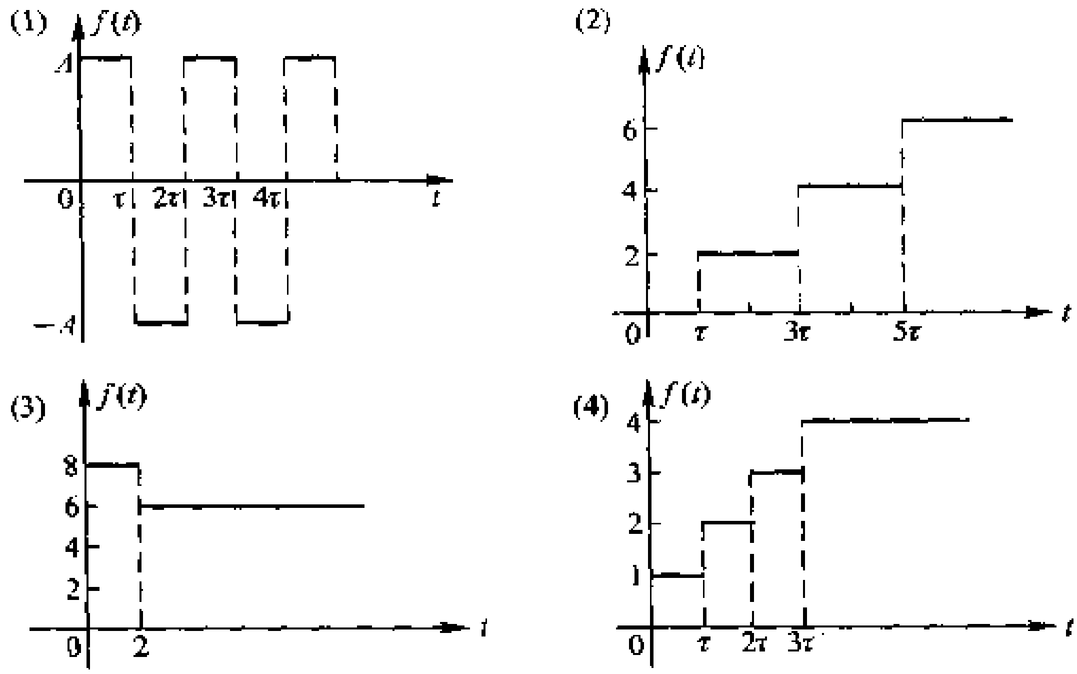
$$\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2},$$

所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}+\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

$$=2e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

7. 求下列各图所示函数 $f(t)$的 Laplace 变换:



解 (1) 由图可知函数 $f(t)=\begin{cases} A, & 0\leqslant t<\tau; \\ -A, & \tau\leqslant <2\tau, \end{cases}$ 且 $f(t+2\tau)=f(t)$. 由周期函数的 Laplace 变换公式,有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\tau s}}\int_0^{2\tau} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\tau s}}\left[\int_0^{\tau} Ae^{-st}\,dt-\int_{\tau}^{2\tau} Ae^{-st}\,dt\right] \\
&= \frac{A}{1-e^{-2\tau s}}\left[\frac{1-e^{-s\tau}}{s}+\frac{e^{-2s\tau}-e^{-s\tau}}{s}\right] \\
&= \frac{A}{s}\,\frac{1-e^{-s\tau}}{1+e^{-s\tau}}=\frac{A}{s}\,\frac{e^{\frac{s\tau}{2}}-e^{-\frac{s\tau}{2}}}{e^{\frac{s\tau}{2}}+e^{-\frac{s\tau}{2}}}=\frac{A}{s}\tanh\frac{s\tau}{2}.
\end{aligned}
$$

注 如将函数 $f(t)$用单位阶跃函数来表示,即

$$f(t)=A[u(t)-2u(t-\tau)+2u(t-2\tau)-2u(t-3\tau)+\cdots].$$

上式两端取 Laplace 变换，并应用线性性质及 $\mathscr{L}[u(t-\tau)]=\frac{1}{s}e^{-s\tau}$ 的结果，也能求出该函数的 Laplace 变换.

(2) 将函数 $f(t)$ 用单位阶跃函数来表示，即

$$f(t)=2[u(t-\tau)+u(t-3\tau)+u(t-5\tau)+\cdots]$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}2u[t-(2k-1)\tau].$$

上式两端取 Laplace 变换，由线性性质及延迟性质可得

$$\mathscr{L}[f(t)]=2\mathscr{L}[u(t-\tau)+u(t-3\tau)+u(t-5\tau)+\cdots]$$
$$=2\left[\frac{1}{s}e^{-s\tau}+\frac{1}{s}e^{-3s\tau}+\frac{1}{s}e^{-5s\tau}+\cdots\right]$$
$$=\frac{2}{s}(e^{-s\tau}+e^{-3s\tau}+e^{-5s\tau}+\cdots)$$

(当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，有 $|e^{-2s\tau}|<1$)

$$=\frac{2}{s}\frac{e^{-s\tau}}{1-e^{-2s\tau}}=\frac{1}{s}\frac{1}{\frac{e^{s\tau}-e^{-s\tau}}{2}}=\frac{1}{s\sinh s\tau}.$$

(3) 由图知 $f(t)=\begin{cases}8, & 0\leqslant t<2;\\ 6, & t\geqslant 2.\end{cases}$ 从而

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$
$$=\int_0^2 8e^{-st}dt+\int_2^{+\infty}6e^{-st}dt$$
$$=8\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^2+6\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_2^{+\infty}$$
$$=-\frac{8}{s}e^{-2s}+\frac{8}{s}+\frac{6}{s}e^{-2s}=\frac{2}{s}(4-e^{-2s}).$$

(4) 由图可知，有

$$f(t)=u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k\tau),$$

从而

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s\tau}+\frac{1}{s}e^{-2s\tau}+\cdots$$

$$-\frac{1}{s}(1+e^{-s\tau}+e^{-2s\tau}+\cdots)$$

$$(\mathrm{Re}(s)>0,有|e^{-s\tau}|<1)=\frac{1}{s}\frac{1}{1-e^{-s\tau}}=\frac{1}{2s}\left(1+\coth\frac{s\tau}{2}\right).$$

习题三解答

1. 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 均满足 Laplace 变换存在定理的条件(若它们的增长指数均为 c),且 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$,则乘积 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ 的 Laplace 变换一定存在,且

$$\mathscr{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F_1(q)F_2(s-q)\mathrm{d}q,$$

其中 $\beta>c$, $\mathrm{Re}(s)>\beta+c$.

证 已知 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 均满足 Laplace 变换存在定理的条件且其增长指数均为 c,由 Laplace 变换存在定理知 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ 也满足 Laplace 变换存在定理的条件且

$$|f_1(t)\cdot f_2(t)|=|f_1(t)|\cdot|f_2(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{ct}\cdot M\mathrm{e}^{ct}$$
$$=M^2\mathrm{e}^{2ct},0\leqslant t<+\infty$$

表明 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ 的增长指数为 $2c$. 因此 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ 的 Laplace 变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在半平面 $\mathrm{Re}(s)>2c$ 上一定存在,且右端积分在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant\beta+c(\beta>c)$ 上绝对且一致收敛,并且在 $\mathrm{Re}(s)>2c$ 的半平面内, $F(s)$ 为解析函数.

根据 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$,则 $f_1(t)$ 的 Laplace 反演积分公式为

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F_1(q)\mathrm{e}^{qt}\mathrm{d}q.$$

从而

$$\mathscr{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\int_0^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F_1(q)e^{qt}dq\right]f_2(t)e^{-st}dt$$

$$(\text{交换积分次序}) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F_1(q)\left[\int_0^{+\infty}f_2(t)e^{-(s-q)t}dt\right]dq$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F_1(q)F_2(s-q)dq.$$

2. 求下列函数的 Laplace 逆变换(象原函数);并用另一种方法加以验证.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+a^2}$;　　(2) $F(s)=\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$;

(3) $F(s)=\dfrac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$;　　(4) $F(s)=\dfrac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}$;

(5) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+a^2)s^3}$;　　(6) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$;

(7) $F(s)=\dfrac{1}{s^4-a^4}$;　　(8) $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$;

(9) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$;　　(10) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$.

解 由一个象函数求它的象原函数,即求 Laplace 逆变换,通常有留数计算法、部分分式法及查表的方法.对于有些象函数还可以利用 Laplace 变换的性质(包括卷积定理)及常见函数的 Laplace 变换来求其逆变换.本题中所有 $F(s)$ 均为有理分式,都可以用部分分式的方法求其逆变换.根据本题的要求,对所得结果求它的 Laplace 变换加以验证也应该是一种方法.这里,对第(1)小题给出多种方法加以演示,其余各小题只给出两种方法.

(1) 方法 1——部分分式法,由

$$F(s)=\frac{1}{s^2+a^2}=\frac{1}{(s+ja)(s-ja)}=\frac{1}{2aj}\left(\frac{1}{s-ja}-\frac{1}{s+ja}\right),$$

有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2aj}(e^{jat}-e^{-jat})=\frac{1}{a}\sin at.$$

方法 2——留数计算法，由于 $s_1 = \mathrm{j}a$，$s_2 = -\mathrm{j}a$ 为 $F(s)$ 的两个一级极点，所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{2}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)\mathrm{e}^{st}]$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2s_k}\mathrm{e}^{s_k t}=\frac{1}{2a\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}+\frac{1}{-2a\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{2\mathrm{j}}=\frac{1}{a}\sin at.$$

方法 3——利用公式法，由 $\mathscr{L}[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\sin at.$$

方法 4——利用 Laplace 变换性质，由

$$F(s)=\frac{1}{s^2+a^2}=\frac{1}{s-\mathrm{j}a}\cdot\frac{1}{s+\mathrm{j}a},$$

利用卷积定理，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}$$

$$=\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{j}a\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{j}2a\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}\frac{1}{2a\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2a\tau}\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{2a\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2at}-1)$$

$$=\frac{1}{a}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}}{2\mathrm{j}}=\frac{1}{a}\sin at.$$

方法 5——查表法，由附录Ⅱ中公式(5)即可得.

方法 6——验证法，即对上述求得的结果取 Laplace 变换加以

验证. 显然, $\mathscr{L}\left[\frac{1}{a}\sin at\right]=\frac{1}{s^2+a^2}=F(s)$.

注 通过上述几种方法的演示,可以看出,应针对 $F(s)$的不同形状而采取一种较为简便的方法;同时不要以为查表的方法一定简单,实际上在很多情况下,要将 $F(s)$通过变形后才能在表中查出所求函数的逆变换,而这种变形的方法往往需要一定的技巧.总之,要灵活选用某一种方法,使得求解较为方便.

(2) 由部分分式法,有

$$F(s)=\frac{s}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a}-\frac{b}{s-b}\right),$$

从而 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{a-b}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s-a}-\frac{b}{s-b}\right]$$

$$=\frac{a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt}}{a-b}.$$

由于 $s_1=a, s_2=b$ 为 $F(s)$的两个一级极点,由留数计算法,有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}]$$

$$=\frac{s_1\mathrm{e}^{s_1t}}{(s_1-b)}+\frac{s_2\mathrm{e}^{s_2t}}{(s_2-a)}=\frac{a}{a-b}\mathrm{e}^{at}+\frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{bt}$$

$$=\frac{a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt}}{a-b}.$$

(3) 由部分分式法,有

$$F(s)=\frac{c-a}{(b-a)^2}\cdot\frac{1}{s+a}+\frac{a-c}{(a-b)^2}\cdot\frac{1}{s+b}+\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{1}{(s+b)^2}.$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}\mathrm{e}^{-at}+\frac{a-c}{(a-b)^2}\mathrm{e}^{-bt}+\frac{c-b}{a-b}t\mathrm{e}^{-bt}$$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}\mathrm{e}^{-at}+\left[\frac{c-b}{a-b}t+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]\mathrm{e}^{-bt}.$$

由于 $s_1=-a$ 为 $F(s)$ 的一个一级极点，$s_2=-b$ 为其二级极点，由留数计算法，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}]$$

$$=\frac{s+c}{(s+b)^2}e^{st}\bigg|_{s=s_1}+\lim_{s\to -b}\frac{d}{ds}\left[\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}e^{st}(s+b)^2\right]$$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\lim_{s\to -b}\frac{d}{ds}\left[\frac{s+c}{s+a}e^{st}\right]$$

$$=\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{c-b}{a-b}t+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}.$$

(4) 由 $F(s)=\dfrac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{s^2+a^2+a^2}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{1}{s^2+a^2}+\dfrac{a^2}{(s^2+a^2)^2}$，利用查表法(见附录Ⅱ中的公式(5)及(29))，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{a}\sin at+a^2\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$$

$$=\frac{1}{a}\sin at+\frac{1}{2a}(\sin at-at\cos at)$$

$$=\frac{3}{2a}\sin at-\frac{1}{2}t\cos at.$$

因为 $F(s)=\dfrac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{3}{s^2+a^2}+\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right)\right]$，由象函数的微分性质，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{3}{2a}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2a}\sin at-\frac{1}{2}t\cos at.$$

(5) 由部分分式法，有

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+a^2)s^3}=\frac{1}{a^4}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}-\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{s^3}.$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{a^4}\cos at-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{2a^2}t^2$$

$$=\frac{1}{a^4}(\cos at-1)+\frac{1}{2a^2}t^2.$$

由于 $F(s)$ 还可以表示为 $F(s)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right)$，而第二项可利用积分性质，即设 $F_1(s)=\frac{1}{s^2+a^2}$，而

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\sin at.$$

这样，有

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F_1(s)=\frac{1}{s(s^2+a^2)},$$

所以

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a^2}\frac{1}{s^3}\right]-\frac{1}{a^2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right]\\&=\frac{1}{2a^2}t^2-\frac{1}{a^2}\int_0^t\frac{1}{a}\sin at\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a^2}t^2-\frac{1}{a^3}\left[-\frac{1}{a}\cos at\right]\Big|_0^t\\&=\frac{1}{a^4}(\cos at-1)+\frac{1}{2a^2}t^2.\end{aligned}$$

(6) 由部分分式法，有

$$F(s)=\frac{1}{s(s+a)(s+b)}=\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{a(a-b)}\cdot\frac{1}{s+a}-\frac{1}{b(a-b)}\cdot\frac{1}{s+b}$$

从而

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}\mathrm{e}^{-at}-\frac{1}{b(a-b)}\mathrm{e}^{-bt}\\&=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a-b}\left[\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}-\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{b}\right].\end{aligned}$$

另一方法可以用留数计算法，但如用查表法，见附录Ⅱ中公式(35)即可得.

