第一章

复数与复变函数

内容提要

一、复数及其代数运算和几何表示

1. **复数的概念**

定义 设 x,y 都是实数,我们把形如 $z=x+iy$ 的表达式称为复数.其中 i 称为虚数单位,且具有性质 $i^2=-1$,x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z).$$

(1)当 $x=0,y\neq0$ 时,$z=iy$ 称为纯虚数.

(2)当 $y=0$ 时,$z=x+0\cdot i$ 视为实数 x.

(3)设 $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$,则 $z_1=z_2$,当且仅当 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$.

(4)当 $x=y=0$ 时,称 $z=0$.

2. **复数的运算**

(1)加(减)法

两个复数的加(减)法,定义为实部与实部相加(减)及虚部与虚部相加(减),即

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

(2)**乘法**

两个复数相乘按多项式乘法法则相乘并注意 $i^2=-1$,**即**

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

(3)**除法**

若 $z_2\neq 0$,**将满足** $z_2\cdot z=z_1$ **的复数** z **定义为** z_1 **除以** z_2 **的商**,

记为 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$,**即**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

(4)**复数的共轭及性质**

设 $z=x+iy$,**称** $x-iy$ **为复数** z **的共轭复数**,**记为** $\bar{z}$ **或** z^*,**即** $\bar{z}=x-iy$,**它有如下性质**:

①$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$;

②$\bar{\bar{z}}=z$, $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

③$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

3. **复数的几种表示方法**

(1)**复数的坐标表示**

每一个复数 $z=x+iy$ **确定平面上一个坐标为**(x,y)**的点**,**反之亦然**,**这意味着复数集与平面上的点之间存在一一对应. 由于这个特殊的一一对应存在**,**我们常把以** x **为实轴**,y **为虚轴的平面称之为复平面.** (x,y)**为复数** $z=x+iy$ **的坐标表示形式**,**称为点** z.

(2)**复数的向量表示**

记复数 $z=x+iy$ **在平面上确定的点为** P,**原点为** O. **设复数** z **对应向量**$\overrightarrow{OP}$. **这也是一个特别的一一对应. 为此我们称向量**$\overrightarrow{OP}$**为复数** z **的向量表示式.**

向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为$|z|$，我们有结论：

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

当 $z\neq 0$ 时，以正实轴为始边，向量$\overrightarrow{OP}$为终边所确定的角 θ 称为复数 z 的辐角，记为

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

当 $z=0$ 时，辐角不确定.

$\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 称满足条件$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 为幅角的主值，记为 $\arg z$. 从而有

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

利用复数的向量表示法对任意复数 z_1，z_2，三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

的意义为三角形的一边不大于两边之和，不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

表示三角形的一边不小于两边之差的绝对值.

(3) 复数的三角表示

设 $z\neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角. 则

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

(4) 复数的指数表示

在三角表式示中，利用欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可得

$$z=re^{i\theta},$$

称为复数 z 的指数表示式.

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异，它们各有其特点. 复数及其运算的几何解释可以从向量表示法得到，复数运算中模与幅角的变化规律可以由三角或指数表示法得到.

4. 复数的乘幂与方根

(1) 积与商

设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$ 则

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad (r_2\neq 0).$$

即

①$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad (z_2\neq 0)$；

②$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$.

注意：(ⅰ)正确理解等式②的含义；

(ⅱ)乘积与商的几何解释.

(2)乘幂

设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$. 棣莫弗(DeMoivre)公式：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 及其应用.

(3)方根

设 $z=re^{i\theta}$，则$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

注意：$\sqrt[n]{z}$的 n 值性及几何解释.

二、复变函数及其极限与连续

1. 复变函数的概念

复变函数是高等数学中一元实变函数概念的推广，二者定义的表述形式几乎完全一样，只要将定义中的“实数(或实数集)”换为“复数(或复数集)”就行了. 但对下面几点应多加注意：

(1)实变函数是单值函数，而复变函数有单值函数和多值函数之分.

(2)复变函数 $w=f(z)$是从 z 平面上的点集 G 到 w 平面上的点集 G^* 的一个映射，因此，它不但可以把 z 平面上的点映射(或变换)为 w 平面上的点，而且可以把 z 平面上的曲线或图形映射为 w 平面上的曲线或图形，实现两个不同复平面上的图形之间的有趣的变换，为简化或研究某些问题提

供了可能.

(3)由于一个复变函数 $w=f(z)$对应着两个二元实变函数:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

所以,可以将对复变函数的研究转化为对两个二元实变函数的研究.这是研究复变函数的常用思想方式之一.

2. 平面点集

(1)z_0 的 $\delta-$邻域:满足关系$|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个 $\delta-$邻域,而满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个去心 $\delta-$邻域.

(2)内点:设 G 是一平面点集,$z_0\in G$,若存在 z_0 的某个邻域也包含于 G,则称 z_0 为 G 的内点.

(3)开集:若 G 的每个点都是内点,则称 G 为开集.

(4)连通集:对 $G\subset \boldsymbol{C}$(即复平面),G 非空,若存在一对$\not\subset$中不交的开集 G_1,G_2,满足 $G_1\cap G\neq\Phi$,$G_2\cap G\neq\Phi$,且 $G\subset(G_1\cup G_2)$则称 G 为连通集.

(5)区域:连通的开集叫区域.应该注意的是,可以证明,对于开集,连通性等价于另一种更直观的属性,即道路连通,也即 G 内任意两点都可以用一条 G 中的折线连接.

(6)边界:若 z_0 点的任意一个邻域内既有区域 G 中的点,又有不属于 G 中的点,则 z_0 称为区域 G 的一个边界点.由 G 的全体边界点组成的集合称为 G 的边界.

(7)闭区域:区域 G 及其边界一起构成闭区域,记为 $\bar{G}$.

(8)简单闭曲线:设曲线 C:$z=z(t)=x(t)+iy(t)$,$a\leqslant t\leqslant b$.当 $x(t)$与 $y(t)$连续时,称 C 为连续曲线.对 $t_1,t_2\in[a,b)$,当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$时,点 $z(t_1)$称为曲线 C 的重点.没有重点的连续曲线 C,称为简单(或 Jordan)曲线.如果简单曲线 C 的两个端点重合,则 C 称为简单闭曲线.

由以上定义知,简单曲线自身不相交,简单闭曲线则只有起点与终点重合.

(9)光滑曲线:曲线 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$,$a\leqslant t\leqslant b$,当 $x'(t)$

与 $y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时，称为光滑曲线，由几条光滑曲线依次连接而成的曲线，称为按段光滑曲线.

(10)单连通域：若属于区域 G 的任何简单闭曲线 C 的内部也属于 G，则称 G 为单连通域. 否则称为多连通域.

3. 复变函数的极限与连续性

(1)定义：设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的去心领域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(0<\delta\leqslant\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

若 $f(z)$ 在 z_0 点有定义，且 $f(z_0)=A$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 连续. 若 $f(z)$ 在区域 G 内每一点都连续，我们称 $f(z)$ 在 G 内连续.

(2)设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0 \end{cases} \qquad ①$$

由此可见，复变函数极限的定义虽在形式上与一元实函数的极限定义相似，但实质上却相当于二元实函数的极限. 这导致了第二章用极限定义的复变函数的导数的概念，较之一元实变函数的导数概念，其要求要苛刻得多.

(3)如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，那么

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).$$

(4)由定义及式①易得连续的充要条件：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0)\end{cases}$$

两个连续函数 $h=g(z)$，$w=f(h)$ 复合所得的函数 $w=f[g(z)]$ 仍是连续函数.

典型例题与解题技巧

【例 1】 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(2-2i)}{(\sqrt{3}-i)(2+2i)}$ 化为三角形式与指数形式.

解题分析　将一个复数 z 化为三角形式与指数形式的关键在于求出该复数的模与辐角的主值. 通常的方式是先将 z 化成代数形式 $z=x+iy$，再利用 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 与反正切公式分别求出它的模与主辐角. 本题中由于 z 的分子与分母互为共轭复数，而复数与其共轭复数的模相等，因此，容易利用复数商的模公式求出 $|z|$. 至于主辐角除可反正切公式求得外. 也可以利用关于乘积与商的辐角公式来求. 下面给出两种解法，便于读者比较.

解题过程　将 z 的分子与分母同乘以 $(\sqrt{3}+i)(2-2i)$，得 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2}\cdot\dfrac{(2-2i)^2}{|2-2i|^2}=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)(-i)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$，所以 $|z|=1$，$\arg z=\operatorname{arctg}(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-\dfrac{\pi}{6}$. 从而得到 z 的三角形式与指数形式：

$$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

另一种解法是，由于分子与分母恰为一对共轭复数，故其模相同，于是

$$|z|=\frac{|(\sqrt{3}+i)(2-2i)|}{|(\sqrt{3}-i)(2-2i)|}=1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}z&=2[\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})+\operatorname{Arg}(2-2i)]\\&=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.\end{aligned}$$

【例 2】 设 z_1,z_2 为复平面上任意两点,证明不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

分析 **这个不等式的几何意义为以 z_1,z_2,z_1-z_2 为边的三角形,一边的长度($|z_1-z_2|$)不小于两边的长度之差的绝对值($||z_1|-|z_2||$). 证明这个不等式可利用书中已证的三角不等式.**

证明 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

$\because |z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$

$\therefore |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|$ ①

$\because |z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_2-z_1|+|z_1|$

$\therefore |z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$ ②

利用①与②得

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

【例 3】 设复数 α 满足 $|\alpha|<1$,试证

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|\begin{cases}=1, & \text{当 } |z|=1\\<1, & \text{当 } |z|<1\\>1, & \text{当 } |z|>1\end{cases}$$

分析 **比较复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ 与 1 的大小等价于比较 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2$ 与 1 的大小,也相当于比较 $|z_1|^2$ 与 $|z_2|^2$ 的大小. 此时常用公式 $|z|^2=z\bar{z}$, $|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm2\operatorname{Re}(\bar{z}_1z_2)$ 以及三角不等式.**

证明 **由等式**

$$|z-\alpha|^2=|z|^2+|\alpha|^2-2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z)$$

$$|1-\bar{\alpha}z|^2=1+|\alpha|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z)$$

可知

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2=(|z|^2-1)(1-|\alpha|^2)$$

注意到$|\alpha|<1$,便有

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2\begin{cases}=0, \text{当} |z|=1\\<0, \text{当} |z|<1\\>0, \text{当} |z|>1\end{cases}$$

从而

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|^2=\frac{|z-\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\begin{cases}=1, \text{当} |z|=1\\<1, \text{当} |z|<1\\>1, \text{当} |z|>1\end{cases}$$

由此即得要证明的结论.

【例 4】　函数$w=\dfrac{1}{z+1}$将z平面上的下列曲线变成w平面上的什么曲线?

(1)$x^2+y^2=1$;　(2)$y=x+1$;　(3)$y=1$.

解题分析　解此题的要点是利用公式

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\qquad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

及题中映射

$$w=\frac{1}{z+1},\quad z=\frac{1}{w}-1.$$

解题过程　令$w=u+iv$

(1)由$x^2+y^2=1$有

$$\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2-\frac{1}{4}(z-\bar{z})^2=1$$

即

$$z\bar{z}=1$$

$$\left(\frac{1}{w}-1\right)\left(\frac{1}{\bar{\omega}}-1\right)=1$$

$$\frac{(1-w)\cdot(1-\bar{\omega})}{\omega\bar{\omega}}=1$$

$$(1-w)(1-\bar{\omega})=w\bar{\omega}$$

$$w+\bar{\omega}=1$$

即

$$u=\frac{1}{2}$$

即圆 $x^2+y^2=1$ 映成了直线 $u=\frac{1}{2}$.

(2)由 $y=x+1$ 知

$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{1}{2}(z+\overline{z})+1$$

代入 $z=\frac{1}{w}-1$ 得

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\overline{w}}-2\right)+1$$

两边乘以 $2\mathrm{i}w\overline{w}$ 得

$$\overline{w}-w=i(w+\overline{w})$$

由前设 $\overline{w}u=-\mathrm{i}v$ 知

$$\overline{w}-w=-2iv$$

$$w+\overline{w}=2u$$

代入上式则有

$$u=-v$$

即直线 $y=x+1$ 被映成了直线 $u=-v$.

(3)由 $y=1$ 知

$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=1$$

$$z-\overline{z}=2i$$

$$\frac{1}{w}-1-\left(\frac{1}{\overline{w}}-1\right)=2i$$

$$\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}=2i$$

$$\overline{w}-w=2\mathrm{i}w\,\overline{w}$$

即

$$2i(u^2+v^2)=-2iv$$

$$u^2+v^2+v=0$$

所以直线 $y=1$ 映成了圆 $u^2+v^2+v=0$.

【例 5】 判断下列函数在给定点处的极限是否存在. 若存在,试求出极限的值.

(1) $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}$, $\quad z\to 0$;

(2) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $\quad z\to 0$;

(3) $f(z)=\dfrac{z-i}{z(z^2+1)}$, $\quad z\to i$.

解题分析　判断一个复变函数在给定点处的极限是否存在有三种方法:一是用函数极限的定义,类似于实变函数,定义多用于验证某函数的极限等式,本书对这处方法不作更多的要求. 但是,读者应当会用极限定义来判定某函数的极限不存在;第二种方法是利用教材第 26 页中的定理一,讨论函数的实部 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 的极限是否存在,这是判断极限是否存在的常用方法;第三种方法是利用教材中第 27 页的定理二,直接利用极限的有理运算法则求函数的极限. 与实变函数一样,应用时必须满足这些法则成立的条件.

下面给出的解法都基于以上三种方法,其中有的小题给出了多种解法.

解题过程　(1)由于 $|f(z)|=|z|\left|\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z}\right|\leqslant|z|$,所以,对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $d=\varepsilon$,则当 $0<|z|<d$ 时,恒有

$$|f(z)-0|=|f(z)|\leqslant|z|<\varepsilon$$

根据极限定义,当 $z\to 0$ 时,$f(z)$ 的极限存在,并且其值为 0.

(2)令 $z=x+iy$,则 $f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,从而有

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=0.$$

令 z 沿直线 $y=kx$ 趋于 0,则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

由于它随 k 的不同而不同,因此,当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $u(x,y)$ 的极限不存在,故 $z\to 0$ 时,$f(z)$ 的极限不存在.

(3)由于 $f(z)$ 的分子与分母中含有极限为零的因子,消去后得

$$f(z)=\frac{z-i}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z(z+i)}(z\neq i),$$

所以

$$\lim_{z\to i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{z(z+i)}=-\frac{1}{2}.$$

历年考研真题评析

【题 1】 把复数 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha,-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角的主值.(山东大学 2005 年)

解题分析 本题主要考察复数的三角表示法和指数表示法,以及辐角和主值的求法.

解题过程

$$\begin{aligned}z&=1+\sin\alpha+i\cos\alpha\\&=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

所以 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$.

因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)<0$$

故

$$r=|z|=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

由于

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

从而得 z 的三角表示式:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

及指数表示式:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

注意,这里的辐角 $\theta=\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ 不是主值,因为

$$\frac{3\pi}{2}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{7}{4}\pi,$$

但它只能与主值相差一个 2π 的整数倍,从上式容易看出,如果不等式的每项各加(-2π),得

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}.$$

这个 $-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ 就符合关于主值的要求了. 因此 $\arg z=-\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. 如果 θ 取主值,那么 z 的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

【题 2】 设 n 为自然数,证明等式

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

（北京大学 2005 年）

分析 上面涉及到复数 n 次幂的等式，通常需要先将复数化为三角形式，然后再用 De Moivre 公式 $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ 证明.

证明 令 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，可知

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

故

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

【题 3】 求满足关系式 $\cos\theta<r<3\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的点 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的集合 G. 若 G 为一区域，则指明它是单连通域还是多连通域.（中山大学 2006 年）

解题分析 此题考察知识点“单连通域”和“多连通域”.

解题过程 由 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，可知

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

于是所给的关系式 $\cos\theta<r<3\cos\theta$ 变为

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}<\sqrt{x^2+y^2}<\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

或

$$x<x^2+y^2<3x$$

于是可见此区域是单连通的.

【题 4】　在映射 $\omega=z^2$ 下，求下列平面点集在 ω 平面上的象.

(1)线段 $0<r<2,\theta=\frac{\pi}{4}$；

(2)双曲线 $x^2-y^2=4$；

(3)扇形区域 $0<\theta<\frac{\pi}{4},0<r<2$.(山东大学 2005 年)

解题分析　此题是关于映射的复习.

解题过程　(1)设 $z=re^{i\theta},w=\rho e^{i\varphi}$，则 $\rho=r^2,\varphi=2\theta$，故线段 $0<r<2$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 映射为 $0<\rho<4,\varphi=\frac{\pi}{2}$，也是线段[见图 1－1(a)].

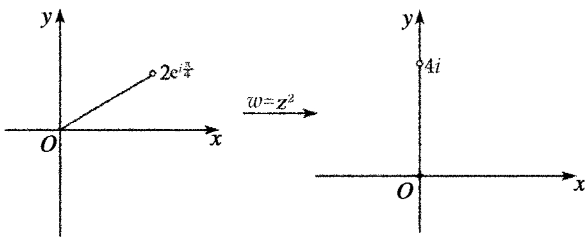

图 1－1(a)

(2)设 $z=x+iy,w=u+iv$，则

$$z^2=x^2-y^2+i2xy$$

故
$$u=x^2-y^2,v=2xy$$

所以 $x^2-y^2=4\Leftrightarrow u=4$，为平行于 v 轴的直线[见图 1－1(b)].

(3)设 $z=re^{i\theta},w=\rho e^{i\varphi}$，则

$$\rho=r^2,\varphi=2\theta$$

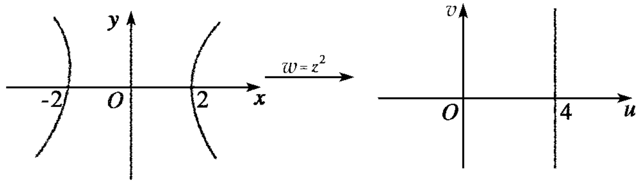

图 1—1(b)

故扇形域 $0<\theta<\frac{\pi}{4}, 0<r<2$ 映射为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}, 0<\rho<4$，也是扇形域[见图 1—1(c)].

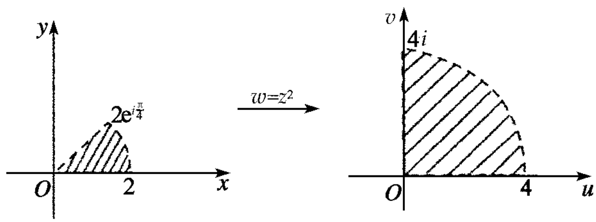

图 1—1(c)

【题 5】 试证函数

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)$$

当 $z\to 0$ 时的极限不存在.(天津大学 2005 年)

分析　这又是一道关于复变函数的极限问题.

证明　$f(z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}$

$$=\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{2i|z|^2}=\frac{2\mathrm{Re}(z)\cdot 2i\ \mathrm{Im}(z)}{2i|z|^2}$$

$$=\frac{2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$$

令 $z=x+iy$，则有 $f(z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$. 由此得

$$u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=0$$

让 z 沿直线 $y=mx$ 趋于零，我们有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx\to 0}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{2m}{1+m^2}.$$

可见沿不同斜率的直线，$u(x,y)$ 趋于不同的值，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$ 不存在. 虽然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}v(x,y)=0$，但根据前述结论，$\lim\limits_{x\to z_0}f(z)$ 不存在.

课后习题全解

○1. 求下列复数 z 的实部和虚部、共轭复数、模与辐角：

1) $\dfrac{1}{3+2i}$；2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$；3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；4) $i^8-4i^{21}+i$.

解　1) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3-2i}{13}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{13}$；$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{2}{13}$；$\bar{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$；

$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{13}\right)^2+\left(\dfrac{-2}{13}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$；$\arg z=-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$；

$\operatorname{Arg}z=-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=-i-\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\dfrac{3i-3}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2}$；$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{5}{2}$；$\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$；$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-5}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$；$\arg z=-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$；$\operatorname{Arg}z=-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\dfrac{26-7i}{2i}=-\dfrac{7}{2}-13i$

$\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{2}$；$\mathrm{Im}(z)=-13$；$\bar{z}=-\dfrac{7}{2}+13i$；

$|z|=\sqrt{\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2+13^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{29}$；$\arg z=\mathrm{arctg}\,\dfrac{26}{7}-\pi$；

$\mathrm{Arg}z=\mathrm{arctg}\,\dfrac{26}{7}-\pi+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4) $i^8-4i^{21}+i=i^{4+4}-4i^{4\times5+1}+i=1-4i+i=1-3i$

$\mathrm{Re}(z)=1$；$\mathrm{Im}(z)=-3$；$\bar{z}=1+3i$；$|z|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$；$\arg z=-\mathrm{arctg}3$；$\mathrm{Arg}z=-\mathrm{arctg}3+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

○2. **当 x,y 等于什么实数时，等式**$\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ **成立**？

解　由所给等式可得

$$x+1+i(y-3)=(1+i)(5+3i)=2+8i$$

利用复数相等的概念

$$\begin{cases}x+1=2\\ y-3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=11,\end{cases}$$

即 $x=1,y=11$ **时等式成立**.

○3. **证明虚单位 i 有这样的性质**：$-i=i^{-1}=\bar{i}$.

证明　因$-i=\dfrac{-i\cdot i}{i}=-\dfrac{-i^2}{i}=\dfrac{1}{i}=i^{-1}$，$\bar{i}=-i$，**所以**

$$-i=i^{-1}=\bar{i}.$$

○4. **证明**：

1) $|z|^2=z\bar{z}$；

2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0)$；

5) $\bar{\bar{z}}=z$；

6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(\bar{z}+z)$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

证明　1) **设** $z=x+iy$，**则** $|z|^2=x^2+y^2$，$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$，**从而有** $|z|^2=z\bar{z}$.

2)设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,则

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)}$$
$$=\overline{(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i}=(x_1\pm x_2)-(y_1\pm y_2)i$$
$$\overline{z_1}\pm\overline{z_2}=\overline{(x_1+iy_1)}\pm\overline{(x_2+iy_2)}$$
$$=(x_1-iy_1)\pm(x_2-iy_2)=(x_1\pm x_2)-(y_1\pm y_2)i$$

从而有 $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$.

3)设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,则

$$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}$$
$$=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$$
$$\overline{z_1}\,\overline{z_2}=\overline{x_1+iy_1}\;\overline{x_2+iy_2}=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$$

从而有 $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

4)由 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)}=\overline{\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}}$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}=\frac{(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}$$

可知 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad(z_2\neq0)$.

5)设 $z=x+iy$,则 $\overline{z}=x-iy$,$\overline{\overline{z}}=\overline{(\overline{z})}=x+iy=z$. 即 $\overline{\overline{z}}=z$.

6)设 $z=x+iy$,则 $\overline{z}=x-iy$,从而

$$\frac{1}{2}(z+\overline{z})=\frac{1}{2}(x+iy+x-iy)=x=\mathrm{Re}(z)$$
$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{1}{2i}(x+iy-x+iy)=\frac{1}{2i}(2iy)=y=\mathrm{Im}(z)$$

结论得证.

◎5. 对任何 z,$z^2=|z|^2$ 是否成立？如果是,就给出证明,如果不是,对哪些 z 值才成立？

分析 考查复数性质.

解 对于任何复数 $z=x+iy$,易知

$$z^2=x^2-y^2+2xyi,|z|^2=x^2+y^2.$$

于是,由 $z^2=|z|^2$ 可得

$$x^2-y^2+2xyi=x^2+y^2$$

比较两边的实虚部,等价地有

$$2xy=0,x^2-y^2=x^2+y^2 \Rightarrow y^2=0 \text{ 即 } y=0.$$

故对任何虚数 z,$z^2=|z|^2$ 不成立,只有当 z 为实数(虚部为零)时,等式 $z^2=|z|^2$ 才成立.

◎6. 当 $|z|\leqslant 1$ 时,求 $|z^n+a|$ 的最大值,其中 n 为正整数,a 为复数.

分析 主要考查最大值问题.

解 由三角不等式及 $|z|\leqslant 1$ 可知

$$|z^n+a|\leqslant|z|^n+|a|\leqslant 1+|a|$$

而且当 $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}$ 时,$|z_0^n+a|=|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg a}+|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg a}|=1+|a|$,故其最大值为 $1+|a|$.

◎7. 判定下列命题的真假：

1)若 c 为实常数,则 $c=\bar{c}$;

2)若 z 为纯虚数,则 $z\neq\bar{z}$;

3)$\mathrm{i}<2\mathrm{i}$;

4)零的辐角是零;

5)仅存在一个数 z,使得 $\dfrac{1}{z}=-z$;

6)$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$;

7)$\dfrac{1}{i}\bar{z}=\overline{iz}$.

分析 一些命题的真假,要求有比较好的掌握基础知识.

解 1)真;2)真;3)假(复数不能比较大小);4)假(复数零的辐角是

不确定的）；5）假（由$\frac{1}{z}=-z$得$z^2=-1$，从而z可取$\pm i$两个值）；6）一般不真（由三角不等式$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，等号仅当$\arg z_1-\arg z_2=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时成立）；7）真.

○8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

1）i；　　2）-1；

3）$1+i\sqrt{3}$；　4）$1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$；

5）$\frac{2i}{-1+i}$；　6）$\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}$.

解　1）$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$　（三角表示式）

$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$　（指数表示式）

2）$-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{\pi i}$

3）$|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$，$\arg(1+\sqrt{3}i)=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$，故

$1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$（三角表示式）

$1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{3}i}$　（指数表示式）

4）
$$|1-\cos\varphi+i\sin\varphi|=\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}=\sqrt{2-2\cos\varphi}=2\sin\frac{\varphi}{2}$$

（注意 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$），$\arg(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)=\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=$

$$\operatorname{arctg}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\operatorname{arctg}(\cot\frac{\varphi}{2})=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\pi-\varphi}{2})$$

$$=\frac{\pi-\varphi}{2}$$，故

$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi-\varphi}{2})$　（三角表示

式）

$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\pi-\varphi}{2}}$ （指数表示式）

5）$\frac{2i}{-1+i}=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2-2i}{2}=1-i$，其模为$\sqrt{2}$，其辐角 $\arg\frac{2i}{-1+i}=\arg(1-i)=\text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right)=-\frac{\pi}{4}$，

故$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$（三角表示式） $\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}e^{(-\frac{\pi}{4})i}$（指数表示式）

6）$\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{-3i\varphi})^3}=\frac{e^{i10\varphi}}{e^{-i9\varphi}}=e^{i19\varphi}$（指数式）

$=\cos(19\varphi)+i\sin(19\varphi)$ （三角式）

○9．将下列坐标变换公式写成复数形式：

1）平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1,\\y=y_1+b_1;\end{cases}$

2）旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha.\end{cases}$

解 1）令 $z=x+iy$，$z_1=x_1+iy_1$，$c_1=a_1+ib_1$，则平移公式的复数形式为 $z=z_1+c_1$.

2）令 $z=x+iy$，$z_1=x_1+iy_1$，$c=\cos\alpha+i\sin\alpha$，c 又可写成 $c=e^{i\alpha}$，从而旋转公式

$$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$$

可写成

$$\begin{aligned}z&=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+i(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)\\&=(x_1+iy_1)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=z_1e^{i\alpha}\end{aligned}$$

○10．一个复数乘以$-i$，它的模与辐角有何改变？

解 由于复数 $z=|z|e^{i\arg z}$，$-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$，所以复数 z 乘以$-i$ 为$-iz=$

$|z|e^{i\arg z}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}=|z|e^{i(\arg z-\frac{\pi}{2})}$，即模不变，辐角减小$\frac{\pi}{2}$.

○11. **证明：**$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，**并说明其几何意义.**

证明　$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$$=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$$

$$=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)$$

$$=|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+|z_2|^2$$

$$+|z_1|^2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+|z_2|^2$$

$$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

几何意义为：以 z_1,z_2 为边构成的平行四边形的两条对角线长度的平方和等于四边长的平方和.

●12. **证明下列各题：**

1) **任何有理分式函数** $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ **可以化为** $X+iY$ **的形式，其中** X **与** Y **为具有实系数的** x **与** y **的有理分式函数；**

2) **如果** $R(z)$ **为** 1) **中的有理函数，但具有实系数，那么** $R(\overline{z})=X-iY$；

3) **如果复数** $a+ib$ **是实系数方程**

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，那么 $a-ib$ **也是它的根.**

分析　要明确有理分式的形式.

证明　1) 设 $z=x+iy$，$P(z)=P_1(x,y)+iP_2(x,y)$，$Q(z)=Q_1(x,y)+iQ_2(x,y)$则 $P_i(x,y)$，$Q_i(x,y)(i=1,2)$是 x,y 的实多项式，而且

$$R(z)=\frac{1}{Q_1^2+Q_2^2}[(P_1Q_1+P_2Q_2)+i(-P_1Q_2+P_2Q_1)]$$

令　$$X=\frac{P_1Q_1+P_2Q_2}{Q_1^2+Q_2^2},Y=\frac{-P_1Q_2+P_2Q_1}{Q_1^2+Q_2^2}$$

易知 X 与 Y 都为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数，并

且 $R(z)=X+iY$.

2)如果 $P(z)$,$Q(z)$是实系数多项式,则有关系式 $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$,$Q(\bar{z})=\overline{Q(z)}$.

事实上,对任一实系数多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

($a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数,即 $\bar{a}_j=a_j\quad(j=0,1,2,\cdots,n)$)

$$\begin{aligned}\overline{P(z)}&=\overline{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\&=\overline{a_0z^n}+\overline{a_1z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}z}+\bar{a}_n\\&=a_0\bar{z}^n+a_1\bar{z}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\bar{z}+a_n=P(\bar{z})\end{aligned}$$

从而

$$R(\bar{z})=\frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})}=\frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}}=\overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)}=\overline{(X+iY)}=X-iY$$

3)令 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$,由 2)中的事实有 $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$. 如果 $a+ib$ 是所给实系数方程的根,则 $P(a+ib)=0$. 于是 $P(a-ib)=P(\overline{a+ib})=\overline{P(a+ib)}=0$,这说明 $a-ib$ 也是它的根.

小结 有理分式函数可以化为复数形式,其中虚、实部全为实系数有理分式函数;实系数方程的根的共轭也是根.

◎13. 如果 $z=e^{it}$,证明:

1)$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$; 2)$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$.

分析 复数的幂性质要掌握.

证明 由 $z=e^{it}$ 易知 $z^n=(e^{it})^n=e^{int}=\cos nt+i\sin nt$, $\dfrac{1}{z^n}=e^{-int}=\cos nt-i\sin nt$,所以

$$1)\ z^n+\frac{1}{z^n}=\cos nt+i\sin nt+\cos nt-i\sin nt=2\cos nt$$

$$2)\ z^n-\frac{1}{z^n}=\cos nt+i\sin nt-(\cos nt-i\sin nt)=2i\sin nt$$

○14. 求下列各式的值:

1)$(\sqrt{3}-i)^5$; 2)$(1+i)^6$;

3) $\sqrt[6]{-1}$；　　　　4) $(1-i)^{\frac{1}{3}}$.

解　1) $(\sqrt{3}-i)^5=\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right]^5$

$$=\left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^5$$

$$=2^5\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=-16\sqrt{3}-16i$$

2) $(1+i)^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$

$$=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-8i$$

3) **由** $-1=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi$ **得**

$$\sqrt[6]{-1}=e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}i}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\quad(k=0,1,2,3,4,5).$$

即 6 **个值分别为** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

4) **由** $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$**得**

$$(1-i)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

$(k=0,1,2)$

即 3 **个值分别为** $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$,　$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$.

◎15. **若** $(1+i)^n=(1-i)^n$,**试求** n **的值.**

分析　化为三角表示式计算.

解 由$(1+i)^n=(1-i)^n$可得

$$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4}\right)$$

即有 $\sin\frac{n\pi}{4}=\sin\frac{-n\pi}{4}=-\sin\frac{n\pi}{4},\Rightarrow\sin\frac{n\pi}{4}=0,\frac{n\pi}{4}=k\pi,n=4k\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

○16. 1)**求方程**$z^3+8=0$**的所有根；**

2)**求微分方程**$y'''+8y=0$**的一般解.**

解 1)**方程**$z^3+8=0$**等价于**$z^3=-8$**,其根为**

$z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})\quad(k=0,1,2)$

即 $z_0=1+\sqrt{3}i,z_1=-2,z_3=1-\sqrt{3}i$**为所求的根.**

2)**因微分方程**$y'''+8y=0$**的特征方程为**

$$r^3+8=0$$

由1)**得其特征值为**$-2,1\pm\sqrt{3}i$**,故方程的通解为**

$$y=C_1e^{-2x}+e^x(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$$

其中C_1,C_2,C_3**为任意常数.**

◎17. **在平面上任意选一点**z**,然后在复平面上画出下列各点的位置：**

$$-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{\bar{z}},-\frac{1}{\bar{z}}$$

分析 **考查复数的基本知识.**

解 **取**$z=1-i$**得**$-z=-1+i,\bar{z}=1+i,-\bar{z}=-1-i,$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,$

$-\frac{1}{\bar{z}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

各点位置如图1-2(a)**所示.**

一般地,如图1-2(b)**所示,**$-z$**与**z**关于原点对称;**$\bar{z}$**与**z**关于**

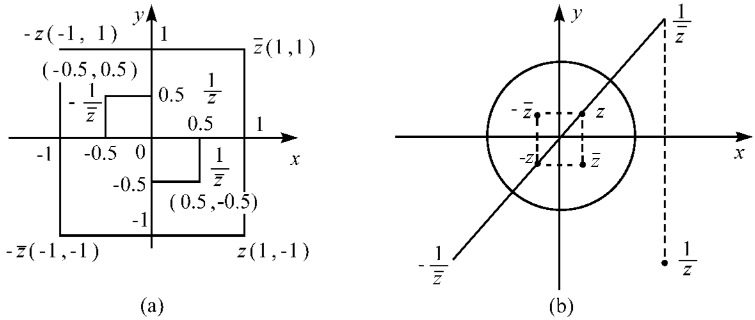

图　1-2

实轴对称；$-\bar z$ 与 z 关于虚轴对称. 又由 $\frac{1}{\bar z}=\frac{z}{z\bar z}=\frac{z}{|z|^2}$ 得 $\frac{1}{\bar z}$ 与 z 的辐角相同，且 $\left|\frac{1}{\bar z}\right|=\frac{1}{|z|}$，即 $\frac{1}{\bar z}$ 与 z 是关于单位圆周的对称点. 如图 1-1(b) 中，设 $|z|<1$，则 $\frac{1}{\bar z}$ 在单位圆外，且使 0，z 和 $\frac{1}{\bar z}$ 共一条射线，而且 $|z|\cdot\left|\frac{1}{\bar z}\right|=1$. $\frac{-1}{\bar z}$ 是 $\frac{1}{\bar z}$ 关于原点的对称点.

◎18. 已知两点 z_1 与 z_2（或已知三点 z_1，z_2，z_3），问下列各点 z 位于何处？

1) $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$；

2) $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$，其中 λ 为实数；

3) $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

分析　做好图，就能看出来.

解　1) 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 则 $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{x_1+x_2}{2}+i\frac{y_1+y_2}{2}$ 位于 z_1 与 z_2 连线的中点.

2) $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]+i[\lambda y_1+(1-\lambda)$

$y_2]$，当 λ 为实数时，z 位于 z_1 与 z_2 的连线上，其中 $\lambda=\dfrac{|z-z_2|}{|z_1-z_2|}$. 特别地，若 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，则 z 是在以 z_1,z_2 为端点的线段上的点.

3）再设 $z_3=x_3+iy_3$，则当 z_1,z_2,z_3 不共线时 $z=\dfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}+i\,\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 位于三角形 $z_1z_2z_3$ 的重心；若 z_1,z_2,z_3 共线时，则 z 在此直线上，物理意义仍是重心所在点.

◎19. 设 z_1,z_2,z_3 三点适合条件：$z_1+z_2+z_3=0$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 证明：z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆周 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点.

分析 要掌握三角形的性质.