(7) 由部分分式法，有

$$F(s)=\frac{1}{s^4-a^4}=\frac{1}{(s^2-a^2)(s^2+a^2)}$$
$$=\frac{1}{4a^3}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)-\frac{1}{2a^3}\frac{a}{s^2+a^2}.$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{4a^3}(e^{at}-e^{-at})-\frac{1}{2a^3}\sin at$$
$$=\frac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at).$$

利用查表法，见附录Ⅱ中公式(44)，即可得到验证.

(8) 由部分分式法，有

$$F(s)=\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2},$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=2te^t+2e^t-1.$$

用留数计算法，由于 $s_1=0$ 为 $F(s)$的一个一级极点，$s_2=1$ 为 $F(s)$的一个二级极点，所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}]$$
$$=\frac{s^2+2s-1}{(s-1)^2}e^{st}\bigg|_{s=s_1}+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}e^{st}(s-1)^2\right]$$
$$=-1+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2s-1}{s}e^{st}\right]$$
$$=2te^t+2e^t-1.$$

(9) 由部分分式法，有

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s^2-1)}=-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right),$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=-t+\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$$

$$= \sinh t - t.$$

用留数计算法，由于 $s_1 = 0$ 为 $F(s)$ 的二级极点，$s_2 = 1$，$s_3 = -1$ 为它的一级极点，所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}] \\ &= \left.\frac{e^{st}}{s^2(s+1)}\right|_{s=s_2} + \left.\frac{e^{st}}{s^2(s-1)}\right|_{s=s_3} + \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{(s^2-1)}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} - t = \sinh t - t. \end{aligned}$$

(10) 由 $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+2^2}\right)$，有

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t.$$

用查表法，见附录Ⅱ中公式(24)，即可得到验证.

3. 求下列函数的 Laplace 逆变换：

(1) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4)^2}$；　　(2) $F(s) = \dfrac{s}{s+2}$；

(3) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$；　　(4) $F(s) = \dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$；

(5) $F(s) = \dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}$；　　(6) $F(s) = \ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$；

(7) $F(s) = \dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$；　　(8) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$；

(9) $F(s) = \dfrac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$；　　(10) $F(s) = \dfrac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$；

(11) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$；　　(12) $F(s) = \dfrac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}$；

(13) $F(s) = \dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$；　　(14) $F(s) = \dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$.

解 (1) 用留数计算法，由于 $s_1 = 2j$，$s_2 = -2j$ 均为 $F(s)$ 的二级极点，所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2\mathrm{j})^2(s+2\mathrm{j})^2}\right]=\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}]$$

$$=\lim_{s\to 2\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s+2\mathrm{j})^2}\right]+\lim_{s\to -2\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s-2\mathrm{j})^2}\right]$$

$$=\lim_{s\to 2\mathrm{j}}\left[\frac{t\mathrm{e}^{st}}{(s+2\mathrm{j})^2}-\frac{2(s+2\mathrm{j})}{(s+2\mathrm{j})^4}\mathrm{e}^{st}\right]+\lim_{s\to -2\mathrm{j}}\left[\frac{t\mathrm{e}^{st}}{(s-2\mathrm{j})^2}-\frac{2(s-2\mathrm{j})}{(s-2\mathrm{j})^4}\mathrm{e}^{st}\right]$$

$$=-\frac{t}{16}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}-\frac{8\mathrm{j}}{256}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}-\frac{t}{16}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}+\frac{8\mathrm{j}}{256}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}$$

$$=-\frac{t}{8}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}}{2}+\frac{1}{16}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}=\frac{\sin 2t}{16}-\frac{t\cos 2t}{8}.$$

(2) 由 $F(s)=\dfrac{s}{s+2}=1-\dfrac{2}{s+2}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\delta(t)-2\mathrm{e}^{-2t}.$$

(3) 用留数计算法，由于 $s_1=0, s_2=-1, s_3=-2$ 均为 $F(s)$ 的一级极点，所以

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)\mathrm{e}^{st}]$$

$$=\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=s_1}+\frac{2s+1}{s(s+2)}\mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=s_2}+\frac{2s+1}{s(s+1)}\mathrm{e}^{st}\bigg|_{s=s_3}$$

$$=\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{2}(1+2\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}).$$

(4) 由于 $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right),$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t.$$

(5) 由 $F(s)=\dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}$

$$(\text{通过配方})=\frac{1}{9}\left[\frac{s+\frac{1}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{\frac{2}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right],$$

有

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{9}\left[\cos\frac{2}{3}t\cdot e^{-\frac{1}{3}t}+\sin\frac{2}{3}te^{-\frac{1}{3}t}\right].$$

$$=\frac{1}{9}\left(\sin\frac{2}{3}t+\cos\frac{2}{3}t\right)e^{-\frac{1}{3}t}.$$

(6) 用象函数的微分性质：$F(s)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]$（亦可见习题二的第 3 题），可得

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right]\\&=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right)\right]\\&=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2-1)}\right]=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}\right]\\&=-\frac{1}{t}(e^{-t}+e^t-2)\\&=\frac{1}{t}\left(2-2\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\\&=\frac{2(1-\cosh t)}{t}.\end{aligned}$$

(7) 由于

$$F(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}=\frac{s+2}{[(s+2)^2+1]^2}=-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right),$$

设 $F_1(s)=\frac{1}{(s+2)^2+1}$，由微分性质：$f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}F_1(s)\right]$，从而可得

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]$$

(由位移性质) $=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin t$.

(8) 由于 $F(s)=\frac{1}{(s^2+2s+2)^2}=\frac{1}{[(s+1)^2+1]^2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)\right],$$

与第(7)小题同理，设 $F_1(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$，由微分性质，有

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_1(s)\right],$$

从而可得

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\sin t-\frac{1}{2}t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t).$$

(9) 由于

$$F(s)=\frac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}=\frac{s^2+4s+4}{[(s+2)^2+3^2]^2}$$

$$=\frac{1}{(s+2)^2+3^2}-\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{(s+2)^2+3^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s+2)^2+3^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+3^2}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right),$$

其中第二项类似于第(8)小题，再利用微分性质，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}e^{-2t}\sin 3t+\frac{1}{2}t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}t\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t\right)e^{-2t}.$$

(10) 用部分分式法，有

$$F(s)=\frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{3}{s+1}-\frac{11}{s+2}+\frac{10}{s+3},$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=3e^{-t}-11e^{-2t}+10e^{-3t}.$$

(11) 用部分分式法，有

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3-3s^2+6s+4}=\frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+3}+\frac{1}{(s+1)^2+3},$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}(2-2\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t).$$

(12) 用部分分式法，有

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+2}{(s+1)(s+3)^3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s+3)^2}-6\cdot\frac{1}{(s+3)^3},$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{3}{2}te^{-3t}-3t^2e^{-3t}.$$

(13) 由 $F(s)=\frac{1+e^{-2s}}{s^2}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-2s}\right].$$

由延迟性质：$\mathscr{L}[f_1(t-\tau)u(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F_1(s)$，或 $\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F_1(s)]=f_1(t-\tau)u(t-\tau)$. 这里当 $t-\tau<0$ 时，$f(t-\tau)=0$. 因此

$$f(t)=t+(t-2)u(t-2)\left(\text{视第二项中的 } F_1(s)=\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<2; \\ 2(t-1), & t\geqslant 2. \end{cases}$$

(14) 先将 $F(s)$ 化为有理真分式，即

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}=s+2+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2},$$

从而

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[s+2+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right]$$

$(\mathscr{L}[\delta'(t)]=s)=\delta'(t)+2\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}$.

习题四解答

1. 求下列卷积：

(1) $1*1$； (2) $t*t$；

(3) t^m*t^n (m,n 为正整数)； (4) $t*\mathrm{e}^t$；

(5) $\sin t*\cos t$； (6) $\sin kt*\sin kt(k\neq0)$；

(7) $t*\sinh t$； (8) $\sinh at*\sinh at(a\neq0)$；

(9) $u(t-a)*f(t)(a\geqslant0)$； (10) $\delta(t-a)*f(t)(a\geqslant0)$.

解 (1) $1*1=\int_0^t 1\cdot1\mathrm{d}\tau=t$.

(2) $t*t=\int_0^t \tau\cdot(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\frac{t}{2}\tau^2-\frac{1}{3}\tau^3\right)\Big|_0^t=\frac{1}{6}t^3$.

(3) $t^m*t^n=\int_0^t \tau^m\cdot(t-\tau)^n\mathrm{d}\tau$

$$\left(由(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\right)$$

$$=\int_0^t \tau^m\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k t^{n-k}\tau^k\right)d\tau$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k t^{n-k}\int_0^t \tau^{m+k}d\tau$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k t^{n-k}\frac{t^{m+k+1}}{m+k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{t^{n+m+1}}{m+k+1}$$

$$=t^{n+m+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(m+1)+k}C_n^k$$

$$\left(\begin{array}{l}由\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{l+k}C_n^k=\dfrac{n!}{l(l+1)\cdots(l+n)}\\ l\neq 0,-1,-2,\cdots,-n\end{array}\right)$$

$$=t^{n+m+1}\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+1+n)}$$

$$=\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}.$$

注 1　此题亦可以利用 Beta 函数的定义：

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

来做，即

$$t^m * t^n=\int_0^t \tau^m\cdot(t-\tau)^n d\tau$$

$$=\int_0^t\left(t\cdot\frac{\tau}{t}\right)^m\left[t\left(1-\frac{\tau}{t}\right)\right]^n d\tau$$

$$\left(令\frac{\tau}{t}=u\right)=\int_0^1 t^m u^m t^n(1-u)^n t\,du$$

$$=t^{m+n+1}\int_0^1 u^m(1-u)^n du$$

$$=B(m+1,n+1)t^{m+n+1}$$

$$\left(由\ B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}t^{m+n+1}$$

$$=\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}.$$

注 2　此题还可以用卷积定理及公式：$\mathscr{L}[t^m]=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$来做，即

$$t^m * t^n=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!}{s^{m+1}}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{m!\ n!}{s^{m+n+2}}\right]$$

$$=\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(m+n+1)!}{s^{m+n+2}}\right]$$

$$=\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}.$$

(4) $t * e^t=\int_0^t \tau e^{t-\tau}d\tau=e^t\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau$

$$=e^t(-te^{-t}-e^{-t}+1)=e^t-t-1.$$

(5) $\sin t * \cos t=\int_0^t \sin\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin(2\tau-t)+\sin t]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}t\sin t.$$

(6) $\sin kt * \sin kt=\int_0^t \sin k\tau\cdot\sin k(t-\tau)d\tau$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(2k\tau-kt)-\cos kt]d\tau$$

$$=\frac{1}{2k}\sin kt-\frac{t}{2}\cos kt.$$

(7) $t * \sinh t=\sinh t * t$

$$=\int_0^t \sinh\tau\cdot(t-\tau)d\tau$$

$$= t\int_0^t \sinh \tau \mathrm{d}\tau - \int_0^t \tau\sinh \tau \mathrm{d}\tau,$$

注意到

$$(\sinh t)'_t = \cosh t; \quad (\cosh t)'_t = \sinh t,$$

第二项用分部积分,令 $u = \tau, \mathrm{d}v = \sinh \tau \mathrm{d}\tau$,从而

$$t * \sinh t = t(\cosh t - 1) - \left[\tau\cosh \tau\Big|_0^t - \int_0^t \cosh \tau \mathrm{d}\tau\right]$$

$$= t\cosh t - t - t\cosh t + \sinh t$$

$$= \sinh t - t.$$

(8) $\sinh at * \sinh at = \int_0^t \sinh a\tau \cdot \sinh a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= \int_0^t \frac{e^{a\tau} - e^{-a\tau}}{2} \cdot \frac{e^{a(t-\tau)} - e^{-a(t-\tau)}}{2}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t (e^{at} - e^{at-2a\tau} - e^{-at+2a\tau} + e^{-at})\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t}{4}(e^{at} + e^{-at}) - \frac{1}{4}e^{at}\int_0^t e^{-2a\tau}\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4}e^{-at}\int_0^t e^{2a\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t}{2}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) - \frac{1}{2a}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(at\cosh at - \sinh at).$$

(9) $u(t-a) * f(t) = \int_0^t u(\tau - a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$

当 $t < a$ 且 $0 \leqslant \tau \leqslant t$ 时,$u(\tau - a) = 0$,因此积分为零;当 $t \geqslant a \geqslant 0$ 且 $0 \leqslant \tau \leqslant t$ 时,积分

$$\int_0^t u(\tau - a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_a^t f(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

因此

$$u(t-a) * f(t) = \begin{cases} 0, & t < a; \\ \int_a^t f(t-\tau)\mathrm{d}\tau, & 0 \leqslant a \leqslant t. \end{cases}$$

(10) $\delta(t-a)*f(t)=\int_0^t \delta(\tau-a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,

当 $t<a$ 且 $0\leqslant\tau\leqslant t$ 时,$\delta(\tau-a)=0$.因此积分为零;当 $t\geqslant a\geqslant 0$ 且 $0\leqslant\tau\leqslant t$ 时,积分

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta(\tau-a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau &=\left(\int_0^{a^-}+\int_{a^-}^{a^+}+\int_{a^+}^{t}\right)\delta(\tau-a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{a^-}^{a^+}\delta(\tau-a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-a)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=f(t-\tau)\Big|_{\tau=a}=f(t-a),\end{aligned}$$

因此

$$\delta(t-a)*f(t)=\begin{cases}0, & t<a;\\ f(t-a), & 0\leqslant a\leqslant t.\end{cases}$$

2. 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,利用卷积定理,证明

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(s)}{s}.$$

证 若令 $f_1(t)=1$,则

$$f(t)*f_1(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot 1\mathrm{d}\tau=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t,$$

由卷积定理,有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]&=\mathscr{L}[f(t)*f_1(t)]\\&=\mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[f_1(t)]=\frac{F(s)}{s}.\end{aligned}$$

3. 利用卷积定理,证明 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\dfrac{t}{2a}\sin at$.