证明 由 11 题的结论及题设条件可知

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=2(|z_1|^2+|z_2|^2)\\&=2(1+1)=4\end{aligned}$$

$$|-z_3|^2+|z_1-z_2|^2=4\Rightarrow|z_1-z_2|^2=3,$$

$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$$

类似地

$$\begin{aligned}|z_2-z_3|^2&=2(|z_2|^2+|z_3|^2)-|z_2+z_3|^2\\&=4-|-z_1|^2=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z_1-z_3|^2&=2(|z_1|^2+|z_3|^2)-|z_1+z_3|^2\\&=4-|-z_2|^2=3\end{aligned}$$

即 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$. z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆周 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点.

●20. 如果复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$，并说明这些等式的几何意义.

分析 思维灵活，掌握各种三角形的性质.

解　由所给等式可得

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|\Rightarrow|z_1-z_3|^2$$
$$=|z_2-z_1|\cdot|z_2-z_3| \quad ①$$

及$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1\Rightarrow\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$

两边取绝对值又可得

$$\left|\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}\right|\Rightarrow|z_2-z_3|^2$$
$$=|z_3-z_1|\cdot|z_1-z_2| \quad ②$$

上面式①与式②相除可知$|z_1-z_3|^3=|z_2-z_3|^3$,即$|z_1-z_3|=|z_2-z_3|$,再代入式①便有$|z_3-z_1|=|z_2-z_3|=|z_1-z_2|$,这说明$z_1,z_2,z_3$构成一个等边三角形.

小结　复数的差的关系,对应了点的距离,本题主要考查了这一性质.

◎21. 指出下列各题中点z的轨迹或所在范围,并作图:

1)$|z-5|=6$;　　2)$|z+2i|\geqslant1$;

3)$\mathrm{Re}(z+2)=-1$;　　4)$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\,\bar{z})=3$;

5)$|z+i|=|z-i|$;　　6)$|z+3|+|z+1|=4$;

7)$\mathrm{Im}(z)\leqslant2$;　　8)$\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant1$;

9)$0<\arg z<\pi$;　　10)$\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$.

分析　考查基础知识,做图要标准.

解　设$z=x+iy$.

1)由$|z-5|=6$得$|z-5|=\sqrt{(x-5)^2+y^2}=6$,轨迹为以$(5,0)$为圆心,6为半径的圆周,见图1-3(a).

2)由$|z+2i|=\sqrt{x^2+(y+2)^2}\geqslant1$得$z$的轨迹为以$(0,-2)$为中心,1为半径的圆周及其外部区域,见图1-3(b).

3)由$z+2=x+2+iy$得$\mathrm{Re}(z+2)=-1$相当$x=-3$,z的轨迹为直线$x=-3$,见图1-3(c).

4)由 $i\bar{z}=i(x-iy)=y+ix$ 得 $\mathrm{Re}(i\bar{z})=y$，即 $\mathrm{Re}(i\bar{z})=3$ 相当于 $y=3$，z 的轨迹为直线 $y=3$，见图 1-3(d).

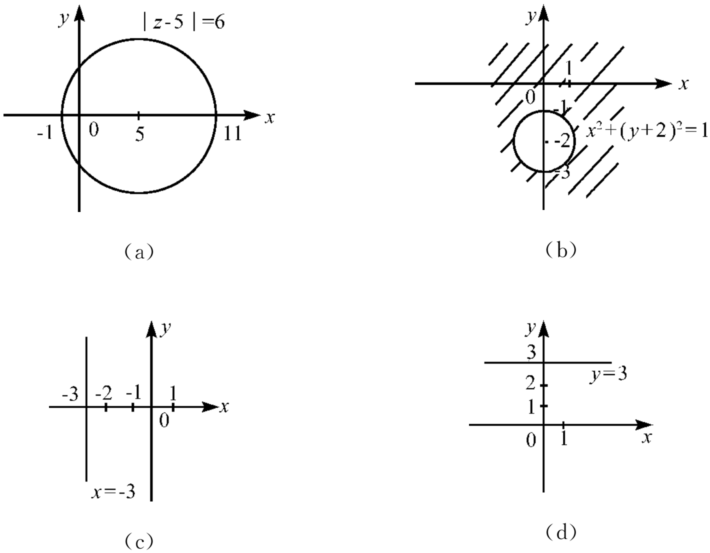

图 1-3

5)由 $|z+i|=|z-i|$ 得 $x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2$，即 $y=0$，z 的轨迹为实轴，见图 1-3(e).

6)由于 $|z+3|$ 表示 z 与 -3 的距离，所以 $|z+3|+|z+1|=4$ 表示 z 距点 -3 与 -1 的距离之和为 4，z 的轨迹为以 $(-3,0)$，$(-1,0)$ 为焦点，以 4 为长轴的椭圆：$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，见图 1-3(f).

7)$\mathrm{Im}(z)\leqslant 2$ 相当于 $y\leqslant 2$，z 的轨迹为直线 $y=2$ 及其下方区域，见图 1-3(g).

8)由 $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|=\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\geqslant 1$ 得

$$(x-3)^2+y^2\geqslant(x-2)^2+y^2$$

化简得 $x\leqslant\frac{5}{2}$，z 的轨迹为直线 $x=\frac{5}{2}$ 及其左方区域，见图 1-3

(h).

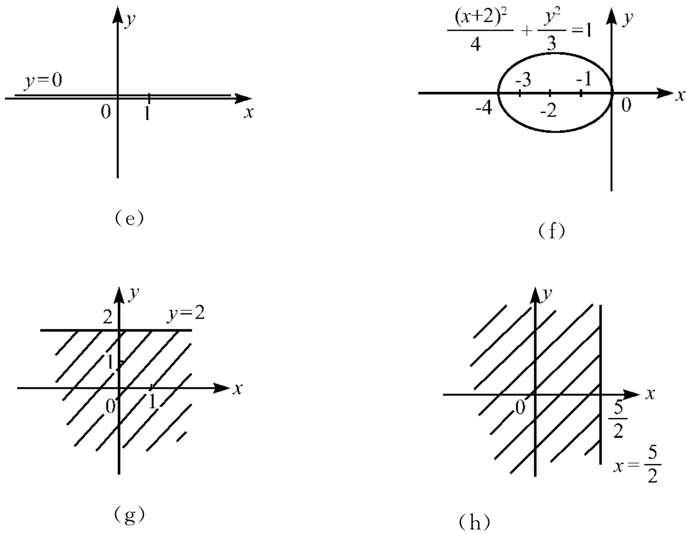

图 1-3

9)由 $\arg z=\text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ 得

$$\arg z=0\Rightarrow z\text{ 为 }x\text{ 轴正向上的点}\quad(\text{正实轴})$$

$$\arg z=\pi\Rightarrow z\text{ 为 }x\text{ 轴负向上的点}\quad(\text{负实轴})$$

所以 $0<\arg z<\pi$ 为上半平面(不含实轴),即 z 的轨迹为不包含实轴的上半平面,见图 1-3(i).

10)由 $\arg(z-i)=\arg[x+(y-1)i]=\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$\text{tg}[\arg(z-i)]=1\quad(x>0,y>1)$$

即 $\dfrac{y-1}{x}=1$,故 $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$ 相当于 $y-x-1=0(x>0,y>1)$,z 的轨迹为以 i 为起点的射线 $y-x-1=0(x>0)$,见图 1-3(j).

●22. **描出下列不等式所确定的区域或闭区域,并指明它是有界的还是无界的?单连通的还是多连通的?**

1)$\text{Im}(z)>0$;　　　　2)$|z-1|>4$;

3) $0<\mathrm{Re}(z)<1$；

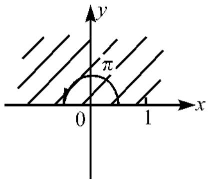

图 1-3(i)

4) $2\leqslant|z|\leqslant3$；

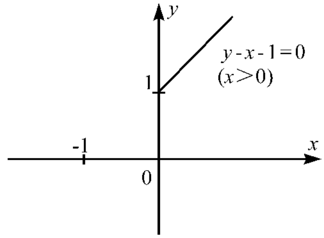

图 1-3(j)

5) $|z-1|<|z=3|$；　　6) $-1<\arg z<-1+\pi$；

7) $|z-1|<4|z+1|$；　　8) $|z-2|+|z+2|\leqslant6$；

9) $|z-2|-|z+2|>1$；　　10) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant4$.

分析　考查基础知识，做图要标准.

解　令 $z=x+iy$ 后可将本题的条件转化为 x,y 满足的条件，然后在直角坐标系中解答.

1) $\mathrm{Im}(z)>0$，即 $y>0$ 为不包含实轴的上半平面，是无界单连通区域，见图1-4(a).

2) $|z-1|>4$，即 $(x-1)^2+y^2>16$ 为圆周 $(x-1)^2+y^2=16$ 的外部（不含圆周），是无界多连通区域，见图 1-4(b).

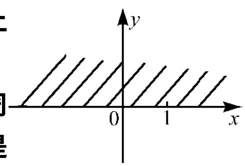

图 1-4(a)

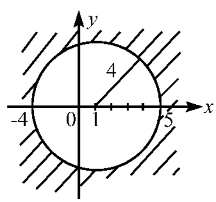

图 1-4(b)

3) $0<\mathrm{Re}(z)<1$，即 $0<x<1$ 为由直线 $x=0$ 及 $x=1$ 所构成的带形区域（不含两直线），是无界单连通区域，见图 1-4(c).

4) $2\leqslant|z|\leqslant3$，即 $4\leqslant x^2+y^2\leqslant9$ 为由圆周 $x^2+y^2=4$ 与 $x^2+y^2=9$ 所围成的环形闭区域（包括圆周），是有界多连通闭区

域，见图 1-4(d).

5) $|z-1|<|z+3|$ 即

$$(x-1)^2+y^2<(x+3)^2+y^2$$

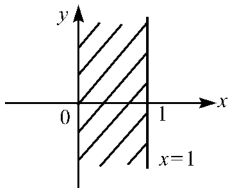

图 1-4(c)

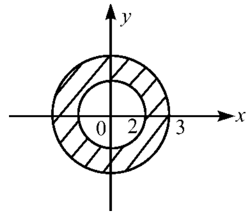

图 1-4(d)

化简得 $x>-1$ 为直线 $x=-1$ 右边的区域(不含直线 $x=-1$)，是无界单连通区域，见图 1-4(e).

6) $-1<\arg z<-1+\pi$ 为由射线 $\arg z=-1$ 及 $\arg z=-1+\pi$ 构成的角形域(不含两射线)，是无界单连通区域，见图 1-4(f).

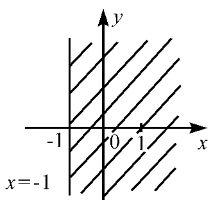

图 1-4(e)

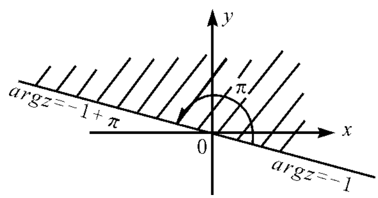

图 1-4(f)

7) 设 $z=x+iy$，则 $|z-1|<4|z+1|$ 可写成

$$(x-1)^2+y^2<16(x+1)^2+16y^2$$

化简得 $\left(x+\dfrac{17}{15}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{8}{15}\right)^2$，表示以 $z=-\dfrac{17}{15}$ 为中心，$\dfrac{8}{15}$ 为半径的圆周的外部区域(不含圆周)，为无界多连通区域，见图 1-4(g).

8) $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$ 为椭圆 $|z-2|+|z+2|=6$ 的内部(包含椭圆)，此椭圆是以 $(2,0)$ 与 $(-2,0)$ 为焦点，6 为长轴的椭圆：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，这是一个有界单连通的闭区域，见图 1-4(h).

9) $|z-2|-|z+2|>1$ 可写成

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}>\sqrt{(x+2)^2+y^2}+1$，两边平方

$x^2-4x+4+y^2>1+2\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$

$-8x-1>2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ （由此易知 $x<-\frac{1}{8}$），两边再平方

$$60x^2-4y^2>15 \text{ 或 } 4x^2-\frac{4}{15}y^2>1$$

再注意到 $x<-\frac{1}{8}$，即知不等式 $|z-2|-|z+2|>1$ 表示双曲线 $4x^2-\frac{4}{15}y^2=1$ 的左边分支的内部（含焦点 $z=-2$ 的那部分）区域，是无界单连通区域，见图 1-4(i).

10) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant 4$ 可写成

$$x^2+y^2-(2+i)(x+iy)-(2-i)(x-iy)\leqslant 4$$

化简得 $x^2+y^2+2y-4x\leqslant 4$ 或

$$(x-2)^2+(y+1)^2\leqslant 9$$

是以 $(2,-1)$ 为圆心，3 为半径的圆周及其内部，这是一个有界单连通闭区域，见图 1-4(j).

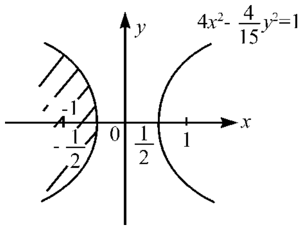

图 1-4(i)

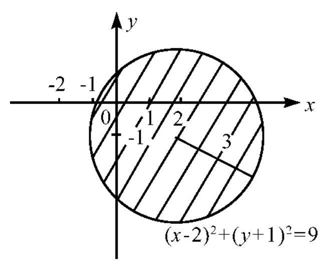

图 1-4(j)

小结 区域、闭区域、有界的、无界的、单连通、多连通的概念与基本性质，只要区分明确即可.

●23. 证明复平面上的直线方程可写成

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c\quad(\alpha\neq 0\text{ 为复数},c\text{ 为实常数}).$$

分析　考查直线与圆周基本知识.

证明　设 $z=x+iy,\alpha=a+ib$,则

$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c$ 可写为 $(a+ib)(x-iy)+(a-ib)(x+iy)=c$,等价地 $2ax+2by=c$,这是直线的一般方程.反过来,对任一条直线 $Ax+By+C=0(A,B$ 不同时为零)只须令 $z=x+iy,\alpha=\dfrac{A+iB}{2},c=-C$,便可将其方程写成

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c\quad(\alpha\neq 0\text{ 为复数},c\text{ 为实常数}).$$

小结　复平面上的直线方程表示形式,代入基本形式即可得出.

●24. 证明复平面上的圆周方程可写成:

$$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0\quad(\text{其中 }\alpha\text{ 为复数},c\text{ 为实常数}).$$

分析　考查直线与圆周基本知识.

证明　圆周的一般方程为

$$x^2+y^2+2ax+2bx+c=0\ (a^2+b^2-c\geqslant 0)$$

令 $z=x+iy,\alpha=a+ib$,则

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c$$

故圆周方程可写成　$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0.$

小结　复平面上的圆周方程的表示形式,代入基本形式即可得出.

◎25. 将下列方程(t 为实参数)给出的曲线用一个实直角坐标方程表出:

1) $z=t(1+i)$;

2) $z=a\cos t+ib\sin t$(a,b 是不为零的实常数);

3) $z=t+\dfrac{i}{t}$;　　4) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$;

5) $z=a\operatorname{ch}t+ib\operatorname{sh}t$($a,b$ 是不为零的实常数);

6) $z=ae^{it}+be^{-it}$;　　7) $z=e^{\alpha t}$($\alpha=a+bi$ 为复数且 $b\neq 0$).

分析　坐标系转换.

解　令 $z=x+iy$.

1) $z=t(1+i)=t+ti$ 相当于 $\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}$，消去参数 t 后，化成直角坐标方程为 $y=x$（直线）.

2) $z=a\cos t+ib\sin t$ 相当于 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$，消去参数 t 后化成直角坐标方程为 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$（椭圆）.

3) $z=t+\dfrac{i}{t}$ 相当于 $\begin{cases}x=t\\y=\dfrac{1}{t}\end{cases}$，消去参数 t 后化成直角坐标系方程为 $xy=1$（等轴双曲线）.

4) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$ 相当于 $\begin{cases}x=t^2\\y=\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$，消去参数 t 后为 $xy=1(x>0,y>0)$（等轴双曲线在第一象限中的一支）.

5) $z=a\operatorname{ch}t+ib\operatorname{sh}t$ 相当于 $\begin{cases}x=a\operatorname{ch}t\\y=b\operatorname{sh}t\end{cases}$，消去参数 t 后为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（双曲线）.

6) $z=ae^{it}+be^{-it}=a\cos t+ia\sin t+b\cos t-ib\sin t$
$=(a+b)\cos t+i(a-b)\sin t$

相当于 $\begin{cases}x=(a+b)\cos t\\y=(a-b)\sin t\end{cases}$，化成直角坐标方程为

$$\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1\quad（椭圆，其中\ a\neq\pm b）$$

当 $a=b$ 时，则方程表示 x 轴上的线段 $[-|a+b|,|a+b|]$；当 $a=-b$ 时，则方程表示 y 轴上的线段 $[-|a-b|,|a-b|]$.

7) $z=e^{at}=e^{(a+ib)t}=e^{at}\cdot e^{ibt}=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)$ 相当于

$\begin{cases} x = e^{at}\cos bt \\ y = e^{at}\sin bt \end{cases}$，消去参数 t 后化成直角坐标方程（只须由 $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} bt \Rightarrow t = \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ 代入 $x^2 + y^2 = e^{2at}$ 即可）为

$x^2 + y^2 = e^{\frac{2a}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

○ 26. 函数 $w = \dfrac{1}{z}$ 把下列 z 平面 上的曲线映射成 w 平面上怎样的曲线？

1）$x^2 + y^2 = 4$；　　2）$y = x$；

3）$x = 1$；　　4）$(x-1)^2 + y^2 = 1$.

解　令 $z = x + iy, w = u + iv$，则 $w = \dfrac{1}{z}$ 相当于

$$u + iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

或

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

1）由函数 $w = \dfrac{1}{z}$ 的如上关系式可知当 $x^2 + y^2 = 4$ 时 $u^2 + v^2 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$，即 w 平面上像曲线为 $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{4}$（圆周）.

2）当 $y = x$ 时，$u = -v$ 或 $u + v = 0$ 为 w 平面上的直线.

3）当 $x = 1$ 时，易知 $\begin{cases} u = \dfrac{1}{1+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{1+y^2} \end{cases}$，消去 y 后为 $\left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \dfrac{1}{4}$，是 w 平面上的圆周.

4）当 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 时 $\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$　$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 代入

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} u = \dfrac{1+\cos\theta}{2+2\cos\theta} = \dfrac{1}{2} \\ v = \dfrac{-\sin\theta}{2+2\cos\theta} \end{cases}$$

为 w 平面上的直线 $u = \dfrac{1}{2}$.

◎27. 已知映射 $w = z^3$，求

1）点 $z_1 = i, z_2 = 1+i, z_3 = \sqrt{3}+i$ 在 w 平面上的像；

2）区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的像.

分析 掌握平面上的像的概念.

解 1）$z_1 = i, w_1 = z_1^3 = i^3 = -i$

$$z_2 = 1+i, w_2 = z_2^3 = (1+i)^3 = (1+i)^2(1+i)$$
$$= -2+2i$$

$$z_3 = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), w_3 = z_3^3$$
$$= 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 8i$$

即 z_1, z_2, z_3 的像分别为 $-i, -2+2i, 8i$.

2）令 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则 $w = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$.

于是当 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 时 $0 < \arg w = 3\arg z < \pi$，即区域

$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 的像区域为 $0 < \arg w < \pi$（上半平面）.

◎ 28. 证明：1）如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A, \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，那么 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B$；$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = AB$；$\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$；

2）函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

分析 基本性质的证明.

证明 1）令 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$g(z)=p(x,y)+iq(x,y)$，$A=a_1+ia_2$，$B=b_1+ib_2$，$z_0=x_0+iy_0$. 于是

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=a_1\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=a_2\end{cases}$$

$$\lim_{z\to z_0}g(z)=B\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}p(x,y)=b_1\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}q(x,y)=b_2\end{cases}$$

利用高等数学中关于极限的运算法则易知

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[u(x,y)\pm p(x,y)]=a_1\pm b_1\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[v(x,y)\pm q(x,y)]=a_2\pm b_2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}f(z)\pm g(z)$$

$$=A\pm B$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}(up-vq)=a_1b_1-a_2b_2\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}(uq+vp)=a_1b_2+a_2b_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{up+vq}{p^2+q^2}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{b_1^2+b_2^2}\left(=\operatorname{Re}\dfrac{A}{B}\right)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{vp-uq}{p^2+q^2}=\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1^2+b_2^2}\left(=\operatorname{Im}\left(\dfrac{A}{B}\right)\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$$

$$=\left(\frac{A}{B}\right)\quad(B\neq 0)$$

2）$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 z_0 处有定义且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有定义且

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

等价地 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

●29. 设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续且 $f(z_0)\neq 0$，那么可找到 z_0 的小邻域，在这邻域内 $f(z)\neq 0$.

分析　考查连续的性质.

证明　设 $z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $f(z)$ 在 z_0 连续 $\Leftrightarrow u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 由 $f(z_0)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\neq 0$ 可知 $u(x_0,y_0)$ 与 $v(x_0,y_0)$ 之中必有一个不为零，不妨设 $u(x_0,y_0)\neq 0$，于是 $u(x_0,y_0)>0$（或 <0）. 由高等数学中连续函数的保号定理可知，必有 (x_0,y_0) 的一个邻域，在此邻域内 $u(x,y)>0$（或 <0）. 从而在 $z_0=x_0+iy_0$ 的这个邻域内 $f(z)\neq 0$.

小结　函数连续的性质，即在此点的小邻域内连续，利用此性质就可以得到结果.

● 30. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的，即存在一个实常数 $M>0$，使在 z_0 的某一去心邻域内有 $|f(z)|\leqslant M$.

分析　掌握有界，有极限，连续的性质.

证明　由 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 根据极限的定义，对于 $\varepsilon<1$，相应地存在正数 δ，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时

$$|f(z)-A|<1 \Rightarrow |f(z)|=|f(z)-A+A|\leqslant |f(z)-A|+|A|<1+|A|.$$

取 $M=1+|A|\ (>0)$，可知在 z_0 的 δ 去心邻域内有 $|f(z)|\leqslant M$.

小结　函数在一点有极限，则在小邻域内有界，考查极限与有界的关系.

●31. 设 $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)$，$(z\neq 0)$. 试证当 $z\to 0$ 时 $f(z)$ 的极限不存在.

分析　掌握有界，有极限，连续的性质.

证明　令 $z=x+iy$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则

$$u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}\right)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

即　$u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，$v(x,y)=0$. 注意到 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}v(x,y)$ 存在，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在（沿 $y=kx$ 趋于零易知其极限随 k 变化），故当 $z\to 0$ 时 $f(z)$ 的极限不存在.

小结　$\frac{0}{0}$ 型的极限，利用复数的通用形式，代入即可.

● 32. 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

分析　掌握有界，有极限，连续的性质.

证明　令 $f(z)=\arg z$. 由于 $f(0)$ 无定义，所以 $f(z)=\arg z$ 在原点不连续.

设 $z_0\neq 0$ 为负实轴上任意一点，则 $f(z_0)=\arg z_0=\pi$，而且不难看出，当 z 从上半平面趋于 z_0 时，$f(z)=\arg z\to\pi$，即

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \mathrm{Im}z>0}}f(z)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ \mathrm{Im}z>0}}\arg z=\pi$$

当 z 从下半平面趋于 z_0 时，$f(z)=\arg z\to-\pi$，即

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \mathrm{Im}z<0}}f(z)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ \mathrm{Im}z<0}}\arg z=-\pi$$

故 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在，$f(z)$ 在 z_0 点不连续，再由 z_0 的任意性可知结论.

小结　考查连续的概念，对于特殊函数，结合本身的性质，与连续的性质，即可得到.

第二章

解析函数

内容提要

一、复变函数的导数与解析函数的概念

1. **复变函数的导数与微分**

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D，z_0，$z_0 + \Delta z \in D$. 若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，该极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，记作

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad ①$$

此时，称 $f'(z_0)\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}w = f'(z_0)dz$. 若 $f(z)$ 在 z_0 处的微分存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微. 若 $f(z)$ 在区域 D 内每点都可导（可微），则称它在 D 内可导（可微）. 与一元实变函数相同，复变函数可导与可微是等价的.

由于复变函数的导数定义在形式上与一元实变函数的导数定

义相同，因此，复变函数的求导法则也与一元实变函数的求导法则完全相同.

注意，由于导数定义中对极限式 ① 存在的要求是与 $\Delta z \to 0$ 的路径和方式无关，因此，复变函数导数的定义实际上比对一元实变函数导数的定义要求苛刻得多. 如果当 Δz 沿某一路径趋于 0 时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限不存在，或者沿两条不同路径趋于 0 时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 趋于不同的数，那么该函数在 z_0 处不可导. 这就为判断函数的不可导性提供了有效的方法.

同一元实变函数可导与连续的关系一样，复变函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 可导，则它必在该点连续；反之不成立.

2. 柯西 — 黎曼条件($C - R$ 条件)

(1) 若 $w = f(z)$ 在 z_0 点可导，则当 Δz 分别沿平行于坐标轴的路径趋于零时，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 必定要趋于同一个数(如图 2 — 1)，由此得到可导的一个必要条件，$C - R$ 条件：

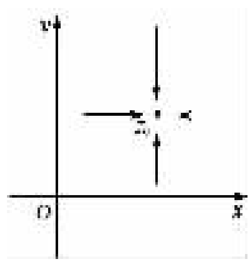

图 2 — 1

若函数 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 于点 $z = x + iy$ 可导，则在点 (x,y) 必有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad ②$$

式 ② 也称为 $C - R$ 方程，在极坐标系下，它的表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

由此可见,可导的复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 不是随意拼起来的,它们之间有密切的联系.

可用此命题的逆否命题来判断某些函数不可导,即:若 $f(x)$ 在 z_0 点不满足 $C-R$ 方程则 $f(z)$ 在 z_0 点不可导.

(2) 若 $f(z)$ 可导,则 $f(z)$ 的导数可写成以下四种形式:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

故当 $f(z)$ 可导时,仅由其实部或仅由其虚部就可求出 $f(z)$ 的导数来.

3. 解析函数

(1) 定义

如果 $f(z)$ 在点 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导,那么称 $f(z)$ 在 z_0 点解析. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析,那么称 $f(z)$ 在 D 内解析,或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数). 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析,那么称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

两个解析函数的和、差、积、商(除去分母为零的点)都是解析函数;解析函数的复合函数仍是解析函数.

(2) 函数解析的一个充分必要条件

定理　函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy$ 处可导的充要条件是:$u(x,y)$,$v(x,y)$ 在点(x,y) 处可微,而且满足柯西－黎曼(Cauchy－R$i$emann)方程(简称 C－R 方程):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

当函数满足 C－R 条件时,可按下列公式之一计算 $f'(z)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

注意:$XC-R$ 条件只是函数 $f(z)$ 可导的必要条件而并非充分条件.

如果考虑区域上的解析函数，由 C－R 条件就可以得到下面的结论：

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析（即在 D 内可导）的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内处处可微，而且满足 C－R 方程.

推论　设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内有定义，如果在 D 内 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的四个偏导数 u'_x,u'_y,v'_x,v'_y 存在且连续，并且满足 C－R 方程，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

（3）运算法则

① 导数的四则运算

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是区域 D 上的解析函数，则 $f(z)\pm g(z)$，$f(z)g(z)$，及 $\dfrac{f(z)}{g(z)}(g(z)\neq 0)$ 在 D 上解析，且有

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$
$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$
$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

② 复合函数的求导法则

设函数 $\xi=f(z)$ 在区域 D 内解析，函数 $w=g(\xi)$ 在区域 G 内的解析，又 $f(D)\subset G$（$f(D)$ 表示函数 $\xi=f(z)$ 的值域，也就是区域 D 的像），则复合函数 $w=g(f(z))=h(z)$ 在 D 内解析，且有

$$h'(z)=[g(f(z))]'=g'(f(z))f'(z).$$

③ 反函数的求导法则

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内单叶解析且 $f'(z)\neq 0$，又反函数 $z=f^{-1}(w)=\varphi(w)$ 存在且连续，则

$$\varphi'(w)=\left.\frac{1}{f'(z)}\right|_{z=\varphi(w)}=\frac{1}{f'(\varphi(w))}.$$

（4）复变函数可导与解析的判别方法

① 利用可导与解析的定义以及运算法则；

② 利用可导与解析的充要条件.

二、初等解析函数

1. 指数函数

定义： $e^z=\exp z=e^x(\cos y+i\sin y).$

主要性质有：

(1) **解析性：在** z **平面内处处解析，且** $(e^z)'=e^z$.

(2) **加法定理：** $\exp(z_1+z_2)=\exp z_1\cdot\exp z_2$.

(3) **周期性：** $\exp(z+2k\pi i)=\exp z\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

2. 对数函数

定义： $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z.$

主要性质有：

(1) **多值性：对数函数有无穷多个分支，其中** $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ **称为主值支，其余分支为：**

$$\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi i,\quad k=\pm1,\pm2,\cdots.$$

(2) **解析性：在除去原点和负实轴的** z **平面内处处解析，且**

$$(\mathrm{Ln}z)'=(\ln z)'=\frac{1}{z}$$

(3) **保持了实变对数函数的如下性质：**

$$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,\quad \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2.$$

但是， $\mathrm{Ln}z^n\neq n\mathrm{Ln}z(n>1)$，**并且"负数无对数"这个结论不成立.**

3. 乘幂 a^b 与幂函数

定义：设 a **为不等于零的一个复数，** b **为任意一个复数，我们定义乘幂** a^b **为** $e^{b\mathrm{Ln}a}$**，即**

$$a^b=e^{b\mathrm{Ln}a}.$$

因为 $\mathrm{Ln}a=\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)$ **是多值的，因而** a^b **也是多值的.**

如果 $a=z$ **为复变数，就得到一般的幂函数** $w=z^b=e^{b\mathrm{Ln}z}$**，当**

$b=n$ 与 $\frac{1}{n}$ 时，就分别得到通常的幂函数 $w=z^n$ 及 $z=w^n$ 的反函数 $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$.

z^b 的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的，且 $(z^b)'=bz^{b-1}$.

务必把 e 的 z 次幂 e^z（它一般是多值的）与指数函数 e^z（它一定是单值的）严加区分.

4. 三角函数与双曲函数

定义：
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

它们在复平面上处处解析，并且 $(\sin z)'=\cos z$，$(\cos z)'=-\sin z$. 实变数中的一些三角恒等式在此仍然成立. $\sin z$ 或 $\cos z$ 也同样分别具有周期性与奇偶性，但不再具有有界性，即不等式 $|\sin z|\leqslant 1$ 与 $|\cos z|\leqslant 1$ 不成立.

其它复三角函数如 $\mathrm{tg}z$，$\mathrm{ctg}z$ 等的定义与性质可仿照 $\sin z$ 与 $\cos z$ 讨论.

双曲正弦函数与双曲余弦函数

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

在复平面上处处解析，并且 $(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z$，$(\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z$. 实变数中一些双曲恒等式在此仍然成立. $\mathrm{sh}z$ 与 $\mathrm{ch}z$ 也分别具有奇偶性. 应该注意的是复双曲正弦与双曲余弦函数是以 $2\pi i$ 为周期的函数.

其它复双曲函数如 $\mathrm{th}z$，$\mathrm{ch}z$ 等的定义与性质可仿照 $\mathrm{sh}z$ 与 $\mathrm{ch}z$ 讨论.

5. 反三角函数与反双曲函数

定义：$\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$

$$\mathrm{Arccos}z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Arctg}z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

分别称为 z 的反正弦、余弦、正切函数.

定义：$\mathrm{Arsh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$

$$\mathrm{Arch}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

$$\mathrm{Arth}z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$

分别称为 z 的反双曲正弦、反双曲余弦、反双曲正切函数.

典型例题与解题技巧

【例 1】 指出下列各函数的解析区域，并求出其导数：

$$(1) f(z) = \frac{z^2}{z^2+1};(2) f(z) = \sin x \mathrm{ch} y + i\cos x \mathrm{sh} y.$$

解题分析 利用可导与解析的判别方法找出解析区域，然后用求导公式或 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 求出其导数.

解题过程 (1) 函数 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ 的分子与分母均为解析函数，所以 $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ 在除去分母为零的点 $z=\pm i$ 外是解析的. 又分子在 $z=\pm i$ 处不为零，故 $f(z)$ 的解析区域为复平面除去 $\pm i$ 两点，而且

$$f'(z) = \left(\frac{z^2}{z^2+1}\right)' = \frac{2z}{(z^2+1)^2}(z \neq \pm i)$$

(2) $u = \sin x \mathrm{ch} y, v = \cos x \mathrm{sh} y$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \mathrm{ch} y, \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \mathrm{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \mathrm{sh} y, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \mathrm{ch} y.$$

以上四个偏导在复平面上连续，故 u,v 可微，又满足 $C-R$ 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$，易得 $f(z)$ 在复平面上处处解析，且

$$f'(z) = u_x + iv_x = \cos x \mathrm{ch} y - i\sin x \mathrm{sh} y.$$

【例 2】 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，且满足下列条件之一，试证 $f(z)$ 在 D 中内是常数.

(1) $\overline{f(z)}$ 在 D 内也解析；

(2) $u=\mathrm{e}^{v}+1$.

分析 为了证明 $f(z)$ 在 D 内是常数，只要证明在 D 内它的实部 u（或虚部 v）是常数，或者 $f'(z)\equiv 0$，也就是要证明在 D 内 u（或 v）的一阶偏导数恒为 0. 对于(1)，由 $f(z)$ 及 $\overline{f(z)}$ 都在 D 内解析，故必满足 C－R 方程，从而不难得到所要证明的结论；对于(2)，由于 $u=\mathrm{e}^{v}+1$，所以只要证明 u 与 v 中有一个为常数就行了. 这也可利用 $f(z)$ 解析，满足 C－R 方程及上述等式得到.

证明 (1) 由 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 都在 D 内解析，必满足 C－R 方程得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

将上面两组等式分别相加，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

再利用导数公式及 C－R 方程，有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

故知 $f(z)$ 在 D 内是常数.

(2) 利用 C－R 方程及等式 $u=\mathrm{e}^{v}+1$ 可得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^{v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

从而有

$$(1+\mathrm{e}^{2v})\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

故 $\frac{\partial v}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$. 因此，$v$ 与 u 在 D 内都是常数，说明 $f(z)$ 在 D 内也是常数.

【例 3】 **证明**(1)$\overline{z}^2$;(2)$e^{\overline{z}}$;(3)$\sin\overline{z}$ **在复平面上不解析.**

分析 一般证明函数在复平面处处不可导或不解析多用函数不满足 C－R 条件来证明.

证明 (1) 因$\overline{z}^2=x^2-y^2-i2xy$,所以

$$u(x,y)=x^2-y^2,v(x,y)=-2xy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2y,\frac{\partial v}{\partial y}=-2x.$$

由此可知,$w=\overline{z}^2$ 仅在点(0,0)处 C－R 条件成立,所以 $w=\overline{z}^2$ 仅在点(0,0)处可导,而在整个复平面上不解析.

(2) 因 $e^{\overline{z}}=e^x(\cos y-i\sin y)$,所以

$$u=e^x\cos y,v=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y.$$

所以只有当 $y=k\pi\pm\pi/2(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,才有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

由此可见,$e^{\overline{z}}$ 在复平面上不解析.

(3) 由 $\sin\overline{z}=\sin x\operatorname{ch}y-i\cos x\operatorname{sh}y$,所以

$$u=\sin x\operatorname{ch}y,v=-\cos x\operatorname{sh}y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y,\frac{\partial v}{\partial y}=-\cos x\operatorname{ch}y,$$

因此,只有当 $x=k\pi\pm(\pi/2)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,才有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

可见 $\sin\overline{z}$ 在复平面上不解析.

【例 4】 **证明下列函数在 z 平面上解析,并分别求出其导数.**

(1)$f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$;

(2)$f(x)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$.

解题分析　利用 C—R 方程和导数运算法则.

解题过程　(1) 若令 $f(z)=u+iv$，则 u,v 具有连续偏导数. 故只要验证在 z 平面上 $C-R$ 方程成立.

$$u=e^x(x\cos y-y\sin y)$$

$$v=e^x(y\cos y+x\sin y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y)+e^x\cos y$$

$$=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y)$$

$$=-e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+x\sin y)+e^x\sin y$$

$$=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)$$

所以 $C-R$ 方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 在 z 平面上成立.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=e^x(\cos y+x\cos y-y\sin y)$$

$$+ie^x(\sin y+x\sin y+y\cos y)$$

$$=e^x[e^{iy}+xe^{iy}+iye^{iy}]$$

$$=e^{x+iy}[1+x+iy]$$

$$=e^z(1+z)$$

(2) $u=\sin x\ \mathrm{ch}y$，　$v=\cos x\mathrm{sh}y$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\mathrm{ch}y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\mathrm{sh}y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\mathrm{sh}y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\mathrm{ch}y,$$

所以 $C-R$ 方程在 z 平面上成立.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\cos x\ \mathrm{ch}y-i\sin x\ \mathrm{sh}y.$$

【例 5】 证明 $f(z)$ 在上半平面解析的充要条件是 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面解析.

分析 当 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 都解析时，$f(z)$ 必为常数. 故当 $f(z)$ 不是常数时，$f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 不可能同时解析. 但本例却指出：当 $f(z)$ 解析时，不论 $f(z)$ 是否为常数，$\overline{f(\bar{z})}$ 必解析；反过来也成立.

证明 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则

$$\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y).$$

先证必要性. 因为 $f(z)$ 解析，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

因此，

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)}=\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}=-\frac{\partial v(x,-y)}{\partial x}=\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial x}$$

两式表明 $\overline{f(\bar{z})}$ 的实部与虚部满足 C－R 条件，又显然 $u(x,-y)$ 与 $-v(x,-y)$ 可微，所以 $f(z)$ 在下半平面可微.

再证充分性. 若已知 $\overline{f(\bar{z})}$ 于下半平面解析，则由必要性中推出之等式，$\overline{\overline{f(\bar{\bar{z}})}}$ 必于上半平面解析，亦即 $f(z)$ 于上半平面解析.

【例 6】 证明不等式

$$|\operatorname{Im}(z)|\leqslant|\sin z|\leqslant e^{|\operatorname{Im}(z)|}$$

分析 利用正弦函数及不等式有关知识证明.

证明 令 $z=x+iy$，则题中不等式为

$$|y|\leqslant|\sin(x+iy)|\leqslant e^{|y|}$$

由正弦函数的定义

$$\begin{aligned}\sin(x+iy)&=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}\\&=\frac{1}{2i}(e^{-y+ix}-e^{y-ix})\\&=\frac{1}{2i}[(e^{-y}-e^{y})\cos x+i\sin x(e^{-y}+e^{y})]\end{aligned}$$

$$\therefore |\sin(x+iy)| \leqslant \frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(e^{|y|}+e^{|y|}) = e^{|y|}$$

$$|\sin(x+iy)| \geqslant \frac{1}{2}|e^{y}-e^{-y}| \geqslant |y|$$

∴ 原不等式成立.

历年考研真题评析

【题 1】 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，并且 $v=u^2$，试求 $f(z)$.（大连工学院 2006 年）

解题分析 利用 $C-R$ 条件求解.

解题过程 由 $C-R$ 条件及关系式 $v=u^2$ 可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y} \qquad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad ②$$

将式 ② 代入式 ①，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0$$

因为 $4u^2+1\neq 0$，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$

由 ② 有 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$，所以 $u=c$（常数），于是 $f(z)=u+iv=c+ic^2$ 为常数.

【题 2】 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明：

（1）若 $\arg f(z)$ 为一常数，则 $f(z)$ 恒为常数；

（2）若 $\overline{f(z)}$ 也在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 恒为常数.（东北大学 2005 年）

分析 利用解析函数的性质证明.

证明 （1）因为 $\arg z$ 在 D 内是一个常数，所以可设 $\arg z=\theta$（θ 为常数），则 $-\pi<\theta\leqslant\pi$.

① 若 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$,则 $u=0$,从而$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$,又因为 $f(z)$ 在 D 内解析,所以

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

从而有$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$,所以 v 为常数.

故 $f(z)$ 在 D 内为常数.

② 若 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,则 $\theta=\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$,于是有

$$\begin{cases}-v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}=0\\-v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

同上的讨论,可得 u,v 均为常数.

故 $f(z)$ 为常数.

③ 若$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$,则 $\theta=\pi+\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$

若 $-\pi<\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$,则 $\theta=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$

对于这两种情形的讨论与 ② 类似,均可得知 $f(z)$ 为常数.

综上所述,只要 $f(z)$ 在 D 内解析,且 $\arg z$ 为常数,就有 $f(z)$ 为常数.

(2) 因为 $f(z)$ 在 D 内解析,所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x} \qquad ①$$

又$\overline{f(z)}=u-iv$ 也在 D 内解析,所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x} \qquad ②$$

由 ① 与 ② 可得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

故 $f(z)$ 在 D 内为常数.

【题 3】 设 $z=x+iy$，$f(z)=\left(xe^x\cos y-ye^x\sin y+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(xe^x\sin y+ye^x\cos y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$，问 $f(z)$ 在哪几点对 z 可导?求出 $f'(z)$.(兰州大学 2005 年)

解题分析 利用可导的充要条件求解.

解题过程 设 u,v 分别表示 $f(z)$ 的实部、虚部，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x+1)e^x\cos y-ye^x\sin y-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(x+1)e^x\sin y+ye^x\cos y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(x+1)e^x\sin y-ye^x\cos y-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=(x+1)e^x\cos y-ye^x\sin y-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

故当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，即 $C-R$ 条件成立，且$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 的点都连续，因此 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 的点可导.

实际上，不难看出 $f(z)=ze^z+\dfrac{1}{z}$，从而当 $z\neq 0$ 时

$$f'(z)=(z+1)e^z-\frac{1}{z^2}.$$

【题 4】 若 $f(z)$，$g(z)$ 在单连通区域 D 内解析，α、$\beta\in D$，证明 $\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)dz=f(z)g(z)\big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta g(z)f'(z)dz$.(东北大学 2005 年)

分析 利用解析函数及导数的性质.

证明 因为 $f(z)$，$g(z)$ 在单连通区域 D 内解析，故 $f(z)\cdot g(z)$ 也在 D 内解析，且

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

所以 $f(z)\cdot g(z)$ 是 $f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$ 的原函数. 对 α、

$\beta \in D$,得

$$\int_{\alpha}^{\beta}[f'(z)g(z)+f(z)g'(z)]\mathrm{d}z=[f(z)g(z)]\big|_{\alpha}^{\beta}$$

即 $$\int_{\alpha}^{\beta}f(z)g'(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)\big|_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}g(z)f'(z)\mathrm{d}z$$

【题5】 验证 $g(z)=\sin z$ 在复平面上解析,而$\overline{g(z)}$ 在复平面上不解析.(东北大学 2005 年)

分析 用 $C-R$ 条件求解.

证明 $g(z)=\sin z$ 在复平面上解析,

因为 $\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$

$\mathrm{e}^{iz}=\mathrm{e}^{-y}(\cos x+i\sin x)$,$\mathrm{e}^{-iz}=\mathrm{e}^{y}(\cos x-i\sin x)$

所以$\overline{\sin z}=\sin x\mathrm{ch}y-i\cos x\mathrm{sh}y$

而$\dfrac{\partial}{\partial x}(\sin x\mathrm{ch}y)=\cos x\mathrm{ch}y$,$\dfrac{\partial}{\partial y}(-\cos x\mathrm{sh}y)=-\cos x\mathrm{ch}y$ 即

$\overline{\sin z}$ 不满足 $C-R$ 条件,故$\overline{g(z)}=\overline{\sin z}$ 在复平面上不解析.

课后习题全解

○ 1. 利用导数定义推出:

1)$(z^n)'=nz^{n-1}$(n 为正整数); 2)$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$.

证明 1)令 $f(z)=z^n$ $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$

用数学归纳法证:$(z^n)'=nz^{n-1}$

当 $n=1$ 时

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)-z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta z}=1=1\cdot z^{1-1}$$

即$(z^1)'=1\cdot z^{1-1}$ 成立.

设当 $n=k$ 时,有 $(z^k)'=kz^{k-1}$

则 $n=k+1$ 时

$$(z^n)'=(z^{k+1})'=(z\cdot z^k)'=z'\cdot z^k+z(z^k)'$$

$$= 1 \cdot z^k + z \cdot k \cdot z^{k-1} = z^k(k+1) = nz^{n-1}$$

由数学归纳法原理知：

$$(z^n) = nz^{n-1} \quad (n \text{ 为正整数})$$

2）令 $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1}{z+\Delta z} - \dfrac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta z}{z^2 + \Delta z \cdot z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z^2 + \Delta z \cdot z} = -\frac{1}{z^2}$$

◎ 2. **下列函数何处可导？何处解析？**

1）$f(z) = x^2 - iy$；　　2）$f(z) = 2x^3 + 3y^3 i$；

3）$f(z) = xy^2 + ix^2 y$；　　4）$f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$.

分析　在某点可导：验证是否满足 $C-R$ 方程即可. 在 z_0 解析：$f(z)$ 在点 z_0 及含 z_0 的某邻域内处处可导.

解　1）令 $u = x^2, v = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

满足　$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即　$$2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

所以 $f(z)$ 在直线 $x = -\dfrac{1}{2}$ 上可导，而在复平面上处处不解析.

2）$u = 2x^3, v = 3y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 9y^2$$

若　$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

有　$$6x^2 = 9y^2$$

即　$$\sqrt{2}x = \pm\sqrt{3}y$$

即只在$\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$上可导，但在复平面上处处不解析.

3) $u = xy^2, v = x^2 y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

满足 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $y^2 = x^2, 2xy = -2xy \Rightarrow y = \pm x, x = 0$ 或 $y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$

即只在 $z = 0$ 处可导，在复平面上处处不解析.

4) $u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故 $f(z)$ 在复平面上处处可导，处处解析.

◎ 3. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数：

1) $(z-1)^5$；　　2) $z^3 + 2iz$；

3) $\dfrac{1}{z^2 - 1}$；　　4) $\dfrac{az+b}{cz+d}$（c, d 中至少有一个不为 0）.

分析　考查关于连续、解析等基本性质.

解　1) $f(z) = (z-1)^5$

$f'(z) = 5(z-1)^4$，$f(z)$ 在复平面内处处解析.

2) $f(z) = z^3 + 2iz$

$f'(z) = 3z^2 + 2i$，$f(z)$ 在复平面内处处解析.

3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$

$f'(z) = \dfrac{-2z}{(z^2-1)^2}$，又 $z^2 - 1 = 0, z = \pm 1$

除 $z = \pm 1$ 点外，$f(z)$ 在复平面上处处解析.

4) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$（$c, d$ 中至少有一个不为 0）

$$f'(z)=\frac{a(cz+d)-(az+b)\cdot c}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

若 $c=0$,则处处解析;若 $c\neq 0$,$cz+d=0$,$z=-\dfrac{d}{c}$,则除 $z=\dfrac{-d}{c}$ 点外,$f(z)$ 在复平面上处处解析.

◯ 4. 求奇点.

1) $\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$;　　　　2) $\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$.

解　1) 由 $z(z^2+1)=0$ 得 $z=0$,$z=\pm i$

奇点:$0,\pm i$

2) 由 $(z+1)^2(z^2+1)=0$,得 $z=\pm i$,$z=-1$

奇点:$\pm i,-1$

◎ 5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同?判断函数的解析性有哪些方法?

分析　考查连续、解析等基本性质.

解　复变函数的可导性反映了函数在某一点的局部性质,而解析性则反映了函数在一个区域内的整体性质. 函数可以在某个区域内仅在一点处可导,在这个区域内的其他点均不可导,此时在这一点处不解析;而如果说函数在某一点处解析,则这个函数必定在这一点的某邻域内处处解析. 因此,函数在一点处解析与在这一点的领域内可导才是等价的.

判断函数的解析性有两种常用方法:(1) 是用定义,利用可导性判断解析性;(2) 是用定理:函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析 $\Leftrightarrow u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任一点 $z=x+iy$ 可微,且满足 C—R 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

◎ 6. 判断下列命题的真假. 若真,请给以证明;若假,请举例说明.

1) 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续,那么 $f'(z_0)$ 存在;

2）如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 解析；

3）如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导；

4）如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点；

5）如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导（指偏导数存在），那么 $f(z)=u+iv$ 亦可导；

6）设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内是解析的，如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在 D 内也是常数.

分析 考查关于连续解析等基本性质.

解 1）命题为假.

例如，$f(z)=x+2\mathrm{i}y$ 在复平面内任一点连续，但不满足 C—R 方程，故 $f'(z)$ 不存在.

2）命题为假.

例如，$f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 可导，但不解析.

3）命题为假.

例如，见上例，不解析的点叫奇点，但可能有导数.

4）命题为假.

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z-1}$，$g(z)=\dfrac{-1}{z-1}$

$z_0=1$ 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一奇点，但不是 $f(z)+g(z)=0$ 和 $f(z)/g(z)=-1$ 的奇点.

5）命题为假.

例如，令 $u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=xy$，则 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 均可导，但 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$，于是 $f(z)$ 不可导.

6）命题为真.

已知 $f(z)$ 在 D 内解析 $\forall z\in D$，有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

且满足 C-R 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

又 $u=$ 常数 $\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\Rightarrow v=$ 常数

故 $f(z)=u+iv=$ 常数.

7. 如果 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\mid f(z)\mid\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mid f(z)\mid\right)^2=\mid f'(z)\mid^2$$

分析　考查解析函数的性质，利用 $C-R$ 方程代入即可得到结果.

证明　由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 得

$$\mid f(z)\mid=\sqrt{u^2+v^2}$$

又由于 $f(z)$ 是解析函数

有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mid f(z)\mid=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mid f(z)\mid=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

所以
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\mid f(z)\mid\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mid f(z)\mid\right)^2$$

$$=\left(\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2+\left(\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2$$

（将 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 代入）

$$=\frac{(u^2+v^2)\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]}{u^2+v^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

又由 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$　可得

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$\text{左}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\text{右}$$

得证.

小结　解析函数的性质，涉及到函数求模，求偏导，求导数等，代入即可.

○ 8. 设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值.

解　设 $u=my^3+nx^2y, v=x^3+lxy^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nyx,\frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\frac{\partial v}{\partial y}=2lxy.$$

由 $C-R$ 方程
$$\begin{cases}2nyx=2lxy\\3x^2+ly^2=-(3my^2+nx^2)\end{cases}$$

所以 $n=l=-3, m=1$.

● 9. 证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

分析　运用复合函数求导的方法，再运用(－R 方程作转换).

证明　由 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

得
$$r^2=x^2+y^2,\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

再由复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2},\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left(-\frac{y}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}$$

由$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$,得

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

即
$$x\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-y\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad ①$$

由$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$,得

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}$$

即
$$y\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+x\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad ②$$

仅将$\frac{\partial u}{\partial r}$及$\frac{\partial v}{\partial r}$看做线性方程组中的$x_1,x_2$,其余看做系数$a_{11},a_{12}$等,联立求解①②,得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

小结　此题使用$C-R$方程时作转换要小心,最后要用到代数中解线性方程组的知识.

◎10. 证明:如果函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析,并满足下列条件之一,那么$f(z)$是常数.

1) $f(z)$恒取实值;

2) $\overline{f(z)}$在D内解析;

3) $|f(z)|$在D内是一个常数;

4) $\arg f(z)$在D内是一个常数;

5) $au+bv=c$,其中 a,b 与 c 为不全为零的实常数

分析 1) 使用 $C—R$ 方程和常数导数为 0 的知识.

2) 使用 $C-R$ 方程作转换.

3) 利用 2) 的结论和 $C-R$ 方程. 4) 利用 $C-R$ 方程.

5) 关键还是 $C—R$ 方程的使用.

证明 1) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\equiv$ 实值

则 $$v(x,y)\equiv 0 \text{ 且} \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$f(z)$ 解析,则 $f(z)$ 满足 $C—R$ 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow u=\text{常数}$$

$f(z)\equiv CC—R.$

注意:关键是使用 $C—R$ 方程.

由 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad ①$$

又 $\overline{f(z)}=u-iv$ 在 D 内解析得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad ②$$

由 ①、②,得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

所以 $$f(z)=C_1+iC_2\equiv C$$

注意:使用 $C-R$ 方程,和常数导数为零的知识.

3) 若 $|f(z)|\equiv C$

若 $f(z)=0$,$f(z)$ 是常数.

若 $|f(z)|\equiv C\neq 0$,则 $f(z)\neq 0$

于是 $$f(z)\cdot\overline{f(z)}=C^2$$

即 $$\overline{f(z)}=\frac{C^2}{f(z)}$$

也解析

于是由 2)，知　　$f(z)\equiv C$

注意：$f(z)\mid=0$ 与 $\neq 0$ 两种情况.

4) 设 $\arg f(z)=\theta\equiv C$，则

$$\frac{v}{u}=\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}C=C'\Rightarrow v=u\cdot C'$$

上式分别对 x 及 y 求偏导，再用 $C—R$ 方程

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=C'\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-C'\frac{\partial u}{\partial x}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-C'\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ C'\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

系数矩阵
$$\begin{vmatrix}1 & -C'\\ C' & 1\end{vmatrix}=1+C'^2\neq 0$$

由克拉默法则知
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

再由 C-R 方程得
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

于是
$$u\equiv C_1, v\equiv C_2$$

即
$$f(z)=C_1+iC_2$$

要注意克拉默法则的使用条件.

5) 若 $a\neq 0$，由 $au+bv=c$，得

$$u=\frac{c-bv}{a}$$

有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}$$

由 $C—R$ 方程
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

于是
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

即
$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2+1\right]\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow u \equiv C_1, v \equiv C_2$$

$$\Rightarrow f(z) = C_1 + iC_2$$

注意 $C-R$ **条件中,各个式的转化.**

◎ 11. **下列关系是否正确?**

1) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$;　　2) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$;

3) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

分析　**对等式左端和右端分别进行计算,再对两端进行比较.**

解　1) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ **正确. 因为**

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$= e^x[\cos(-y) + i\sin(-y)] = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

2) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ **正确. 因为**

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y$$
$$\overline{\cos z} = \cos x \operatorname{ch} y + i\sin x \operatorname{sh} y$$

而 $\cos \bar{z} = \cos\overline{(x+iy)} = \cos(x-iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i\sin x \operatorname{sh} y$

所以
$$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

3) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ **正确. 因为**

$$\overline{\sin z} = \overline{\sin(x+iy)} = \overline{\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y}$$
$$= \sin x \operatorname{ch} y - i\cos x \operatorname{sh} y$$
$$\sin \bar{z} = \sin(\overline{x+iy}) = \sin(x-iy)$$
$$= \sin x \operatorname{ch}(-y) + i\cos x \operatorname{sh}(-y)$$
$$= \sin x \operatorname{ch} y - i\cos x \operatorname{sh} y$$

所以
$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

注意:计算和各公式的应用,特别是和差化积.

○ 12. **找出下列方程的全部解:**

1) $\sin z = 0$;　　2) $\cos z = 0$;

3) $1 + e^z = 0$;　　4) $\sin z + \cos z = 0$.

解　1) **由** $\sin z = 0$,**得**

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

即
$$e^{2iz}=1$$
故
$$z=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$
2）由 $\cos z=0$ 得 $e^{iz}+e^{-iz}=0$，即 $e^{2iz}=-1$，故
$$z=\frac{\pi}{2}+n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$
3）由 $1+e^{z}=0$ 得 $e^{z}=-1$，故
$$z=(2n+1)\pi i\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$
4）由 $\sin z+\cos z=0$，得
$$\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})+\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=0$$
即
$$e^{2iz}=-i$$
故
$$z=n\pi-\frac{\pi}{4}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

○ 13. **证明**：

1) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$；

2) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$；

3) $\sin 2z=2\sin z\cos z$；

4) $\mathrm{tg}2z=\dfrac{2\mathrm{tg}z}{1-\mathrm{tg}^2 z}$；

5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$，$\cos(z+\pi)=-\cos z$；

6) $|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$，$|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$.

证明　1) $\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$
$$=\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$
$$=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$
$$\cos(z_1+z_2)=\frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$
所以
$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$
同理
$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$$

2）**左边** $=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=1=$ **右边**

3）**在** 1）$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$ **中，令** $z_1=z_2=z$ **可得** 3）.

4）**右边**$=\frac{2\sin z/\cos z}{1-\sin^2 z/\cos^2 z}=\frac{2\sin z\cdot\cos z}{\cos^2 z-\sin^2 z}$

$$=\frac{2\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\cdot\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)}{\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i}}{\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}}=\frac{\sin 2z}{\cos 2z}=\mathrm{tg}2z=\text{左边}$$

5）**左边** $=\sin\frac{\pi}{2}\cos(-z)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-z)=\cos z=$ **右边**

左边 $=\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi=-\cos z=$ **右边**

6）$|\cos z|^2=|\cos x\mathrm{ch}y-i\sin x\mathrm{sh}y|^2$

$$=(\cos x\mathrm{ch}y)^2+(\sin x\mathrm{sh}y)^2$$
$$=\cos^2 x\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\mathrm{sh}^2 y$$
$$=\cos^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+(1-\cos^2 x)\mathrm{sh}^2 y$$
$$=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$

同理 $|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$

● 14. **说明：**

1）**当** $y\to\infty$ **时，** $|\sin(x+iy)|$ **和** $|\cos(x+iy)|$ **趋于无穷大；**

2）**当** t **为复数时，** $|\sin t|\leqslant 1$ **和** $|\cos t|\leqslant 1$ **不成立.**

分析　**将原问题转化为另处一个较简单的问题.**

解　1）$\cos(x+iy)=\cos x\mathrm{ch}y-i\sin x\mathrm{sh}y$

$$|\cos(x+iy)|=\sqrt{\cos^2 x\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\mathrm{sh}^2 y}$$
$$=\sqrt{(1-\sin^2 x)(1+\mathrm{sh}^2 y)+\sin^2 x\mathrm{sh}^2 y}$$

$$=\sqrt{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}\geqslant|\operatorname{sh}y|$$

$\operatorname{sh}y$ **为奇函数,只须证:**$y>0$ **时,**$\operatorname{sh}y>y$**,则有** $|\operatorname{sh}y|>|y|$**,从而得**

$$|\cos(x+iy)|>|y|$$

即得　　$y\to\infty$ **时,**$|\cos(x+iy)|\to\infty$

下证:$y>0$ **时,**$\operatorname{sh}y>y$**,而这是个高等数学问题.**

令 $f(y)=\operatorname{sh}y-y, f'(y)=\operatorname{ch}y-1>0$

所以　　$f(y)\uparrow$ (**当** $y>0$ **时**)

而　　$f(0)=\operatorname{sh}0-0=0$

所以　　$f(y)>f(0)=0$

即　　$\operatorname{sh}y>y$　(**当** $y>0$ **时**)

关于 $|\sin(x+iy)|$ **为无穷大(当** $y\to\infty$**),也可类似证明.**

2) **当** t **为复数时,**$|\sin t|\leqslant 1$ **和** $|\cos t|\leqslant 1$ **不成立,以** $\cos z$ **为例**

$$\cos z\,|_{z=i}=\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2}=\frac{e^{-1}+e}{2}\approx 1.5471$$

所以　　$|\cos z|_{z=i}>1$

小结　关键在于找出一个较简单的问题来代替原问题.

◎15. **求** $\operatorname{Ln}(-i)$,$\operatorname{Ln}(-3+4i)$ **和它们的主值.**

分析　运用求主值的公式.

解　$\operatorname{Ln}(-i)=\ln|-i|+i\operatorname{Arg}(-i)+i(2k\pi)$

$$=0-\frac{\pi}{2}i+2k\pi i$$

$$=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

所以主值为 $-\frac{\pi}{2}i$.

$$\operatorname{Ln}(-3+4i)=\ln|-3+4i|+i\operatorname{Arg}(-3+4i)$$

$$=\ln5+i\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)+2k\pi i$$

$$= \ln 5 + i\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + 2k\pi i$$

$$= \ln 5 + i\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + (2k+1)\pi i$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

所以主值为 $\ln 5 + i(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3})$.

◎ 16. **证明对数的下列性质：**

1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$；

2) $\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.

分析 **运用公式将** z_1, z_2**，分开，再分别组合.**

证明 1)
$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) + 2k\pi i \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\operatorname{Arg} z_1 + 2l\pi i \\ &\quad + i\operatorname{Arg} z_2 + 2m\pi i \\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \qquad (k, l, m \in \mathbf{Z})\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2k\pi i \\ &= \ln|z_1| - \ln|z_2| + i\operatorname{Arg} z_1 - i\operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi i \\ &= \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 \qquad (k \in \mathbf{Z})\end{aligned}$$

注意：运用 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi i$

◎ 17. **说明下列等式是否正确**

1) $\operatorname{Ln} z^2 = 2\operatorname{Ln} z$； 2) $\operatorname{Ln}\sqrt{z} = \frac{1}{2}\operatorname{Ln} z$.

分析 **将** z **转化为** $re^{i\theta}$ **形式再进行比较.**

解 1) **不正确. 因为**

由 $z = re^{i\theta}, z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

$\operatorname{Ln} z^2 = \ln|z^2| + i(2\theta + 2k\pi)$

$\operatorname{Ln} z^2 = 2\ln r + i(2\theta + 2k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ①

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$

$2\operatorname{Ln} z = 2\operatorname{Ln} r + i(2\theta + 4k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ②

比较式①与式②发现：式①的值比式②的值要多一些.

2）不正确. 因为

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z=\frac{1}{2}\{\ln r+i(\theta+2k\pi)\}=\frac{1}{2}\mathrm{en}r+i\left(\frac{\theta}{2}+\mathrm{k}\pi\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$\sqrt{z}=\sqrt{r}\mathrm{e}^{\frac{\theta+2l\pi}{2}i}(l=0,1)$，即$\sqrt{z}$的两个值为$\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$与$=-\sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$。

于是 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$有两个无穷值：

第一组为

$$\mathrm{Ln}(\sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}=\ln\sqrt{r}+i\left(\frac{\theta}{2}+2k_1\pi\right)=\frac{1}{2}\ln r+i\left(\frac{\theta}{2}+2k_1\pi\right)$$

$$(k_1=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

第二组为

$$\mathrm{Ln}(\sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta+2\pi}{2}})=\ln\sqrt{r}+i\left(\frac{\theta}{2}+\pi+2k_1\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln r+i\left[\frac{\theta}{2}+(2k_2+1)\pi\right]$$

$$(k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

虽然当 $k=2k_1$，$(k_1=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 与第一组无穷值函数相同，当 $k=2k_2+1(k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 与第二组无穷值函数相同，但 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}$与$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$ 是两个不同的无穷值函数.

○18. 求 $\mathrm{e}^{1-i\frac{\pi}{2}}$，$\exp[(1+i\pi)/4]$，$3^i$ 和$(1+i)^i$ 的值.

解　1）$\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-i\mathrm{e}$

2）$\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]$

$$=\exp\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{4}i\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(1+i)$$

3) $3^i=e^{i\ln3}=e^{i[\ln3+2k\pi i]}=e^{i\ln3-2k\pi}$

$$=e^{-2k\pi}e^{i\ln3}=e^{-2k\pi}(\cos\ln3+i\sin\ln3)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

4) $(1+i)^i=e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i\{\ln|1+i|+i[\mathrm{Arg}(1+i)+2k\pi]\}}$

$$=e^{i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+i2k\pi)}=e^{i\ln\sqrt{2}+i^2(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$$

$$=e^{i\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}}$$

$$=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\left(\cos\frac{\ln2}{2}+i\sin\frac{\ln2}{2}\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

◎19. **证明：** $(z^a)'=az^{a-1}$，**其中** a **为实数.**

分析 将 z 转化为 e 的指数形式，再用复合函数求导.

证明 $(z^a)'=(e^{a\mathrm{Ln}z})'=e^{a\mathrm{Ln}z}\dfrac{d}{dz}(a\ln z)=z^a\cdot a\cdot\dfrac{1}{z}=az^{a-1}$

◎20. **证明：**

1) $\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=1$；　　2) $\mathrm{sh}^2z+\mathrm{ch}^2z=\mathrm{ch}2z$；

3) $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2$；

$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$.

分析 还是将 sh 和 ch 转化为 e^z 和 e^{-z} 的和与差.

证明 1) $\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=\left(\dfrac{e^{-z}+e^z}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2$

$$=\frac{e^{-2z}+e^{2z}+2}{4}-\frac{e^{-2z}+e^{2z}-2}{4}=1$$

2) $\mathrm{sh}^2z+\mathrm{ch}^2z=\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2$

$$=\frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4}$$

$$=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=\mathrm{ch}2z$$

3) $\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2$

$$=\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$

$$=\frac{2e^{z_1}e^{z_2}-2e^{-(z_1+z_2)}}{4}=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\mathrm{sh}(z_1+z_2)$$

$\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$

$$=\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$

$$=\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\mathrm{ch}(z_1+z_2)$$

◎21. **解下列方程：**

1) $\mathrm{sh}z=0$；　　2) $\mathrm{ch}z=0$；　　3) $\mathrm{sh}z=\mathrm{i}$.

分析　**将** sh **和** ch **转化为三角函数形式.**

解　1) $\mathrm{sh}z=\frac{1}{i}\sin iz=-i\sin iz$，$\mathrm{sh}z=0$

即

$$\sin iz=0$$

由　$\sin iz=\sin[i(x+iy)]=\sin(-y+ix)$

$=\sin(-y)\mathrm{ch}x+i\cos y\mathrm{sh}x=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(-y)\mathrm{ch}x=0 & ①\\ \cos y\mathrm{sh}x=0 & ②\end{cases}$$

在式①中，$\mathrm{ch}x\neq0\Rightarrow\sin y=0\Rightarrow y=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$**代入**

式②$\cos(k\pi)\mathrm{sh}x=0$，$(\pm1)\mathrm{sh}x=0$

$\Rightarrow\mathrm{sh}x=0\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow z=x+\mathrm{i}y=0+ik\pi=k\pi\mathrm{i}$　　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2) $\mathrm{ch}z=\cos(iz)=0$

$\Rightarrow\cos(iz)=\cos[i(x+iy)]=\cos(-y+ix)$

$=\cos(-y)\mathrm{ch}x-i\sin(-y)\mathrm{sh}x$

$=\cos y\mathrm{ch}x+i\sin y\mathrm{sh}x=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{ch}x\cos y=0 & ③\\ \sin y\mathrm{sh}x=0 & ④\end{cases}$$

$\mathrm{ch}x\neq0$，**由式③**$\Rightarrow\cos y=0$

$\Rightarrow y=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1\cdots$

代入式④，得 $\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sh}x=0$

$\Rightarrow(\pm1)\operatorname{sh}x=0\Rightarrow\operatorname{sh}x=0\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow z=x+\mathrm{i}y=0+i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=i\ \frac{\pi+2k\pi}{2}=\frac{2k+1}{2}\pi i$

$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

3)由 1)的推导过程知

$\operatorname{sh}z=-i\sin iz=(-i)(-\sin y\operatorname{ch}x+i\cos y\operatorname{sh}x)=i$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin y\operatorname{ch}x=1 & ⑤\\ \operatorname{sh}x\cos y=0 & ⑥\end{cases}$$

由式⑥，若 $\operatorname{sh}x=0$，得

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow x=0$$

将 $x=0$ 代入式⑤得

$1\cdot\sin y=1\Rightarrow y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

若 $\cos y=0$，得 $y=k\pi+\frac{\pi}{2}$，代入式⑤，得

$$\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ch}x=1$$

$$\Rightarrow\operatorname{ch}x=\pm1$$

又 $\operatorname{ch}x>0$ 恒成立，舍去 $\operatorname{ch}x=-1$

$\Rightarrow\operatorname{ch}x=1\Rightarrow x=0,y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z=x+iy=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)i\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

○22. 证明教材中式(2.3.19)与(2.3.20).

证明 $\operatorname{ch}iy=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\frac{\cos y+i\sin y+\cos y-i\sin y}{2}=\cos y$

$\operatorname{sh}iy=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2}=\frac{\cos y+i\sin y-\cos y+i\sin y}{2}=i\sin y$

$\operatorname{ch}iy=\cos y,\operatorname{sh}iy=i\sin y$

(2.3.19)得证.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x+\mathrm{i}y)&=\cos i(x+\mathrm{i}y)=\cos(-y+\mathrm{i}x)\\
&=\cos(-y)\cos ix-\sin(-y)\sin ix\\
&=\cos y\operatorname{ch}x+i\sin y\operatorname{sh}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x+\mathrm{i}y)&=i\sin[(x+\mathrm{i}y)(-\mathrm{i})]=i\sin(y-\mathrm{i}x)\\
&=i\sin y\cos ix-i\cos y\sin ix\\
&=\operatorname{sh}x\cos y+i\operatorname{ch}x\sin y
\end{aligned}
$$

(2.3.20)**得证.**

●23. **证明** $\operatorname{sh}z$ **的反函数** $\operatorname{Arsh}z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$.

分析 用 $z=\operatorname{sh}\omega$,**然后将** $\operatorname{sh}\omega$ **用指数的组合写出,再求出** z.

证明 设 $z=\operatorname{sh}w$,则

$$w=\operatorname{Arsh}z$$

又 $z=\operatorname{sh}w=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{w}-\mathrm{e}^{-w})$,**于是**

$$\mathrm{e}^{2w}-2z\mathrm{e}^{w}-1=0$$

$$\mathrm{e}^{w}=z+\sqrt{z^2+1}$$

$$w=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$$

即 $$\operatorname{Arsh}z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$$

小结 这里用到解一元二次方程的知识.

● *24. **已知平面流速场的复势** $f(z)$ **为**

1) $(z+\mathrm{i})^2$; 2) z^3; 3) $\dfrac{1}{z^2+1}$.

求流动的速度以及流线和等势线的方程.

分析 **求出** $f'(z)$ **和** $\overline{f'(z)}$ **然后用公式**

求流动的速度以及流线和等势线的方程.

解 1) $f(z)=(z+i)^2=(x+y\mathrm{i}+\mathrm{i})^2$

$$=x^2-(y+1)^2+2x(y+1)i$$

$f'(z)=2(z+i)$ $v=\overline{f'(z)}=2(\bar{z}-i)=2x-2(y+1)i$

流函数 $$\Psi(x,y)=2x(y+1)$$

流线方程 $x(y+1)=c_1$ **即** $y=\dfrac{c_1}{x}-1$

势函数 $\varphi(x,y)=x^2-(y+1)^2$

等势线方程 $x^2-(y+1)^2=c_2$

速度方程为 $v(z)=2(\bar{z}-i)$

2) $f(z)=z^3=(x+yi)^3$

$$=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

$$f'(z)=3z^2=3(x^2-y^2+2xyi)$$

$$v=\overline{f'(z)}=3\bar{z}^2=3(x^2-y^2-2xy\mathrm{i})$$

流函数 $\Psi(x,y)=3x^2y-y^3$

流线方程 $(3x^2-y^2)y=c_1$

势函数 $\varphi(x,y)=x(x^2-3y^2)$

等势线方程 $x(x^2-3y^2)=c_2$

速度方程为 $v(z)=3\bar{z}^2$

3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{x^2-y^2+1-2xyi}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

$$f'(z)=-\frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

$$v=\overline{f'(z)}=\frac{-2(x-yi)(x^2-y^2+1+2xyi)}{[(x^2+y^2+1)^2+4x^2y^2]^2}$$

流函数 $\Psi(x,y)=\dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

流线方程 $\dfrac{xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=c_1$

势函数 $\varphi(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

等势线方程 $\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=c_2$

速度方程式 $v(z)=-\dfrac{2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$

小结　注意各公式的运用及计算.