证 由卷积定理可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\sin at * \cos at$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t \sin a\tau\cos a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t (\sin at + \sin(2a\tau - at))\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{t}{2a}\sin at.$$

4. 利用卷积定理,证明

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^t\int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau,$$

并求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]$.

证 因为

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad \mathscr{L}[\mathrm{e}^t] = \frac{1}{s-1},$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}^{-1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{s}}\cdot\frac{1}{s-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}} * \mathrm{e}^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$(令\sqrt{\tau} = u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^t\int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^t\int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau.$$

根据已证得的结论,设 $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$,则

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{t}\int_{0}^{\sqrt{t}}e^{-\tau^{2}}d\tau.$$

利用位移性质,有

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]=\mathcal{L}^{-1}[F(s+1)]=e^{-t}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{t}}e^{-\tau^{2}}d\tau.$$

5. 证明卷积满足对加法的分配律:

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

证 由定义可得

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=\int_0^t f_1(\tau)[f_2(t-\tau)+f_3(t-\tau)]d\tau$$
$$=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau+\int_0^t f_1(\tau)f_3(t-\tau)d\tau$$
$$=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

6. 证明卷积满足结合律:

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t).$$

证 由定义可得

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=\int_0^t f_1(\tau)\cdot[f_2(t-\tau)*f_3(t-\tau)]d\tau$$
$$=\int_0^t f_1(\tau)\left[\int_0^{t-\tau}f_2(u)f_3(t-\tau-u)du\right]d\tau$$
$$(\text{令 }\tau+u=v)=\int_0^t f_1(\tau)\left[\int_\tau^t f_2(v-\tau)f_3(t-v)dv\right]d\tau$$
$$(\text{交换积分次序})=\int_0^t\left[\int_0^v f_1(\tau)f_2(v-\tau)d\tau\right]f_3(t-v)dv$$
$$=\int_0^t[f_1(v)*f_2(v)]f_3(t-v)dv$$
$$=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t).$$

习题五解答

1. 求下列常系数微分方程的解：

(1) $y'-y=e^{2t}, y(0)=0$;

(2) $y''+4y'+3y=e^{-t}, y(0)=y'(0)=1$;

(3) $y''+3y'+2y=u(t-1); y(0)=0, y'(0)=1$;

(4) $y''-2y'+2y=2e^{t}\cos t, y(0)=y'(0)=0$;

(5) $y''+2y'+5y=e^{-t}\sin t, y(0)=0, y'(0)=1$;

(6) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t, y(0)=-1, y'(0)=-2$;

(7) $y''+4y'+5y=h(t), y(0)=c_1, y'(0)=c_2$ (c_1, c_2 为常数)；

(8) $y'''+3y''+3y'+y=1, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(9) $y'''+y'=e^{2t}, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(10) $y'''+3y''+3y'+y=6e^{-t}, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

(11) $y'''-3y''+3y'-y=t^2e^{t}, y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-2$;

(12) $y^{(4)}+2y''+y=0, y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1$;

(13) $y^{(4)}+y'''=\cos t+\frac{1}{2}\delta(t), y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=c_0$ (常数)；

(14) $y''-2y'+y=0, y(0)-0, y(1)=2$;

(15) $y''-y=0, y(0)=0, y(2\pi)=1$;

(16) $y''+y=10\sin 2t, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

解 本题中各小题的 y 均为 t 的函数，即 $y=y(t)$，且设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，借助于 Laplace 变换的性质，特别是线性性质，微分性质及常见函数的 Laplace 变换公式，按 Laplace 变换求解微分方程的步骤进行. 具体解题时一般不再说明.

(1) 方程两边取 Laplace 变换，并结合初始条件可得

$$sY(s)-Y(s)=\mathscr{L}[e^{2t}]=\frac{1}{s-2}，即$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}.$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=e^{2t}-e^{t}.$$

(2) 对方程两边取 Laplace 变换，并结合初始条件，有

$$s^2Y(s)-s-1+4sY(s)-4+3Y(s)=\frac{1}{s+1},$$

整理可得

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$(\text{用部分分式法})=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+3}$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}$$

$$=\frac{1}{4}[(7+2t)e^{-t}-3e^{-3t}].$$

(3) 对方程两边取 Laplace 变换，并结合初始条件，有

$$s^2Y(s)-1+3sY(s)+2Y(s)=\frac{1}{s}e^{-s},$$

即

$$Y(s)=\frac{e^{-s}-s}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right)e^{-s}.$$

从而取其逆变换，可得方程的解为

$$y(t)=e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}u(t-1)-u(t-1)e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}u(t-1)e^{-2(t-1)}$$

$$=e^{-t}-e^{-2t}+\left[\frac{1}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]u(t-1).$$

(4) 同上述方法,有

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=2\frac{s-1}{(s-1)^2+1},$$

即

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s^2-2s-2)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right).$$

由象函数的微分性质:$\mathscr{L}^{-1}[F_1'(s)]=-t\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]$,其中 $F_1(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$,从而可得方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\right]=t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

$$=te^t\sin t.$$

(5) 方程两边取 Laplace 变换并结合初始条件,有

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)+5Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1},$$

即

$$(s^2+2s+5)Y(s)=\frac{(s+1)^2+2}{(s+1)^2+1},$$

所以

$$Y(s)=\frac{(s+1)^2+2^2-2}{[(s+1)^2+2^2][(s+1)^2+1]}$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2+1}-\frac{2}{[(s-1)^2+2^2][(s+1)^2+1]}$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2+1}-\frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{3}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}.$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{3}e^{-t}\sin t+\frac{1}{3}e^{-t}\sin 2t$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}(\sin t-\sin 2t).$$

(6) 同上述方法,有

$$s^2Y(s)+s+2-Y(s)=\frac{4}{s^2+1}+\frac{5s}{s^2+4},$$

即

$$Y(s)=\frac{4}{(s^2-1)(s^2+1)}+\frac{5s}{(s^2-1)(s^2+4)}-\frac{s+2}{s^2-1}$$
$$=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}.$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=-2\sin t-\cos 2t.$$

(7) 对方程两边取 Laplace 变换，结合初始条件且令 $\mathscr{L}[h(t)]=H(s)$，有

$$s^2Y(s)-sc_1-c_2+4sY(s)-4c_1+5Y(s)=H(s),$$

即
$$Y(s)=\frac{H(s)+sc_1+c_2+4c_1}{(s^2+4s+5)}$$
$$=\frac{H(s)}{(s+2)^2+1}+c_1\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{c_2+2c_1}{(s+2)^2+1}.$$

取其逆变换，并借助于卷积定理，则方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=h(t)*e^{-2t}\sin t+c_1e^{-2t}\cos t+(c_2+2c_1)e^{-2t}\sin t$$
$$=h(t)*e^{-2t}\sin t+e^{-2t}[c_1\cos t+c\sin t],(c=2c_1+c_2).$$

(8) 同上述方法，有

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s},$$

即

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^3+3s^2+3s+1)}=\frac{1}{s(s+1)^3},$$

用留数计算法，由于 $s_1=0$ 是 $Y(s)$的一个一级极点，$s_2=-1$ 为 $Y(s)$的一个三级极点，从而方程的解为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}_{s=s_k}[Y(s)e^{st}]$$
$$=\frac{e^{st}}{(s+1)^3}\bigg|_{s=s_1}+\frac{1}{2!}\lim_{s\to s_2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s}e^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to-1}\frac{1}{2}\frac{e^{st}(s^2t^2-2st+2)}{s^3}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}t^2+t+1\right)e^{-t}.$$

(9) 同上述方法，有

$$s^3Y(s)+sY(s)=\frac{1}{s-2},$$

即

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{10}\frac{1}{s-2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

从而方程的解

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t.$$

(10) 同上述方法，有

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{6}{s+1},$$

从而

$$Y(s)=\frac{6}{(s^3+3s^2+3s+1)(s+1)}=\frac{3!}{(s+1)^4},$$

所以方程的解为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=t^3e^{-t}.$$

(11) 同上述方法，有

$$s^3Y(s)-s^2+2-3s^2Y(s)+3s+3sY(s)-3-Y(s)=\frac{2}{(s-1)^3},$$

即

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{(s^2-3s+1)(s-1)^3+2}{(s-1)^3(s^3-3s^2+3s-1)}=\frac{(s^2-3s+1)(s-1)^3+2}{(s-1)^6}\\&=\frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6}\\&=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^6},\end{aligned}$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=e^t-te^t-\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{60}t^5e^t$$

$$=\left(\frac{1}{60}t^5-\frac{1}{2}t^2-t+1\right)e^t.$$

(12) 同上述方法，有

$$s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)+$$
$$2s^2Y(s)-2sy(0)-2y'(0)+Y(s)=0,$$

即

$$Y(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\cos t*\sin t=\frac{1}{2}t\sin t.$$

(13) 同上述方法，有

$$s^4Y(s)-sc_0+s^3Y(s)-c_0=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{2},$$

$$(s^4+s^3)Y(s)=c_0(s+1)+\frac{(s+1)^2}{2(s^2+1)},$$

即

$$Y(s)=\frac{c_0}{s^3}+\frac{s+1}{2s^3(s^2+1)}=\frac{c_0}{s^3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{s-1}{s^2+1}\right).$$

所以方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{c_0}{2}t^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left(c_0+\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t).$$

(14) 同上述方法，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2sY(s)+y(0)+Y(s)=0,$$

即

$$Y(s)=\frac{y'(0)}{s^2-2s+1}=\frac{y'(0)}{(s-1)^2},$$

从而

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=y'(0)te^t.$$

将条件 $y(1)=2$ 代入上式，即得

$$y'(0)=\frac{2}{e}.$$

所以，方程的解为

$$y(t)=\frac{2}{e}te^t=2te^{t-1}.$$

(15) 同上题的方法，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-Y(s)=0,\text{即}$$

$$Y(s)=\frac{y'(0)}{s^2-1}=y'(0)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right),$$

从而

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}y'(0)(e^t-e^{-t})$$

$$=y'(0)\sinh t.$$

为了确定 $y'(0)$，将条件 $y(2\pi)=1$ 代入上式可得

$$y'(0)=\frac{1}{\sinh 2\pi},$$

所以，方程的解为

$$y(t)=\frac{\sinh t}{\sinh 2\pi}.$$

(16) 同上题的方法，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=10\frac{2}{s^2-4},$$

即
$$Y(s)=\frac{20}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{y'(0)}{s^2+1}$$

$$=\frac{20}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)+\frac{y'(0)}{s^2+1},$$

从而

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{20}{3}\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t+y'(0)\sin t.$$

为了确定 $y'(0)$，将条件 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ 代入上式可得 $y'(0)=-\frac{17}{3}$. 所以方程的解为

$$y(t)=\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t.$$

2、求下列变系数微分方程的解：

(1) $ty''+y'+4ty=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=0$;

(2) $ty''+2y'+ty=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=c_0$, (c_0为常数);

(3) $ty''+2(t-1)y'+(t-2)y=0$, $y(0)=2$;

(4) $ty''+(t-1)y'-y=0$, $y(0)=5$, $y'(+\infty)=0$;

(5) $ty''+(1-n)y'+y=0$, $y(0)=y'(0)=0$, $(n\geqslant 0)$;

(6) $ty''+(1-n-t)y'+ny=t-1$, $(n=2,3,\cdots)$, $y(0)=0$.

解 本题不仅要用到线性性质，(象原函数的)微分性质，还要用到象函数的微分性质：$\mathscr{L}[ty(t)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}[y(t)]$. 其他说明均同于上题.