第三章

复变函数的积分

内容提要

一、复变函数积分的概念

1. 复积分的概念与性质

设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 内，C 是 D 内起点为 α 终点为 β 的一条光滑的（或分段光滑的）有向曲线，把曲线 C 任意分成 n 个弧段，设分点为

$$\alpha=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_{k-1},z_k,\cdots,z_n=\beta,$$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}\ z_k}(k=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 ξ_k，并作和式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k.$$

这里 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，用 Δs_k 表示弧 $\overset{\frown}{z_{k-1}\ z_k}$ 的长度，$\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta s_k\}$. 当 $\delta\to 0$ 时，如果不论对 C 的任何分法及 ξ_k 的取法如何，S_n 有惟一极限，那么称这极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记住

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k.$$

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内连续，则上述积分存在，而且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

复积分有许多与高等数学中曲线积分相似的性质，如

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C |f(z)||\mathrm{d}z|=\int_C |f(z)|\mathrm{d}s\leqslant ML$$

这里 L 为有向曲线 C 的长度，$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$，$|\mathrm{d}z|$ 表示弧长的微分，即

$$|\mathrm{d}z|=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\mathrm{d}s.$$

2. 复变函数的计算

(1) 化为两个二元实变函数的第二类线积分：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y;$$

(2) 利用曲线 C 的参数方程将它化为定积分，设积分路径 C 由参数方程 $z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，起点 A 对应于 α，终点 B 对应于 β，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}(z)=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

二、柯西－古萨基本定理

1. 柯西－古萨基本定理

设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析，C 为 B 内任一闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

2. 基本定理的推广

(1) 设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析，在闭区域 $\overline{B}$ 上连续，C 为 B 的边界曲线，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(2) 复合闭路定理　设 $f(z)$ 在多连通域 D 内解析，C 为 D 内

任一简单闭曲线，$C_1, C_2\cdots, C_n$ 是 C 内的简单闭曲线，它们互不包含也互不相交，并且以 $C, C_1 C_2, \cdots C_n$ 为边界的区域全含于 D 内，则

① $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C k} f(z)\mathrm{d}z$，其中 C 与 C_k 均取正向；

② $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，其中 Γ 为由 C 及 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 所组成的复合闭路.

3. **不定积分与原函数**

若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 是 D 内的光滑曲线，则积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 只与 C 的起点 z_0 和终点 z 有关，固定起点 z_0，则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是 D 内的单值函数.

(1) $F(z)$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$，则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数.

(2) 若 $F(z)$ 是 $f(\xi)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}z = F(\xi) - F(z_0).$$

这与定积分中的牛顿—莱布尼兹公式类似，且有与之类似的分部积分公式

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)\mathrm{d}z$$

和换元公式

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z_1} f[\varphi(z)]\varphi'(z)\mathrm{d}z &= \int_{z_0}^{z_1} f[\varphi(z)]\mathrm{d}\varphi(z)\\ &= F[\varphi(z_1)] - F[\varphi(z_0)]\end{aligned}$$

其中，$\varphi(z)$ 是单值解析函数.

三、柯西积分公式

1. **柯西积分公式**

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内任一正向简单闭曲线. 其

内部完全含于 D，z_0 为 C 内任意一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

柯西积分公式给出了解析函数 $f(z)$ 的一个积分表达式. 它表明，只要 $f(z)$ 在区域边界上的值一经确定，那么它在区域内部任一点处的值就完全确定. 它反映了解析函数在区域内部的值与其在区域边界上的值之间的密切关系，是解析函数的重要特性.

2. 高阶导数公式

在柯西积分公式同样的条件下，我们有

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \qquad (n=1,2,\cdots).$$

高阶导数公式表明，在区域 D 内的解析函数，其导函数仍是 D 内的解析函数，而且具有任意阶导数. 这是解析函数区别于可微实变函数的又一重要特性.

利用上述两个公式，我们可以将教材第三章 §1 例 2 中的公式推广到一般情形：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i, n=0,\\ 0, n\neq 0.\end{cases}$$

其中 C 为包含 z_0 的任一简单正向闭曲线.

四、解析函数与调和函数

1. 定义

(1) 调和函数：如果二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯(Laplace)方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

若 $f(z)=u+iv$ 为解析函数. 则其实部 u 和虚部 v 都是调和函数. 反之，若 u,v 为任意二个调和函数，则 $u+iv$ 不一

定是解析函数.

(2) 共轭调和函数:设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数,我们把使 $u+iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

若 v 是 u 的共轭调和函数,则 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

2. 关系

任何在区域 D 内解析的函数,它的实部和虚部都是 D 内的调和函数;且虚部为实部的共轭调和函数.

调和函数在诸如流体力学和电磁场理论等实际问题中,有着重要的应用.又由于解析函数与调和函数的密切联系,使我们可以借助于解析函数的理论去解决调和函数的问题.

3. 求解方法

已知调和函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$ 求解析函数 $f(z)=u+iv$ 的方法

(1) 不定积分法

因为　$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

即　$f'(z)=u_x-iu_y=\mathrm{u}(z)$, $f'(z)=v_y+iv_x=v(z)$

所以

$$f(z)=\int \mathrm{u}(z)\mathrm{d}z+c$$

$$f(z)=\int v(z)\mathrm{d}z+c$$

(2) 线积分法

若已知实部 $u=u(x,y)$,利用 C-R 方程可得 $\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$,故虚部为

$$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C.$$

由于该线积分与路径无关,可选简单路径(如折线)计算它,其中 (x_0,y_0) 与 (x,y) 为 B 内的点.若已知虚部 v,可用类似

方法求得实部 u.

典型例题与解题技巧

【例 1】 计算积分 $\oint_c (z-a)^n \mathrm{d}z$,其中 c 为不经过点 a 的正向简单闭曲线,n 为整数.

解题分析 此例由于没有明确给出积分路径 c,我们必须就点 a 与 c 的位置关系以及 $(z-a)^n$ 的解析情况,利用复积分基本定理与复积分计算公式来完成此题.

解题过程 当 $n\geqslant 0$ 时,函数 $(z-a)^n$ 在复平面内处处解析,所以由柯西—古萨定理得 $\oint_c f(z)\mathrm{d}z=0$. 同样,当 a 不在 c 内时,对任何整数 n,$(z-a)^n$ 在以 c 为边界的闭区域上解析,从而 $\oint_c (z-a)^n \mathrm{d}z=0$.

下面仅讨论 $n<0$ 且 a 在 c 内的情形.

当 a 在 c 内部时,则在 c 内挖去 a 的邻域:$|z-a|<\rho$,由复合闭路定理及复积分计算公式得

$$\oint_c (z-a)^n \mathrm{d}z=\oint_{|z-a|=\rho}(z-a)^n \mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\rho^n \mathrm{e}^{in\theta}\cdot \rho i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

而当 $n=-1$ 时 $\quad \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta=2\pi$

当 $n\neq -1$ 时 $\quad \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{(n+1)i}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0$

故上述讨论可总结如下:

$$\oint_c (z-a)^n \mathrm{d}z=\begin{cases}0, & n\neq -1\\ 2\pi i, & n=-1,a\text{ 在 }c\text{ 内}\\ 0, & n=-1,a\text{ 不在 }c\text{ 内}\end{cases}$$

【例 2】 计算积分 $\oint_c \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$.

(1) $C:|z+1|=\frac{1}{2}$；

(2) $C:|z-1|=\frac{1}{2}$；

(3) $C:|z|=2$.

解题分析　**计算积分时用柯西积分公式及复合闭路定理**

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z+1)(z-1)}$$

解题过程　(1) $$\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z=\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

(2) **令** $f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}$，**则**

$$\oint_C\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi i f(1)$$

$$=2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

(3) **由复合闭路定理**

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z=\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z+\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i=\sqrt{2}\pi i$$

【例 3】　证明下列命题：

(1) **柯西不等式**　设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$z_0 \in D$，圆周 $C_r: |\zeta - z_0| = r$ 及其内部全含于 D，则 $|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \dfrac{n!M(r)}{r^n}$，其中 $M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$；

(2) **刘维尔(Liouville)定理**　若 $f(z)$ 在复平面上解析且有界，则 $f(z)$ 必恒为常数.

分析　(1) 柯西不等式是关于在 D 内的解析函数的 n 阶导数的不等式，因此，它的证明需要利用解析函数的高阶导数公式. 由于该公式是关于 $f^{(n)}(z_0)$ 的积分表达式，所以在估计 $|f^{(n)}(z_0)|$ 的过程中还要利用积分的不等式性质.

(2) 为了证明 $f(z)$ 在复平面上恒为常数，只要证明 $f'(z) \equiv 0$. 为此，利用(1)中的柯西不等式可得

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M(r)}{r} \leqslant \frac{M}{r}$$，其中 M 为 $|f(z)|$ 在复平面上的上界. 再令 $r \to +\infty$，即可证明该结论.

证明　(1) 应用高阶导数公式与积分的不等式性质可得，

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{(n+1)}}\mathrm{d}z\right| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\mathrm{d}s \leqslant \frac{n!}{2\pi}\ \frac{M(r)}{r^{n+1}}\oint_{C_r}\mathrm{d}s \\
&= \frac{n!}{2\pi}\ \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M(r)}{r^n}
\end{aligned}$$

(2) 设 $|f(z)| \leqslant M$，z_0 为复平面上的任意一点. 由于对任何 r，$M(r) \leqslant M$，故由柯西不等式知，对任何 r 都有

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r}$$

令 $r \to +\infty$，即得 $f'(z_0) = 0$. 根据 z_0 在复平面上的任意性，所以在复平面上恒有 $f'(z) = 0$，从而得知 $f(z)$ 恒为常数.

注　柯西不等式和刘维尔定理在复变函数中有许多重要的应用，因而是两个重要的结论.

【例 4】　求积分 $I=\oint_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz$ 的值，其中 C 为 $|z|=r$，$r\neq 1,2$.

解题分析　利用解析及复合闭路定理.

解题过程　(1) 当 $0<r<1$ 时，设 $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$，那么 $f(z)$ 在 C 内解析．所以

$$I=\oint_C \frac{f(z)}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(0)$$

而

$$f''(z)=-\frac{6z^2-6z+6}{(z^2-z-2)^3},\quad f''(0)=-\frac{3}{4}$$

所以

$$I=-\frac{3}{4}\pi i$$

(2) 当 $1<r<2$ 时，作圆 C_0、C_1，如图 3－1(a)，这时，根据复合闭路定理，得

$$\begin{aligned}I&=\oint_{C_0}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}+\oint_{C_1}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}\\&=-\frac{3\pi i}{4}+2\pi i g(-1)\qquad\left(g(z)=\frac{1}{z^3(z-2)}\right)\\&=-\frac{3\pi i}{4}+2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]_{z=-1}\\&=-\frac{3\pi i}{4}+\frac{2\pi i}{3}=-\frac{1}{12}\pi i\end{aligned}$$

(3) 当 $r>2$ 时，作圆 C_0、C_1、C_2，如图 3－1(b)，这时

$$I=\oint_{C_0}+\oint_{C_1}+\oint_{C_2}$$

右端第一、第二两个积分的和就是(2)中的结果，即等于

$-\frac{\pi i}{12}$. 在右端第三个积分中，设

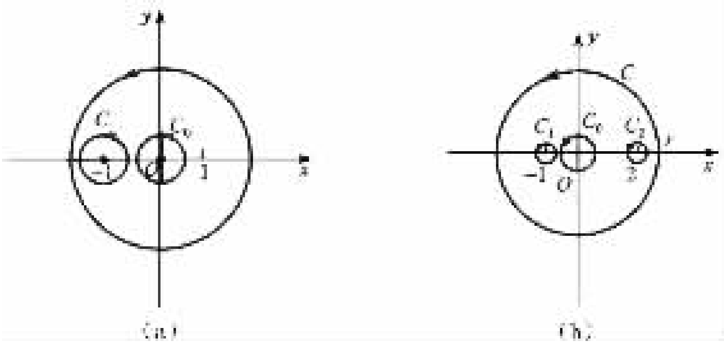

图 3－1

$$f(z)=\frac{1}{z^3(z+1)}$$

这个函数在 C_2 内处处解析，根据柯西积分公式，有

$$\oint_{C_2}=\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i f(2)=2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z+1)}\right]_{z=2}=\frac{\pi i}{12}$$

所以

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{12}\pi i+\frac{1}{12}\pi i=0$$

【例 5】 设 $u=x^2-y^2+xy$ 为调和函数，试求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 及解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

解题分析 本题有三种解法：利用 $C-R$ 条件；线积分法；不定积分法. 我们在这里用 $C-R$ 条件来解题.

解题过程 利用 $C-R$ 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

故 $u(x,y)$ 满足 Laplace 方程，又

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$$

所以 $v=\int(2y-x)\mathrm{d}x+\varphi(y)=2xy-\dfrac{x^2}{2}+\varphi(y)$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+\varphi'(y)=2x+y$$

$$\varphi'(y)=y,\quad \varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C$$

故　$v(x,y)=2xy-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+C$　（C 为任意常数）

所以 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$=(x^2-y^2+xy)+i(2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}y^2)+iC$$

$$=(x^2+2ixy-y^2)-\frac{1}{2}i(x^2+2ixy-y^2)+iC$$

$$=(x+iy)^2-\frac{1}{2}i(x+iy)^2+iC$$

$$=\frac{1}{2}(2-i)z^2+iC$$

【例 6】　设 $H(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，$f(z)=u+iv$ 是 $z=x+iy$ 的解析函数，试证明

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right)\cdot|f'(z)|^2$$

并由此推证，对任意的 $p>0$ 有

$$\frac{\partial^2|f(z)|^p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^p}{\partial y^2}=p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

分析　由复合函数求导法则结合解析函数 $f(z)$ 的性质，如 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 等可直接验证结论. 然后把要推证的结果与所得结论相比较，取 $H(x,y)=|f(z)|^p=(u^2+v^2)^{p/2}$ 即可.

证明　因 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，所以 v 为 u 的共轭调和函

数而且 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$.

于是由 $\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

（在$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$中将 x 换为 y 即可）

得
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$
$$=\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial H}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$+\frac{\partial H}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right)\cdot|f'(z)|^2$$

若令 $H(x,y)=|f(z)|^p=(u^2+v^2)^{p/2}$，则

$$\frac{\partial^2|f(z)|^p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^p}{\partial y^2}$$
$$=\left[\frac{\partial^2(u^2+v^2)^{p/2}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(u^2+v^2)^{p/2}}{\partial v^2}\right]\cdot|f'(z)|^2$$
$$=p^2(u^2+v^2)^{\frac{p-2}{2}}|f'(z)|^2$$
$$=p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$$

历年考研真题评析

【题1】 计算$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，其中$C$是不经过0与1的闭光滑曲线.

（大连工学院2005年）

解题分析　分情况讨论解决此题.

解题过程　分以下四种情况讨论：

1° 若封闭曲线C既不包含0也不包含1，则$f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}$在$C$内解析，由柯西－古萨基本定理，有

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = 0$$

2° 若0在C内而1在C外[如图3－2(a)]，则$f(z)=\frac{e^z}{(1-z)^3}$在C内解析，据柯西积分公式有

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \int_C \frac{e^z/(1-z)^3}{z}dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0} = 2\pi i$$

3° 若1在C内而0在C外，则$f(z)=\frac{e^z}{z}$在C内解析，据高阶导数公式有

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \int_C \frac{e^z/z}{(1-z)^3}dz = \int_C -\frac{e^z/z}{(z-1)^3}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}[-f''(1)]$$

$$= \pi i \left.\frac{(z^2-2z+2)e^z}{-z^3}\right|_{z=1}$$

$$= -e\pi i$$

4° 若0和1都在C内，则分别以0,1为圆心，以$\rho>0$为半径作圆C_1,C_2，使C_1和C_2也在C内[如图3－2(b)]，且C_1与C_2互不相交，互不包含. 据复合闭路定理有

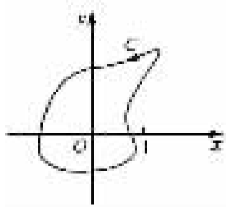

图 3－2(a)

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$$

积分 $\displaystyle\int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ 即为 2° 的结果 $2\pi i$，

$\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$ 即为 3° 的结果 $-e\pi i$，

所以 $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = (2-e)\pi i$

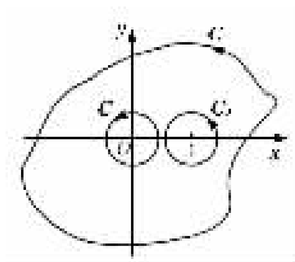

图 3－2(b)

【题 2】 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n}dz$

其中 $r>0$，n 是整数，$|a|\neq r$.（复旦大学 2005 年）

解题分析 利用柯西定理计算积分.

解题过程 (1) $|a|>r$ 时，$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}$ 在 $|z|\leqslant r$ 上解析，

所以

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0$$

(2) $|a|<r$ 时，a 属于区域 $|z|\leqslant r$，

$$\oint_{|z|=r}\frac{1}{(z-a)^n}dz=\begin{cases}2\pi i, n=1\\ 0, n\neq 1\end{cases}$$

【题 3】 如果 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 上解析，在 $|z|=a$ 上，有 $|f(z)|>m$，且 $|f(0)|<m$，其中 a 及 m 为正数. 证明：$f(z)$ 在 $|z|<a$ 内至少有一个零点.（东北大学 2005 年）

分析　用反证法.

证明　假设 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 内无零点，已知在 $|z|=a$ 上，$|f(z)|>m>0$，且 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 上解析，则 $\frac{1}{f(z)}$ 在 $|z|\leqslant a$ 上也解析，由 Cauchy 积分公式知：

$$\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=a}\frac{\frac{1}{f(z)}}{z-0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=a}\frac{1}{zf(z)}dz$$

所以
$$\left|\frac{1}{f(0)}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=a}\frac{1}{zf(z)}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\oint_{|z|=a}\frac{1}{|zf(z)|}dz<\frac{2\pi a}{2\pi ma}=\frac{1}{m}$$

即 $|f(0)|\geqslant m$，这与已知 $f(0)<m$ 矛盾，得证.

【题 4】 设 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$，

(1) 试证明 $u(x,y)$ 是复平面 C 上调和函数；

(2) 求 C 上一个解析函数，使其实部恰为 $u(x,y)$.（吉林大学 2005 年）

解题分析　此题考查知识点为调和函数及 C－R 条件.

解题过程　$u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x[(x+1)\cos y-y\sin y]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x[(x+2)\cos y-y\sin y]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x[(x+1)\sin y+y\cos y]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\mathrm{e}^x[(x+2)\cos y-y\sin y]$$

即
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

故 $u(x,y)$是复平面 C 上调和函数.

(2)设 $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$为 C 上一个解析函数,则由 $C-R$ 条件,有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x[(x+1)\cos y-y\sin y]$$

$$\begin{aligned} v &= \int \mathrm{e}^x[(x+1)\cos y-y\sin y]\mathrm{d}y+\varphi(x) \\ &= \mathrm{e}^x[x\sin y+y\cos y]+\varphi(x) \end{aligned}$$

且
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以
$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^x[(x+1)\sin y+y\cos y]+\varphi'(x) \\ &=\mathrm{e}^x[(x+1)\sin y+y\cos y] \end{aligned}$$

故
$$\varphi'(x)=0,\quad \varphi(x)=c$$
$$v(x,y)=\mathrm{e}^x[x\sin y+y\cos y]+c$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= u(x,y)+iv(x,y) \\ &= \mathrm{e}^x[(x+iy)\cos y+(x+iy)i\sin y]+ic \\ &= z\mathrm{e}^z+ic \end{aligned}$$

【题 5】 设 $u(z)$是$\{0<|z|<\infty\}$上的调和函数,满足 $u(z)=u(|z|)$,试求 $u(z)$的一般形式.(复旦大学 2006 年)

解题分析 利用高阶求导及调和函数的性质求解.

解题过程 令 $z=x+iy$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1,\dfrac{\partial z}{\partial y}=i$,

由 $u(z)=u(|z|)$,得

$$\begin{cases} u_x=u'(z)=u'(|z|)\dfrac{x}{|z|} \\ u_y=u'(z)=u'(|z|)\dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

$$\text{从而}\begin{cases} u_{xx}=u''(z)=u''(|z|)\dfrac{x^2}{|z|^2}+u'(|z|)\cdot\dfrac{y^2}{|z|^3} \\ u_{yy}=-u''(z)=u''(|z|)\dfrac{y^2}{|z|^2}+u'(|z|)\cdot\dfrac{x^2}{|z|^3} \end{cases}$$

因为 u 为调和函数，所以

$$u_{xx}+u_{yy}=u''(|z|)+\frac{u'(|z|)}{|z|}=0$$

从而
$$\frac{u''(|z|)}{u'(|z|)}=-\frac{1}{|z|}$$

$$u'(|z|)=\frac{c}{|z|}\Rightarrow u(|z|)=c\ln|z|+d$$

易证该函数为调和函数.

又 $u(z)=u(|z|)$，所以 $u(z)$ 的一般形式为

$$u(z)=c\ln|z|+d$$

课后习题全解

○1. 沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+\mathrm{i}}z^2\mathrm{d}z$.

1) 自原点至 $3+i$ 的直线段；

2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 沿直向上至 $3+i$；

3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $3+i$.

解 1) 所给路线的参数方程为：$z=(3+i)t,0\leqslant t\leqslant 1$，起点参数 $t=0$，终点参数 $t=1$. 由复积分计算公式：

$$\int_0^{3+i}z^2\mathrm{d}z=\int_0^1[(3+\mathrm{i})t]^2[(3+\mathrm{i})t]'\mathrm{d}t$$

$$=(3+i)^3\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(3+i)^3=6+\frac{26}{3}i$$

2) 自原点沿实轴至 3 这一段路线 c_1 的参数方程为：$z=3t,0\leqslant t\leqslant 1$，由 3 沿直向上至 $3+i$ 这一段路线 c_2 的参数方程为：$z=3+ti,0\leqslant t\leqslant 1$. 由公式：

$$\int_0^{3+i}z^2\mathrm{d}z=\int_{c_1}z^2\mathrm{d}z+\int_{c_2}z^2\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 (3t)^2 (3t)' \mathrm{d}t + \int_0^1 (3+ti)^2 (3+ti)' \mathrm{d}t$$

$$= 27\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t + i\int_0^1 (9+6ti-t^2)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{27}{3} + 9i - 3 - \frac{1}{3}i = 6 + \frac{26}{3}i$$

3）**自原点沿虚轴至** i **这一段路线** c_1 **的参数方程为**：$z = ti, 0 \leqslant t \leqslant 1$，**由** $i0$ **沿水平方向向右至** $3+i$ **这一段路线** c_2 **的参数方程为**：$z = t+i, 0 \leqslant t \leqslant 3$. **由公式**：

$$\int_0^{3+i} z^2 \mathrm{d}z = \int_{c_1} z^2 \mathrm{d}z + \int_{c_2} z^2 \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 (ti)^2 (ti)' \mathrm{d}t + \int_0^3 (t+i)^2 (t+i)' \mathrm{d}t$$

$$= -i\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t + \int_0^3 (t^2 + 2it - 1)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{i}{3} + \frac{27}{3} + 9i - 3 = 6 + \frac{26}{3}i$$

○ 2. **分别沿** $y = x$ **与** $y = x^2$ **算出积分** $\int_0^{1+i} (x^2 + iy)\mathrm{d}z$ **的值**.

解　1）**路线** $y = x$ **的参数方程为** $\begin{cases} x = t \\ y = t, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1$，**或** $z = t + it$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，**这样** $\mathrm{d}z = (1+\mathrm{i})\mathrm{d}t$. **由公式**：

$$\int_0^{1+i} (x^2 + iy)\mathrm{d}z = \int_0^1 (t^2 + it)(1+i)\mathrm{d}t$$

$$= (1+i)\left[\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t + i\int_0^1 t\mathrm{d}t\right] = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

2）**路线** $y = x^2$ **的参数方程为** $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1$，**或** $z = t + it^2$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，**这样** $\mathrm{d}z = (1+2it)\mathrm{d}t$. **由公式**：

$$\int_0^{1+i} (x^2 + iy)\mathrm{d}z = \int_0^1 (t^2 + it^2)(1+2it)\mathrm{d}t$$

$$= (1+i)(\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t + 2i\int_0^1 t^3 \mathrm{d}t)$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$$

● 3. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，C 为 B 内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z = 0, \oint \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z = 0$$

是否成立？如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明.

分析　运用解析性质，并利用积分路径和找出个较好的特例.

解　不一定成立. 例如　$f(z)=z$，C：$|z|=1$. 此时 $\mathrm{Re}[f(z)]=x$，$\mathrm{Im}[f(z)]=y$，C：$z=\mathrm{e}^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 或 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，$\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$. 由公式：

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot i\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$$

$$=i\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t+i\sin t)at$$

$$=i\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\mathrm{d}t=\pi i\neq 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\sin t\cdot i\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$$

$$=i\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=-\pi i\neq 0$$

小结　找出实部虚部分别计算.

○4. 利用在单位圆周上 $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ 的性质，及柯西积分公式说明 $\oint_C \bar{z}\mathrm{d}z=2\pi i$，其中 C 为正向单位圆周 $|z|=1$.

解　注意到复积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 中积分变量 z 始终限制在 c 上变化，在单位圆周 $|z|=1$ 上 $z\bar{z}=1$，所以 $\oint_C \bar{z}\mathrm{d}z=\oint_C \dfrac{z\bar{z}}{z}\mathrm{d}z=\oint_C\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z$.

而在柯西积分公式 $\oint_C \dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i\varphi(z_0)$ 中取 $z_0=0$，$\varphi(z)$

$=1, c: |z|=1$，易知$\oint_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i$. 故$\oint_C \bar{z}\mathrm{d}z = 2\pi i$.

○ 5. **计算积分$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z$的值，其中 C 为正向圆周：**

1) $|z|=2$，　　　　2) $|z|=4$.

解　1）**正向圆周** $|z|=2$ **的参数方程为：**$z=2\mathrm{e}^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

由公式：

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{2\mathrm{e}^{it}}}{|2\mathrm{e}^{it}|}2i\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 4\pi i$$

2）**由柯西积分公式及积分性质，则**

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\bar{z}}{4}\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\oint_C \frac{\bar{z}z}{z}\mathrm{d}z$$

$$= 4\oint_C \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 8\pi i$$

○ 6. **试用观察法得出下列积分的值，并说明观察时所依据的是什么？**C **是正向单位圆周** $|z|=1$.

1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$；　　　　2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2z+4}$；

3) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$；　　　　4) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-\frac{1}{2}}$；

5) $\oint_C z\mathrm{e}^2\,\mathrm{d}z$；　　　　6) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\left(z-\frac{i}{2}(z+2)\right)}$.

解　1）**被积分函数**$\frac{1}{z-2}$**的奇点** $z=2$ **在** $|z|=1$ **之外，利用柯西－古萨定理即知积分值为零.**

2）**被积函数**$\frac{1}{z^2+2z+4}$**的两个奇点** $z_1=-1+\sqrt{3}i$，$z_2=-1-\sqrt{3}i$（**分母为零的点**）**均在** $|z|=1$ **之外，利用柯西－古**

萨定理即知积分值为零.

3）被积函数$\frac{1}{\cos z}$的奇点$z_k=(k+\frac{1}{2})\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$（分母为零的点）均在$|z|=1$之外，利用柯西—古萨定理即分值为零.

4）由柯西积分公式即知$\oint_C \frac{1}{z-\frac{1}{2}}dz=2\pi i$.

5）被积函数ze^2在复平面上处处解析，利用柯西—古萨定理即知积分值为零.

6）由柯西积分公式：

$$\oint_C \frac{dz}{(z-\frac{i}{2})(z+2)}=\oint_C \frac{\frac{1}{z+2}}{z-\frac{i}{2}}dz$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{z+2}\bigg|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{4\pi i}{4+i}$$

○7. 沿指定曲线的正向计算下列各积分：

1)$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz$，$C$：$|z-2|=1$；

2)$\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}$，$C$：$|z-a|=a$；

3)$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$，$C$：$|z-2i|=\frac{3}{2}$；

4)$\oint_C \frac{z}{z-3}dz$，C：$|z|=2$；

5)$\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$，$C$：$|z|=r<1$；

6)$\oint_C z^3\cos z\,dz$，C为包围$z=0$的闭曲线；

7)$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$，$C$：$|z|=\frac{3}{2}$；

8) $\oint_C \frac{\sin z}{z} dz, C: |z| = 1$;

9) $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2} dz, C: |z| = 2$;

10) $\oint_C \frac{e^z}{z^5} dz, C: |z| = 1$.

解 1) **由柯西积分公式得**

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i \cdot e^z \big|_{z=2} = 2\pi i e^2$$

2) **由柯西积分公式(注意 a 在 c 内, $-a$ 在 c 外)得**

$$\oint_C \frac{1}{z^2-a^2} dz = \oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z+a}\bigg|_{z=a} = \frac{\pi i}{a}$$

3) **由柯西积分公式(注意 i 在 c 内, $-i$ 在 c 外)得**

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \oint_C \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{iz}}{z+i}\bigg|_{z=i} = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$$

4) **由柯西—古萨定理注意到被积函数** $\frac{z}{z-3}$ **的奇点** $z=3$ **在** $|z|=2$ **之外)得积分值为零.**

5) **由柯西—古萨定理[注意到被积函数** $\frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}$ **在** $|z|=r(<1)$ **上及内部解析或奇点在** $|z|=r(<1)$ **之外],得积分值为零.**

6) **由柯西—古萨定理(注意到被积函数** $z^3\cos z$ **在复平面上处处解析)得积分值为零.**

7) **由柯西积分公式得**

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{2i}\left(\oint_C \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z-i} dz - \oint_C \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z+i} dz\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(2\pi i \cdot \frac{1}{z^2+4}\bigg|_{z=i} - 2\pi i \frac{1}{z^2+4}\bigg|_{z=-i}\right) = 0$$

8）**由柯西积分公式得**

$$\oint_C \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sin z\,|_{z=0} = 0$$

9）**由高阶导数的柯西积分公式**

$$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (\sin z)'\,|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$$

10）**由高阶导数的柯西积分公式**

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z^5}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{1}{4!}(\mathrm{e}^z)^{(4)}\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}$$

○ 8. **计算下列各题**：

1）$\int_{-\pi i}^{3\pi i} \mathrm{e}^{2z}\mathrm{d}z$；　　2）$\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0} \mathrm{ch}3z\mathrm{d}z$；

3）$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z\mathrm{d}z$；　　4）$\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z$；

5）$\int_0^i (z-i)\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$；

6）$\int_1^i \frac{1+\mathrm{tg}z}{\cos^2 z}\mathrm{d}z$　（**沿** 1 **到** i **的直线段**）.

解　**利用与实积分类似的复积分牛顿－莱不尼兹公式.**

1）$\int_{-\pi i}^{3\pi i} \mathrm{e}^{2z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{6\pi i} - \mathrm{e}^{-2\pi i}) = 0$

2）
$$\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0} \mathrm{ch}3z\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\mathrm{sh}3z\Big|_{\frac{\pi}{6}i}^{0}$$
$$= -\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}i$$
$$= -\frac{1}{3}i\sin\frac{\pi}{2} = \frac{-i}{3}$$

3）
$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{-\pi i}^{\pi i}(1-\cos 2z)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\sin 2z\right)\Big|_{-\pi i}^{\pi i}$$
$$= \pi i - \frac{1}{2}\sin 2\pi i = \pi i - \frac{i}{2}\mathrm{sh}2\pi$$

4) $\int_0^1 z\sin z\mathrm{d}z = -\int_0^1 z(\cos z)'\mathrm{d}z$（分部积分）

$$= -[z\cos z]_0^1 + \int_0^1 \cos z\mathrm{d}z$$

$$= -\cos 1 + \sin z\,|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

5) $\int_0^i (z-i)\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = -\int_0^i (z-i)(\mathrm{e}^{-z})'\mathrm{d}z$

$$= -[(z-i)\mathrm{e}^{-z}]\Big|_0^i + \int_0^i \mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$$

$$= -i + (-\mathrm{e}^{-z})\,|_0^i$$

$$= -i - e^{-i} + 1 = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$$

6) $\int_1^i \frac{1+\mathrm{tg}z}{\cos^2 z}\mathrm{d}z = \int_1^i (1+\mathrm{tg}z)(\mathrm{tg}z)'\mathrm{d}z$

$$= \left[\mathrm{tg}z + \frac{1}{2}(\mathrm{tg}z)^2\right]_1^i$$

$$= \mathrm{tg}i + \frac{1}{2}(\mathrm{tg}i)^2 - \mathrm{tg}1 - \frac{1}{2}(\mathrm{tg}1)^2$$

$$= i\mathrm{th}1 - \frac{1}{2}(\mathrm{th}1)^2$$

$$- \mathrm{tg}1 - \frac{1}{2}(\mathrm{tg}1)^2$$

这里用到关系式 $\mathrm{tg}i = i\mathrm{th}1$.

○ 9. 计算下列积分：

1) $\oint_C \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)\mathrm{d}z$，其中 C：$|z| = 4$ 为正向；

2) $\oint_C \frac{2i}{z^2+1}\mathrm{d}z$，其中 C：$|z-1| = 6$ 为正向；

3) $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z$，其中 C_1：$|z| = 2$ 为正向，C_2：$|z| = 3$ 为负向；

4) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-i}$，其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{6}{5}i$ 为顶点的正向菱形；

5) $\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\alpha)^3}\mathrm{d}z$，其中 α 为 $|\alpha| \neq 1$ 的任意复数，C：$|z| = 1$ 为

正向.

解　1）由柯西积分公式（注意 $-1,-2i$ 均在 C 内）得

$$\oint_C\left(\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2i}\right)\mathrm{d}z=4\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z+1}+3\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z+2i}$$
$$=4\cdot 2\pi i\cdot 1+3\cdot 2\pi i\cdot 1=14\pi i$$

2）被积函数 $\dfrac{2i}{z^2+1}=\dfrac{1}{z-i}-\dfrac{1}{z+i}$，其奇点 $\pm i$ 均在 C 内，由柯西积分公式得

$$\oint_C\frac{2i}{z^2+1}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z-\oint_C\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=2\pi i-2\pi i=0$$

3）$$\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z$$
$$=\oint_{C_1}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z+\oint_{C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z$$

其中 C_2^-：$|z|=3$ 为正向. 由高阶导数的柯西积分公式得，

原积分 $=2\pi i\cdot\dfrac{1}{2!}(\cos z)''\big|_{z=0}-2\pi i\cdot\dfrac{1}{2!}(\cos z)''\big|_{z=0}=0.$

4）$z=i$ 在 C 内部，$\varphi(z)\equiv 1$ 在复平面上处处解析，由柯西积分公式 $\oint_C\dfrac{\varphi(z)}{z-i}\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\varphi(i)=2\pi i\mathrm{i}$，即得 $\oint_C\dfrac{1}{z-i}\mathrm{d}z=2\pi i.$

5）当 $|\alpha|>1$ 时，被积函数的奇点 α 在 C 外，由柯西－古萨定理得积分值为零. 而当 $|\alpha|<1$ 时奇点 α 在 C 内，由高阶导数的柯西积分公式得

$$\oint_C\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\alpha)^3}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}(\mathrm{e}^z)''\big|_{z=\alpha}=\pi i\mathrm{e}^\alpha$$

○ 10. 证明：当 C 为任何不通过原点的简单闭曲线时，$\oint_C\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0.$

证明　1）当 $z=0$ 在 C 外时，由柯西－古萨定理得 $\oint_C\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0.$

2）当 $z=0$ 在 C 内时，在高阶导数的柯西积分公式

$\oint_C\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\dfrac{2\pi i}{n!}\varphi^{(n)}(z_0)$ 中取 $\varphi(z)\equiv 1,n=1,z_0=$

0 得$\oint_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (1)' = 0.$

● 11. **下列两积分的值是否相等？积分 2）的值能否利用闭路变形原理从 1）的值得到？为什么？**

1）$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z$；　　2）$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z$.

分析　注意函数是否解析.

解　参阅本章习题 5 的解答，易知

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}z}{z^2}\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z|=2} \frac{4}{z^2}\mathrm{d}z = 0$$

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z|=4} \frac{\bar{z}z}{z^2}\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z|=4} \frac{16}{z^2}\mathrm{d}z = 0$$

这里用到习题 10 的结论及沿圆周 $|z|=R$ 正向积分时被积函数中 $\bar{z}z$，$|z|$，$\bar{z}$ 可分别用 R^2，R，$\frac{R}{z}$ 代替的事实. 由此可见两积分值是相等的. 积分 2）的值不能利用闭路变形原理从 1）的值得到，因为被积函数 $f(x)=\frac{\bar{z}}{z}$ 中复平面上处处不解析. 但将积分 1）与 2）分别变为 $4\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$ 与 $16\oint\limits_{|z|=4}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z$ 以后，积分 2）的值可由积分 1）的值得到，这是由于函数 $\frac{1}{z^2}$ 在 $|z|>0$ 内是解析的缘故.

小结　注意解析与否.

◎12. **设区域 D 为右半平面，z 为 D 内圆周 $|z|=1$ 的任意一点，用在 D 内的任意一条曲线 C 连结原点与 z，证明**

$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right] = \frac{\pi}{4}$.（**提示：可取从原点沿实轴到 1，再从 1 沿圆周 $|z|=1$ 到 z 的曲线作为 C**）.

分析　本题注意公式的运用.

证明　记 $C=C_1+C_2$，其中 C_1 为从原点沿实轴到 1 的路线，参数

方程为 $z=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，$C_2$ 为从 1 沿圆周 $|z|=1$ 到 z 的路线. 注意到函数 $\dfrac{1}{1+\xi^2}$ 在 D 内解析，

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi &= \int_{C_1}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi+\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\\ &=\int_0^1\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi+\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{\pi}{4}+\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

我们只须证明　$\mathrm{Re}\left\{\int_{C_2}\dfrac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right\}=0$

由 $\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+i\xi^2}+\dfrac{1}{1-i\xi^2}\right)=\dfrac{-i}{2}\left(\ln\dfrac{1+i\xi}{1-i\xi}\right)'$ 及复积分的牛顿—莱不尼兹公式得

$$\begin{aligned}\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi &= \frac{-i}{2}\ln\frac{1+i\xi}{1-i\xi}\Bigg|_1^z\\ &=\frac{-i}{2}\left(\ln\frac{1+iz}{1-iz}-\ln\frac{1+i}{1-i}\right)\\ &=\frac{-i}{2}\left[\ln\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|-\ln\left|\frac{1+i}{1-i}\right|\right.\\ &\quad\left.+i\left(\arg\frac{1+iz}{1-iz}-\arg\frac{1+i}{1-i}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\{\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(\arg\frac{1+iz}{1-iz}-\arg\frac{1+i}{1-i}\right)\end{aligned}$$

令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则由 $z\in D$ 可知 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. 于是

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1+i\mathrm{e}^{i\theta}}{1-i\mathrm{e}^{i\theta}}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}i,\ \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}>0,\ \arg\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i,\ \arg\frac{1+i}{1-i}=\frac{\pi}{2}$$

故 $\mathrm{Re}\left\{\int_{C_2}\frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0$,要证结论成立.

◎ 13. 设 C_1 与 C_2 为相交于 M,N 两点的简单闭曲线,它们所围成的区域分别为 B_1 与 B_2,B_1 与 B_2 的公共部分为 B. 如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析,C_1,C_2 上也解析,证明:$\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$.

分析 要会做积分替换.

证明 如图 3-3,设 M,N 两点分别将曲线 C_1 分为 L_1,L_2 两部分,将 C_2 分为 L_3,L_4 两部分,即

$$C_1=L_1+L_2,C_2=L_3+L_4$$

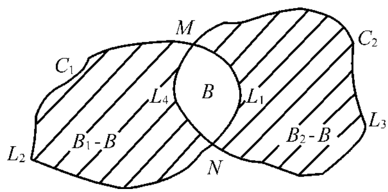

图 3-3

由题设,$f(z)$ 在区域 B_1-B 及其边界 $L_2+L_4^-$ 上解析,在区域 B_2-B 及其边界 $L_3+L_1^-$ 上解析,所以由柯西-古萨定理得

$$\oint_{L_2+L_4^-}f(z)\mathrm{d}z=\int_{L_2}f(z)\mathrm{d}z-\int_{L_4}f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\oint_{L_3+L_1^-}f(z)\mathrm{d}z=\int_{L_3}f(z)\mathrm{d}z-\int_{L_1}f(z)\mathrm{d}z=0$$

于是

$$\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\int_{L_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{L_2}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{L_3}f(z)\mathrm{d}z+\int_{L_4}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$$

●14. 设 C 为不经过 α 与 $-\alpha$ 的正向简单闭曲线,α 为不等于零的任

何复数. 试就 α 与 $-\alpha$ 跟 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z$ 的值.

分析　充分掌握公式.

解　注意到 $\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z+\alpha}\mathrm{d}z$，可用柯西积分公式及柯西－古萨定理讨论如下：

1）当 C 不包含 α 与 $-\alpha$ 时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z = 0$$

2）当 C 包含 α 与 $-\alpha$ 时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i + \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = 2\pi i$$

3）当 C 包含 α 而不包含 $-\alpha$ 时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i + 0 = \pi i$$

4）当 C 包含 $-a$ 而不包含 a 时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}\mathrm{d}z = 0 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \pi i$$

小结　要注意 a 与 c 的不同位置来进行计算.

● 15. 设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right] = \begin{cases} z_0^2\text{，当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时，} \\ \sin z_0\text{，当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时.} \end{cases}$$

分析　由 z_0 的不同位置分别求解.

证明　1）当 z_0 在 C_1 内时，z_0 在 C_2 外，由柯西积分公式及柯西－古萨定理得

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right] = \frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\cdot z^2 \Big|_{z=z_0} + 0\right]$$
$$= z_0^2$$

2）当 z_0 在 C_2 内时，z_0 在 C_1 外，同样由柯西积分公式及柯西－古萨定理得

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\mathrm{d}z\right]=\frac{1}{2\pi i}\left[0+2\pi i\cdot\sin z\,|_{z=z_0}\right]$$
$$=\sin z_0$$

小结　此类证明题关键在于看题干中的已知找到解题关键所在.

○ 16. 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 C：$|z|=r,0<r<1$ 的积分等于零，问 $f(z)$ 是否必需在 $z=0$ 处解析？试举例说明之.

解　不一定. 例如 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 沿任何圆周 C：$|z|=r,0<r<1$ 的积分等于零（由高阶导数的柯西积分公式或复积分计算公式易知，参见第 10 题），但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析.

◎ 17. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任意一条简单闭曲线，它的内部全含于 D. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

分析　此类问题关键在于由 z_0 的任意性推出普遍性.

证明　对 C 内任一点 z_0，由柯西积分公式得 $[f(z)-g(z)]\,|_{z=z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)-g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$. 因为 $f(z)-g(z)$ 在 D 内解析且在 C 上 $f(z)-g(z)\equiv 0$，所以

$$f(z_0)-g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{0}{z-z_0}\mathrm{d}z=0\Rightarrow f(z_0)=g(z_0)$$

再由 z_0 的任意性即知在 C 内所有点处 $f(z)=g(z)$.

●18. 设区域 D 是圆环域，$f(z)$ 在 D 内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1 与 K_2，K_2 包含 K_1，z_0 为 K_1，K_2 之间任一点，试证 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$ 成立，但 C 要换为 $K_1^-+K_2$（见图 3－4）.

分析　本题只要想到做辅助线 AB 便很容易求解.

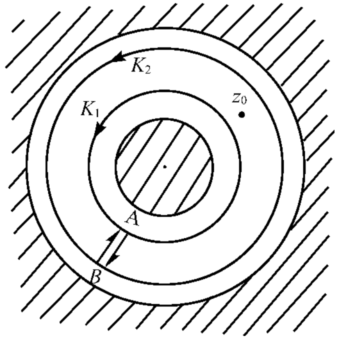

图 3－4

证明　如图 3－4，作辅助线段 AB. 这样在路线 $A \to K_1^- \to A \to B \to K_2 \to B \to A$ 或 $K_1^- + \overline{AB} + K_2 + \overline{BA} \xlongequal{\text{记为}} L$ 所围成的单连通区域内及 L 上 $f(z)$ 均解析，且 z_0 在 L 内部. 由柯西积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)$$

或

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^-+K_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\overline{AB}} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\overline{BA}} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

而路线 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 在同一线上但方向相反，沿其上的积分值相抵消. 故有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^-+K_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

小结　注意辅助线的方向.

◯ 19. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，且不为零. C 为 B 内任何一条简单闭曲线，问积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ 是否等于零？为什么？

解　积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 0$，因为 $f(z)$ 在 B 内解析且 $f(z) \neq 0$，所以

$f'(z)$ 与 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 B 内解析，进而 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 B 内解析，由柯西－古萨定理即知其积分值等于零.

◯ 20. 试说明柯西－古萨基本定理中的 C 为什么可以不是简单闭曲线？

解　因为闭曲线可以由若干个简单闭曲线依次相互连接组成，又沿闭曲线的积分等于沿这若干个简单闭曲线的积分之和，所以函数 $f(z)$ 沿任一简单闭曲线积分等于零可推出 $f(z)$ 沿闭曲线的积分也等于零，故柯西－古萨基本定理中的路线 C 可以不是简单闭曲线.

◎ 21. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线，它的内部全含于 D，证明：对在 D 内但不在 C 上的任意一点 z_0，等式 $\oint_C \dfrac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ 成立.

分析　属于定理的恒等变形.

证明　注意到 $f(z)$ 及 $f'(z)$ 在 C 上及 D 内都解析，由柯西积分公式及柯西－古萨定理得

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0)\text{，当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 内} \\ 0\text{，} \qquad\qquad \text{当 } z_0 \text{ 不在 } C \text{ 内} \end{cases}$$

由高阶导数的柯西积分公式及柯西－古萨定理得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0)\text{，当 } z_0 \text{ 在 } C \text{ 内} \\ 0\text{，} \qquad\qquad \text{当 } z_0 \text{ 不在 } C \text{ 内} \end{cases}$$

故有等式 $\oint_C \dfrac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

◯22. 如果 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数，且适合拉普拉斯方程，而 $s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$，那么 $s+\mathrm{i}t$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数.

解　由 $\dfrac{\partial s}{\partial x}=\varphi_{yx}-\psi_{xx}$，$\dfrac{\partial s}{\partial y}=\varphi_{yy}-\psi_{xy}$，

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi_{xx}+\psi_{yx}，\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi_{xy}+\psi_{yy}.$$

及假设：$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$，$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0$，$\varphi_{yx}=\varphi_{xy}$，$\psi_{xy}=\psi_{yx}$，可知 s,t 可微（有连续的一阶偏导数）且满足

$\dfrac{\partial s}{\partial x}=\dfrac{\partial t}{\partial y},\dfrac{\partial s}{\partial y}=-\dfrac{\partial t}{\partial x}$（柯西－黎曼方程）

故 $s+it$ 是 $x+iy$ 的解析函数.

○ 23. 设 u 为区域 D 内的调和函数及 $f=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$，问 f 是不是 D 内的解析函数？为什么？

解　是. 因为 $f(z)$ 的实部 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与虚部 $-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 可微（有一阶连续偏导数）且满足柯西－黎曼方程

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$（即 $u_{xx}+u_{yy}=0$）

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{\partial u}{\partial y})$（即 $u_{xx}=u_{yx}$）

所以 $f(z)$ 为 D 内的解析函数.

◎ 24. 函数 $v=x+y$ 是 $u=x+y$ 的共轭调和函数吗？为什么？

分析　验证是否满足 $C-R$ 方程.

解　不是. 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=1,\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\dfrac{\partial v}{\partial y}=1,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，$u,v$ 调和，但柯西－黎曼方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 不成立，所以 $v=x+y$ 不是 $u=x+y$ 的共轭调和函数（等价地 $u+iv$ 不解析）.

○ 25. 设 u 和 v 都是调和函数，如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 u 也是 v 的共轭调和函数. 这句话对吗？为什么？

解　不对. 因为 v 是 u 的共轭调和函数相当于 u,v 调和且满足柯西－黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

若 u 也是 v 的共轭调和函数，那么必有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$$

上面两式相结合便有$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，$u,v$ 为常数.

即当 u,v 为常数时，互为共轭调和函数，除此之外这句话不对.

◎ 26. 证明：一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

分析 掌握复合函数的偏导.

证明 设 u,v 是一对共轭调和函数（不妨设 v 是 u 的共轭调和函数），则

$u_{xx}+u_{yy}=0, v_{xx}+v_{yy}=0, u_x=v_y, u_y=-v_x$

于是 $(uv)_x=u_xv+uv_x,(uv)_y=u_yv+uv_y$

$$(uv)_{xx}=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx}$$

$$(uv)_{yy}=u_{yy}v+2u_yv_y+uv_{yy}$$

$$\begin{aligned}(uv)_{xx}+(uv)_{yy}&=v(u_{xx}+u_{yy})\\&\quad+2(u_xv_x+u_yv_y)+u(v_{xx}+v_{yy})\\&=0\end{aligned}$$

乘积 uv 仍为调和函数.

●27. 如果 $f(z)=u+iv$ 是一解析函数，试证：

1) $\overline{i\overline{f(z)}}$ 也是解析函数；

2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数；

3) $\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$.

分析 解析函数与调和函数有密切关系.

证明 1) 因$\overline{i\overline{f(z)}}=\bar{i}\overline{\overline{f(z)}}=-if(z)$，$f(z)$ 解析，所以 $-if(z)$ 即$\overline{i\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

2) 由 1) 可知$\overline{i\overline{f(z)}}=v-iu$ 解析，从而其虚部 $-u$ 是实部 v 的共轭调和函数.

3) 由 $|f(z)|^2=u^2+v^2$ 及解析函数 $f(z)=u+iv$ 的虚部 v 是实部 u 的共轭调和函数，即 $u_{xx}+u_{yy}=0, v_{xx}+v_{yy}$

$= 0, u_x = v_y, u_y = -v_x, f'(z) = u_x + iv_x$ 可得

$$\frac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)^2|}{\partial y^2} = 2uu_{xx} + 2(u_x)^2$$

$$+ 2vv_{xx} + 2(v_x)^2 + 2uu_{yy} + 2(u_y)^2 + 2vv_{yy} + 2(v_y)^2$$

$$= 2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2]$$

$$+ 2v(v_{xx} + v_{yy}) = 2[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (-v_x)^2 + (u_x)^2]$$

$$= 4[(u_x)^2 + (v_x)^2] = 4|f'(z)|^2$$

小结　1)2) **直接计算即可**,3) **要注意展开与合并**.

◎ 28. **证明**:$u = x^2 - y^2$ **和** $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ **都是调和函数,但** $u + iv$ **不是解析函数.**

分析　**验证** $C-R$ **方程.**

证明　**因** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{6yx^2 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, u, v **都是调和函数,但**

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ **不成立**,$u + iv$ **不是解析函数.**

◎ 29. **求具有下列形式的所有调和函数** u:

1) $u = f(ax + by)$, a **与** b **为常数**;

2) $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$,[**提示**:1) **令** $t = ax + by$, **因** $u_{xx} + u_{yy} = 0$,, **从而有** $f''(t) = 0$;2) **令** $t = \dfrac{y}{x}$].

分析　**注意复合函数的偏导公式.**

解　1) **令** $t = ax + by$, $a^2 + b^2 \neq 0$, **因若** $a^2 + b^2 = 0$, **则** $a = b =$

0. 则无意义。则

$$u_x = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = af'(ax+by)$$

$$u_{xx} = af''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a^2 f''(ax+by)$$

$$u_y = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = bf'(ax+by)$$

$$u_{yy} = bf''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = b^2 f''(ax+by)$$

由 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 得$(a^2+b^2)f''(ax+by)=0 \Rightarrow f''(t)=0$，$f'(t)=C_1 \Rightarrow f(t)=C_1 t+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意实常数，即形如 $u=f(ax+by)$ 的调和函数为 $u=C_1(ax+by)+C_2$.

2）令 $t=\dfrac{y}{x}$ 可知

$$u_x = f'(t)\frac{-y}{x^2}, u_{xx} = f''(t)\frac{y^2}{x^4}+f'(t)\frac{2y}{x^3}$$

$$u_y = f'(t)\frac{1}{x}, u_{yy} = f''(t)\frac{1}{x^2}$$

由 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 得

$$f''(t)\frac{x^2+y^2}{x^4}+f'(t)\frac{2y}{x^3}=0$$

即

$$f''(t)(1+t^2)+f'(t)\cdot 2t=0$$

于是$\dfrac{\mathrm{d}f'(t)}{f'(t)}=-\dfrac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{C_1}{1+t^2}$

进而 $f(t)=C_1\operatorname{arctg}t+C_2$，故形如 $u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的调和函数为

$u=C_1\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意实常数.

◎ 30. 由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z)=u+iv$.

1)$u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；

2)$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$f(2)=0$；

3) $u = 2(x-1)y, f(2) = -i$;

4) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x > 0$.

分析　**此类问题关键在于积分时分段求,简化积分形式并认真计算即可得出正确结果.**

解　1) **由公式**

$$
\begin{aligned}
v(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + C \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) + C \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + \int_{(x,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_0^x -u_y(x,0)\mathrm{d}x + \int_0^y u_x(x,y)\mathrm{d}y + C \\
&= \int_0^x -3x^2\mathrm{d}x + \int_0^y (3x^2 + 6xy - 3y^2)\mathrm{d}y + C \\
&= -x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C
\end{aligned}
$$

因此　$f(z) = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$
$+ i(-x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C)$
$= (1-i)(x+iy)^3 + iC = (1-i)z^3 + iC$($C$ **为任意实常数**)

2) **由公式**

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_{(1,1)}^{(x,1)} \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y + \int_{(x,1)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_1^x v_y(x,1)\mathrm{d}x + \int_1^y -v_x(x,y)\mathrm{d}x + C \\
&= \int_1^x \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + \int_1^y \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - 2\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} + x\int_1^y \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + C
\end{aligned}
$$

$$= \operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}1 - 2\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right)\right]_{x=1}^{x=x}$$

$$+\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{y=1}^{y=y} + C = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} + C$$

因此 $f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} + C + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} + C - \frac{1}{z}$

又 $f(2) = 0$ 得 $C = 0$，故 $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$

3）由柯西－黎曼方程得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-1) \qquad ①$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \qquad ②$$

由式①得 $v = -\int 2(x-1)\mathrm{d}x + g(y) = -(x-1)^2 + g(y)$

代入式②后，$g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C$，所以

$v(x,y) = -(x-1)^2 + y^2 + C$

$f(z) = u + iv = 2(x-1)y + i[-(x-1)^2 + y^2 + C]$

$\qquad = -i(z-1)^2 + iC$

又 $f(2) = -i \Rightarrow -i + iC = -i \Rightarrow C = 0$，即 $f(z) = -i(z-1)^2$.

4）由柯西－黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad ③$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad ④$$

由式③得 $u = \int \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + g(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y)$

代入式④后，$\frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$，$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$（实常数），所以 $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$.

即 $f(z) = u + iv = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$= \ln z + C.$

◯31. 设 $v = e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z) = u + iv$.

解　由 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = pe^{px}\sin y, \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^{px}\cos y$

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p^2 e^{px}\sin y, \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^{px}\sin y$

及 $v_{xx} + v_{yy} = (p^2 - 1)e^{px}\sin y = 0$ 得 $p = \pm 1$ 时 v 为调和函数．

由柯西—黎曼方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^{px}\cos y \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -pe^{px}\sin y \quad ②$$

由式①得 $u = \int e^{px}\cos y\mathrm{d}x + g(y) = \dfrac{1}{p}e^{px}\cos y + g(y)$ 代入式②后，$-\dfrac{1}{p}e^{px}\sin y + g'(y) = -pe^{px}\sin y \xlongequal{\text{注意 } p = \pm 1}$

$g'(y) = 0, g(y) = C$（任意实常数），所以

$u(x,y) = \dfrac{1}{p}e^{px}\cos y + C$

$f(z) = u + iv = \dfrac{1}{p}e^{px}\cos y + C + ie^{px}\sin y$

$= \begin{cases} e^z + C, & \text{当 } p = 1 \text{ 时} \\ -e^{-z} + C, & \text{当 } p = -1 \text{ 时} \end{cases}$

◎ *32. 如果 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为中心的任何一个正向圆周：$|z - z_0| = r$，它的内部全含于 D. 试证：

1) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆周 C 上的平均值，即 $u(x_0,y_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$；

2) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等 $u(x,y)$ 在圆域 $|z-z_0| \leqslant r_0$ 上

平均值.即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

分析 掌握调和函数和解析函数的关系.

证明 1)对于区域 D 内的调和函数(只须对 D 内包含 $|z-z_0|\leqslant r$ 的单连通区域上的调和函数)$u(x,y)$,总存在函数 $v(x,y)$ 使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数.于是对 $f(z)$ 应用平均值公式可知

$$u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+$$
$$i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

两边复数的实虚部对应相等即得结论.

2)利用结论 1),对任意的 $r,0\leqslant r\leqslant r_0$ 都有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=u(x_0,y_0)$$

所以 $$\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}r\left[\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}r\cdot 2\pi u(x_0,y_0)\mathrm{d}r=\frac{u(x_0,y_0)}{r_0^2}\int_0^{r_0}2r\mathrm{d}r=$$
$$u(x_0,y_0)$$

○ *33. 如果 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内处处解析,C 为 D 内的正向圆周:$|z|=R$,它的内部全含于 D.设 z 为 C 内一点,并令 $\tilde{z}=R^2/\bar{z}$,试证

$$\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-\tilde{z}}\mathrm{d}\xi=\oint_C\frac{\bar{z}f(\xi)}{\xi\bar{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0$$

证明 由 $\tilde{z}=R^2/\bar{z}$ 及 z 为 C 内一点可知 $|\tilde{z}|=\dfrac{R^2}{|\bar{z}|}>R$,于是

函数$\dfrac{f(\xi)}{\xi-\tilde{z}}$在$|\xi|\leqslant R$上解析，由柯西－古萨定理得

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-\tilde{z}}\mathrm{d}\xi=\oint_C \frac{\bar{z}f(\xi)}{\xi\bar{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0$$

◎ *34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{1}{\xi-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\xi\bar{z}}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\bar{z})}{(\xi-z)(R^2-\xi\bar{z})}f(\xi)\mathrm{d}\xi\text{（其中 }C\text{ 为 }|z|=R\text{）}$$

分析　积分即可，注意计算.

证明　根据柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\quad\text{（其中 }z\text{ 为 }C\text{ 内点）}$$

又由 33 题结论：

$$\oint_C\frac{\bar{z}f(\xi)}{\xi\bar{z}-R^2}\mathrm{d}\xi=0\Rightarrow\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}\mathrm{d}\xi=0$$

上面两式相加得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\oint_C\frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}\mathrm{d}\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{1}{\xi-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\xi\bar{z}}\right]f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\bar{z})f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\xi\bar{z})}\mathrm{d}\xi$$

◎ *35. 如果令$\xi=R\mathrm{e}^{i\theta}$，$z=r\mathrm{e}^{i\varphi}$，验证

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)(R^2-\bar{\xi}\,\bar{z})}=\frac{\mathrm{d}\xi/\xi}{(\xi-z)(\bar{\xi}-\bar{z})}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

并由习题 34 的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta.$$

取其实部得

$$u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta$$

这个积分称为泊松(Poisson)积分. 通过这个公式,一个调和函数在一个圆内的值可用它在圆周上的值来表示.

分析 由需验证结论找出解题方向.

证明 由 $\xi=Re^{i\theta}$ 得 $\mathrm{d}\xi=Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta=i\xi\mathrm{d}\theta$ 且 $R^2/\xi=\bar{\xi}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)(R^2-\xi\bar{z})}=\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)(\xi\bar{\xi}-\xi\bar{z})}=\frac{\mathrm{d}\xi/\xi}{(\xi-z)(\bar{\xi}-\bar{z})}$$
$$=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{|Re^{i\theta}-re^{i\varphi}|^2}$$
$$=\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

由习题 34 结果及复积分计算公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(R^2-z\bar{z})f(\xi)}{(\xi-z)(\bar{\xi}-\bar{z})}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(Re^{i\theta})}{|Re^{i\theta}-re^{i\varphi}|^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\cdot\mathrm{d}\theta$$

上式两边取实部就得 Poisson 公式:

$$u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta$$

● *36. 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析,且不恒为常数,n 为正整数.

1)试用柯西积分公式证明

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{[f(\xi)]^n}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\ (z\text{ 在 }C\text{ 内})$$

2)设 M 为 $|f(\xi)|$ 在 C 上的最大值,L 为 C 的长,d 为 z 到

C 的最短距离，试用积分估值公式与 1）中的等式，证明不等式

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

3）令 $n \to +\infty$，对 2）中的不等式取极限，证明：$|f(z)| \leqslant M$. 这个结果表明：在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得（最大模原理）.

分析　熟练运用各种公式即可.

证明　1）易知 $[f(z)]^n$ 在 C 上及 C 内解析，对此函数应用柯西积分公式便得：

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z}d\xi$$

2）由 1）的结果及复积分估值公式得

$$\begin{aligned} |[f(z)]^n| = |f(z)|^n &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z}d\xi\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - z|}|d\xi| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{M^n}{d}|d\xi| \\ &= \frac{M^n L}{2\pi d} \end{aligned}$$

这里用到 $|f(\xi)| \leqslant M$，$|\xi - z| \geqslant d$，$\oint_C |d\xi| = L$，

于是两边开 n 次根易知 $|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3）在结果 2）中令 $n \to +\infty$，并注意到 $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 (a > 0)$

易知 $|f(z)| \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}} = M$.

小结　会从题干中找出思路.

第四章

级　数

内容提要

一、复数项级数

1. **复数列的极限**

复数列极限与实数列极限的定义形式上相同，复数列 $\{a_n\}=\{\alpha_n+i\beta_n\}(n=1,2,\cdots\cdots)$ **收敛于复数** $a=\alpha+i\beta$ **的充要条件为**

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha,\qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta.$$

因此，复数列极限的性质也与实数列极限的性质相似，并且可将复数列极限的计算问题转化为实数列极限的计算问题.

2. **复数项级数**

(1) **复数项级数敛散性与和的定义形式上也与实数项级数的相应概念相同.**

(2) **复数项级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(\alpha_n=a_n+ib_n)$ **收敛的充要条件是级数** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **与** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ **同时收敛；级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **收敛的必要条件是** $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛（称之为绝对收敛准则）；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时绝对收敛.

结论(2)与(3)将判定复数项级数敛散性问题转化为判定实数项级数的敛散性问题. 因此可以用实数项级数的各种收敛准则（例如，比值法与根值法等）来判定复数项级数的敛散性.

二、幂级数

1. 函数项级数与幂级数

设$\{f_n(z)\}$为定义在区域 D 内的复函数列

表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称为复变函数项级数，

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots f_n(z)$$

称为级数部分和.

若 $z_0\in D$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z_0)=S(z_0)$存在，则称函数项级数在点 z_0 收敛. $S(z_0)$称为它的和. 如果级数在 D 内处处收敛，那么它的和一定是 z 的一个函数 $S(z)$

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

$S(z)$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 的和函数. 当

$$f_n(z)=c_{n-1}(z-a)^{n-1}$$

或

$$f_n(z)=c_{n-1}z^{n-1}$$

时，函数项级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

这种级数称为幂级数,其中 a 为定复数.

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 点收敛,则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z|<|z_0|$ 内绝对收敛 —— 阿贝尔定理.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_1 \neq 0$ 点发散;则必在圆 $|z|>|z_1|$ 外发散.

(3) 任何幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 必出现且只出现以下三种情形之一:

①仅在 $z=0$ 收敛;

②在整个 z 平面收敛;

③存在 $R>0$,当 $|z|<R$ 时收敛,当 $|z|>R$ 时发散.

称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径,$|z|=R$ 为收敛圆. 在①② 两种情形中,我们也称 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 0 和 ∞.

综上,我们有:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆 $|z|=R$ 内不仅收敛而且绝对收敛,在收敛圆外发散,在收敛圆 $|z|=R$ 上则不一定.

2. 收敛半径的求法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的和函数为 $f(z)$,其收敛半径为 R,我们有

(1) 比值法(D'Alembert)

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda\neq 0$,则 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(2)根值法(Cauchy)

若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\mathrm{e}\neq 0$,则 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(3)柯西—阿达玛(Cauchy—Hadamard)定理

若$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\sqrt[\mathrm{n}]{|c_n|}=\mathrm{e}\neq 0$,则 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $\mathrm{e}=0$ 时,$R=\infty$;当 $\mathrm{e}=\infty$时,$R=0$.

(4) 设 b 是 $f(z)$ 的奇点中距离 a 最近的一个奇点,则

$|a-b|=R$ 即为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的收敛半径.

3. 幂级数的运算性质

(1)代数运算性质

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 的收敛半径分别为R_1 与 R_2,令 $R=\min(R_1,R_2)$,则当 $|z|<R$ 时,

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n=\alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\beta\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$(线性运算)

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n$(乘积运算)

(2) 复合运算性质

设当 $|\zeta|<r$ 时,$f(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$,当 $|z|<R$ 时,$\zeta=g(z)$ 解析且 $|g(z)|<r$,则当 $|z|<R$ 时,$f[g(z)]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n$.

(3) 分析运算性质

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R\neq 0$,则

① 它的和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是收敛圆 $|z|<R$ 内的解析函数；

② 在收敛圆内可逐项求导，即

$$\begin{aligned}f'(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}\\&=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots,\ |z|<R;\end{aligned}$$

③ 在收敛圆内可逐项积分，即

$$\int_0^z f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z a_nz^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1},\ |z|<R.$$

其中，z 为收敛圆中任意一点.

三、泰勒(Taylor)级数

1. 泰勒展开定理

如果函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-\alpha|<R$ 内解析，那么在此圆内 $f(z)$ 可以展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

而且展开式是惟一的.

应该指出，如果 $f(z)$ 在点 α 解析，那么使 $f(z)$ 在 α 的泰勒展开式成立的圆域半径等于点 α 到 $f(z)$ 的奇点之间的最短距离. 此外幂级数的和函数在收敛圆周上至少有一个奇点. 函数 $f(z)$ 在点 α 解析等价于 $f(z)$ 在 α 的邻域内可以展开成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$.

2. 函数展开成泰勒级数的方法

直接法(直接用泰勒定理)与间接法. 所谓间接法就是根据函数的幂级数展开式的惟一性，利用一些已知函数的幂级数展开式[如 $\frac{1}{1-z}$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^{\alpha}$(α 为复数)等函数的

幂级数展开式],通过对幂级数进行变量代换,四则运算和分析运算(逐项求导,逐项积分等),求出所给函数的幂级数展开式.

四、洛朗(Laurent)级数

1. 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$

双边幂级数的收敛域为圆环 $r<|z-\alpha|<R$,其内外半径 r 与 R 可分别由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ 的收敛半径来确定. 在收敛圆环内,双边幂级数具有与幂级数一样的运算和性质 .

2. 洛朗展开定理

在圆环 $r<|z-\alpha|<R(r\geqslant 0,R\leqslant+\infty)$内解析的函数 $f(z)$必可展开成如下的双边幂级数(称为洛朗级数)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\mathrm{d}z(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

Γ 为圆环内绕 α 的任何一条正向简单闭曲线,并且展开式是惟一的.

3. 函数展开成洛朗级数的方法

洛朗级数是泰勒级数的推广. 圆环内解析函数展开成洛朗级数的一般方法并不是按照上面公式计算洛朗系数 c_n 进行,而主要是根据洛朗级数展开式的惟一性,利用已知的幂级数展开式去求所需要的洛朗展开式.

典型例题与解题技巧

【例 1】 考察下列级数是否收敛? 是否绝对收敛?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^2}(1+2i)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$.

解题分析　此题考察级数收敛、发散、绝对收敛的判别方法.

解题过程　(1)由于 $\alpha_n=(1-\frac{1}{n^2})e^{i\frac{\pi}{n}}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$，

所以

$$a_n=(1-\frac{1}{n^2})\cos\frac{\pi}{n},\qquad b_n=(1-\frac{1}{n^2})\sin\frac{\pi}{n}$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\neq0$，故该级数发散.

(2)显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 但是，由于

$$\alpha_n=\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}=\frac{1-(-1)^n i}{n}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛，故原级数必发散.

(3)由于很难分离出 $\alpha_n=\frac{n^2}{5^n}(1+2i)^n$ 的实部与虚部，故采用绝对收敛准则. 易见 $|\alpha_n|=n^2\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^n$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}<1$$

根据正项级数的根值法，故知原级数收敛，而且绝对收敛.

(4)由于 $|\alpha_n|=\left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}\right|=\frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\operatorname{ch}n}=\frac{2}{e^n+e^{-n}}<\frac{2}{e^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}$ 是一收敛的等比级数，根据正项级数的比较准则，故知原级数绝对收敛.

【例 2】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 $R>0$，并且在收敛圆周上一点绝对收敛. 试证明这个级数对于所有的点 $z(|z|\leqslant R)$ 为绝对收敛.

分析 此题需分情况讨论.

证明 (1) 当 $|z|<R$ 时，设 z_0 是圆周 $|z|=R$ 上一点，$|z_0|=R$，且在 z_0 点 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n$ 收敛.

由于 $|z|<R$，所以 $|z/z_0|<1$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|C_n z^n| &= \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z^n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n\cdot|z/z_0|^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot|z_0|^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n z^n|$ 收敛. 故得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|z|=R$ 时，由于 $|z_0|=R$，故对于满足条件 $|z|=R$ 的点 z 而言，级数

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^n| &= \sum_{n=0}^{\infty}|C_n||z|^n = \sum_{n=0}^{\infty}|C_n||R|^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|C_n||z_0|^n\end{aligned}$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n||z_0|^n$ 收敛. 所以 $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n z^{\mathrm{n}}|$ 收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{C_n} z^n$ 绝对收敛.

【例 3】 设 m 为非负整数，试证对所有的 z，幂级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

的和函数 $w(z)$ 满足如下微分方程

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(1+m)\frac{dw}{dz}-w=0$$

分析 按题意，首先要验证所给幂级数的收敛半径 $R=+\infty$（以保证对所有的 z，和函数存在），其次证明对所有的 z，和函数 $w(z)$ 满足所给的方程. 而这一点只需要利用幂级数的逐项求导性以及幂级数的运算性质即可完成.

证明 由比值法可知所给幂级数的收敛半径 R 为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)(m+n+1)=+\infty$$

所以和函数 $w(z)$ 在 $|z|<+\infty$ 内解析，且

$$\frac{dw}{dz}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\frac{1}{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

于是由幂级数的运算易知，对所有 z（即 $|z|<+\infty$）

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(1+m)\frac{dw}{dz}-w$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}+1+(1+m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}$$

$$-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(m+j)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(m+1)-(m+n+1)}{n!\prod_{j=1}^{n+1}(m+j)}z^{n}=0$$

【例 4】 将下例函数在指定圆环内展成洛朗级数

(1) $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $0<|z|<1$, $1<|z|<+\infty$;

(2) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$.

解题分析 利用级数展开的基本方法.

解题过程 (1)当 $0<|z|<1$ 时

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{z-1+2}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}(1+\frac{2}{z-1})$$

$$=\frac{1}{z^2}(1-\frac{2}{1-z})=\frac{1}{z^2}(1-2\sum_{n=0}^{\infty}z^n)$$

$$=\frac{1}{z^2}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}$$

当 $1<|z|<+\infty$ 时, $|\frac{1}{z}|<1$

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}\left[1+\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{z^2}\left[1+\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n\right]$$

$$=\frac{1}{z^2}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$$

(2) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$

当 $1<|z|<2$ 时

$$|\frac{1}{z}|<1 \quad \text{且} \quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$\therefore \frac{1}{z-2}=-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{2}{z^2+1}=\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+2}}$$

$$\therefore\ \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

【例 5】 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\mathrm{i})^{n-1}\frac{(2n-1)}{2^n}z^{2n-1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$.

解题分析 **本题有 $a_n=0$ 的情形,不能套用公式**

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{或} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

但仍可用比值收敛法或根值收敛法求收敛半径.