(1) 方程两边取 Laplace 变换，有

$$\mathscr{L}[ty''+y'+4ty]=0,$$

即
$$\mathscr{L}[ty'']+\mathscr{L}[y']+4\mathscr{L}[ty]=0,$$

亦即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+\{sY(s)-y(0)\}-4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)=0.$$

从而
$$(s^2+4)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}+sY(s)=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y}+\frac{s\mathrm{d}s}{s^2+4}=0.$$

两边积分可得

$$\ln Y+\frac{1}{2}\ln(s^2+4)=c_1 \quad 或 \quad Y(s)=\frac{c}{\sqrt{s^2+4}}.$$

取其逆变换，有(见附录Ⅱ公式(74))

$$y(t)=cJ_0(2t).$$

欲求 c，可由条件 $y(0)=3$ 得到，即 $y(0)=cJ_0(0)=c=3$，所以方程的解为

$$y(t)=3J_0(2t).$$

其中 $J_0(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ 称为零阶第一类 Bessel 函数.

(2) 方程两边取 Laplace 变换，有

$$\mathscr{L}[ty'']+2\mathscr{L}[y']+\mathscr{L}[ty]=0,$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+2\{sY(s)-y(0)\}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(t)=0.$$

整理化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)=-\frac{1}{s^2+1},$$

两边积分可得

$$Y(s)=-\arctan s+c.$$

欲求待定常数 c，可利用 $\lim\limits_{s\to\infty}Y(s)=0$，所以 $c=\frac{\pi}{2}$，即

$$Y(s)=\frac{\pi}{2}-\arctan s=\arctan\frac{1}{s},$$

从而方程的解为(见附录 Ⅱ 中公式(58))

$$y(t)=\frac{\sin t}{t}.$$

(3) 同上述方法，有

$$\mathscr{L}[ty'']+2\mathscr{L}[(t-1)y']+\mathscr{L}[(t-2)y]=0,$$

即 $$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{sY(s)-y(0)\}-$$

$$2\{sY(s)-y(0)\}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)-2Y(s)=0.$$

整理化简后可得

$$(s^2+2s+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)+4(s+1)Y(s)=6,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)+\frac{4}{s+1}Y(s)=\frac{6}{(s+1)^2}.$$

这是一阶线性非齐次微分方程,这里,

$$P(s)=\frac{4}{s+1},\quad Q(s)=\frac{6}{(s+1)^2}$$

所以

$$\begin{aligned}Y(s)&=\mathrm{e}^{-\int P(s)\mathrm{d}s}\left[\int Q(s)\mathrm{e}^{\int P(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}s+c\right]\\&=\frac{1}{(s+1)^4}\left[\int 6(s+1)^2\mathrm{d}s+c\right]\\&=\frac{2}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^4}.\end{aligned}$$

从而方程的解为

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=2\mathrm{e}^{-t}+\frac{c}{3!}t^3\mathrm{e}^{-t}\\&=(2+c_1t^3)\mathrm{e}^{-t},(c_1\text{为任意常数}).\end{aligned}$$

(4) 同上述方法,有

$$\mathscr{L}[ty'']+\mathscr{L}[(t-1)y']-\mathscr{L}[y]=0,$$

即 $$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}-$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{sY(s)-y(0)\}-[sY(s)-y(0)]-Y(s)=0.$$

整理化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)+\frac{3s+2}{s^2+s}Y(s)=\frac{10}{s^2+s}.$$

这是一阶线性非齐次微分方程.这里

$$P(s)=\frac{3s+2}{s^2+s},\quad Q(s)=\frac{10}{s^2+s},$$

所以

$$Y(s) = e^{-\int P(s)ds}\left[\int Q(s)e^{\int P(s)ds}ds + c\right]$$
$$= \frac{1}{s^2(s+1)}\left[\int \frac{10}{s(s+1)} \cdot s^2(s+1)ds + c\right]$$
$$= \frac{1}{s^2(s+1)}[5s^2 + c]$$
$$= \frac{5}{s+1} + \frac{c}{s^2(s+1)}$$
$$= \frac{5}{s+1} - \frac{c}{s} + \frac{c}{s^2} + \frac{c}{s+1},$$

所以

$$y(t) = 5e^{-t} - c + ct + ce^{-t}.$$

为了确定 c,由条件 $y'(+\infty)=0$ 可知

$$y'(t) = -5e^{-t} + c - ce^{-t}.$$

当 $t \to +\infty$ 时,$0=c$,从而方程的解为

$$y(t) = 5e^{-t}.$$

(5) 同上述方法,有

$$\mathscr{L}[ty''] + (1-n)\mathscr{L}[y'] - \mathscr{L}[y] = 0,$$

即
$$-\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} +$$
$$(1-n)[sY(s) - y(0)] - Y(s) = 0.$$

整理化简后可得

$$\frac{dY(s)}{Y(s)} = \frac{1-(n+1)s}{s^2}ds,$$

两边积分,可得

$$\ln\frac{Y(s)}{cs^{-(n+1)}} = -\frac{1}{s},$$

即

$$Y(s) = cs^{-(n+1)}e^{-\frac{1}{s}} = \frac{c}{s^{n+1}}e^{-\frac{1}{s}}.$$

从而方程的解为(见附录Ⅱ公式(84))

$$y(t)=ct^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t}),(c \text{ 为任意常数}),$$

其中 J_n 为 n 阶第一类 Bessel 函数.

(6) 同上述方法,有

$$\mathscr{L}[ty'']+(1-n)\mathscr{L}[y']-\mathscr{L}[ty']+n\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[t-1],$$

即 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+(1-n)[sY(s)-y(0)]+$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{sY(s)-y(0)\}+nY(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s},$$

整理化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)+\frac{n+1}{s}Y(s)=\frac{1}{s^3}.$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程.这里

$$P(s)=\frac{n+1}{s},\quad Q(s)=\frac{1}{s^3},$$

所以

$$\begin{aligned}Y(s)&=\mathrm{e}^{-\int P(s)\mathrm{d}s}\left[\int Q(s)\mathrm{e}^{\int P(s)\mathrm{d}s}+c\right]\\&=\frac{1}{s^{n+1}}\left[\int\frac{1}{s^3}s^{n+1}\mathrm{d}s+c\right]\\&=\frac{1}{s^{n+1}}\left[\frac{1}{n-1}s^{n-1}+c\right]\\&=\frac{1}{(n-1)s^2}+\frac{c}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

从而方程的解为

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{t}{n-1}+\frac{c}{n!}t^n\\&=\frac{t}{n-1}+c_1t^n,\quad (c_1\text{ 为任意常数}).\end{aligned}$$

3. 求下列积分方程的解:

(1) $y(t)=at+\int_0^t\sin(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau$;

(2) $y(t)=\mathrm{e}^{-t}-\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$;

(3) $\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=16\sin 4t$;

(4) $y(t)+\int_0^t y(t-\tau)\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau=2t-3$;

(5) $\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=t^2\mathrm{e}^{-t}$;

(6) $y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$.

解 本题中各小题的求解，主要是利用 Laplace 变换的卷积定理，其他说明均同前两大题.

(1) 显然，原方程可写为

$$y(t)=at+y(t)*\sin t,$$

两边取 Laplace 变换，并利用卷积定理，有

$$Y(s)=\frac{a}{s^2}+Y(s)\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

所以

$$Y(s)=\frac{a(s^2+1)}{s^4}=a\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right).$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=a\left(t+\frac{t^3}{6}\right).$$

(2) 原方程可写为

$$y(t)=\mathrm{e}^{-t}-1*y(t).$$

两边取 Laplace 变换，并利用卷积定理，有

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\cdot Y(s),$$

所以

$$Y(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2},$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}.$$

(3) 原方程可写为

$$y(t)*y(t)=16\sin 4t,$$

两边取 Laplace 变换，并利用卷积定理，有

$$[Y(s)]^2=\frac{64}{s^2+16},$$

即

$$Y(s)=\frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}},$$

取其 Laplace 逆变换，有(见附录Ⅱ中公式(74))

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\pm 8J_0(4t),$$

即表明 $y(t)=8J_0(4t)$ 及 $y(t)=-8J_0(4t)$ 均为所求. 这里, J_0 为零阶第一类 Bessel 函数.

(4) 原方程可写为

$$y(t)+y(t)*e^t=2t-3,$$

两边取 Laplace 变换，并利用卷积定理，有

$$Y(s)+Y(s)\frac{1}{s-1}=\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s},$$

所以

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{2(s-1)}{s^3}-\frac{3(s-1)}{s^2}\\&=-\frac{3}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s^3},\end{aligned}$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=-3+5t-t^2.$$

(5) 原方程可写为

$$y(t)*y(t)=t^2e^{-t},$$

两边取 Laplace 变换，并利用卷积定理，有

$$[Y(s)]^2 = \frac{2}{(s+1)^3},$$

所以
$$Y(s) = \frac{\pm 2}{(s+1)\sqrt{s+1}},$$

从而方程的解为(见附录Ⅱ中公式(47))

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \pm 2\left(2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-t}\right) = \pm 4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-t},$$

即 $y(t) = 4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-t}$ 及 $y(t) = -4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-t}$ 均为所求.

(6) 原方程可写为

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + y(t) * y(t),$$

两边取 Laplace 变换,并利用卷积定理,有

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} + [Y(s)]^2,$$

即

$$[Y(s)]^2 - Y(s) + \frac{1}{s^2+4} = 0.$$

从而解得

$$Y(s) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{s^2+4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}.$$

即
$$Y(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right),$$

或
$$Y(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}} - 2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right).$$

因此,方程的解为(见附录Ⅱ公式(83))

$$y(t) = J_1(2t) \quad 及 \quad y(t) = \delta(t) - J_1(2t)$$

均为所求．这里，J_1 为一阶第一类 Bessel 函数．

4．求下列微分积分方程的解：

(1) $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau = y'(t)$，$y(0)=1$；

(2) $y'(t)+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = 1$；

(3) $y'(t)+2y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t-b)$，$y(0)=-2$；

(4) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = 10\mathrm{e}^{-3t}$，$y(0)=0$；

(5) $y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}t^3$，$y(0)=0$；

(6) $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau = 2[u(t-1)-u(t-2)]$，$y(0)=1$．

解　本题中各小题的求解，既要利用微分性质，又要利用积分性质或卷积定理，才能将微分积分方程转化为象函数的代数方程．其他说明均与前同．

(1) 原方程可写为

$$y(t)*\cos t = y'(t),$$

两边取 Laplace 变换，

$$Y(s)\frac{s}{s^2+1} = sY(s)-1,$$

即

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^3},$$

从而方程的解为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1+\frac{1}{2}t^2.$$

(2) 利用微分性质和积分性质，对方程两边取 Laplace 变换，有

$$sY(s)-y(0)+\frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s},$$

即 $$Y(s)=\frac{1-sy(0)}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}-y(0)\frac{s}{s^2+1},$$

取其逆变换可得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\sin t-y(0)\cos t.$$

当 $t=0$ 时,有 $y(0)=-y(0)$,所以 $2y(0)=0$,即 $y(0)=0$. 因此,方程的解为

$$y(t)=\sin t.$$

注 如利用积分性质,有 $\mathscr{L}\left[\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$;而利用卷积定理有 $\mathscr{L}\left[\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\mathscr{L}[1*y(t)]=\frac{1}{s}F(s)$,结果相同.

(3) 利用微分性质与积分性质,对方程两边取 Laplace 变换,有

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)+\frac{2}{s}Y(s)=\frac{1}{s}e^{-sb},$$

即 $$Y(s)=\frac{e^{-sb}-2s}{(s+1)^2+1}=\frac{e^{-sb}}{(s+1)^2+1}-\frac{2s}{(s+1)^2+1}$$

$$=\frac{e^{-sb}}{(s+1)^2+1}-2\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\right].$$

利用延迟性质,方程的解为

$$y(t)=e^{-(t-b)}\sin(t-b)u(t-b)-2e^{-t}(\cos t-\sin t).$$

(4) 利用微分性质与积分性质,对方程两边取 Laplace 变换,有

$$sY(s)+3Y(s)+\frac{2}{s}Y(s)=\frac{10}{s+3},$$

即

$$Y(s)=\frac{10s}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{-5}{s+1}+\frac{20}{s+2}+\frac{-15}{s+3},$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=5(-e^{-t}+4e^{-2t}-3e^{-3t}).$$

(5) 同上述方法,有

$$sY(s)-4Y(s)+\frac{4}{s}Y(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3!}{s^4},$$

即
$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{2}{s^3(s-2)^2}\\&=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^3}-\frac{3}{8}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s-2)^2},\end{aligned}$$

从而方程的解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{8}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{2t}.$$

(6) 同上述方法，有

$$sY(s)-1+3Y(s)+\frac{2}{s}Y(s)=2\left(\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}\right),$$

即
$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{2(\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s})+s}{(s+1)(s+2)}\\&=\frac{2\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)(s+2)}-\frac{2\mathrm{e}^{-2s}}{(s+1)(s+2)}+\frac{s}{(s+1)(s+2)}\\&=\left(\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-s}-\left(\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-2s}+\left(\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}\right).\end{aligned}$$

利用延迟性质，方程的解为

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]\\&=2(\mathrm{e}^{-(t-1)}-\mathrm{e}^{-2(t-1)})u(t-1)-2(\mathrm{e}^{-(t-2)}-\mathrm{e}^{-2(t-2)})u(t-2)+\\&\quad 2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

5．求下列微分、积分方程组的解：

(1) $\begin{cases}x'+x-y=\mathrm{e}^t;\\ y'+3x-2y=2\mathrm{e}^t,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1;$

(2) $\begin{cases}y'-2z'=f(t);\\ y''-z''+z=0,\end{cases}\quad y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0;$

(3) $\begin{cases}(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0; x(0)=x'(0)=1,\\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0, y(0)=y'(0)=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x''-x+y+z=0; & x(0)=1,\\ x+y''-y+z=0, & y(0)=z(0)=x'(0)\\ x+y+z''-z=0, & =y'(0)=z'(0)=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases} ty+z+tz'=(t-1)\mathrm{e}^{-t}; \\ y'-z=\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$ $\quad y(0)=1, z(0)=-1;$

(6) $\begin{cases} -3y''+3z''=t\mathrm{e}^{-t}-3\cos t; y(0)=-1, \\ ty''-z'=\sin t, \qquad y'(0)=2, z(0)=4, z''(0)=0; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y''+2y+\int_0^t z(\tau)\mathrm{d}\tau=t; \\ y''+2y'+z=\sin 2t, \end{cases}$ $\quad y(0)=1, y'(0)=-1;$

(8) $\begin{cases} x''+2x'+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=0; \\ 4x''-x'+y=\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$ $\quad x(0)=0, x'(0)=-1.$

解　本题的各小题中出现的 x, y, z 均为 t 的函数，即 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$，且假设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s), \mathscr{L}[y(t)]=Y(s), \mathscr{L}[z(t)]=Z(s)$，其他的说明均与前面相同.