解题过程 (1) **记** $f_n(z)=(1-\mathrm{i})^{n-1}\frac{(2n-1)}{2^n}z^{2n-1}$,**则**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{(2n+1)2^n\,|z|^{2n+1}}{(2n-1)2^{n+1}\,|z|^{2n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|z|^2$$

当 $\frac{1}{\sqrt{2}}|z|^2<1$ **即** $|z|<\sqrt[4]{2}$ **时,幂级数绝对收敛;当** $\frac{\sqrt{2}}{2}|z|^2>1$ **即** $|z|>\sqrt[4]{2}$ **时,幂级数发散. 故该幂级数的收敛半径为** $R=\sqrt[4]{2}$.

(2) **记** $f_n(z)=\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n(z-1)^{n(n+1)}$,**则**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|z-1|^{n+1}}{n}$$

$$=\begin{cases}0,\text{若 } |z-1|\leqslant 1\\ \infty,\text{若 } |z-1|>1\end{cases}$$

所以,当且仅当 $|z-1|\leqslant 1$ 时幂数级数绝对收敛. 故该幂级数的收敛半径 $R=1$.

历年考研真题评析

【题 1】 求洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 4^{-|n|}(z-1)^n$ 的收敛域.(东北大学 2005 年).

解题分析 先把该洛朗级数分为两部分,再求收敛域的交集.

解题过程 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 4^{-|n|}(z-1)^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^n$ 的收敛域为

$$\left|\frac{\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^{n+1}}{\left[\frac{1}{4(z-1)}\right]^n}\right|<1$$

即
$$|z-1|>\frac{1}{4}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$ 的收敛域为

$$\left|\frac{\left(\frac{z-1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{z-1}{4}\right)^n}\right|<1$$

即
$$|z-1|>4$$

故原级数收敛域为 $\frac{1}{4}<|z-1|<4$.

【题 2】 将 $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}(|b|>|a|>0)$ 按下例指定区域 G 展成洛朗级数.(上海交大 2006 年)

(1)G：$0<|a|<|z|<|b|$；　　(2)G：$|z|>|b|$.

解题分析　此题仍是基本方法的考查.

解题过程　$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{z-b}-\dfrac{1}{z-a}\right)$

(1)当 $0<|a|<|z|<|b|$时，$\left|\dfrac{a}{z}\right|<1$，$\left|\dfrac{z}{b}\right|<1$.

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)}&=\frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)\\&=\frac{1}{b-a}\left[-\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

(2)当$|z|>|b|$时，$\left|\dfrac{b}{z}\right|<1$，$\left|\dfrac{a}{z}\right|<1$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)}&=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{b}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right)\\&=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

【题 3】　$f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+2}$ 在 $z=0$ 解析，可展成 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_kz^k$，求 C_k 及收敛半径.（北京大学 2006 年）

解题分析　级数展开的考查.

解题过程

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z^2-2z+2}\\&=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-(1+i)}-\frac{1}{z-(1-i)}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1-i}}-\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1+i}}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^{n}-\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+\mathrm{i}}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}}-\frac{1}{(1+i)^{\mathrm{n}+1}}\right]z^{\mathrm{n}}$$

$$=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}}z^{n}$$

故　$C_k=\dfrac{\sin\frac{(k+1)\pi}{4}}{2^{\frac{k+1}{2}}}, k=0,1,2\cdots$

又$\overline{\lim\limits_{\mathrm{k}\to\infty}}\sqrt[k]{|C_k|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，故收敛半径为 $R=\sqrt{2}$.

【题 4】　(1) 求函数$\dfrac{z^3+2z-1}{z^2-4}$分别在区域 $0<|z+2|<4$ 及 $|z-2|>4$ 的洛朗级数展开式；

(2) 求函数$\dfrac{\ln z}{1-z^2}$在 $0<|z-1|<1$ 的洛朗级数展开式.

(浙江大学 2005 年)

解题分析　洛朗级数展开的考查.

解题过程　(1)$\dfrac{z^3+2z-1}{z^2-4}=z+\dfrac{13}{4(z+2)}+\dfrac{11}{4(z-2)}$

①在区域 $0<|z+2|<4$ 内，$0<\dfrac{|z+2|}{4}<1$，

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{4}\right)^{k},$$

所以

$$\frac{z^3+2z-1}{z^2-4}=z+\frac{13}{4(z+2)}-\frac{11}{4^2}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{z}+2}{4}\right)^{\mathrm{k}}$$

$$=\frac{13}{4(z+2)}-\frac{43}{4^2}+\frac{53(z+2)}{4^3}$$

$$-\frac{11(z+2)^2}{4^4}\left[1+\frac{z+2}{4}+\frac{(z+2)^2}{4^2}+\cdots\right]$$

②**在区域**$|z-2|>4$ **内**，$\left|\frac{4}{z-2}\right|<1$，

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{z-2}\right)^k$$

所以$\frac{z^3+2z-1}{z^2-4}=z+\frac{13}{4(z-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{z-2}\right)^k+\frac{11}{4(z-2)}$

$$=(z-2)+2+\frac{6}{z-2}-$$

$$\frac{13}{(z-2)^2}\left[1-\frac{4}{z-2}+\frac{4^2}{(z-2)^2}-\cdots\right]$$

(2)$\frac{\ln z}{1-z^2}=\frac{1}{2}\ln z\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)$

$$\ln z=\int_1^z\frac{1}{z}dz=\int_1^z\frac{1}{1+(z-1)}dz$$

$$=\int_1^z\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k dz$$

$$=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\cdots\quad\frac{1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k$$

所以$\frac{\ln z}{1-z^2}=\frac{1}{2}\left[(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\cdots\right]\cdot$

$$\left[-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}-\frac{z-1}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^3}-\frac{(z-1)^3}{2^4}-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-1+(z-1)-\frac{5}{6}(z-1)^2+\frac{2}{3}(z-1)^3+\cdots\right]$$

【题 5】 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，证明：如果对某一点 $z_0 \in D$ 有 $f^{(n)}(z_0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)$，那么 $f(z)$ 在 D 内为常数.（东北大学 2005 年）

分析 利用解析及 Taylor 定理解题.

证明 $f(z)$ 在 z_0 点解析，由定义，$\exists z_0$ 的某个邻域 D，使 $f(z)$ 在 D 上处处解析.

由邻域的性质，$\exists \delta>0$，使 $U_\delta(z_0)=\{z:|z-z_0|<\delta\}\subset D$，故 $f(z)$ 在

$U_\delta(z_0)$ 内解析. 从而由 Taylor 定理有

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

因为 $f^{(k)}(z_0)=0(k=1,2,\cdots)$

所以 $f(z)=f(z_0)$，命题得证.

课后习题全解

◎ 1. 下列数列 $\{\alpha_n\}$ 是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$； 2) $\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$；

3) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$； 4) $\alpha_n=\mathrm{e}^{-n\pi i/2}$；

5) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi i/2}$.

分析 充分掌握数列收敛的充分条件，以及发散的充分条件.

解 1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}=\dfrac{(1+ni)^2}{1+n^2}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}i=a_n+b_ni$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+n^2}=0$$

所以 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 -1.

2) 令 $x=1,y=\dfrac{1}{2},\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$，则

$$r=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$1+\frac{i}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+i\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\varphi}$$

$$\alpha_n=\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}e^{-in\varphi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)$$

因为 $\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|<1,\quad |\cos n\varphi|\leqslant 1,\quad |\sin n\varphi|\leqslant 1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}\cos n\varphi=0$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}\sin n\varphi=0$$

所以 $\{\alpha_n\}$ **收敛于** 0.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ **不存在**，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

根据数列收敛的充要条件知 $\{\alpha_n\}$ **发散**.

4) $\alpha_n=e^{-\frac{n\pi i}{2}}=\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)=\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ **均不存在，根据数列收敛的充要条件知** $\{\alpha_n\}$ **发散**.

5) $\alpha_n=\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$

$$=\frac{1}{n}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

因为 $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1,\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

根据数列收敛的充要条件知 $\{\alpha_n\}$ **收敛于** 0.

○ 2. **证明：**

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \text{不存在}, & |\alpha|=1,\alpha\neq 1\end{cases}$$

证明　**令**　$\alpha=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

1) $|\alpha|<1$，**即** $r<1$

$$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

所以　$0\leqslant|\alpha^n|\leqslant r^n(|\cos n\theta|+|i\sin n\theta|)\leqslant 2r^n$

$$\lim_{n\to\infty}r^n=0(r<1)$$

所以由两边夹法则，$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha^n|=0$，**于是**

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$$

2) $|\alpha|>1$，**即** $r>1$

$$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty(r>1)$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha^n|=\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=\infty$

3) $\alpha=1\Rightarrow r=1$，**即**

$$\alpha=\cos 0+i\sin 0$$

所以　$\alpha^n=\cos 0n+i\sin 0n=\cos 0=1$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=1$

4) $|\alpha|=1$，**但** $\alpha\neq 1$，**即**

$$r=1\quad \alpha=\cos\theta+i\sin\theta(\theta\neq 0)$$

所以　$\alpha^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta$ **均不存在，根据数列收敛的充要条件知** $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$ **不存在.**

◎ 3. **判别下列级数的绝对收敛性与收敛性：**

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$；　2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$；　3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$；　4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$.

分析 主要是对收敛和绝对收敛概念的考查严格把握定义即可.

解 1) $z_n=\frac{i^n}{n}=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+i\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(-1)^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数,所以原级数收敛.

又
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

为调和级数,发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 为条件收敛.

2) 令 $z_n=\frac{i^n}{\ln n}=\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k)}\cdot(-1)^k$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数,所以原级数收敛.

又
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

$\ln n=\ln(1+n-1)<n-1\ (n-1>0)$

所以
$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 为调和级数,发散.

由比较判别法知：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散.

所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$条件收敛.

3)令　　$z_n=\frac{(6+5i)^n}{8^n}$

因为 $6+5i=\sqrt{61}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta=\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$

所以 $z_n=\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

又因为$|z_n|=\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$　且$\left|\frac{\sqrt{61}}{8}\right|<1$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|z_n|$收敛.

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$绝对收敛，因而也收敛.

4)令 $z_n=\frac{\cos i n}{2^n}=\frac{1}{2^n}\frac{e^n+e^{-n}}{2}=\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$发散，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$收敛.

所以原级数发散.

◎4. 下列说法是否正确？为什么？

1)每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

2)每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

3)每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数.

分析　主要是举反例，掌握收敛概念，并熟悉一些特殊函数和点.

解　1)不正确.

在收敛圆内的点处处收敛，而收敛圆周上的点可能收敛，也可能发散.

例如，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛圆为 $|z-1|=1$，在收敛圆 $|z-1|=1$ 上不一定收敛. 当 $z=0$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$，收敛；当 $z=2$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散.

2)不正确.

和函数在收敛圆内处处解析.

3)不正确.

每一个在 z_0 解析的函数才一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数.

例如，$f(z)=\bar{z}$ 在 z_0 连续，但不可导，故不能在 z_0 点展开成泰勒级数.

○5. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解 不能.

令 $z-2=y$

$\Rightarrow$ 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_ny^n$ 在 $z=0$ 收敛，所以在 $y=-2$ 处收敛，

由阿贝尔定理知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_ny^n$ 在 $|y|<2$ 内均绝对收敛.

当 $z=3$ 时，因为 $z-2=y=1$，所以 $|y|<2$.

所以在 $z=3$ 处一定绝对收敛.

○ 6. 求下列幂级数的收敛半径：

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$（$p$ 为正整数）；

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}z^n$；

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^nz^n$；

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$；

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\dfrac{i}{n}\right)(z-1)^n$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\mathrm{Ln}in}\right)^n$.

解 1) $c_n=\dfrac{1}{n^p}$

所以 $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p}$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}=1.$

2) $c_n=\dfrac{(n!)^2}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\infty,\left(\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right)$$

所以收敛半径 $R=0.$

3) $$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$c_n=(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}i}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4) $c_n=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$, $|c_n|=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=1$

所以收敛半径 $R=1.$

5) $c_n=\mathrm{ch}\left(\dfrac{i}{n}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}+\mathrm{e}^{-\frac{i}{n}}}{2}$

$$=\frac{\cos\dfrac{1}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{1}{n}+\cos\left(-\dfrac{1}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{1}{n}\right)}{2}$$

$$=\cos\frac{1}{n}$$

$$|c_n|=\left|\cos\frac{1}{n}\right|$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}}\right|=\frac{1}{1}=1$$

所以收敛半径 $R=1$.

6) $\mathrm{Ln}in=\ln|in|+i(\mathrm{Arg}in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$

所以 $$|\mathrm{Ln}in|=\left(\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以 $$|c_n|=\frac{1}{|\mathrm{Ln}in|^n}=\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{n}{2}},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

所以收敛半径 $R=\infty$.

◎7. **如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.［提示 $|(\mathrm{Re}c_n)z^n|<|c_n||z|^n$］**

分析 用提示公式即可证明.

证明 $|(\mathrm{Re}c_n)z^n|=|(\mathrm{Re}c_n)||z^n|\leqslant|c_n||z|^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|(\mathrm{Re}c_n)z^n|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$$

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛，由上式知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

◎8. **证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在 $(\neq\infty)$，则下列三个幂级数有相同的收**

敛半径：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$；$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$；$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$.

分析　主要是收敛半径的计算方法，分别算出比较即可.

证明　1）$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$　因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$存在，设 $\lambda_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$.

2）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$

因为 $\lambda_2 \triangleq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda_1$，所以 $\lambda_1 = \lambda_2$.

3）$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$

因为 $\lambda_3 \triangleq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda_1$，所以 $\lambda_3 = \lambda_1$.

所以由 1)、2) 和 3) 知：$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

综合可得，当 $\lambda_1 \neq 0$ 时，$R_1 = \frac{1}{\lambda_1} = R_2 = \frac{1}{\lambda_2} = R_3 = \frac{1}{\lambda_3}$

当 $\lambda_1 = 0$ 时，$R_1 = R_2 = R_3 = +\infty$

即三个幂级数有相同的收敛半径.

◎ 9. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛，而$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 发散，证明$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 1.

分析　用反证法.

证明　已知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = 1$ 处收敛，由阿贝尔定理，对 $|z| < 1$ 的 z，级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 必绝对收敛，从而 $R \geqslant 1$.

以下证明 $R > 1$ 不对. 反设 $R > 1$，则$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆 $|z| < R$ 内绝对收敛，特别地在 $z = 1$($|z| < R$) 处也绝对收敛，即$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 收敛，与题设矛盾，只有 $R = 1$，得证.

○10. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在它的收敛圆的圆周上一点 z_0 处绝对收敛，证明它在收敛圆所围着闭区域上绝对收敛.

证明 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 R，z_0 是收敛圆的圆周上的一点，且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 z_0 点处绝对收敛. $\forall z \in \{z \mid |z| \leqslant R\}$，有

$$|C_n z^n| = |C_n||z|^n \leqslant |C_n||z_0|^n = |C_n z_0^n|$$

$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z_0^n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n z^n|$ 收敛. 得证.

○ 11. 把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径：

1) $\dfrac{1}{1+z^3}$； 2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$； 3) $\cos z^2$； 4) $\operatorname{sh} z$；

5) $\operatorname{ch} z$； 6) $e^{z^2}\sin z^2$； 7) $e^{\frac{z}{z-1}}$； 8) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，

[**提示**
$$\sin\frac{1}{1-z} = \sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right) = \sin 1\cos\left(\frac{z}{1-z}\right) + \cos 1\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)]$$

解 1) 已知 $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$，$(|z| < 1)$

上式中的 z 用 z^3 置换：

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - \cdots + (-1)^n z^{3n} - \cdots, \qquad |z^3| < 1$$

$|z^3| < 1 \Rightarrow |z| < 1$

收敛半径 $R = 1$.

2) 已知 $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$，$|z| < 1$

上式中的 z 用 z^2 置换：

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} - \cdots, \qquad |z^2| < 1$$

$|z^2|<1 \Rightarrow |z|<1$

又 $\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)' = \dfrac{-2z}{(1+z^2)^2}$

所以 $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = -\dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$

$$= -\frac{1}{2z}(1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^n z^{2n}-\cdots)'$$

$$= 1-2z^2+3z^4-4z^6+\cdots, \qquad |z|<1$$

收敛半径 $R=1$.

3）已知 $\cos z = 1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\cdots, \ |z|<+\infty$

上式中的 z 用 z^2 置换：

$\cos z^2 = 1-\dfrac{z^4}{2!}+\dfrac{z^8}{4!}-\dfrac{z^{12}}{6!}+\cdots, \ |z^2|<+\infty$

$|z^2|<+\infty \Rightarrow |z|<+\infty$

收敛半径 $R=+\infty$.

4）$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$e^z = 1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots, \ |z|<+\infty$

$e^{-z} = 1-z+\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots, \ |z|<+\infty$

$\operatorname{sh} z$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\right]$$

$$= z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots, \ |z|<+\infty$$

收敛半径 $R=+\infty$.

5）与上题推导类似：

$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\operatorname{ch} z$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\right]$$

$$=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

收敛半径 $R=+\infty$.

6) $e^{z^2}=1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots,\ |z|<+\infty$

$$\sin z^2=z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\cdots,\ |z|<+\infty$$

$$\Rightarrow e^2\sin z^2=(1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots)\times(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\cdots)$$

$$=z^2+z^4+\frac{z^6}{3}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

收敛半径 $R=+\infty$.

7) **因为** $\frac{z}{z-1}=-\frac{z}{1-z}=-z+z^2+z^3+\cdots$

$$=-z\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},\ |z|<1$$

所以 $e^{\frac{z}{z-1}}=e^{-z+z^2+z^3+\cdots}$

$$=1-(z+z^2+z^3+\cdots)+\frac{1}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots)^2$$

$$-\frac{1}{3!}z+z^2+z^3+\cdots^3\cdots$$

$$=1-z-\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\cdots,\ |z|<1$$

收敛半径 $R=1$.

8) $\sin\frac{1}{1-z}=\sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right)$

$$=\sin1\cos\frac{z}{1-z}+\cos1\sin\frac{z}{1-z}$$

因为 $\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},\ |z|<1$

所以 $\sin\frac{z}{1-z}=(z+z^2+z^3+\cdots)-\frac{1}{3!}(z+z^2+z^3+\cdots)^3$

$$+\frac{1}{5!}(z+z^2+z^3+\cdots)^5-\cdots$$

$$=z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\cdots,\ |z|<1$$

$$\cos\frac{z}{1-z}=1-\frac{1}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots)^2$$

$$+\frac{1}{4!}(z+z^2+z^3+\cdots)^4$$

$$-\cdots=1-\frac{1}{2}z^2-z^3+\cdots,\ |z|<1$$

所以 $\sin\frac{1}{1-z}=\sin1\left(1-\frac{1}{2}z^2-z^3+\cdots\right)$

$$+\cos1\left(z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\cdots\right)$$

$$=\sin1+\cos1\cdot z+\left(\cos1-\frac{1}{2}\sin1\right)z^2$$

$$+\left(\frac{5}{6}\cos1-\sin1\right)z^3+\cdots,\ |z|<1$$

收敛半径 $R=1$.

◎12. **求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：**

1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0=1$;　　2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$;

3) $\frac{1}{z^2}, z_0=-1$;　　4) $\frac{1}{4-3z}, z_0=1+i$;

5) $\mathrm{tg}z, z_0=\frac{\pi}{4}$;　　6) $\mathrm{arctg}z, z_0=0$.

分析　**这几题都是较为基本的题型，思路的疗法都一样，唯一要注题的就是计算技巧.**

解　1) $\frac{z-1}{z+1}=(z-1)\frac{1}{(z-1+2)}=\frac{z-1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,\ |z|<1$$

上式两边的 z **用** $\left(\dfrac{z-1}{2}\right)$ **置换：**

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$$

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-1}{2}$$

$$\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\frac{z-1}{2}-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n,$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\Rightarrow|z-1|<2$$

收敛半径 $R=2$.

2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{z+2}-\dfrac{2}{z+1}\right)=\dfrac{2}{z+2}-\dfrac{1}{z+1}$

因为 $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{4+(z-2)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\frac{z-2}{4}}$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\cdots\right],$$

$$\left(\left|\frac{z-2}{4}\right|<1\right)$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3+z-2}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2-\cdots\right],$$

$$\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$$

所以

$$\text{原式}=\frac{2}{4}\left(1-\frac{z-2}{2^2}+\frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2+\cdots\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$$

$$\left|\frac{z-2}{4}\right|<1 \text{ 且} \left|\frac{z-2}{3}\right|<1\Rightarrow |z-2|<3$$

收敛半径 $R=3$.

3) $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-(z+1)}$$
$$=-[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots],\quad |z+1|<1$$

上式两边求导：

$$\left(\frac{1}{z}\right)'=-[1+2(z+1)+3(z+1)^2+\cdots$$
$$+n(z+1)^{n-1}+\cdots]\quad(|z+1|<1),$$

所以
$$\frac{1}{z^2}=1+2(z+1)+\cdots+n(z+1)^{n-1}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n,\ |z+1|<1,$$

收敛半径 $R=1$.

4) $\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i}$

$$= \frac{1}{(1-3i)-3[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i}\left\{1+\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] + \left(\frac{3}{1-3i}\right)^2[z-(1+i)]^2+\cdots\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$$

$$\left|\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right| < 1$$

$$\Rightarrow |z-(1+i)| < \frac{|1-3i|}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

收敛半径 $R = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

(5) **令** $f(z) = \mathrm{tg}z, \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$,

$(\mathrm{tg}z)' = \sec^2 z, (\mathrm{tg}z)'\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2$,

$(\mathrm{tg}z)'' = 2\sec^2 z\,\mathrm{tg}z, (\mathrm{tg}z)''\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 4$,

$(\mathrm{tg}z)''' = 2(2\sec^2 z\,\mathrm{tg}^2 z + \sec^4 z), (\mathrm{tg}z)'''\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2(4+4) = 16\cdots$

由 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ **得** $c_0 = 1, c_1 = \dfrac{2}{1!}, c_2 = \dfrac{4}{2!} = 2$,

$c_3 = \dfrac{16}{3!} = \dfrac{8}{3}, \cdots$

所以 $\mathrm{tg}z = 1 + 2\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

$$+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots, \ |z| < \frac{\pi}{4}$$

收敛半径 $R = \dfrac{\pi}{4}$.

6）因为
$$(\operatorname{arctg}z)' = \frac{1}{1+z^2}$$

又 $\dfrac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$，$|z^2| < 1$ 即 $|z| < 1$

所以
$$\operatorname{arctg}z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^z (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)dz$$
$$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$$

$|z| < 1$，收敛半径 $R = 1$.

◎ 13. **为什么在区域 $|z| < R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开的系数都是实数？**

分析　主要是泰勒级数的性质的应用.

解　由解析函数展开为泰勒级数的惟一性得：$f(z)$ 在 $|z| < R$ 内的展开式应与 $f(x)$ 在 $|x| < R$ 内展开式一致. $f(x)$ 在 $|x| < R$ 内展开式的系数是实数.

于是，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处的展开式的系数 $C_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$C_n$ 均为实数.

◎14. **证明 $f(z) = \cos\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ 以 z 的各次幂表出的洛朗展开式中各系数为 $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.**

[**提示**　在对应教材公式(4.4.8)中，取 C 为 $|z| = 1$，在此圆上设积分变量 $\zeta = e^{i\theta}$，然后证明：c_n 的积分的虚部等于零.]

分析　本题对计算技巧和几个常用公式要求较多，有一定难度.

证明　$f(z) = \cos\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \quad （令\ \xi = e^{i\theta}，d\xi = ie^{i\theta}d\theta，\theta: 0 \to 2\pi，$$
$z_0 = 0$）

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta})^{n+1}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{in\theta}} i d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta)[\cos n\theta - i\sin n\theta] d\theta$$

其虚部为： $-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$

令 $g(\theta) = \cos(2\cos\theta)\sin n\theta$

由于 $\cos[2\cos(\theta+2\pi)] = \cos(2\cos\theta)$

$\sin n(\theta+2\pi) = \sin(n\theta+2n\pi) = \sin n\theta$

所以 $g(\theta+2\pi) = \cos[2\cos(\theta+2\pi)]\sin n(\theta+2\pi)$

$= \cos(2\cos\theta)\sin n\theta = g(\theta)$，**以** 2π **为周期**

又 $g(-\theta) = \cos[2\cos(-\theta)]\sin n(-\theta)$

$= \cos(2\cos\theta)(-\sin n\theta)$

$= -\cos(2\cos\theta)\cdot\sin n\theta = -g(\theta)$

$g(\theta)$ **为奇函数，**

于是虚部 $= -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)d\theta = 0$

故 $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$，　$(n = 0, \pm 1, \cdots)$

○ 15. **下列结论是否正确**？

用长除法得 $\dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

因为 $\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{z}{z-1} = 0$

所以 $\cdots + \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = 0$

解　不正确.

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots, \ |z| < 1$$

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots, \ |z| > 1$$

用长除法所得到的两式的取值范围的交集为空集，故不能相加.

◎ 16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数：

1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；

2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$，$0<|z|<1$；$0<|z-1|<1$；

3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，$0<|z-1|<1$；$1<|z-2|<+\infty$；

4) $e^{\frac{1}{1-z}}$，$1<|z|<+\infty$；

5) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ 在以 i 为中心的圆环域内；

6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内；

7) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，$3<|z|<4$；$4<|z|<+\infty$.

分析 注意计算的技巧.

解 1) 先用待定系数法将上式拆开：

令 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\dfrac{a}{z+i}+\dfrac{b}{z-i}+\dfrac{c}{z-2}$

则 $1=a(z-i)(z-2)+b(z+i)(z-2)+c(z^2+1)$

上式恒成立. z 取一些特殊值，可分别得 a,b,c.

令 $z=i\Rightarrow 1=2i\cdot b(i-2)\Rightarrow b=\dfrac{1}{2i(i-2)}=\dfrac{-1+2i}{10}$；

$z=2\Rightarrow 1=5c\Rightarrow c=\dfrac{1}{5}$；

$z=-i\Rightarrow 1=-2i(-i-2)a\Rightarrow a$

$=\dfrac{1}{2i(i+2)}=\dfrac{-1-2i}{10}$；

于是 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$

$=\dfrac{-1-2i}{10}\dfrac{1}{(z+i)}+\dfrac{-1+2i}{10}\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{z-2}$

$$= \frac{-1-2i}{10} \frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)} + \frac{-1+2i}{10} \frac{1}{z\left(1-\frac{i}{z}\right)}$$

$$+ \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \frac{-1-2i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^{n+1}} + \frac{-1+2i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\cdots + \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} - \cdots\right)$$

$$1 < |z| < 2$$

2)① $0 < |z| < 1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} \frac{1}{(1-z)^2}$$

因为 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots,\ |z| < 1$

所以 $\left(\frac{1}{1-z}\right)' = -\frac{-1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}$

$$= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

所以 $\frac{1}{z(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z} nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-2}$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) z^n \qquad 0 < |z| < 1$$

② $0 < |z-1| < 1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{z}$$

因为 $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,\ |z| < 1$

所以 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad |z-1|<1$

所以 $\dfrac{1}{z(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-2}(z-1)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\qquad 0<|z-1|<1$$

3)① $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

② $1<|z-2|<+\infty$

则 $$\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}$$

4)**因为** $1<|z|<+\infty$，**所以** $\dfrac{1}{|z|}<1$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots$$

5)① $0<|z-i|<1$

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z-i}\,\frac{1}{(z-\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}$$

$$=\frac{1}{z-i}\,\frac{1}{i^2\left[1+\frac{(z-i)}{i}\right]^2}=\frac{-1}{z-i}\,\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}$$

因为 $\dfrac{1}{(1-\xi)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\xi^{n-1}$，$|\xi|<1$

所以 $|i(z-i)|<1$ **即** $|z-i|<1$

$$\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-1}$$

所以 $\dfrac{1}{z^2(z-i)}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot i^2\cdot i^{n-1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n+1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{n+1}\cdot i^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{2(n+1)}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\,\frac{(i^2)^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}},\qquad 0<|z-i|<1$$

② $1<|z-i|<+\infty$

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{z-i}\right)^2}$$

因为 $\dfrac{1}{1+\xi}=1-\xi+\xi^2-\xi^3+\cdots,\ |\xi|<1$

所以 $\left(\dfrac{1}{1+\xi}\right)'=-\dfrac{1}{(1+\xi)^2}=-(-1+2\xi-3\xi^2+\cdots)$

所以
$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{z-i}\right)^2}=1-2\left(\frac{i}{z-i}\right)+3\left(\frac{i}{z-i}\right)^2$$
$$-4\left({}^{2}\frac{i}{z-i}\right)^3+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$$

所以
$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{(z-i)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\frac{i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}},1<|z-i|<+\infty$$

6）**在** $0<|z-1|<+\infty$

因为 $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots,\ |z|<+\infty$

所以
$$\sin\frac{1}{1-z}=-\sin\frac{1}{z-1}$$
$$=-\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots\right]$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$
$$0<|z-1|<+\infty$$

7）① $3<|z|<4$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}$$

$$= 1 - \frac{6}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}} - \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n - \frac{2}{z}\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^n - 2\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

$$3 < |z| < 4$$

② $4 < |z| < +\infty$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1 - \frac{6}{4-z} - \frac{2}{z-3} = 1 + \frac{6}{z-4} - \frac{2}{z-3}$$

$$= 1 + \frac{6}{z}\frac{1}{1-\frac{4}{z}} - \frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$= 1 + \frac{6}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n - \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1} - 2\cdot 3^{n-1})z^{-n},$$

$$4 < |z| < +\infty$$

○17. 函数 $\mathrm{tg}\,\frac{1}{z}$ 能否在圆环域 $0 < |z| < R(0 < R < +\infty)$ 内展开成洛朗级数?为什么?

解 $f(z) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{z}$

令
$$z_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}, k = 0, \pm 1, \cdots$$

有 $\mathrm{tg}\,\frac{1}{z_k} = \infty$

所以 $z_k = \dfrac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$ **是** $f(z) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{z}$ **的奇点.**

又因为 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$,**所以** $\{z_k\}$ **以** $z = 0$ **为极限,即** $f(z) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{z}$

在 $z=0$ 处的任意小的去心邻域内，总有不可导的点 z_k 故不能保证 $f(z)=\mathrm{tg}\dfrac{1}{z}$ 在 $0<|z|<R$ 内处处解析.

所以 $f(z)=\mathrm{tg}\dfrac{1}{z}$ 不可以在 $0<|z|<R$ 内展开为洛朗级数.

○18. 如果 k 为满足关系 $k^2<1$ 的实数，证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}.$$

［提示　对 $|z|>k$ 展开 $(z-k)^{-1}$ 的洛朗级数，并在展开式的结果中令 $z=e^{i\theta}$，再令两边的实部与实部相等，虚部与虚部相等.］

证明　在 $|z|>k$ 时

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z\left(1-\dfrac{k}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}(k^2<1)$$

令　$z=\mathrm{e}^{i\theta}$

则　$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{\cos\theta-k-\mathrm{i}\sin\theta}{(\cos\theta-k)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-k-\mathrm{i}\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}\qquad ①$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}k^ne^{-(n+1)\theta i}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}k^n[\cos(n+1)\theta-\mathrm{i}\sin(n+1)\theta]\qquad ②$$

① = ②⇒ 两边的实部相等、虚部相等，得证.

○ 19. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$，求积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值. 设 $f(z)$ 为

1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$；　　　　2) $\dfrac{z+2}{(z+1)z}$；

3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$；　　　　4) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$.

解　1) 因为 $\dfrac{1}{z(z+2)}=\dfrac{1}{2z}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=\dfrac{1}{2z}\left(1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\cdots\right)$

因为 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，所以 $|z|<2$，

故　$f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}$ 在域 $C:|z|=3$ 内不全解析.

设 C_1,C_2 为两两互不相交，互不包含的圆周，且各自包围奇点 $z=0,z=-2$

$$\text{所以}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}+\frac{1}{-2}\cdot 2\pi\mathrm{i}=0$$

2) 因为 $\dfrac{z+2}{(z+1)z}=\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{1+z}\right)$

故在 $C:|z|=3$ 内 $f(z)$ 不全解析.

设 C_1,C_2 为既不相交又不包含且各自包含奇点 $z=0,z=-1$ 的小圆周.

由柯西积分公式

$$\oint_C\frac{z+2}{z(z+1)}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=2\cdot 2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}=2\pi\mathrm{i}$$

3) 设 C_1,C_2 为互不相交，又互不包含的两小圆域，且各自包含着奇点 $z=0,z=-1$，

$$\text{所以}\quad\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$+\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)dz$$
$$=2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}=0.$$

4）**设** C_1, C_2 **为互不相交且互不包含的两小圆域，且各自包围着奇点** $z=-1, z=-2$，

所以
$$\oint_C \frac{z}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\frac{-1}{-1+2}2\pi\mathrm{i}+\frac{-2}{-2+1}2\pi\mathrm{i}$$
$$=2\pi i$$

◎ 20. **试求积分** $\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z$ **的值，其中** C **为单位圆** $|z|=1$ **内的任何一条不经过原点的简单闭曲线.**

分析　**考查级数积分的求值方法，先利用级数展开，逐项积分即可.**

解　$\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ **在** $|z|<1$ **内收敛，所以可对其逐项积分：**

$$\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_C\left(z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz$$
$$=\oint_C z^{-2}\mathrm{d}z+\oint_C z^{-1}\mathrm{d}z+\sum_{n=0}^{\infty}\oint_C z^n\mathrm{d}z$$
$$=0+2\pi\mathrm{i}+0=2\pi\mathrm{i}.$$

[**已知**：$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 2\pi\mathrm{i} & n=0\end{cases}$，$f(z)=z^n$ **在** $|z|<1$ **内解析**]

第五章

留　数

内容提要

一、解析函数在孤立奇点邻域内的性态

1. **孤立奇点的定义**

如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，且存在 z_0 的某邻域，$f(z)$ 在此邻域内除了 z_0 点外再无其它奇点，那么称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇立.

2. **解析函数在有限远奇点邻域内的性态**

若 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则必存在 $\delta > 0$，使得 $f(z)$ 于圆环 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，由第四章可知 $f(z)$ 在此圆环内可展成洛朗级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad ①$$

若式 ① 中不含，只含有限个、含无穷多个 $z - z_0$ 的负幂项，那么分别称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点.

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列三条是等价的. 因此每一条都是可去奇点的特征.

① $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展式中不含 $z - z_0$ 的负幂项，即

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots$$

② $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=C_0\quad(\neq\infty)$

③ $f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域内有界.

此性质再次反映了解析函数函数值之间深刻的内在联系. 因为在实函数中,函数在某点邻域内有界显然不能保证在该点可微,也不能保证在该点连续.

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点,则下列三条中的每一条都是 m 级极点的特征.

① $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展式为

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$(C_{-m}\neq 0,m>0)$$

② $f(z)$ 在 z_0 的某去心领域内能表示成

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}$$

或 $$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=\lambda(z_0)(\neq\infty)$$

其中,$\lambda(z)$ 在 z_0 的邻域内解析,且 $\lambda(z_0)\neq 0$;

③ $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 z_0 为 m 级零点(可去奇点当做解析点看).

下述定理也能说明极点的特征,其缺点是不可能指明极点的级;

$f(z)$ 的孤立奇点 z_0 为极点 $\Leftrightarrow\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点,则下列二条中每一条都是本性奇点的特征:

① $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展式中含有无穷多 $z-z_0$ 的负幂项;

② $\lim\limits_{z\to z_0}f(x)$ 不存在.

利用极限判断奇点的类型,当极限是$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型时,可以像在

《高等数学》中那样用 L'Hospital 法则来求.

如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数,那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

3. **解析函数在无穷远点的性态**

无穷远点 ∞ 总是复变函数的奇点.

若 $f(z)$ 在无穷远点 ∞ 的去心领域 $R<|z|<+\infty$ 内解析,则称 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 是孤立奇点.