(1) 对方程组的两个方程两边分别取 Laplace 变换，有

$$\begin{cases} sX(s)-x(0)+X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}; \\ sY(s)-y(0)+3X(s)-2Y(s)=\dfrac{2}{s-1}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1}; \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}, \end{cases}$$

解之可得

$$X(s)=\frac{1}{s-1}, \quad Y(s)=\frac{1}{s-1}.$$

取其逆变换，可得方程组的解为 $\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^t; \\ y(t)=\mathrm{e}^t. \end{cases}$

(2) 同上述方法，且设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，有

$$\begin{cases} sY(s)-2sZ(s)=F(s); \\ s^2Y(s)-s^2Z(s)+Z(s)=0, \end{cases}$$

解之可得 $Y(s)=\frac{1}{s}F(s)-2\frac{s}{s^2+1}F(s), Z(s)=-\frac{s}{s^2+1}F(s)$,

取其逆变换,可得方程组的解为

$$\begin{cases} y(t)=1*f(t)-2\cos t*f(t)=(1-2\cos t)*f(t); \\ z(t)=-\cos t*f(t). \end{cases}$$

(3) 先将两个方程分别相加减,可得

$$\begin{cases} 2x''+8x-(y''+4y)=0; \\ x'-x+(y'-y)=0. \end{cases}$$

再用上述方法,有

$$\begin{cases} (2s^2+8)X(s)-(s^2+4)Y(s)=2(s+1); \\ (s-1)X(s)-(s-1)Y(s)=1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2X(s)-Y(s)=\frac{2(s+1)}{s^2+4}; \\ X(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}. \end{cases}$$

解之可得

$$\begin{cases} X(s)=\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1}; \\ Y(s)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{s^2+4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1}. \end{cases}$$

取其逆变换,方程组的解为

$$\begin{cases} x(t)=\frac{2}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{1}{3}e^t; \\ y(t)=-\frac{2}{3}\cos 2t-\frac{1}{3}\sin 2t-\frac{2}{3}e^t. \end{cases}$$

(4) 方程组中三个方程两边分别取 Laplace 变换,有

$$\begin{cases} (s^2-1)X(s)+Y(s)+Z(s)=s; \\ X(s)+(s^2-1)Y(s)+Z(s)=0; \\ X(s)+Y(s)+(s^2-1)Z(s)=0. \end{cases}$$

解之可得

$$X(s)=\frac{s^3}{(s^2+1)(s^2-2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{s^2-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

$$Y(s)=Z(s)=\frac{-s}{(s^2+1)(s^2-2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

取其逆变换,可得方程组的解为

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{2}{3}\cosh(\sqrt{2}t)+\dfrac{1}{3}\cos t;\\ y(t)=z(t)=-\dfrac{1}{3}\cosh(\sqrt{2}t)+\dfrac{1}{3}\cos t.\end{cases}$$

(5) 方程组中每个方程两边取 Laplace 变换,有

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)+Z(s)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sZ(s)-z(0)]=\dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{1}{s+1};\\ sY(s)-y(0)-Z(s)=\dfrac{1}{s+1},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}Y'(s)+sZ'(s)=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{(s+1)^2};\\ sY(s)-Z(s)=1+\dfrac{1}{s+1},\end{cases}$$

其中第二个方程关于 s 求导后,两边各乘以 s 再和第一个方程相加,可得

$$(s^2+1)Y'(s)+sY(s)=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Y(s)}{Y(s)}=-\frac{s}{s^2+1}\mathrm{d}s.$$

两边积分后可得

$$Y(s)=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}},$$

将其代入方程组的第二个方程可得

$$Z(s)=\frac{cs}{\sqrt{s^2+1}}-\frac{1}{s+1}-1=-\frac{\sqrt{s^2+1}-cs}{\sqrt{s^2+1}}-\frac{1}{s+1},$$

从而由附录Ⅱ中公式(84),有

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=cJ_0(t)$$

由条件 $y(0)=1$，可得 $c=1$，即 $y(t)=J_0(t)$，此时

$$Z(s)=-\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}-\frac{1}{s+1},$$

从而由附录Ⅱ中公式(85)，有

$$z(t)=\mathscr{L}^{-1}[Z(s)]=-J_1(t)-e^{-t}$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} y(t)=J_0(t); \\ z(t)=-J_1(t)-e^{-t}. \end{cases}$$

(6) 方程组中两个方程两边分别取 Laplace 变换，有

$$\begin{cases} -3(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+3(s^2Z(s)-sz(0)-z'(0))=\dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{3s}{s^2+1}; \\ -\dfrac{d}{ds}\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}-sZ(s)+z(0)=\dfrac{1}{s^2+1}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} Y(s)-Z(s)=-\dfrac{1}{3s^2(s+1)^2}+\dfrac{1}{s(s^2+1)}-\dfrac{5}{s}+\dfrac{2}{s^2}; \\ s^2Y'(s)+2sY(s)+sZ(s)=3-\dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

消去 $Z(s)$ 可得

$$Y'(s)+\frac{3}{s}Y(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{3s^3(s+1)^2}.$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程，这里

$$P(s)=\frac{3}{s},\quad Q(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{3s^3(s+1)^2},$$

从而

$$\begin{aligned} Y(s)&=e^{-\int\frac{3}{s}ds}\left[\int\left(\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{3s^3(s+1)^2}\right)e^{\int\frac{3}{s}ds}ds+c\right] \\ &=\frac{1}{s^3}\left[\int\left(\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-\frac{1}{3s^3(s+1)^2}\right)s^3ds-c\right] \end{aligned}$$

$$=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{3s^3(s+1)}+\frac{c}{s^3}.$$

将 $Y(s)$代入上述方程组中的第一个方程可得

$$Z(s)=\frac{4}{s}+\frac{c}{s^3}+\frac{1}{3s^2(s-1)}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{s(s^2+1)}.$$

进一步化简可得

$$\begin{cases}Y(s)=\dfrac{3c+1}{3}\cdot\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s+1};\\[2ex] Z(s)=\dfrac{3c+1}{3}\cdot\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{s}{s^2+1},\end{cases}$$

取其逆变换可得

$$\begin{cases}y(t)=\dfrac{3c+1}{6}t^2+\dfrac{5}{3}t-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-t};\\[2ex] z(t)=\dfrac{3c+1}{6}t^2+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}te^{-t}+\cos t.\end{cases}$$

由条件 $z''(0)=0$,可得 $c=1$,因此方程组的解为

$$\begin{cases}y(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{5}{3}t-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-t};\\[2ex] z(t)=\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}te^{-t}+\cos t.\end{cases}$$

(7) 方程组中两个方程两边分别取 Laplace 变换,有

$$\begin{cases}s^2Y(s)-s+1+2Y(s)+\dfrac{1}{s}Z(s)=\dfrac{1}{s^2};\\[2ex] s^2Y(s)-s+1+2sY(s)-2+Z(s)=\dfrac{2}{s^2+4},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s^3+2s)Y(s)+Z(s)=\dfrac{1}{s}+s^2-s;\\[2ex] (s^2+2s)Y(s)+Z(s)=\dfrac{2}{s^2+4}+s+1.\end{cases}$$

消去 $Z(s)$可得

$$Y(s)=\frac{1}{s^3(s-1)}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s(s-1)}-\frac{2}{s^2(s-1)(s^2+4)}-\frac{1}{s^2(s-1)}.$$

将 $Y(s)$的结果代入方程组中的第二个方程可得

$$Z(s)=\frac{2}{s^2+4}+s+1-(s^2+2s)Y(s)$$

$$=\frac{2}{s^2-4}+s+1-\frac{s+2}{s^2(s-1)}-\frac{s^2-4}{s-1}+$$

$$\frac{2(s+2)}{s(s-1)(s^2+4)}+\frac{s+2}{s(s-1)}.$$

利用部分分式法可将 $Y(s)$和 $Z(s)$进一步化简为

$$\begin{cases} Y(s)=-\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s^2+4}-\frac{1}{10}\cdot\frac{s}{s^2+4}; \\ Z(s)=\frac{21}{5}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{s^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4}; \end{cases}$$

取其逆变换,可得方程组的解为

$$\begin{cases} y(t)=-\frac{7}{5}e^t+\frac{1}{2}(5+t-t^2)-\frac{1}{20}(\sin 2t+2\cos 2t); \\ z(t)=\frac{21}{5}e^t+2t+\frac{1}{5}(2\sin 2t-\cos 2t). \end{cases}$$

注 本小题也可以通过留数计算法来求解.

(8) 方程组中两个方程的两边分别取 Laplace 变换,有

$$\begin{cases} s^2X(s)+1+2sX(s)+\frac{1}{s}Y(s)=0; \\ 4s^2X(s)+4-sX(s)+Y(s)=\frac{1}{s+1}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s^3+2s^2)X(s)+Y(s)=-s; \\ (4s^2-s)X(s)+Y(s)=\frac{1}{s+1}-4. \end{cases}$$

消去 $Y(s)$,可得

$$(s^3-2s^2+s)X(s)=-s-\frac{1}{s+1}+4,$$

即

$$X(s)=\frac{4}{s(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s(s+1)(s-1)^2}.$$

将 $X(s)$的结果代入上述方程组的第一个方程可得

$$Y(s)=-s-(s^3+2s^2)X(s)$$
$$=-s-\frac{4s(s+2)}{(s-1)^2}+\frac{s^2(s+2)}{(s-1)^2}+\frac{s(s+2)}{(s+1)(s-1)^2}.$$

进一步化简可得

$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{3}{s}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{13}{4}\cdot\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2};\\ Y(s)=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2}-\dfrac{31}{4}\cdot\dfrac{1}{s-1},\end{cases}$$

取逆变换,从而方程组的解为

$$\begin{cases}x(t)=3+\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{13}{4}e^{t}+\dfrac{5}{2}te^{t};\\ y(t)=-\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{15}{2}te^{t}-\dfrac{31}{4}e^{t}.\end{cases}$$

6. 求下列线性偏微分方程的定解问题的解:

(1) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(\text{常数}), \quad (x>0,t>0);\\ u\Big|_{t=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0;\\ u\Big|_{x=0}=0.\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu(h\text{ 为常数}),(x>0,t>0);\\ u\Big|_{x=0}=u_0(\text{常数});\\ u\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y,(0<x,y<+\infty);\\ u\Big|_{y=0}=x^2;\\ u\Big|_{x=0}=3y.\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2u+\varphi(x),(x>0,y>0);\\ u\Big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0;\\ \lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)<+\infty.\end{cases}$$

$$(5)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0,(x>0,t>0);\\ u\Big|_{x=0}=\psi(t),\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0;\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\psi(0)=\varphi(0)=0.\end{cases}$$

$$(6)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},(0<x<l,t>0);\\ u\Big|_{x=0}=0,u\Big|_{x=c}=\varphi(t);\\ u\Big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 本题中的函数 u 为 x,t 或 x,y 的二元函数,即 $u=u(x,t)$或 $u=u(x,y)$.运用 Laplace 变换求解偏微分方程的定解问题,完全类似于偏微分方程的 Fourier 变换解法.但要求变换的自变量在$(0,+\infty)$内变化.因此,这样的定解问题也可能运用 Fourier 正弦变换或 Fourier 余弦变换来求解.但必须注意到各类变换解法对定解条件的要求,以便选择适当的方法.这里,只提出一种方法,即用 Laplace 变换求解偏微分方程的定解问题.

(1) 对该定解问题关于 t 取 Laplace 变换,记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=s^2U(x,s)-su\Big|_{t=0}-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=s^2U,$$

$$\mathscr{L}[g]=\frac{g}{s},$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{L}[u(x,t)]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U,$$

$$\mathscr{L}\left[u\Big|_{x=0}\right]=U\Big|_{x=0}=0.$$

这样,原定解问题转化为含有参数 s 的二阶常系数线性非齐次微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{1}{a^2}s^2U=-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{g}{s};\\ U\Big|_{x=0}=0,\lim\limits_{s\to\infty}U=0^{①}.\end{cases}$$

解此微分方程,可得其通解为

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\frac{s}{a}x}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}+\frac{g}{s^3},$$

由边界条件可得 $c_1=0,c_2=-\dfrac{g}{s^3}$,所以

$$\begin{aligned}U(x,s)&=\frac{g}{s^3}(1-\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x})\\&=\frac{g}{s^3}-\frac{g}{s^3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}s}\end{aligned}$$

设 $F(s)=\dfrac{g}{s^3}$,则 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{g}{s^3}\right]=\dfrac{g}{2}t^2$.再利用延迟性质:$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau)$,有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{g}{s^3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}s}\right]=\frac{g}{2}\left(t-\frac{x}{a}\right)^2u\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

因此该定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{g}{s^3}-\frac{g}{s^3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}s}\right]\\&=\frac{g}{2}t^2-\frac{g}{2}\left(t-\frac{x}{a}\right)^2u\left(t-\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

---

① 由 $U(x,s)=\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 可以看出,$\lim\limits_{s\to\infty}U(x,s)=0$,称此为自然定解条件.

$$(\text{或})=\begin{cases}\dfrac{g}{2}t^2, & t<\dfrac{x}{a};\\ \dfrac{g}{2}t^2-\dfrac{g}{2}\left(t-\dfrac{x}{a}\right)^2, & t>\dfrac{x}{a},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{g}{2}t^2, & t<\dfrac{x}{a};\\ \dfrac{gx}{2a^2}(2at-x), & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

(2) 对该定解问题关于 t 取 Laplace 变换,记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=sU(x,s)-u\Big|_{t=0}=sU,$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{L}[u(x,t)]=\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2},$$

$$\mathscr{L}\left[u\Big|_{x=0}\right]=U\Big|_{x=0}=\frac{u_0}{s}.$$

这样,原定解问题转化为含参数 s 的二阶常系数线性齐次微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{s+h}{a^2}U=0;\\ U\Big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{s},\lim\limits_{x\to\infty}U=0(\text{为自然定解条件}),\end{cases}$$

解此微分方程可得通解为

$$U(x,s)=c_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}$$

由边界条件 $U\Big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{s}$,有 $c_1+c_2=\dfrac{u_0}{s}$;由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}U=0$,得 $c_1=0$.即

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}.$$

从而

$$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}\right]$$

$$(\text{由卷积定理})=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s}\right]*\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}].$$

这里，$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s}\right]=u_0$；为求 $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}]$，先考虑 $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}]$. 根据附录Ⅱ中公式(62)，有

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-a\sqrt{s}}\right]=\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v$$

所以
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}\right]=\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v.$$

如果令 $f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v$，显然，$f(0)=0$，根据微分性质：$\mathcal{L}[f'(t)]=s\mathcal{L}[f(t)]-f(0)$，即

$$f'(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[s\cdot\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}\right],$$

亦即

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s}}]=f'(t)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$
$$=\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

再由位移性质，有

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}\sqrt{s+h}}]=\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}]$$
$$=\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot\mathrm{e}^{-ht}$$
$$=\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{4a^2t}+ht\right)}$$

利用卷积定理,最后可得该定解问题的解为

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{u_0}{s}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s+h}}{a}x}\right]$$

$$=u_0*\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{4a^2t}+ht\right)}$$

$$=\int_0^t\frac{u_0x}{2a\tau\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{4a^2\tau}+h\tau\right)}\mathrm{d}\tau$$

$$\left(令\ v=\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\qquad=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(v^2+\frac{hx^2}{4a^2v^2}\right)}\mathrm{d}v.$$

(3) 根据已给的定解条件及自变量 x,y 的变化范围,可以判定该定解问题关于 x 和关于 y 取 Laplace 变换都能得到结果. 这里将该定解问题关于 y 取 Laplace 变换. 记

$$\mathscr{L}[u(x,y)]=U(x,s),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]=sU-u\Big|_{y=0}=sU-x^2,$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right]=s\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}-2x,$$

$$\mathscr{L}[x^2y]=\frac{x^2}{s^2},$$

$$\mathscr{L}\left[u\Big|_{x=0}\right]=U\Big|_{x=0}=\frac{3}{s^2}.$$

这样,原定解问题转化为含参数 s 的常微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}s\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}-2x=\dfrac{x^2}{s^2};\\ U\Big|_{x=0}=\dfrac{3}{s^2}.\end{cases}$$

显然,该方程的解为

$$U(x,s)=\frac{x^3}{3s^3}+\frac{x^2}{s}+\frac{3}{s^2}.$$

从而原定解问题的解为

$$u(x,y)=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]$$
$$=\frac{x^3y^2}{6}+3y+x^2.$$

(4) 对该定解问题关于 x 取 Laplace 变换. 记

$$\mathscr{L}[u(x,y)]=U(s,y),$$
$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=s^2U-su\Big|_{x=0}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=s^2U;$$
$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y};$$
$$\mathscr{L}[\varphi(x)]=\Phi(s).$$

这样,原定解问题转化为含参数 s 的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}-(s^2+a^2)U=\Phi(s).$$

其通解为

$$U(s,y)=c\mathrm{e}^{(s^2+a^2)y}-\frac{\Phi(s)}{s^2+a^2},$$

由条件 $\lim\limits_{y\to+\infty}u<+\infty$,可得 $c=0$,即

$$U(s,y)=-\frac{\Phi(s)}{s^2+a^2}.$$

取逆变换,并利用卷积定理,则原定解问题的解为

$$u(x,y)=\mathscr{L}^{-1}[U(s,y)]=-\mathscr{L}^{-1}\left[\Phi(s)\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right]$$
$$=-\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\right]$$
$$=-\varphi(x)*\frac{1}{a}\sin ax$$
$$=\frac{1}{a}\int_0^x\varphi(\tau)\sin a(\tau-x)\mathrm{d}\tau.$$

(5) 对该定解问题关于 x 取 Laplace 变换. 记

$$\mathscr{L}[u(x,t)]=U(s,t);$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=s^2U-su\Big|_{x=0}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=s^2U-s\psi(t);$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[sU-\psi(t)];$$

$$\mathscr{L}\left[u\Big|_{t=0}\right]=U\Big|_{t=0}=\mathscr{L}[\varphi(x)]=\Phi(s).$$

这样，原定解问题转化为含参数 s 的一阶线性非齐次微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+sU=\psi(t)+\dfrac{\psi'(t)}{s};\\ U\Big|_{t=0}=\Phi(s).\end{cases}$$

利用常数变易法，其解为

$$U(s,t)=\mathrm{e}^{-st}\left[\int_0^t\left(\psi(\tau)+\frac{\psi'(\tau)}{s}\right)\mathrm{e}^{s\tau}\mathrm{d}\tau+\Phi(s)\right],$$

其中

$$\int_0^t\frac{\psi'(\tau)}{s}\mathrm{e}^{s\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{s}\int_0^t\mathrm{e}^{s\tau}\mathrm{d}\psi(\tau)$$

$$\text{(用分部积分)}\quad=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{s\tau}\psi(\tau)\Big|_0^t-\frac{1}{s}\int_0^t\psi(\tau)\cdot s\mathrm{e}^{s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{st}\psi(t)-\int_0^t\psi(\tau)\mathrm{e}^{s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

所以

$$U(s,t)=\mathrm{e}^{-st}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{st}\psi(t)+\Phi(s)\right]=\frac{\psi(t)}{s}+\Phi(s)\mathrm{e}^{-st}$$

从而利用延迟性质，原定解问题的解为

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[U(s,t)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\psi(t)}{s}\right]+\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)\mathrm{e}^{-st}]$$

$$=\psi(t)+\varphi(x-t)u(x-t)$$

$$\text{或}=\begin{cases}\psi(t),x-t<0;\\ \psi(t)+\varphi(x-t),x-t>0.\end{cases}$$

(6) 对该定解问题关于 t 取 Laplace 变换. 记

$$\mathscr{L}[u(x,t)] = U(x,s);$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = s^2 U - su\Big|_{t=0} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = s^2 U;$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2};$$

$$\mathscr{L}\left[u\Big|_{x=0}\right] = U\Big|_{x=0} = 0;$$

$$\mathscr{L}\left[u\Big|_{x=l}\right] = U\Big|_{x=l} = \Phi(s).$$

这样,原定解问题转化为含参数 s 的二阶线性齐次微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{s^2}{a^2} U = 0; \\ U\Big|_{x=0} = 0, U\Big|_{x=l} = \Phi(s). \end{cases}$$

该方程的通解为

$$U(x,s) = c_1 \mathrm{e}^{\frac{s}{a}x} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x},$$

由条件 $U\Big|_{x=0} = 0$,可得 $c_1 + c_2 = 0$,即 $c_1 = -c_2$;由条件 $U\Big|_{x=l} = \Phi(s)$,可得

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= c_1 \mathrm{e}^{\frac{s}{a}l} + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}l} \\ &= c_1(\mathrm{e}^{\frac{s}{a}l} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}l}),\end{aligned}$$

即

$$c_1 = -c_2 = \frac{\Phi(s)}{\mathrm{e}^{\frac{s}{a}l} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}l}}.$$

从而

$$U(x,s) = \Phi(s)\frac{\mathrm{e}^{\frac{s}{a}x} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}}{\mathrm{e}^{\frac{s}{a}l} - \mathrm{e}^{-\frac{s}{a}l}}$$

$$= \Phi(s)\frac{(e^{\frac{s}{a}x}-e^{-\frac{s}{a}x})(e^{-\frac{s}{a}l}+e^{-\frac{3s}{a}l})}{(e^{\frac{s}{a}l}-e^{-\frac{s}{a}l})(e^{-\frac{s}{a}l}+e^{-\frac{3s}{a}l})}$$

$$= \Phi(s)\left\{\frac{e^{-\frac{s}{a}(l-x)}-e^{-\frac{s}{a}(l+x)}}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}+\frac{e^{-\frac{s}{a}(3l-x)}-e^{-\frac{s}{a}(3l+x)}}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}\right\}.$$

为了求 $U(x,s)$的 Laplace 逆变换，注意到分母为 $1-e^{-\frac{4l}{a}s}$，所以逆变换 $u(x,t)$是周期为$\frac{4l}{a}$的关于 t 的周期函数. 根据周期函数的 Laplace 变换式，其中

$$\frac{\Phi(s)}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}$$

表明 $\varphi(t)$是以$\frac{4l}{a}$为周期的周期函数，即

$$\mathscr{L}[\varphi(t)]=\frac{\Phi(s)}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}=\frac{1}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}\int_0^{\frac{4l}{a}}\varphi(\tau)e^{-s\tau}d\tau,$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}\right]=\varphi(t).$$

再由延迟性质，有

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{1-e^{-\frac{4l}{a}s}}\cdot e^{-\frac{l-x}{a}s}\right]=\varphi\left(t-\frac{l-x}{a}\right)u\left(t-\frac{l-x}{a}\right).$$

其他各项依同理可得. 因此，原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]\\&=\varphi\left(t-\frac{l-x}{a}\right)u\left(t-\frac{l-x}{a}\right)-\varphi\left(t-\frac{l+x}{a}\right)\\&\quad u\left(t-\frac{l+x}{a}\right)+\varphi\left(t-\frac{3l-x}{a}\right)u\left(t-\frac{3l-x}{a}\right)-\\&\quad \varphi\left(t-\frac{3l+x}{a}\right)u\left(t-\frac{3l+x}{a}\right),\end{aligned}$$

其中 $u(\alpha)$为单位阶跃函数，即 $u(\alpha)=\begin{cases}0, & \alpha<0;\\ 1, & \alpha>0.\end{cases}$

7. 设在原点处质量为 m 的一质点在 $t=0$ 时在 x 方向上受到冲击力 $k\delta(t)$ 的作用,其中 k 为常数,假定质点的初速度为零,求其运动规律.

解 由题意知,在 t 时刻质点 m 处于 x 轴正向的点 $x(t)$ 处,其运动速度为 $x'(t)$,而加速度为 $x''(t)$,且有初始条件 $x(0)=x'(0)=0$. 根据 Newton 定律,该质点的运动规律归结为下述微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} mx''(t)=k\delta(t); \\ x(0)=x'(0)=0. \end{cases}$$

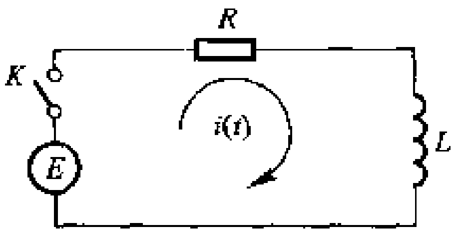
方程两边取 Laplace 变换,且记 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$,则

$$ms^2X(s)=k,$$

即 $X(s)=\dfrac{k}{ms^2}$,从而方程的解(即质点的运动规律)为

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\frac{k}{m}t.$$

8. 设有如图所示的 RL 串联电路,在 $t=t_0$ 时,将电路接上直流电源 E,求电路中的电流 $i(t)$.