通过变换 $t=\frac{1}{z}$,将研究 $f(z)$ 在孤立奇点 $z=\infty$ 处的分类与性态转化为研究函数 $f(\frac{1}{t})$ 在孤立奇点 $t=0$ 处的分类与性态. 若 $t=0$ 为 $f(\frac{1}{t})$ 的可去奇点、极点、本性奇点,则 $z=\infty$ 就是 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点.

$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点的充要条件分别是 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 存在且有限、$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$,$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 不存在.

若 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心领域 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数中不含 z 的正幂项、含有限多个 z 的正幂项,且最高正幂项为 z^m、含无限多个 z 的正幂项,则 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、m 级极点、本性奇点.

二、留数的定义及留数定理

1. **留数及其计算**

设 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点,那么 $f(z)$ 在 a 的留数 $\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)\mathrm{d}z=c_{-1}$,其中 c 是 a 的去心邻域内围绕 a 的任意一条正向简单闭曲线.

计算留数最基本的方法就是求洛朗展开式中负幂项 $c_{-1}(z-$

$a)^{-1}$ 的系数 c_{-1}. 但是如果知道奇点 a 的类型,那么留数的计算也许稍简便些. 例如当 $a(\neq\infty)$ 为可去奇点时 $\mathrm{Res}[f(z),a]=0$. 对于极点处留数的计算,有如下公式或规则:

(1) 如果 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点,那么

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

特别地,如果 a 为 $f(z)$ 的简单极点($m=1$),则 $\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

注　如果极点 a 的实际级数比 m 低时,(1) 仍然有效.

(2) 设 a 为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一级极点(只要 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在点 a 解析且 $P(a)\neq 0,Q(a)=0,Q'(a)\neq 0$),那么

$$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

注　如果 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 a 点解析,a 为 $Q(z)$ 的一级零点,则同样有 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

如果 $z=\infty$ 为 $f(z)$的孤立奇点,那么 $f(z)$在 $z=\infty$的留数 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{c^-}f(z)\mathrm{d}z=-c_{-1}$,其中 c 为 $r<|z|<+\infty$ 内绕原点的任意一条正向简单闭曲线. 函数在∞处的留数就是洛朗展开式负幂项 $c_{-1}z^{-1}$前系数的相反数:$-c_{-1}$. 当 $z=\infty$ 为 $f(z)$的可去奇点时,按定义 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$可以不等于零.

2. 留数定理

设函数 $f(z)$在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析,C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线,那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

由柯西定理极易得到以上的留数定理,更确切地说,留数定理是柯西定理的一个直接应用,它把计算封闭曲线积分的整体问题,化为计算各孤立奇点处留数的局部问题,即利用留数计

算积分.因此,有必要专门研究留数的计算.

三、用留数定理计算定积分

1. 形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$的定积分的计算

其中$R(\cos\theta,\sin\theta)$为$\cos\theta$与$\sin\theta$的有理函数.

作变换,令

$$z=\mathrm{e}^{i\theta},\mathrm{d}z=iz\mathrm{d}\theta=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta})=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})=\frac{z^2+1}{2z}$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta &= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\ &= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中

$$f(z)=R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right]\frac{1}{\mathrm{i}z}$$

然后由留数定理求得积分值为$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为$f(z)$在单位圆周内的所有孤立奇点.

2. 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$的积分的计算

其中$R(x)$为x的有理函数,且分母的次数比分子的次数至少高二次,$R(z)$在实轴上无孤立奇点.则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k],$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面内的极点.

3. 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx\,(a>0)$的积分的计算

其中$R(x)$是x的有理函数，分母的次数比分子次数至少高一次，且$R(z)$在实轴上无孤立奇点．则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz},z_k],$$

其中z_k为$R(z)$在上半平面内的极点．

典型例题与解题技巧

【例 1】　试求下列函数的所有有限孤立奇点，并判断它们的类型

(1) $f(z)=\dfrac{\mathrm{tg}z}{z^2-\dfrac{\pi}{6}z}$；　　(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z+1}}$；

(3) $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z(z-\sin z)}$；　　(4) $f(z)=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{z(\sin z-\cos z)}$.

解题分析　为了求出函数的孤立奇点，首先必须求出它的所有奇点，其次要判定它们是否孤立，最后再选择适当的方法判断奇点的类型.

解题过程　(1) 显然，$z=0$与$z=\dfrac{\pi}{6}$是$f(z)$的奇点．又由于$\cos z$的零点为$z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以$z_k$都是$f(z)$的奇点．容易看出$0,\dfrac{\pi}{6}$及$z_k$都是有限孤立奇点．因为$z=0$是分子$\mathrm{tg}\,z$的一级零点，也是分母的一级零点，所以它是$f(z)$的可去奇点．其余奇点都是$f(z)$的一级极点．

(2) 由于$z=-1$与$z_k=\dfrac{1}{k\pi}-1(k=\pm1,\pm2,\cdots)$都是$f(z)$的有限奇点，并且$z_k\to-1(k\to\infty)$，故$z=-1$不是孤立奇点．因此，$f(z)$的有限孤立奇点为$z_k=$

$\frac{1}{k\pi}-1(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$,并且,它们都是一级极点.

(3) 易见 $z=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 都是 $f(z)$ 的奇点,并且是孤立的. 下面判断它们的类型. 由于

$$z-\sin z=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\cdots\right)=z^3\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\cdots$ 是解析函数,且 $\varphi(0)=\frac{1}{3!}\neq 0$,所以 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点,因而是分母的四级零点. 又因为

$$\sin 3z-3\sin z=\left[3z-\frac{1}{3!}(3z)^3+\frac{1}{5!}(3z)^5-\cdots\right]$$
$$-3\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=-\frac{3^3-3}{3!}z^3+\frac{3^5-3}{5!}z^5-\cdots$$
$$=z^3\psi(z)$$

其中 $\psi(z)=-\frac{3^3-3}{3!}+\frac{3^5-3}{5!}z^2-\cdots$ 是解析函数,且 $\psi(0)\neq 0$,所以 $z=0$ 是分子的三级零点,从而知 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点.

根据极限的有理运算法则和洛必达法则,

$$\lim_{z\to k\pi}\frac{\sin 3z-3\sin z}{(z-\sin z)\sin z}=\frac{1}{k\pi}\lim_{z\to k\pi}\frac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z}$$
$$=\frac{1}{k\pi}\lim_{z\to k\pi}\frac{3\cos 3z-3\cos z}{\cos z}$$
$$=0$$

所以 $z=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

此题中,为了判定奇点 $z=0$ 的类型,将分子与分母分别展开为洛朗级数,判断它的级数,需利用零用与极点的关系. 对于 $z=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$,用求

$f(z)$ 的极限的方法来判定．

(4) 容易看出，$z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，分母 $\sin z-\cos z$ 的零点也是 $f(z)$ 的奇点．由于

$$\sin z-\cos z=\sqrt{2}\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$$

所以 $\sin z-\cos z$ 的零点是 $z=k\pi+\frac{\pi}{4}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，并且都是一级的，从而得知 $z=0$ 与 $z=k\pi+\frac{\pi}{4}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 都是 $f(z)$ 的一级极点．又因 $z=\frac{\pi}{4}$ 也是分子的一级零点，所以 $z=\frac{\pi}{4}$ 是它的可去奇点．

【例 2】 求下列函数在所有孤立奇点处的留数：

(1) $\dfrac{z^2}{\cos z-1}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

解题分析 求出函数的奇点（不解析点，无穷远点也应考虑在内），找出孤立奇点（注意：并非所有奇点都是孤立的），然后根据每一类孤立奇点的特征来判定类型，明确计算留数的方法，即用公式或规则（特别适合于极点的情形）还是用洛朗展开式求 c_{-1}（一般方法）.

解题过程 (1) 函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$ 有奇点：$2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots)$（分母的零点）与 ∞. 显然当 $k\to\infty$ 时 $2k\pi$ 以 ∞ 为极限点，∞ 为非孤立奇点．又 $\cos z-1$ 以 $2k\pi$ 为二级零点，$z=0$ 为分子的二级零点，所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点［也可由 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=-2$ 推知］，$2k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots)$ 为 $f(z)$ 的二级极点．由公式 $\operatorname{Res}[f(z),0]=0$

$$\operatorname{Res}[f(z),2k\pi]=\lim_{z\to 2k\pi}\left[(z-2k\pi)^2\frac{z^2}{\cos z-1}\right]'$$

$(k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$

注意到 $\cos z-1=\cos(z-2k\pi)-1=(z-2k\pi)^2\varphi(z)$，**其中** $\varphi(z)=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}(z-2k\pi)^2-\frac{1}{6!}(z-2k\pi)^4+\cdots$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),2k\pi]&=\lim_{z\to2k\pi}\left(\frac{z^2}{\varphi(z)}\right)'\\&=\lim_{z\to2k\pi}\frac{2z\varphi(z)-z^2\varphi'(z)}{\varphi^2(z)}\\&=\frac{4k\pi\left(-\frac{1}{2!}\right)-0}{\left(-\frac{1}{2!}\right)^2}\\&=-8k\pi,(k=\pm1,\pm2,\cdots)\end{aligned}$$

(2) **函数** $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ **有奇点**：$0,\infty,\frac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$. **显然** 0 **为非孤立奇点**，$\frac{1}{k\pi}$ **为** $\sin\frac{1}{z}$ **的一级零点，所以** $\frac{1}{k\pi}$ **为** $f(z)$ **的一级极点. 由公式**

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{1}{k\pi}\right]=\left.\frac{1}{\left(\sin\frac{1}{z}\right)'}\right|_{z=\frac{1}{k\pi}}=\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}$$

$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty]&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]\\&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2\sin z},0\right]\\&=-\frac{1}{2!}\left.\left(\frac{z}{\sin z}\right)''\right|_{z=0}\end{aligned}$$

这里 $\frac{1}{z^2\sin z}$ **以** $z=0$ **为三级极点. 令** $\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{z}{\sin z}$，**易知** $\varphi(z)=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots$. **故**

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)''\Bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\varphi''(0)\varphi(0)-2(\varphi'(0))^2}{(\varphi(0))^3}=-\frac{1}{6}$$

【例 3】　计算下列积分

(1)$\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$；

(2)$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$，　　$C:x^2+y^2=2(x+y)$；

(3)$\int_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z\mathrm{d}z$($n$ **为正整数**)；

(4)$\int_{|z-2\pi|=2\pi}\frac{1}{\mathrm{e}^z-i^i}\mathrm{d}z$；

(5)$\int_C\frac{1}{1+z^4}\mathrm{d}z$，**其中** C **为正向椭圆**：$x^2-xy+y^2+x+y=0(z=x+iy)$.

解题分析　**利用留数定理计算复积分，一般先要求出被积函数在积分路径内部的孤立奇点，判断类型，计算出奇点处的留数，应用留数定理便可以得到所求的积分值．如果积分路径内部孤立奇点处的留数计算比较困难时，也可以类似地考查被积函数在积分路径外部孤立奇点处的留数计算．**

解题过程　(1) **令**

$$f(z)=\frac{2z-1}{z(z-1)^2}$$

$f(z)$ **在圆周** $|z|=2$ **内只有二个极点**，$z=0$ **为一级极点**，$z=1$ **为二级极点，由留数计算规则知**

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\frac{2z-1}{(z-1)^2}\Big|_{z=0}=-1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\left(\frac{2z-1}{z}\right)'\Big|_{z=1}=1$$

由留数定理得

$$\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)^2}dz=2\pi i(-1+1)=0$$

(2) 由线 C 为圆周

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

被积函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

有两个一级极点 $z=\pm i$，一个二级极点 $z=1$，只有 $z=1,z=i$ 在 C 的内部，$z=-i$ 在 C 的外部．

$$\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=\left[\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z^2+1)'}\right]_{z=i}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2z}\Big|_{z=i}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\left[\frac{1}{(z^2+1)}\right]'_{z=1}$$

$$=-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=1}=-\frac{1}{2}$$

由留数定理知

$$\oint_C\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i[\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)]$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=-\frac{\pi i}{2}$$

(3) 被积函数 $\operatorname{tg}\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 在 $|z|=n$ 内有孤立奇点：

$k+\frac{1}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-1),-n)$，均为一阶极点．由公式

$$\operatorname{Res}[\operatorname{tg}\pi z,k+\frac{1}{2}]=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\Big|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$$

于是由留数定理

$$\int_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z dz=2\pi i\sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n}\operatorname{Res}\left[\operatorname{tg}\pi z,k+\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\pi i\left(2n\frac{-1}{\pi}\right) = -4ni$$

(4) 由 $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ 可知被积函数 $f(z) = \dfrac{1}{e^z - i^i}$ 以 $z_k = -\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为一阶极点，其中 $z_{-1} = 2\pi - \dfrac{\pi}{2}$ 与 $z_{-2} = 4\pi - \dfrac{\pi}{2}$ 包含在 $|z-2\pi| = 2\pi$ 内部．由公式，

$$\mathrm{Res}[f(z), z_k] = \left.\frac{1}{(e^z - i^i)'}\right|_{z=z_k} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

以按 $i^i = e^{z_{-1}}$ 理解为例，由留数定理

$$\oint_{|z-2\pi|=2\pi}\frac{1}{e^z - i^i}\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}[f(z), z_{-1}]$$

$$= 2\pi i e^{\frac{-3\pi}{2}}$$

其余情况类似.

(5) 所给椭圆的内部由不等式 $x^2 - xy + y^2 + x + y < 0$ 来描述，被积函数 $\dfrac{1}{1+z^4}$ 的 4 个一阶极点 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ 中只有一个即 $z_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$ 位于椭圆 C 的内部．所以由留数定理

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, z_0\right]$$

$$= 2\pi i\frac{1}{4z_0^3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+i)$$

【例 4】　指出下列函数在零点 $z = 0$ 的级：

(1) $z^2(e^{z^2} - 1)$；　　(2) $6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

解题分析　利用导数或展开式验证.

解题过程　(1) 用求导数验证：记 $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$，$f(0) = 0$，不难计算

$$f'(z)=-2z+2(z^3+z)e^{z^2},\quad f'(0)=0,$$
$$f''(z)=(4z^4+10z^2+2)e^{z^2}-2,\quad f''(0)=0,$$
$$f'''(z)=(8z^5+36z^3+24z)e^{z^2},\quad f'''(0)=0,$$
$$f^{(4)}(z)=(16z^6+112z^4+156z^2+24)e^{z^2},f^{(4)}(0)=24.$$

即

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)\neq 0,$$

故 $z=0$ **为函数** $z^2(e^{z^2}-1)$ **的四阶零点.**

用泰勒展式:由展开式

$$e^{z^2}=1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots+\frac{1}{n!}z^{2n}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

可知

$$z^2(e^{z^2}-1)=z^2\left(z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots\right)=z^4\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)=1+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^{2n-2}+\cdots$ **在** $|z|<+\infty$ **内解析,**$\varphi(0)=1$.

故 $z=0$ **为函数** $z^2(e^{z^2}-1)$ **的** 4 **阶零点.**

(2) **由展开式**

$$\sin z^3=z^3-\frac{1}{3!}z^9+\frac{1}{5!}z^{15}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}+\cdots,\ |z|<+\infty$$

可知

$$\begin{aligned}&6\sin z^3+z^3(z^6-6)\\&=6\left(z^3-\frac{1}{3!}z^9+\frac{1}{5!}z^{15}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}+\cdots\right)\\&\quad+z^9-6z^3=z^{15}\varphi(z)\end{aligned}$$

其中

$$\varphi(z)=6\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}z^6+\cdots+(-1)^n\frac{z^{6n-12}}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

在 $|z|<+\infty$ **内解析,**$\varphi(0)=\frac{6}{5!}\neq 0$. **故** $z=0$ **是函数** $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$ **的** 15 **阶零点.**

【例 5】　设 n 为整数，计算积分 $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi - \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ 及 $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(n\varphi - \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

解题分析　把如上两个积分视为一个复积分的实部与虚部，再用留数定理求积.

解题过程　设 $I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi - \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$,

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(n\varphi - \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

则

$$I = I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} e^{e^{-i\varphi}} e^{in\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

令

$$e^{i\varphi} = z\text{，则 } \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{iz}\mathrm{d}z$$

$$I = \frac{1}{I}\oint_{|z|=1} z^{n-1}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{Res}[z^{n-1}e^{\frac{1}{z}},0]$$

由于

$$z^{n-1}e^{\frac{1}{z}} = z^{n-1}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots\right)$$

故

$$\mathrm{Res}[z^{n-1}e^{\frac{1}{z}},0] = c_{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

所以

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n!}, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

比较等式两边的实部和虚部即得题中所要证明的两个结论.

【例 6】　设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 阶极点，那么下列三个函数：

(1) $f(z)+g(z)$;　　(2) $f(z)g(z)$;　　(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$

在 $z=a$ 处各有什么性质?

解题分析 由极点的特征，$z=a$ 分别是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级与 n 阶极点 $\Leftrightarrow$ 在 a 的去心邻域内

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}$$

其中 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 在 a 的邻域内解析，$\varphi(a)\neq 0$，$\psi(a)\neq 0$，利用此表示式考查所给的三个函数.

解题过程 (1) 不难看出

$$f(z)+g(z)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(z)+(z-a)^{m-n}\psi(z)}{(z-a)^m}, & m>n\\[2ex] \dfrac{(z-a)^{n-m}\varphi(z)+\psi(z)}{(z-a)^n}, & m<n\\[2ex] \dfrac{\varphi(z)+\psi(z)}{(z-a)^m}, & m=n\end{cases}$$

其中当 $m>n$ 时，分子以 $z=a$ 代入得 $\varphi(a)\neq 0$；当 $m<n$ 时分子以 $z=a$ 代入得 $\psi(a)\neq 0$；当 $m=n$ 时分子以 $z=a$ 代入得 $\varphi(a)+\psi(a)$. 又显然各个分子在 a 的邻域内解析，所以有结论：

当 $m\neq n$ 时，点 a 是 $f(z)+g(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 阶极点；

当 $m=n$ 时，若 $\varphi(a)+\psi(a)\neq 0$，点 a 是 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶极点；若 $\varphi(a)+\psi(a)=0$，点 a 是 $f(z)+g(z)$ 的低于 n 级的极点或可去奇点.

(2) $f(z)g(z)=\dfrac{\varphi(z)\psi(z)}{(z-a)^{m+n}}$，因 $\varphi(z)\psi(z)$ 在 a 的邻域内解析且 $\varphi(a)\psi(a)\neq 0$，所以 $z=a$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点.

$$(3)\ \frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}, m>n, a\text{ 是 } m-n \text{ 阶极点}\\ (z-a)^{n-m}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\ m<n, a\text{ 是 } n-m \text{ 阶零点}\\ \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad m=n, a\text{ 是可去奇点(解析点)}\end{cases}$$

历年考研真题评析

【题 1】　设 L 表示以原点为中心的正向单位圆周,求下列积分.

(1) $\displaystyle\int_L \frac{e^z \sin z}{(z-2)^3}dz$;　　(2) $\displaystyle\int_L z^{-2}\operatorname{sh}z dz$;

(3) $\displaystyle\int_L \ln\left|\frac{z-\pi}{\pi z}\right| |dz|$.(**兰州大学** 2005 **年**)

解题分析　**可利用解析函数的性质及留数定理等计算.**

解题过程　(1) **因为** $\dfrac{e^z \sin z}{(z-2)^3}$ **在** $|z|\leqslant 1$ **上解析,故**

$$\int_L \frac{e^z \sin z}{(z-2)^3}dz=0$$

(2) $z^{-2}\operatorname{sh}z$ **在** $|z|\leqslant 1$ **内有一个一级极点** $z=0$,**据留数定理及** $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ **有**

$$\int_L z^{-2}\operatorname{sh}z dz=2\pi i\lim_{z\to 0}z\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}=2\pi i\operatorname{ch}0=2\pi i$$

(3) $\displaystyle\int_L \ln\left|\frac{z-\pi}{\pi z}\right|\cdot|dz|$

$$=\int_L \ln|\pi-z|\cdot|dz|-\int_L \ln|\pi z|\cdot|dz|$$

$$=\int_0^{2\pi}\ln[(\cos\theta-\pi)^2+\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta-2\pi\ln\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2\pi\cos\theta+\pi^2)d\theta-2\pi\ln\pi$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\ln\pi^2-2\pi\ln\pi=0$$

【题 2】 (1)函数$\dfrac{1}{e^z+i}$有哪些孤立奇点？各属何种类型？无穷远点是否为孤立奇点？

(2)$\dfrac{1}{(1+z)^3}\sin\dfrac{1}{1-z}$在扩充复平面上有哪些孤立奇点？各属何种类型？(浙江大学 2005 年)

解题分析 此题考查如何寻找奇点及奇点类型的判断.

解题过程 (1)显然 $z_k=i\left(\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$,$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是分母的零点,又

$$(e^z+i)'|_{z=z_k}=-i\neq0\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所以 $z_k=i\left(\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$是$\dfrac{1}{e^z+i}$的一级极点,又$\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\infty$,故 $z=\infty$是极点的极限点,不是孤立奇点.

(2)因为$\lim\limits_{z\to-1}(1+z)^3\cdot\dfrac{1}{(1+z)^3}\sin\dfrac{1}{1-z}=\sin\dfrac{1}{2}\neq0$

故 $z_1=-1$ 是 $f(z)$的三级极点.

$$\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{1}{(1+z)^3}\sin\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{8}\neq0$$

故 $z_2=1$ 是 $f(z)$的一级极点.

又$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(1+z)^3}\cdot\sin\dfrac{1}{1-z}=0$ $\quad\therefore z_3=\infty$是可去奇点,

所以在扩充复平面上,$f(z)$有一个三级极点 $z_1=-1$,一个一级极点 $z_2=1$ 和一个可去奇点 $z_3=\infty$.

【题 3】 (1)求$\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$在扩充复平面上各孤立奇点的留数,$\alpha$ 为一固定复数；

(2)若 $\varphi(z)$在 $z=a$ 解析,$\varphi'(a)\neq0$,又函数 $f(\zeta)$以 $\zeta_0=\varphi(a)$为简单极点,且 $\mathrm{Res}[f,\varphi(a)]=A$,试求 $\mathrm{Res}[f(\varphi(z)),a]$.(浙江大学 2005 年)

解题分析 此题是关于留数计算的考查,要求对留数有深刻的认识.

解题过程 (1)设 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$,因为 $\cos z-\cos\alpha$ 仅以 $z_k=2k\pi$

$\pm\alpha\quad(k=0,\pm1,\cdots)$为孤立零点,又因为

$(\cos z-\cos\alpha)'|_{z=z_k}=-\sin(2k\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

$(\cos z-\cos\alpha)''|_{z=z_k}=-\cos(2k\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$

所以,当 $\sin\alpha\neq0$ 时,$z_k=2k\pi\pm\alpha(k=0,\pm1,\cdots)$各为

$f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$的一级极点,此时

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k]=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{(\cos z-\cos\alpha)'}=\mp\frac{1}{\sin\alpha}$$

当 $\sin\alpha=0$ 时,必须 $\cos\alpha\neq0$,因而 $z_k=2k\pi\pm\alpha(k=0,\pm1,\cdots)$各为 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-\cos\alpha}$的二级极点. 此时可以算得

$$\mathrm{Res}[f(z),z_k]=0$$

在扩充复平面上,因为

$$\lim_{k\to\infty}z_k=\lim_{k\to\infty}(2k\pi\pm\alpha)=\infty$$

故 $z=\infty$为非孤立奇点.

(2)由 $\varphi(z)$在 a 点解析且 $\varphi'(a)\neq0$,可知

$$\varphi(z)=\varphi(a)+\varphi'(a)(z-a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots$$

若记 $\varphi(z)-\varphi(a)=(z-a)h(z)$,则

$$h(z)=\varphi'(a)+\frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}$$
$$+\cdots$$

$h(a)=\varphi'(a)\neq0\Rightarrow$在 a 的邻域内,$h(z)\neq0$.

函数 $f(\zeta)$以 $\zeta_0=\varphi(a)$为简单极点且 $\mathrm{Res}[f(\zeta),\zeta_0]=A\Leftrightarrow f(\zeta)$在 ζ_0 的去心邻域内洛朗展式的负幂项只有 $\dfrac{c_{-1}}{\zeta-\zeta_0}$,而且 $c_{-1}=A\neq0$ 故可设 $f(\zeta)$在 ζ_0 的去心邻域的洛朗展式为

$$f(\zeta)=\frac{A}{\zeta-\zeta_0}+c_0+c_1(\zeta-\zeta_0)+\cdots\triangleq\frac{g(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}$$

其中 $g(\zeta)$ 在 ζ_0 的邻域内解析且 $g(\zeta_0)=A\neq0$（从而在 ζ_0 的邻域内 $g(\zeta)\neq0$），于是

$$f[\varphi(z)]=\frac{g[\varphi(z)]}{\varphi(z)-\varphi(a)}=\frac{g[\varphi(z)]}{(z-a)h(z)}$$

以 a 为一级极点，

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\{f[\varphi(z)],a\}&=\lim_{z\to a}(z-a)f[\varphi(z)]\\&=\lim_{z\to a}\frac{g[\varphi(z)]}{h(z)}=\frac{g[\varphi(a)]}{h(a)}=\frac{A}{\varphi'(a)}\end{aligned}$$

【题 4】 用复变函数沿闭曲线积分的方法计算

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$$

（浙江大学 2005 年）

解题分析 先找出 $f(z)$ 的孤立奇点再计算留数.

解题过程 设 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4+1}$，则 $f(z)$ 的孤立奇点为 $z_k=\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$ （$k=0,1,2,3$），且都是 $f(z)$ 的一级极点，其中 z_0 与 z_1 在上半平面.

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2+1}{(z^4+1)'}=\frac{z_0^2+1}{4z_0^3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z_1^2+1}{4z_1^3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

所以 $$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot2\pi i\sum_{k=0,1}\operatorname{Res}[f(z),z_k]\\&=\pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\end{aligned}$$

【题 5】 利用留数计算下列积分：

(1)$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；

(2)$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.（**东北大学** 2006 **年**）

解题分析 **这又是一道用留数计算积分的题目，是对基本知识基本方法的考查.**

解题过程 (1) $R(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ **在上半平面有一个二级极点** $z=i$，**且**

$$\mathrm{Res}[R(z),i]=-\frac{i}{4}$$

易得：

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\pi i\mathrm{Res}[R(z),\mathrm{i}]=\frac{\pi}{4}$$

(2) **采用以下积分路径：**

$C:C_R+[-R,-r]+C_r+[r,R](0<r<R)$，**来绕开奇点** $Z=0$，**如图** 5－1 **所示.**

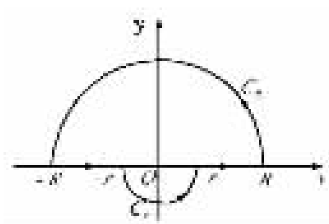

图 5－1

令 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$，**则** $f(z)$ **在** C **内有奇点** $z=0$，**据留数定理有**

$$\oint_C\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = 2\pi i \qquad ①$$

课本中已证明 $$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \qquad ②$$

又 $$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + i - \frac{z}{2!} - \frac{iz^2}{3!} + \cdots = \frac{1}{z} + \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析，且 $\varphi(0)=i$，故当 $|z|$ 充分小时，可使

$$|\varphi(z)| \leqslant 2$$

所以 $$\left|\int_{C_r}\varphi(z)dz\right| \leqslant \int_{C_r}|\varphi(z)|ds \leqslant 2\pi r$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi(z)dz = 0 \qquad ③$$

而 $$\int_{C_r}\frac{1}{z}dz = \pi i \qquad ④$$

将式 ① 两端令 $r\to 0$，$R\to+\infty$ 取极限，并将式 ②、③、④ 代入，得 $\pi i + 2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = 2\pi i$

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

课后习题全解

○ 1. 下列函数有些什么奇点?如果是极点，指出它的级：

1) $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$； 2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$； 3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$；

4) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$； 5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(e^{\pi z}+1)}$； 6) $\dfrac{1}{e^{z-1}}$；

7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$； 8) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$（n 为正整数）； 9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解 1) 令 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$，则 $\dfrac{1}{f(z)} = z(z-i)^2(z+i)^2$ 以 $z=0$ 为一级零点，$z=\pm i$ 为二级零点. 所以 $f(z)$ 有奇点：0，$\pm i$，并且由零点与极点的关系可知：$z=0$ 为 $f(z)$ 的一级

极点，$z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的二级极点.

2）$z=0$ 为$\frac{\sin z}{z^3}$的奇点，又在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}z^2-\cdots$，所以 $z=0$ 为$\frac{\sin z}{z^3}$的二级极点.

3）$$\frac{1}{z^3-z^2-z+1}=\frac{1}{z^2(z-1)-(z-1)}$$
$$=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}$$

有奇点：-1，1. $z=-1$ 为一级极点，$z=1$ 为二级极点.

4）由 $\ln(z+1)=\ln|z+1|+i\arg(z+1)$ 结合第一章习题中 32 题的结论可知 $\ln(z+1)$ 在负实轴上区间$(-\infty,-1]$ 中每一点不连续，因而也不解析. 除此之外是解析函数. 显然$(-\infty,-1]$上的点都是 $\ln(z+1)$ 的非孤立奇点，也是$\frac{\ln(z+1)}{z}$的非孤立奇点. 又 $z=0$ 为$\frac{\ln(z+1)}{z}$的奇点，且在其去心邻域 $0<|z|<1$ 内

$$\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\cdots$$

所以 $z=0$ 为$\frac{\ln(z+1)}{z}$的可去奇点.

5）分母的零点：$\pm i$ 及方程 $e^{\pi z}+1=0$ 的根 $z_k=(2k+1)i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，均为函数的奇点. 注意 $e^{\pi z}+1=0\Leftrightarrow e^{\pi z}=-1\Leftrightarrow \pi z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$，即 $z=(2k+1)i$，又$(e^{\pi z}+1)'\Big|_{z=z_k}=\pi e^{\pi z_k}\neq 0$，$z_k$ 为 $e^{\pi z}+1$ 的一级零点，且当 $k=0,-1$ 时，$z_0=i$，$z_{-1}=-i$. 这样 $\pm \mathrm{i}$ 为函数$(1+z^2)(e^{\pi z}+1)$ 的二级零点. 故$\pm$

i 为$\dfrac{z}{(1+z^2)(e^{\pi z}+1)}$的二级极点，$z_k=(2k+1)i\quad(k=1,\pm2,\pm3,\cdots)$为此函数的一级极点.

6）$z=1$ 为 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 的奇点，又在 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内 $e^{\frac{1}{z-1}}=1+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{(z-1)^2}+\cdots$ 含有无穷多个 $z-1$ 的负幂项，因此 $z=1$ 为本性奇点.

7）分母的零点：0 及方程 $e^z-1=0$ 的根 $z_k=2\pi ik(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，均为函数的奇点. 又$(e^z-1)'\Big|_{z=z_k}=e^{z_k}\neq0$，$z_k=2k\pi i$ 为 e^z-1 的一级零点，且当 $k=0$ 时 $z_0=0$. 这样 $z=0$ 为函数 $z^2(e^z-1)$ 的三级零点. 故 $z=0$ 为$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$的三级极点，$z_k=2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为此函数的一级极点.

8）由分母为零得 $z^n+1=0\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{-1}=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，且$(z^n+1)'\Big|_{z=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}}\neq0$，即 $z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ 为 z^n+1 的一级零点. 因而 $z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$为函数$\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$的一级极点.

9）由 $\sin z^2=z^2-\dfrac{1}{3!}z^6+\dfrac{1}{5!}z^{10}-\cdots=z^2\left(1-\dfrac{1}{3!}z^4+\cdots\right)$知 $z=0$ 是 $\sin z^2$ 的二级零点，从而 $z=0$ 为$\dfrac{1}{\sin z^2}$的二级极点.

又 $\sin z^2=0\Leftrightarrow z^2=k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时，$z^2=k\pi$ 给出 $z=\pm\sqrt{k\pi}$.

当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时，$z^2=k\pi$ 给出 $z=\pm\sqrt{|k|\pi}i$.

而$(\sin z^2)'=2z\cos z^2$ 在$\pm\sqrt{k\pi}$，$\pm\sqrt{k\pi}i(k=1,2,\cdots)$点处不为零，所以$\pm\sqrt{k\pi}$，$\pm\sqrt{k\pi}i$ 均为 $\sin z^2$ 的一级零点.

综上所述,函数$\frac{1}{\sin z^2}$有奇点:$0,\pm\sqrt{k\pi},\pm\sqrt{k\pi}i(k=1,2,3,\cdots)$,其中0为二级极点,$\pm\sqrt{k\pi},\pm\sqrt{k\pi}i$均为一级极点.

○ 2. 求证:如果z_0是解析函数$f(z)$的$m(m>1)$级零点.那么z_0是$f'(z)$的$m-1$级零点.

证明　z_0是$f(z)$的m级零点$\Leftrightarrow f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$,$\varphi(z)$在$z_0$解析且$\varphi(z_0)\neq 0$.而$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)=(z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]\xlongequal{\text{def}}(z-z_0)^{m-1}g(z)$,$g(z)=m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$在$z_0$解析,$g(z_0)=m\varphi(z_0)\neq 0$.所以又由$f'(z)=(z-z_0)^{m-1}g(z)$,$g(z)$在$z_0$解析且$g(z_0)\neq 0$可得$z_0$是$f'(z)$的$m-1$级零点.

○ 3. 验证:$z=\frac{\pi i}{2}$是$\text{ch}z$的一级零点.

证明　由$\text{ch}z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})$得

$$\text{ch}\frac{\pi i}{2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi i/2}+\mathrm{e}^{-\pi i/2})=\frac{1}{2}(i-i)=0$$

$$(\text{ch}z)'\Big|_{z=\frac{\pi i}{2}}=\text{sh}\frac{\pi i}{2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi i/2}-\mathrm{e}^{-\pi i/2})=\frac{1}{2}(i+i)$$
$$=i\neq 0$$

所以$z=\frac{\pi i}{2}$是$\text{ch}z$的一级零点.

◎ 4. $z=0$是函数$(\sin z+\text{sh}z-2z)^{-2}$的几级极点?

分析　确定一个点是函数的几级极点,先确定逆函数的零点即可求出.

解　$z=0$是$(\sin z+\text{sh}z-2z)^{-2}$的10级极点.因为

$$\sin z+\text{sh}z-2z=\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)+$$
$$\left(z+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right.$$

$$+\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots\Big)-2z$$

$$=z^5\left(\frac{2}{5!}+\frac{2}{9!}z^4+\cdots\right)$$

以 $z=0$ 为 5 级零点，所以 $z=0$ 是 $(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^2$ 的 10 级零点，结合零点与极点的关系，$z=0$ 是函数 $(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^{-2}$ 的 10 级极点.

○5. 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\text{（或两端均为 }\infty\text{）}.$$

证明 设 z_0 分别为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m 级零点与 n 级零点，则在 z_0 的邻域内，

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi_1(z),\quad g(z)=(z-z_0)^n\varphi_2(z)$$

其中 $\varphi_1(z)$ 与 $\varphi_2(z)$ 在 z_0 解析，$\varphi_1(z_0)\neq 0$，$\varphi_2(z_0)\neq 0$. 于是

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \qquad ①$$

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{m\varphi_1(z)+(z-z_0)\varphi'_1(z)}{n\varphi_2(z)+(z-z_0)\varphi'_2(z)} \qquad ②$$

由式 ① 和式 ② 可知

当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=0=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$；

当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2(z_0)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$；

当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\infty=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$，结论得证.

◎6. 设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点（或零点），那么下列三个函数：

1) $\varphi(z)\psi(z)$；　　2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$；　　3) $\varphi(z)+\psi(z)$

在 $z=a$ 处各有什么性质？

分析　函数的乘积、商、和等的零点与极点的性质，主要是要明确概念及极点的基本性质.

解　函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点相当于在 a 的去心邻域内：

$$\varphi(z)=\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^m},\psi(z)=\frac{\psi_1(z)}{(z-a)^n} \tag{①}$$

其中 $\varphi_1(z)$ 与 $\psi_1(z)$ 在 a 点解析且 $\varphi_1(a)\neq 0,\psi_1(a)\neq 0$

1）由式 ① 可知

$$\varphi(z)\psi(z)=\frac{\varphi_1(z)\psi_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$$

其中 $\varphi_1(z)\psi_1(z)$ 在 a 点解析，$\varphi_1(a)\psi_1(a)\neq 0$，故 a 为 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点.