(第 8 题)

解 根据回路电压定律,有

$$U_R+U_L=E,$$

其中

$$U_R=Ri(t), \quad U_L=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t).$$

由题意知，在 $t=t_0$ 时，电路接上直流电源 E，且 $i(t)\Big|_{t=t_0}=i(t_0)=0$. 所以，有

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+Ri(t)=Eu(t-t_0); \\ i(t_0)=0. \end{cases}$$

方程两边取 Laplace 变换，记 $\mathscr{L}[i(t)]=I(s)$，则

$$LsI(s)+RI(s)=E\,\frac{1}{s}e^{-t_0 s},$$

从而

$$I(s)=\frac{E}{Ls\left(s+\dfrac{R}{L}\right)}e^{-t_0 s}$$

$$=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\dfrac{R}{L}}\right)e^{-t_0 s}.$$

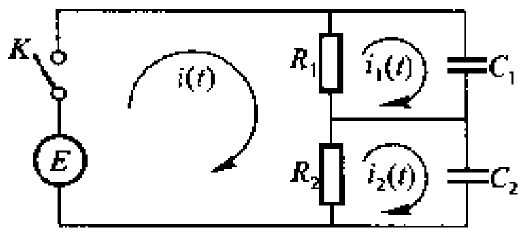
取其逆变换，并利用延迟性质，有

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\{I(s)\}=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)})u(t-t_0),$$

即

$$i(t)=\frac{E}{R}[1-e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}],\quad (t>t_0).$$

9. 如图所示的电路，在 $t=0$ 时接入直流电源 E，求回路中电流 $i(t)$.



解 由图所示，利用回路电流法建立如下方程：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c_1}\displaystyle\int_0^t i_1(t)\mathrm{d}t + R_1(i_1(t) - i(t)) = 0;\\ \dfrac{1}{c_2}\displaystyle\int_0^t i_2(t)\mathrm{d}t + R_2(i_2(t) - i(t)) = 0;\\ R_1(i(t) - i_1(t)) + R_2(i(t) - i_2(t)) = E,\end{cases}$$

且 $i(t)\Big|_{t=0} = i(0) = 0$.

对上述方程组中三个方程两边分别取 Laplace 变换，且记 $\mathscr{L}[i(t)] = I(s)$，$\mathscr{L}[i_1(t)] = I_1(s)$，$\mathscr{L}[i_2(t)] = I_2(s)$. 则有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{c_1 s} + R_1\right)I_1(s) = R_1 I(s);\\ \left(\dfrac{1}{c_2 s} + R_2\right)I_2(s) = R_2 I(s);\\ (R_1 + R_2)I(s) - R_1 I_1(s) - R_2 I_2(s) = \dfrac{E}{s}.\end{cases}$$

由前两个方程分别可得

$$I_1(s) = \frac{c_1 R_1 s}{1 + c_1 R_1 s}I(s),$$

$$I_2(s) = \frac{c_2 R_2 s}{1 + c_2 R_2 s}I(s).$$

将它们代入上述方程组中的第三个方程可得

$$\begin{aligned}I(s) &= \frac{E(1 + c_1 R_1 s)(1 + c_2 R_2 s)}{s[(R_1 + R_2) + R_1 R_2(c_1 + c_2)s]}\\ &= \frac{E[R_1 R_2 c_1 c_2 s^2 + (R_1 c_1 + R_2 c_2)s + 1]}{s[(R_1 + R_2) + R_1 R_2(c_1 + c_2)s]}\\ &= \frac{Ec_1 c_2}{c_1 + c_2} + \frac{E}{R_1 + R_2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{E(R_1 c_1 - R_2 c_2)^2}{R_1 R_2(R_1 + R_2)(c_1 + c_2)^2}\cdot\\ &\quad \frac{1}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{(c_1 + c_2)R_1 R_2}}.\end{aligned}$$

从而取其逆变换可得回路中电流 $i(t)$ 的结果：

$$i(t)=E\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}\delta(t)+\frac{E}{R_1+R_2}+\frac{E(R_1c_1-R_2c_2)^2}{R_1R_2(R_1+R_2)(c_1+c_2)^2}$$

$$e^{-\frac{R_1+R_2}{(c_1+c_2)R_1R_2}t}=E\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}\delta(t)+\frac{E}{R_1+R_2}$$

$$\left[1+\frac{(R_1c_1-R_2c_2)^2}{(c_1+c_2)^2R_1R_2}e^{-\frac{R_1-R_2}{(c_1+c_2)R_1R_2}t}\right].$$

10. 某系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$，求当激励 $x(t)=A\sin\omega t$ 时的系统响应 $y(t)$.

解 由 $x(t)=A\sin\omega t$，有 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]=\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$，设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，则有

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{K}{1+Ts}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{KA\omega}{T\left(s+\frac{1}{T}\right)(s+j\omega)(s-j\omega)}=\frac{KA\omega}{T}\left[\frac{T^2}{1+T^2\omega^2}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{1}{s+\frac{1}{T}}-\frac{1}{2\omega\left(\omega+j\frac{1}{T}\right)}\cdot\frac{1}{s+j\omega}-\frac{1}{2\omega\left(\omega-j\frac{1}{T}\right)}\cdot\frac{1}{s-j\omega}\right],$$

取其逆变换可得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{KA\omega T}{1+T^2\omega^2}e^{-\frac{t}{T}}-\frac{KA}{2(\omega T+j)}e^{-j\omega t}-\frac{KA}{2(\omega T-j)}e^{j\omega t}.$$

考虑到求系统的响应 $y(t)$是在稳态情况下的数值，即当 $t\to\infty$时的数值，故

$$y(t)=-\frac{KA}{2}\cdot\frac{\omega T-j}{1+\omega^2T^2}e^{-j\omega t}-\frac{KA}{2}\cdot\frac{\omega T+j}{1+\omega^2T^2}e^{j\omega t}$$

$$=-\frac{KA\omega T}{1+\omega^2T^2}\cdot\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}-\frac{KAj^2}{1+\omega^2T^2}\cdot\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

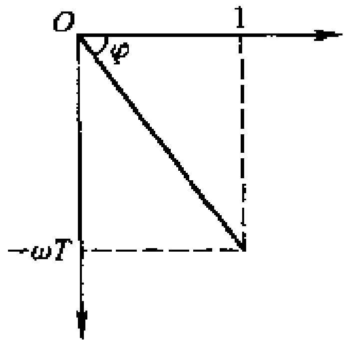
$$=-\frac{KA\omega T}{1+\omega^2T^2}\cos\omega t+\frac{KA}{1+\omega^2T^2}\sin\omega t$$

$$=\frac{KA}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin\ \omega t+\frac{-\omega T}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\cos\ \omega t\right).$$

$$(\text{见下图})=\frac{KA}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}(\cos\ \varphi\sin\ \omega t+\sin\ \varphi\cos\ \omega t)$$

$$=\frac{KA}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin(\omega t+\varphi)(\text{其中 }\varphi=-\arctan\ \omega T)$$

$$=\frac{KA}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin(\omega t-\arctan\ \omega T).$$



11. 某系统的激励 $x(t)=\sin\ t$，当系统的响应 $y(t)=e^{-t}-\cos\ t+\sin\ t$时，求

(1) 系统的传递函数 $G(s)$；

(2) 系统的脉冲响应函数 $g(t)$；

(3) 系统的频率响应函数 $G(j\omega)$.

解 (1) 由传递函数的定义知

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\mathscr{L}[y(t)]}{\mathscr{L}[x(t)]}$$

$$=\frac{\frac{1}{s+1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}}{\frac{1}{s^2+1}}=\frac{2}{s+1}.$$

(2) 由脉冲响应函数的定义知

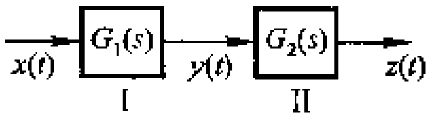
$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]=2e^{-t}.$$

(3) 当系统的传递函数 $G(s)$中 s 取 $j\omega$ 时，则得到系统的频

率响应函数，即

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{2}{s+1}\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}=\frac{2(1-\mathrm{j}\omega)}{1+\omega^2}.$$

12. 设系统Ⅰ和系统Ⅱ串联，它们分别具有传递函数 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$，而系统Ⅰ的响应 $y(t)$ 为系统Ⅱ的激励. 已知 $G_1(s)=\mathrm{e}^{-s}$，$y(t)=\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)$，求该串联系统的响应 $z(t)=(t-2)^2y(t)$ 时的串联系统的激励 $x(t)$.



解　设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$，$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$ 及 $\mathscr{L}[z(t)]=Z(s)$. 从而

$$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$(\text{令 } t-2=\tau)=\int_{-2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}u(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+2)}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-2s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\cdot\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-2s}.$$

$$\mathscr{L}[z(t)]=Z(s)=\int_0^{+\infty}(t-2)^2\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$(\text{令 } t-2=\tau)=\int_{-2}^{+\infty}\tau^2\mathrm{e}^{-\tau}u(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+2)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-2s}\int_0^{+\infty}\tau^2\mathrm{e}^{-\tau}\cdot\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{2}{(s+1)^3}\mathrm{e}^{-2s}.$$

对于系统Ⅱ，有

$$G_2(s)=\frac{Z(s)}{Y(s)}=\frac{\dfrac{2}{(s+1)^3}\mathrm{e}^{-2s}}{\dfrac{1}{s+1}\mathrm{e}^{-2s}}=\frac{2}{(s+1)^2}.$$

由题意(见图示),有

$$Z(s)=G_2(s)Y(s)=G_2(s)G_1(s)X(s),$$

从而

$$X(s)=\frac{Z(s)}{G_1(s)G_2(s)}=\frac{\dfrac{2}{(s+1)^3}e^{-2s}}{e^{-s}\cdot\dfrac{2}{(s+1)^2}}=\frac{1}{s+1}e^{-s}.$$

利用延迟性质,该串联系统的激励为

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=e^{-(t-1)}u(t-1).$$

注 从本题可以看出,对于两个子系统构成的串联系统,则该系统的激励 $x(t)$ 与响应 $z(t)$ 之间构成了一个等价的单个系统(如下图所示),它们之间的关系为

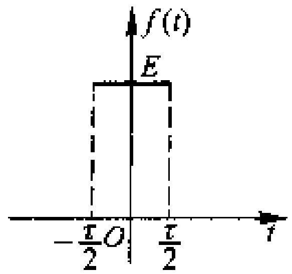
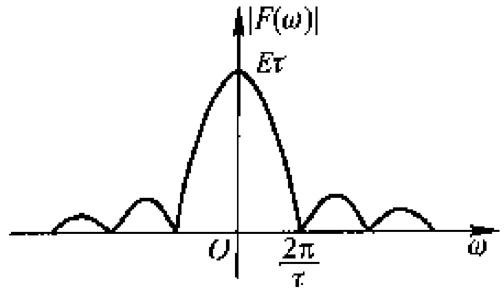
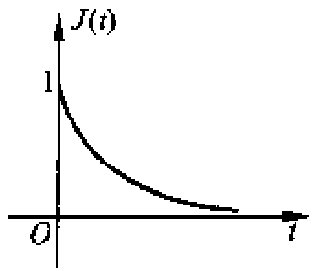
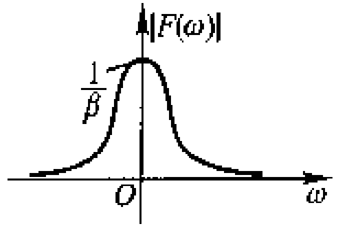
$$Z(s)=G_1(s)G_2(s)X(s).$$

一般地,若有 k 个子系统构成一个串联系统,若第 i 个子系统的传递函数为 $G_i(s)$, $i=1,2,\cdots,k$. 则有

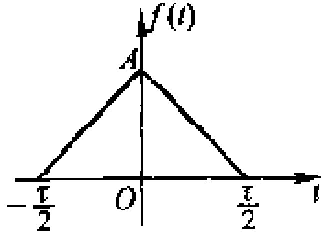
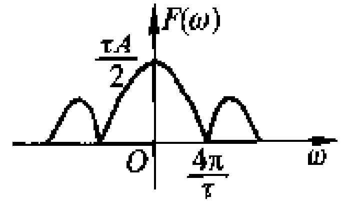
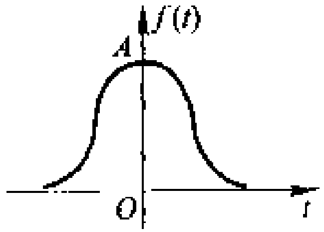
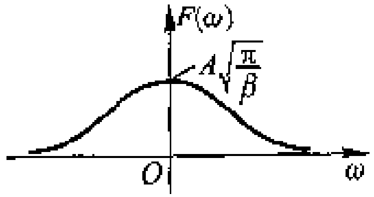
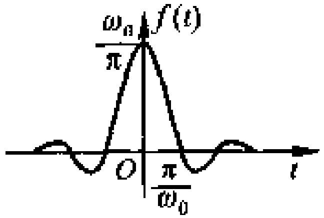
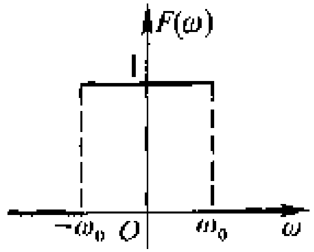
$$Z(s)=G_1(s)G_2(s)\cdots G_k(s)X(s),$$

这里 $x(t)$ 与 $z(t)$ 分别为该串联系统的激励与响应.

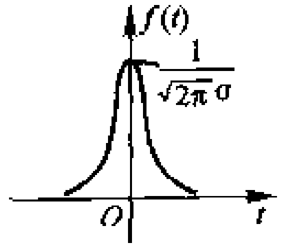
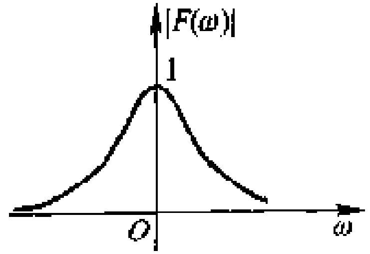
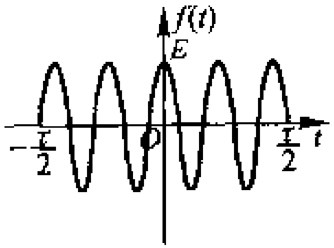
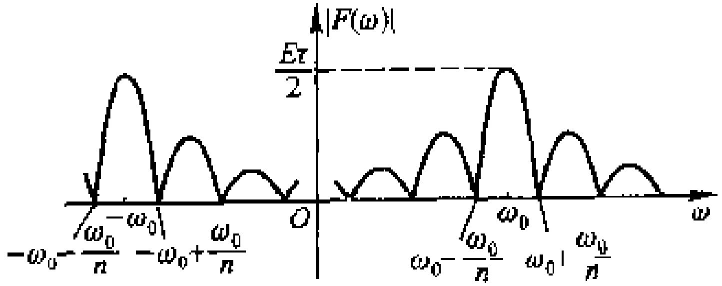
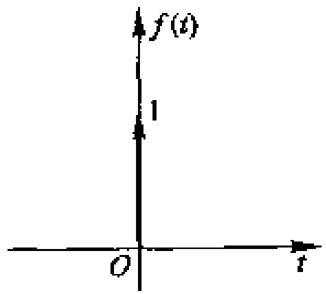
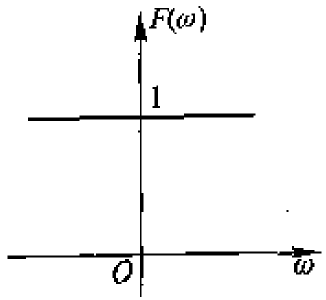
附录 I　Fourier 变换简表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　　数	图　　象	频　　谱	图　　象
1	矩形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, & \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, & 其他\end{cases}$		$2E\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$	
2	指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ $(\beta>0)$		$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$	

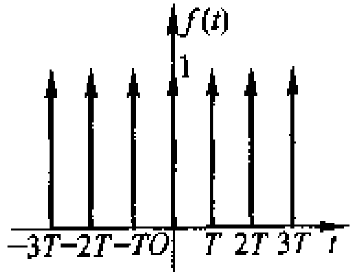
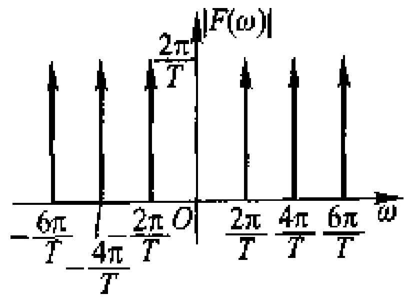
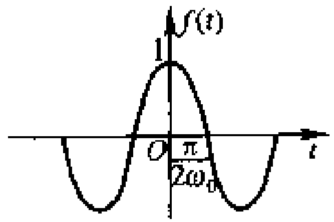
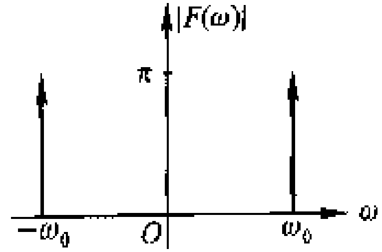
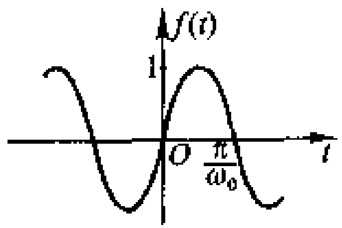
续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　象	频　谱	图　象
3	三角形脉冲 $f(t)=\begin{cases}\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+t\right), & -\frac{\tau}{2}\leqslant t<0;\\ \frac{2A}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-t\right), & 0\leqslant t<\frac{\tau}{2}\end{cases}$		$\frac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
4	钟形脉冲 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}(\beta>0)$		$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$	
5	Fourier核 $f(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$		$F(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert\leqslant\omega_0,\\ 0, & 其他\end{cases}$	

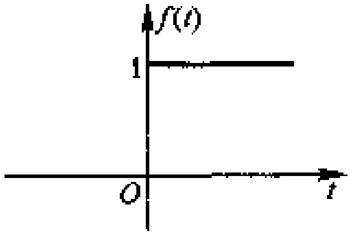
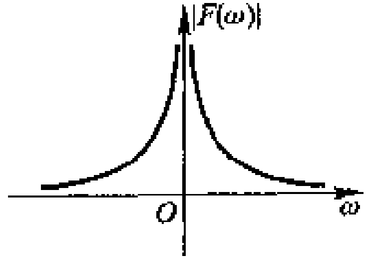
续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　象	频　谱	图　象
6	Gauss 分布函数 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$		$e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	
7	矩形射频脉冲 $f(t)=\begin{cases}E\cos\omega_0 t, & \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, & 其他\end{cases}$		$\frac{E\tau}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}}\right]$	
8	单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)$		1	

续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函数	图象	频谱	图象
9	周期性脉冲函数 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ （T 为脉冲函数的周期）		$\frac{2\pi}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{T}\right)$	
10	$f(t)=\cos\omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
11	$f(t)=\sin\omega_0 t$		$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	同上图

续表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　象	频　谱	图　象
12	单位函数 $f(t)=u(t)$		$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	
	$f(t)$		$F(\omega)$	
13	$u(t-c)$		$\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega c}+\pi\delta(\omega)$	
14	$u(t)\cdot t$		$-\frac{1}{\omega^2}+\pi j\delta'(\omega)$	
15	$u(t)\cdot t^n$		$\frac{n!}{(j\omega)^{n+1}}+\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$	
16	$u(t)\sin at$		$\frac{a}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	
17	$u(t)\cos at$		$\frac{j\omega}{a^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	
18	$u(t)e^{jat}$		$\frac{1}{j(\omega-a)}+\pi\delta(\omega-a)$	
19	$u(t-c)e^{jat}$		$\frac{1}{j(\omega-a)}e^{-j(\omega-a)c}+\pi\delta(\omega-a)$	

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
20	$u(t)e^{jat}t^n$	$\dfrac{n!}{[j(\omega-a)]^{n+1}}+\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-a)$
21	$e^{a\|t\|}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$\dfrac{-2a}{\omega^2+a^2}$
22	$\delta(t-c)$	$e^{-j\omega c}$
23	$\delta'(t)$	$j\omega$
24	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
25	$\delta^{(n)}(t-c)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega c}$
26	1	$2\pi\delta(\omega)$
27	t	$2\pi j\delta'(\omega)$
28	t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
29	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
30	$t^n e^{jat}$	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega-a)$
31	$\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$-\dfrac{\pi}{a}e^{a\|\omega\|}$
32	$\dfrac{t}{(a^2+t^2)^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$	$\dfrac{j\omega\pi}{2a}e^{a\|\omega\|}$
33	$\dfrac{e^{jbt}}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\dfrac{\pi}{a}e^{a\|\omega-b\|}$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
34	$\dfrac{\cos bt}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\dfrac{\pi}{2a}\left[e^{a\vert\omega-b\vert}+e^{a\vert\omega+b\vert}\right]$
35	$\dfrac{\sin bt}{a^2+t^2}$, $\mathrm{Re}(a)<0$, b 为实数	$-\dfrac{\pi}{2aj}\left[e^{a\vert\omega-b\vert}-e^{a\vert\omega+b\vert}\right]$
36	$\dfrac{\sinh at}{\sinh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$\dfrac{\sin a}{\cosh\omega+\cos a}$
37	$\dfrac{\sinh at}{\cosh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$-2j\dfrac{\sin\dfrac{a}{2}\sinh\dfrac{\omega}{2}}{\cosh\omega+\cos a}$
38	$\dfrac{\cosh at}{\cosh \pi t}$, $-\pi<a<\pi$	$2\dfrac{\cos\dfrac{a}{2}\cosh\dfrac{\omega}{2}}{\cosh\omega+\cos a}$
39	$\dfrac{1}{\cosh at}$	$\dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\cosh\dfrac{\pi\omega}{2a}}$
40	$\sin at^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
41	$\cos at^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
42	$\dfrac{1}{t}\sin at$	$\begin{cases}\pi, & \vert\omega\vert\leqslant a\\ 0, & \vert\omega\vert>a\end{cases}$

续表

	$f(t)$	$F(\omega)$
43	$\frac{1}{t^2}\sin^2 at$	$\begin{cases}\pi\left(a-\frac{\lvert\omega\rvert}{2}\right), & \lvert\omega\rvert\leqslant 2a\\ 0, & \lvert\omega\rvert>2a\end{cases}$
44	$\frac{\sin at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\mathrm{j}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}-\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
45	$\frac{\cos at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}+\frac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
46	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
47	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
48	e^{at^2}, $\mathrm{Re}(a)>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
49	$\lvert t\rvert$	$-\frac{2}{\omega^2}$
50	$\frac{1}{\lvert t\rvert}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\lvert\omega\rvert}$

附录II　Laplace变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	$t^m\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$
4	$t^m e^{at}\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11	$t\sinh at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
12	$t\cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
13	$t^m\sin at\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2j(s^2+a^2)^{m+1}}\cdot[(s+ja)^{m+1}-(s-ja)^{m+1}]$
14	$t^m\cos at\ (m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{2(s^2+a^2)^{m+1}}\cdot[(s+ja)^{m+1}+(s-ja)^{m+1}]$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
15	$e^{-bt}\sin at$	$\dfrac{a}{(s+b)^2+a^2}$
16	$e^{-bt}\cos at$	$\dfrac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
17	$e^{-bt}\sin(at+c)$	$\dfrac{(s+b)\sin c+a\cos c}{(s+b)^2+a^2}$
18	$\sin^2 t$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+4}\right)$
19	$\cos^2 t$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4}\right)$
20	$\sin at\sin bt$	$\dfrac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$
21	$e^{at}-e^{bt}$	$\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
22	$ae^{at}-be^{bt}$	$\dfrac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
23	$\dfrac{1}{a}\sin at-\dfrac{1}{b}\sin bt$	$\dfrac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
24	$\cos at-\cos bt$	$\dfrac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
25	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$
26	$\dfrac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
27	$\dfrac{1}{a^4}(\cos at-1)+\dfrac{1}{2a^2}t^2$	$\dfrac{1}{s^3(s^2+a^2)}$
28	$\dfrac{1}{a^4}(\cosh at-1)-\dfrac{1}{2a^2}t^2$	$\dfrac{1}{s^3(s^2-a^2)}$
29	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$
30	$\dfrac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
31	$\dfrac{1}{a^4}(1-\cos at)-\dfrac{1}{2a^3}t\sin at$	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$
32	$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
33	$t\left(1-\dfrac{a}{2}t\right)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^3}$
34	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\dfrac{1}{s(s+a)}$
35①	$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{e^{-bt}}{b}-\dfrac{e^{-at}}{a}\right)$	$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$
36①	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
37①	$\dfrac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
38①	$\dfrac{a^2e^{-at}}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{c^2e^{-ct}}{(b-c)(a-c)}$	$\dfrac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
39①	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}[1-(a-b)t]}{(a-b)^2}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
40①	$\dfrac{[a-b(a-b)t]e^{-bt}-ae^{-at}}{(a-b)^2}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
41	$e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$	$\dfrac{3a^2}{s^3+a^3}$
42	$\sin at\cosh at-\cos at\sinh at$	$\dfrac{4a^3}{s^4+4a^4}$
43	$\dfrac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$
44	$\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$
45	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$
46	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$
47	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
48	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$	$\frac{s}{(s-a)\sqrt{s-a}}$
49	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$	$\sqrt{s-a} \quad \sqrt{s-b}$
50	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
51	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cosh 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
52	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
53	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sinh 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}$
54	$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
55	$\frac{2}{t}\sinh at$	$\ln\frac{s+a}{s-a}=2\operatorname{artanh}\frac{a}{s}$
56	$\frac{2}{t}(1-\cos at)$	$\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$
57	$\frac{2}{t}(1-\cosh at)$	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$
58	$\frac{1}{t}\sin at$	$\arctan\frac{a}{s}$
59	$\frac{1}{t}(\cosh at-\cos bt)$	$\ln\sqrt{\frac{s^2+b^2}{s^2-a^2}}$
60[2]	$\frac{1}{\pi t}\sin(2a\sqrt{t})$	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
61[2]	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
62	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
63	$\operatorname{erf}\left(\frac{t}{2a}\right)$	$\frac{1}{s}e^{a^2s^2}\operatorname{erfc}(as)$
64	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\sqrt{at}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{s}}\right)$

续表

	$f(t)$	$F(s)$
65	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{as}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
66	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$
67	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}e^{at}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$
68	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
69	$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
70	$t^m u(t)\quad(m>-1)$	$\dfrac{1}{s^{m+1}}\Gamma(m+1)$
71	$\delta(t)$	1
72	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
73	$\operatorname{sgn} t$	$\dfrac{1}{s}$
74[②]	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
75[①]	$I_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
76	$J_0(2\sqrt{at})$	$\dfrac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$
77	$e^{-bt}I_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{(s+b)^2-a^2}}$
78	$tJ_0(at)$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
79	$tI_0(at)$	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$
80	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}$
81	$\dfrac{1}{at}J_1(at)$	$\dfrac{1}{s+\sqrt{s^2+a^2}}$
82	$J_1(at)$	$\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right)$