2）由式 ① 可知

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}}{(z-a)^{m-n}}$$

其中$\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$在 a 点解析（这要用到第一章习题 29 的结论，得出在 a 的邻域内 $\psi_1(z)\neq 0$），$\dfrac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}\neq 0$. 于是当 $m>n$ 时，a 为$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的 $m-n$ 级极点；当 $m=n$ 时，a 为$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的可去奇点（解析点）；当 $m<n$ 时，a 为$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的 $n-m$ 级零点.

3）由式 ① 可知

$$\varphi(z)+\psi(z)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_1(z)+(z-a)^{m-n}\psi_1(z)}{(z-a)^m}, & \text{当 } m>n \text{ 时}\\[2ex] \dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}, & \text{当 } m=n \text{ 时}\\[2ex] \dfrac{(z-a)^{n-m}\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^n}, & \text{当 } m<n \text{ 时}\end{cases}$$

当 $m>n$ 时，$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子在 a 点解析且当 $z=a$ 时，分子 $=\varphi_1(a)\neq 0$，从而 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点.

当 $m=n$ 时，$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 在 a 点解析，当且 $z=a$ 时，分子 $=\varphi_1(a)+\psi_1(a)$. 若 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)\neq 0$，则 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 m 级极点；若 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)=0$，则 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的低于 m 级的极点或可去奇点[此时，要根据 a 为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 的多少级零点来判断. 设 a 为 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)$ 的 l 级零点，等价地 $\varphi_1(z)+\psi_1(z)=(z-a)^l h(z)$，$h(z)$ 在 a 解析且 $h(a)\neq 0$，则 $\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}=\dfrac{h(z)}{(z-a)^{m-l}}$. 当 $l<m$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $m-l$ 级极点；当 $l>m$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $l-m$ 级零点(解析点)；当 $l=m$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的可去奇点(解析点)，所以当 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)=0$ 时 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}$ 的低于 m 级的极点或可去奇点(解析点)].

当 $m<n$ 时，$\varphi(z)+\psi(z)$ 表达式的分子在 a 点解析，且当 $z=a$ 时，分子 $=\psi_1(a)\neq 0$. 从而 a 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 n 级极点.

在 a 分别为 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的 m 级与 n 级零点的情形，只要在 a 的邻域内用

$$\varphi(z)=(z-a)^m\varphi_1(z),\quad \psi(z)=(z-a)^n\psi_1(z)$$

代替式 ①，类似讨论即可.

◎7. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点；这个函数又有下列罗朗展开式：

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},$$

$$|z-1|>1$$

所以“$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”；又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂，因此 $\operatorname{Res}[f(z),1]=0$，这些说法对吗？

分析　极点的级数，罗朗展开式，本性奇点等的概念与性质，考查知识是否牢固.

解　这些说法不对. 利用罗朗展开式判定奇点 $z=1$ 的类型及确定 $\operatorname{Res}[f(z),1]$ 时，只能用函数 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的罗朗展开式. 对 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 而言，应考虑在 $0<|z-1|<1$ 内的罗朗展开式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)^2}&=\frac{1}{(z-1)+1}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\\&=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots,\\&\qquad 0<|z-1|<1\end{aligned}$$

这样才有正确的结论：$z=1$ 为 $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 的二级极点，$\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{z(z-1)^2},1\right]=-1$. 此题中依据 $|z-1|>1$ 内的罗朗展开式得到的结论是不正确的.

○ 8. 求下列函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数：

1) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$；　2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；　3) $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$；

4) $\dfrac{z}{\cos z}$；　5) $\cos\dfrac{1}{1-z}$；　6) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$；

7) $\dfrac{1}{z\sin z}$；　8) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

解　1) 函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{z+1}{z(z-2)}$ 有一级极点：$0,2$，其留数分别为

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z+1}{z-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to2}\frac{z+1}{z}=\frac{3}{2}$$

2）在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内，由展开式

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left\{1-\left[1+2z+\frac{1}{2!}(2z)^2+\frac{1}{3!}(2z)^3+\cdots\right]\right\}$$

$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{z}-\frac{2}{3}-\cdots$$

易知 $z=0$ 为 $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的三级极点且 $\operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{4}{3}$.

3）函数 $f(z)=\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}=\frac{1+z^4}{(z-i)^3(z+i)^3}$ 有三级极点：$\pm i$，其留数分别为

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}[(z-i)^3f(z)]''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{-12z^2+12}{(z+i)^5}=-\frac{3}{8}i$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}[(z+i)^3f(z)]''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left[\frac{1+z^4}{(z-i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\frac{-12z^2+12}{(z-i)^5}=\frac{3}{8}i$$

4）函数 $f(z)=\frac{z}{\cos z}$ 有一级极点 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$（分母的一级零点），其留数分别为

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{\cos z},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\left.\frac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{-\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=(-1)^{k+1}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

5) 在 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内,由展开式

$$\cos\frac{1}{1-z}=\cos\frac{1}{z-1}$$

$$=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^4}-\cdots$$

可知 $z=1$ 为 $\cos\frac{1}{1-z}$ 的本性奇点且

$$\mathrm{Res}\left[\cos\frac{1}{1-z},1\right]=0.$$

6) 在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内,由展开式

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots\right)$$

$$=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}-\cdots$$

可知 $z=0$ 为 $z^2\sin\frac{1}{z}$ 的本性奇点且

$$\mathrm{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}.$$

7) 函数 $z\sin z$ 以 $z=0$ 为二级零点,以 $z_k=k\pi$ 为一级零点,所以函数 $\frac{1}{z\sin z}$ 有二级极点 $z=0$ 及一级极点 $z_k=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$,其留数分别为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},k\pi\right]=\left.\frac{\frac{1}{z}}{(\sin z)'}\right|_{z=k\pi}$$

$$=\frac{1}{k\pi\cos k\pi}=\frac{(-1)^k}{k\pi}$$

$$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\sin z},0\right]=\lim_{z\to0}\left(z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}\cdot\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z\ \sin z}{2z} = 0$$

8) 函数$\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$以$z_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$为一级极点(因为$\mathrm{ch}z$以$z_k$为一级零点,且$\mathrm{sh}z_k\neq 0$)($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$),其留数分别为

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z},\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]=\left.\frac{\mathrm{sh}z}{(\mathrm{ch}z)'}\right|_{x=(k+\frac{1}{2})\pi i}=1$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

◎9. 计算下列积分(利用留数,圆周均取正向):

1) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$;　　2) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$;

3) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}\mathrm{d}z$(其中$m$为整数);

4) $\int_{|z-2i|=1}\mathrm{th}z\mathrm{d}z$;　　5) $\oint\limits_{|z|=3}\mathrm{tg}\pi z\mathrm{d}z$;

6) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\mathrm{d}z$(其中$n$为正整数,且$|a|\neq 1$,$|b|\neq 1$,$|a|<|b|$).[提示:试就$|a|$,$|b|$与1的大小关系分别进行讨论].

分析　利用留数求积分,留数定理的内容只要掌握,求解较简单.

解　1) 由留数定理 $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]$. 而$z=0$为$\frac{\sin z}{z}$的可去奇点,$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0$,所以积分值为零.

2) 由留数定理

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2},1\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2}\right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} 2e^{2z} = 4\pi i e^2$$

3）由

$$\frac{1-\cos z}{z^m}$$

$$= \frac{1}{z^m}\left[1-\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n}+\cdots\right)$$

$$0<|z|<+\infty$$

易知，当 m 为偶数时，上式中不含 z^{-1} 项，即 $c_{-1}=0$；当 m 为奇数，即 $m=2n+1$ 时，上式中 $c_{-1}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$，而当 $m\leqslant 2$ 时，上式无负幂项，$c_{-1}=0$. 故

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}, & \text{当 } m=2n+1,n=1,2,3,\cdots \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 为其它整数或 } 0 \text{ 时}\end{cases}$$

再由留数定理得

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1-\cos z}{z^m},0\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\pi i(-1)^{n+1}}{(2n)!}, & \text{当 } m=2n+1,n=1,2,3,\cdots \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 为其它整数或 } 0 \text{ 时}\end{cases}$$

4）由第 8 题 8）小题可知函 数 $\operatorname{th}z=\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}$ 有一级极点 $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 且 $\operatorname{Res}[\operatorname{th}z,z_k]=\operatorname{Res}[\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z},z_k]=1$. 而 $z_0=\dfrac{\pi i}{2}$ 在 $|z-2i|=1$ 内，所以由留数定理

$$\oint_{|z-2i|=1}\operatorname{th}z\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}[\operatorname{th}thz,z_0] = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$

5）函数 $\mathrm{tg}\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$ 有一级极点 $z_k=k+\dfrac{1}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$［$\cos\pi z_k=0$ 且 $(\cos\pi z)'\Big|_{z=z_k}\neq 0$ 即 z_k 为 $\cos\pi z$ 的一级零点且 $\sin\pi z_k\neq 0$］且 $\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,z_k]=\dfrac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\Big|_{z=z_k}=-\dfrac{1}{\pi}$. 而 $k=0,\pm 1,\pm 2,-3$ 时，$z_0=\dfrac{1}{2},z_1=\dfrac{3}{2},z_{-1}=-\dfrac{1}{2}$，$z_2=\dfrac{5}{2},z_{-2}=-\dfrac{3}{2},z_{-3}=-\dfrac{5}{2}$，这 6 个极点在 $|z|=3$ 内，所以由留数定理

$$\oint_{|z|=3}\mathrm{tg}\pi z\mathrm{d}z=2\pi i\left\{\sum_{k=-2}^{2}\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,z_k]+\mathrm{Res}[\mathrm{tg}\pi z,z_{-3}]\right\}=2\pi i\cdot 6\cdot\frac{-1}{\pi}=-12i$$

6）函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$ 有两个 n 级极点 a 与 b，其留数分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),a]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]^{(n-1)}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(z-b)^{2n-1}}\\&=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(a-b)^{2n-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),b]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}[(z-b)^n f(z)]^{(n-1)}\\&=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(b-a)^{2n-1}}\end{aligned}$$

（只须在上式中把 a,b 互换）

① 当 $1<|a|<|b|$ 时，极点 a,b 均在 $|z|=1$ 的外部，即 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上及其内部解析，故积分 $\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=0$.

② 当 $|a|<1<|b|$ 时，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内只有极点 a，由留数定理 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz=2\pi i\text{Res}[f(z),a]$

$$=\frac{(-1)^{n-1}2\pi i(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$$

③ 当 $|a|<|b|<1$ 时，$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有极点 a 与 b. 由留数定理 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$

$$=2\pi i\{\text{Res}[f(z),a]+\text{Res}[f(z),b]\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(a-b)^{2n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!(b-a)^{2n-1}}\right\}=0$$

◎10. 判断 $z=\infty$ 是下列函数的什么奇点？并求出在 ∞ 的留数：

1) e^{1/z^2}；　　2) $\cos z-\sin z$；　　3) $\frac{2z}{3+z^2}$.

分析　判断函数的奇点，并求留数，利用留数定理即可.

解　1) 在 ∞ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内

$$e^{1/z^2}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

展开式中无 z 的正幂项也无 $\frac{1}{z}$ 项，所以 $z=\infty$ 是函数 e^{1/z^2} 的可去奇点且 $\text{Res}[e^{1/z^2},\infty]=-c_{-1}=0$.

2) 在 ∞ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 内

$$\cos z-\sin z=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-z-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots$$

展开式中有无穷多个 z 的正幂项而无 $\frac{1}{z}$ 项，所以 $z=\infty$ 是 $\cos z-\sin z$ 的本性奇点且 $\mathrm{Res}[\cos z-\sin z,\infty]=-c_{-1}=0$.

3）在 ∞ 的去心邻域 $\sqrt{3}<|z|<+\infty$ 内

$$\frac{2z}{3+z^2}=\frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z^2}}=\frac{2}{z}\left(1-\frac{3}{z^2}+\cdots\right)=\frac{2}{z}-\frac{6}{z^3}+\cdots$$

展开式中无 z 的正幂项且 $c_{-1}=2$，所以 $z=\infty$ 是 $\frac{2z}{3+z^2}$ 的可去奇点且 $\mathrm{Res}\left[\frac{2z}{3+z^2},\infty\right]=-c_{-1}=-2$.

○ 11. 求 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 的值，如果

1) $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$；　2) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$.

解　1）函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$ 在扩充复平面上有奇点：$\pm1,\infty$，而 ±1 为 $f(z)$ 的一级极点且

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z+1}=\frac{1}{2}e$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{e^z}{z-1}=-\frac{1}{2}e^{-1}$$

所以由 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]=0$ 得

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}-e)=-\mathrm{sh}1$$

2）由公式 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$，而

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^4}{(1+z)^4(1-4z)}$$

以 $z=0$ 为可去奇点. 所以

$$\text{Res}[f(z),\infty]=-\text{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=0$$

○12. **计算下列各积分，C 为正向圆周：**

1) $\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz,\quad C:|z|=3;$

2) $\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz, C:|z|=2;$

3) $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$（$n$ **为一正整数**），$C:|z|=r>1.$

解　1）**函数** $f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ **在圆周** $C:|z|=3$ **的内部有** 6 **个孤立奇点**：$\pm i, \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}(k=0,1,2,3)$（**均为分母的零点**），**而在** C **外部仅有孤立奇点** $z=\infty$. **由函数在扩充复平面上这** 7 **个奇点处留数之和为零及留数定理可知**

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=-2\pi i\text{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}=2\pi i$$

2）**与上题** 1）**类似**，

$$\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=-2\pi i\text{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

$$=2\pi i\text{Res}\left[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^4\cdot\frac{e^z}{z^4(1+z)}\right]'''$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{3!}\cdot(-2)=\frac{-2\pi i}{3}$$

3）**与** 1）**题解答类似**

$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right]$$

而在 ∞ 的去心邻域 $1<|z|<+\infty$ 内

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n} = z^n \frac{1}{1+\frac{1}{z^n}} = z^n\left(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{z^{3n}}+\cdots\right)$$

$$= z^n - 1 + \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{2n}} + \cdots$$

展开式中正幂项最高次幂为 z^n，且 $\frac{1}{z}$ 项的系数

$C_{-1} = \begin{cases} 1, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$，所以 ∞ 为 $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ 的 n 级极点.

且 $\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^n},\infty\right] = -C_{-1} = \begin{cases} -1, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$

故

$$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z = -2\pi i\cdot(-C_{-1}) = \begin{cases} 2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}\end{cases}$$

○13. **计算下列积分：**

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$；　2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta(a>b>0)$；

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；　4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$；　6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z = i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta = iz\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. 于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{3}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z+\frac{i}{3}\right)(z+3i)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{z+3i}\bigg|_{z=-\frac{i}{3}} = \frac{\pi}{2}$$

2）令 $z = e^{i\theta}$，则 $d\theta = \frac{dz}{iz}, \sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}, \cos z = \frac{z^2+1}{2z}$. 于是 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta} d\theta = \frac{i}{2} \oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)} dz$. 函数 $f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}$ 在 $|z|=1$ 内有一个二级极点 0 及一个一级极点 $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，其留数分别为

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0}(z^2 f(z))' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{(z^2-1)^2}{bz^2+2az+b}\right]'$$

$$= -\frac{2a}{b^2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1] = \frac{\frac{(z^2-1)^2}{z^2}}{(bz^2+2az+b)'}\Bigg|_{z=z_1} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

从而由留数定理得

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\sin\theta} d\theta = \frac{i}{2} \cdot 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),z_1]\}$$

$$= \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2-b^2})$$

3）函数 $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ 分母的次数比分子的次数高四次，且在实轴上不为零，而 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面有二级极点 i，由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \left[(z-i)^2 \cdot \frac{1}{(1+z^2)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

4）在上半平面上，函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$ 有两个一级极点：$z_0=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}$ 与 $z_1=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}$（均为 $z^4+1=0$ 的根，即 $z_k=\sqrt[4]{-1}=\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}(k=0,1,2,3)$），其留数分别为

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{z^2}{(1+z^4)'}\bigg|_{z=z_0}=\frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=z_0}$$

$$=\frac{1}{4z_0}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z^2}{(1+z^4)'}\bigg|_{z=z_1}=\frac{1}{4z_1}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),z_0]+\operatorname{Res}[f(z),z_1]\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}i}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

注意到被积函数为偶函数，可知

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

5）函数 $\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+4z+5}$ 在上半平面有一级极点：$-2+i$（分母的一级零点）且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right]=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z^2+4z+5)'}\bigg|_{z=-2+i}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-1-2i}}{2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}(\cos 2-\mathrm{i}\sin 2)$$

由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}(\cos 2-i\sin 2)$$

$$=\frac{\pi}{\mathrm{e}}(\cos 2-\mathrm{i}\sin 2)$$

两边取实部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\mathrm{e}}\cos 2$$

6）**由公式**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2},i\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{(1+z^2)'}\bigg|_{z=i}=\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}$$

两边取虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\mathrm{e}}$$

● 14. **试用图** 5－2 **中的积分路线，求积分** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ **的值.**

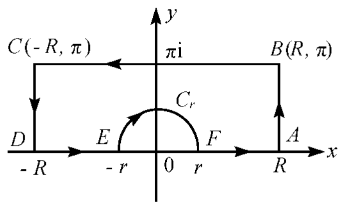

图 5－2

分析 **沿指定路径求积分，一般分段求，由复积分计算公式及积分不等式即可求出.**

解 **函数** $\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$ **在如图** 5－2 **的路线** $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+C_r+\overline{FA}$ **上及其内部解析，由柯西－古萨定理**

$$\int_{\overline{AB}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{BC}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{CD}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{DE}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+$$

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{FA}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0 \qquad ①$$

由复积分计算公式

$\int_{\overline{AB}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+iy)}}{R+iy}(R+iy)'\mathrm{d}y$，**再由积分不等式，**

$$\left|\int_{\overline{AB}}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\pi}\left|\frac{\mathrm{e}^{-y+Ri}}{R+iy}i\right|\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2 + y^2}} dy \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{R} dy$$

$$= \frac{1 - e^{-\pi}}{R} \to 0 (\text{当 } R \to +\infty) \qquad ②$$

同样

$$\left| \int_{\overline{CD}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy} (-R+iy)' dy \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-y-Ri}}{-R+iy} \right| dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}} dy \xrightarrow{R \to +\infty} 0 \qquad ③$$

又

$$\int_{\overline{BC}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{i(x+\pi i)}}{x+\pi i} (x+\pi i)' dx$$

$$= -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-\pi+xi}}{x+\pi i} dx$$

$$= -e^{-\pi} \left\{ \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+\pi^2} dx - \pi i \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+\pi^2} dx \right\} \qquad ④$$

而由公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+\pi^2} dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z e^{iz}}{z^2+\pi^2}, \pi i \right] = \pi i e^{-\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+\pi^2} dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+\pi^2}, \pi i \right] = e^{-\pi}$$

代入式 ④ 即知

$$\int_{\overline{BC}} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow{R \to +\infty} 0 \qquad ⑤$$

再注意到

$$\int_{\overline{DE}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\overline{FA}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$= -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$= 2i \int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x} dx \qquad ⑥$$

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i \text{[教材例 4 中(5.3.5)式]} \qquad ⑦$$

在式①中令 $R\to+\infty, r\to 0^+$，并利用式②，③，⑤～⑦可得

$$2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i=0,$$

即
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

小结　掌握沿指定路径求积分的方法.

○ *15. 利用公式 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$，计算下列积分：

1) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{1}{z}dz$；　　2) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz$；

3) $\oint\limits_{|z|=3}\operatorname{tg}z\,dz$；　　4) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz$.

解　1) 设 $f(z)=z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内零点总个数 $N=1$，极点总个数 $P=0$. 所以

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
$$=2\pi i(N-P)=2\pi i(1-0)=2\pi i$$

2) 设 $f(z)=z^2-1$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有一级零点 ± 1，无极点，即 $N=2, P=0$. 所以

$$\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(N-P)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(2-0)=2\pi i$$

3) 设 $f(z)=\cos z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有两个一级零点 $\pm\frac{\pi}{2}$，无极点，即 $N=2, P=0$.

所以

$$\oint_{|z|=3}\operatorname{tg}z\,dz=-\oint_{|z|=3}\frac{-\sin z}{\cos z}dz=-\oint_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= -2\pi i(N-P) = -4\pi i$$

4) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)}dz = \oint_{|z|=3} \frac{1}{z}dz - \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+1}dz$，而 z 和 $z+1$ 在 $|z|=3$ 内分别只有一个零点而无极点，故

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z}dz = 2\pi i,\quad \oint_{|z|=3} \frac{1}{z+1}dz = 2\pi i$$

从而
$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)}dz = 0$$

● $*16.$ 设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，它的内部全含于 D，z_0 为 C 内一点. 如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$. 在 C 内 $f(z)$ 无其它零点. 试证：$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = z_0$.

分析 解析函数的积分问题，分析积分函数的点，再利用留数定理，即可解决.

证明 被积函数 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 C 内仅有一个一级极点 z_0（因 z_0 为分母的一级零点），而由分式给出的函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$，当 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 点解析且 z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点时，$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 成立. 注意：当 $P(z_0)\neq 0$ 时，z_0 为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一级极点，此公式在书上被列为留数的计算规则 Ⅲ，当 $P(z_0)=0$ 时，z_0 为 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的可去奇点，$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = 0$，此规则 Ⅲ 同样成立. 于是由留数定理

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Res}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0\right]$$
$$= \left.\frac{zf'(z)}{(f(z))'}\right|_{z=z_0} = z_0$$

小结 解析函数的积分问题，要熟练掌握留数定理.

○ $*17.$ 设 $\varphi(z)$ 在 C：$|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<$

1. 证明 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$.

证明　设 $f(z)=-z$, $g(z)=\varphi(z)$,则在 C 上:

$$|g(z)|=|\varphi(z)|<1=|-z|=|f(z)|$$

由儒歇(Rouche)定理,$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)=\varphi(z)-z$ 在 C 内零点个数相同. 而 $f(z)=-z$ 在 C:$|z|=1$ 内只有一个零点,所以 $f(z)+g(z)=\varphi(z)-z$ 在 C 内只有一个零点记为 z_0. 即 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)-z_0=0$ 或 $\varphi(z_0)=z_0$.

◎ *18. 证明:当 $|a|>\mathrm{e}$ 时,方程 $\mathrm{e}^z-az^n=0$ 在单位圆 $|z|=1$ 内有 n 个根.

分析　方程的根与区域的关系,主要考查对儒歇定理的掌握程度.

证明　设 $f(z)=-az^n$, $g(z)=\mathrm{e}^z$, C: $|z|=1$,则在 C 上: $|g(z)|=|\mathrm{e}^z|\leqslant \mathrm{e}^{|z|}=\mathrm{e}<|a|=|-az^n|=|f(z)|$,即 $|g(z)|<|f(z)|$. 由儒歇定理,$f(z)=-az^n$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 内零点个数相同. 而 $f(z)$ 在 C 内有 n 个零点,所以 $f(z)+g(z)=\mathrm{e}^z-az^n$ 在 C 内有 n 个零点,即方程 $\mathrm{e}^z-az^n=0$ 在 $|z|=1$ 内有 n 个根.

◎ *19. 证明方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1<|z|<2$ 内.

分析　方程的根与区域的关系,主要考查对儒歇定理的掌握程度.

证明　设 $f(z)=z^7$, $g(z)=-z^3+12$,则在圆周 $|z|=2$ 上: $|f(z)|=2^7=128$, $|g(z)|=|-z^3+12|\leqslant |z|^3+12=2^3+12=20$. 即在 $|z|=2$ 上,$|f(z)|>|g(z)|$,由儒歇定理,$f(z)=z^7$ 与 $f(z)+g(z)=z^7-z^3+12$ 在 $|z|=2$ 内零点个数相同,即方程 $z^7-z^3+12=0$ 在 $|z|=2$ 内有 7 个零点.

又当 $|z|\leqslant 1$ 时 $|z^7-z^3+12|\geqslant 12-|z^7-z^3|\geqslant 12-|z|^7-|z|^3\geqslant 12-1-1=10>0$,即当 $|z|\leqslant 1$ 时方程 $z^7-z^3+12=0$ 无根. 故此方程的根都是在圆环域 $1<|z|<2$ 内.

第六章

共形映射

内容提要

一、解析函数的导数的几何意义

1. **两条曲线在交点的夹角**

曲线 C：$z=z(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，若 $\alpha<t_0<\beta$，且 $z'(t_0)\neq0$，那么向量 $z'(t_0)$ 与曲线 C 相切于点 $z_0=z(t_0)$，而 $\mathrm{Arg}\ z'(t_0)$ 表示这条切线的正向与 x 轴正向之间的夹角，若曲线 C_1 与 C_2 相交一点，它们正向的夹角定义为此两条曲线在交点处的两条切线正向之间的夹角．

2. **导数的几何意义**

设 $f(z)$ 为区域 D 的解析函数，C 为 D 内的一条光滑曲线，设 $f(z)$ 把 C 映为一条光滑曲线 Γ.

(1) $z_0\in C$ 若导数 $f'(z_0)\neq0$，则导数的辐角 $\mathrm{Arg}\ f'(z_0)$ 是曲线 C 经过 $w=f(z)$ 映射成 Γ 后，在 z_0 处的转动角．这个转动角的大小跟曲线 C 的形状与方向无关．

(2) 若 $w=f(z)$ 为复映射，C_1,C_2 为任何相交于 z_0 的两条曲线，经过映射 $w=f(z)$，C_1,C_2 变为 Γ_1,Γ_2，若 C_1 与 C_2 在 z_0

的夹角等于 Γ_1 与 Γ_2 在 $f(z_0)$ 的夹角，则称映射在点 z_0 具有保角性.

(3)导数的模 $|f'(z_0)|$ 表示曲线 C 经过 $\omega=f(z)$ 映射成 Γ 后在点 z_0 的伸缩率，它与线 C 的形态及方向无关，我们说这种映射具有伸缩率不变性.

二、共形映射

若 $w=f(z)$ 在区域 D 内是一一的(称为单叶的)保角的，则称 $w=f(z)$ 是 D 内的共形(或保形)映射.

定理　设 $w=f(z)$ 为区域 D 内的解析函数，$z_0\in D$.

(1)若 $f'(z_0)\neq 0$，则 $w=f(z)$ 在 z_0 处是保角的.

(2)若 $w=f(z)$ 在 D 内是一一的，则 $w=f(z)$ 将区域 D 共形映射为区域 $G=\{w\,|\,w=f(z),z\in D\}=f(D)$，并且它的反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在 G 内是一一的解析函数，因而将区域 G 共形映射到区域 D.

三、分式线性映射

1. 分式线性映射

由
$$w=\frac{az+b}{cz+d}\qquad\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0\right) \tag{①}$$
确定的映射称为分式线性映射.

因为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 有单值的反函数 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$，且 $\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，故式①的逆映射 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ 也是分式线性映射.

2. 分式线性映射的分解

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}$$

故分式线性映射可以分解为以下四种基本映射的复合：

(1)平移　$w=z+b$.

(2)旋转　$w=e^{i\alpha}z$.

(3)伸缩　$w=rz(r>0)$.

(4)反演　$w=\frac{1}{z}$.

3. 分式线性映射的性质

(1)保角性：如果我们规定两条伸向无穷远的曲线在 $z=\infty$ 处的夹角，等于它们在映射 $\xi=\frac{1}{z}$ 下所映成的通过原点 $\xi=0$ 的两条象曲线的夹角，则分式线性映射是保角的.

(2)保圆性：如果我们把直线看做是经过无穷远点的圆周，则分式线性映射将圆周映射成圆周.

(3)保对称性：设 z_1、z_2 是关于圆周 C 的一对称点，分式线性映射把它们分别映成点 w_1、w_2 与圆周 Γ，则 w_1、w_2 关于 Γ 对称.

(4)保交比性

4. 惟一决定分式线性映射的条件

在 z 平面上任意给定三个相异的点 z_1,z_2,z_3，同样在 w 平面上任意给定三个相异的点 w_1,w_2,w_3，则存在惟一的分式线性映射把 $z_k(k=1,2,3)$ 依次映成 $w_k(k=1,2,3)$，其表示式为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

四、几个初等函数所构成的映射

1. 幂函数及其反函数——根式函数

(1)幂函数 $w=z^n$($n\geqslant 2$ 为正整数)在复平面上除去原点 $z=0$ 外处处保角；它将 z 平面上以 $z=0$ 为顶点的角形域 $0<\arg z$

$<\theta_0$，映成 w 平面上 $w=0$ 为顶点的角形域 $0<\arg w<n\theta_0$（$\theta_0<\dfrac{2\pi}{n}$），张角为原来的 n 倍；它在角形域 $0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}$ 内是共形的．

(2)幂函数 $w=z^n$（$n\geqslant 2$ 为正整数）的功能是将角形域映成角形域，且张角扩大为原来的 n 倍．

(3)根式函数 $z=\sqrt[n]{w}$（一个单值分支）的性质与功能同幂函数 $w=z^n$ 完全相反．

2．指数函数及其反函数——对数函数

(1)指数函数 $w=e^z$ 在复平上处处保角；它将 z 平面上的水平带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<a$（$a\leqslant 2\pi$）映成 w 平面上角形域 $0<\arg w<a$；它在水平带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$ 内是共形的；它的功能是将水平带形域映成角形域．

(2)对数函数的性质与功能同指数函数相反．

典型例题与解题技巧

【例 1】 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 保形映射为圆 $|w-2i|<2$. 内部的分式线性映射 $w=f(z)$，使它满足：

(1) $f(2i)=2i$；　　　　(2) $\arg f'(2i)=-\dfrac{\pi}{2}$.

解题分析　我们知道，分式线性映射 $\zeta=e^{i\theta}\dfrac{z-2i}{z+2i}$ 就可将上半平面映为单位圆 $|\zeta|=1$ 的内部，并且将 $2i$ 映为 $\zeta=0$，其中 θ 为待定实常数．只要再将单位圆 $|\zeta|=1$ 的圆心平移至 $w=2i$，半径伸长为原来的 2 倍，该单位圆内部就映为圆 $|w-2i|<2$ 的内部．最后利用条件(2)确定 θ 的值，就可得到所求的映射 $w=f(z)$.

解题过程　由于分式线性映射 $\zeta=e^{i\theta}\dfrac{z-2i}{z+2i}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映为单位圆 $|\zeta|=1$ 的内部，且 $z=2i$ 映为 $\zeta=0$；而 $w=2(\zeta$

$+\ i)$将$|\zeta|<1$映为$|w-2i|<2$，故分式线性映射

$$w=2\left(e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}+i\right) \qquad (\theta\text{ 为待定实数})$$

将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映为圆$|w-2i|<2$内部，并且满足条件(1)(图6－1).

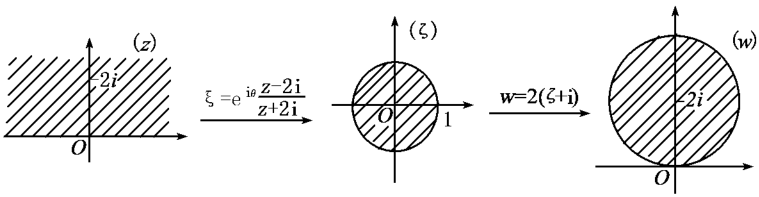

图 6－1

又因为

$$f'(2i)=2\left(e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}\right)'\bigg|_{z=2i}=2e^{i\theta}\frac{4i}{(z+2i)^2}\bigg|_{z=2i}$$

$$=-\frac{1}{2}ie^{i\theta},$$

所以 $\arg f'(2i)=\theta-\frac{\pi}{2}$.

代入条件(2)得$\theta=0$，故$w=2\left(i+\frac{z-2i}{z+2i}\right)$即为所求的分式线性映射．

【例 2】 求下列各区域到上半平面的一个共形互为单值映射．

(1) $|z+i|<2$， $\mathrm{Im}z>0$；

(2) $|z+i|>\sqrt{2}$， $|z-i|<\sqrt{2}$.

解题分析　这道题是基本的题型，但需要对各种变换几何意义的深刻理解.

解题过程　(1)先将区间$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$映成正实轴使$-\sqrt{3}$映成0，$\sqrt{3}$映成∞，0映为1，见图6－2(a).

此映射为

$$\zeta=-\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$

它把如图阴影域映为角形域,夹角为$\frac{\pi}{3}$. 见图 6－2(b).

再令

$$w=\zeta^3$$

则 $w=\zeta^3$ 把如图角形域映为上半平面. 所以所求映射为

$$w=\zeta^3=-\left(\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3$$

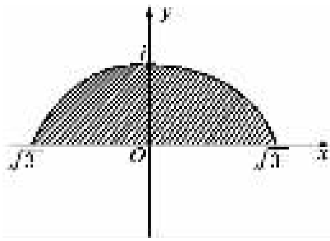

图 6－2(a)

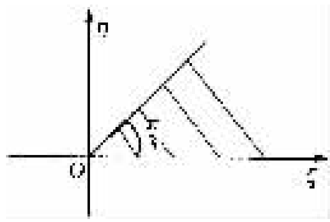

图 6－2(b)

(2)先将区间[－1,1]映成正实轴:

$-1\to 0, 0\to 1, 1\to\infty$

此映射为

$$w_1=-\frac{z+1}{z-1}$$

它将如图 6－2(c)阴影部分映成角形区域,其张角为 π/2.

再作映射 $w_2=w_1^2$ 将上述角形区域映射左半平面,再作映射 $w=-iw_2$,将左半平面映成上半平面. 如图 6－2(d)所示. 所以所求映射为

$$w=-iw_2=-iw_1^2=-i\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)^2=-i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

【例 3】 求出将圆$|z-4i|<2$ 映射成半平面 $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$的共形

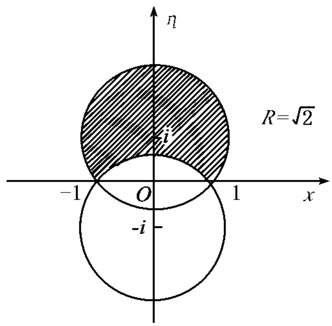

图 6-2(c)

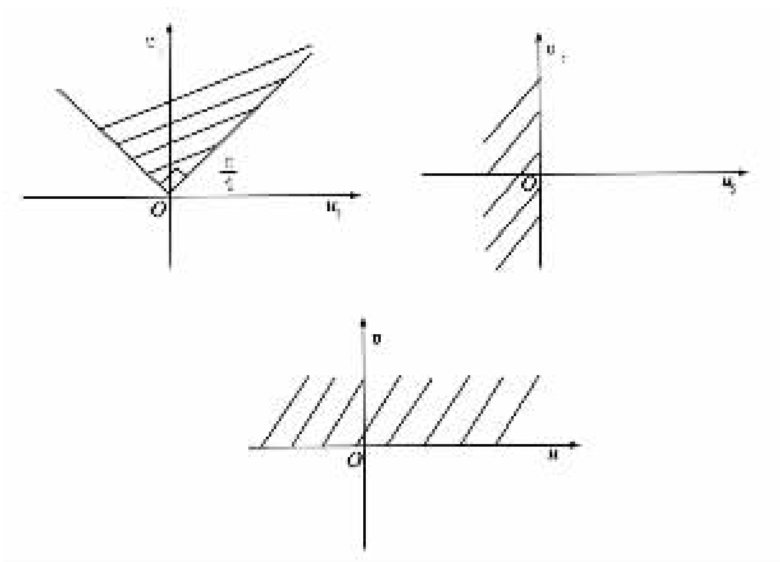

图 6-2(d)

映射 $w=f(z)$，且满足 $f(4i)=-4$，$f(2i)=0$.

解题分析 在 z 平面与 w 平面间插入两个“中间”平面，分别将 $|z-4i|<2$ 和 $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$ 映射成典型区域——单位圆和上半平面，以便利用公式，如图 6-3.

解题过程 设 $w_1=\dfrac{z-4i}{2}$，则映射 w_1 将 z 平面上圆 $|z-4i|<2$ 映射

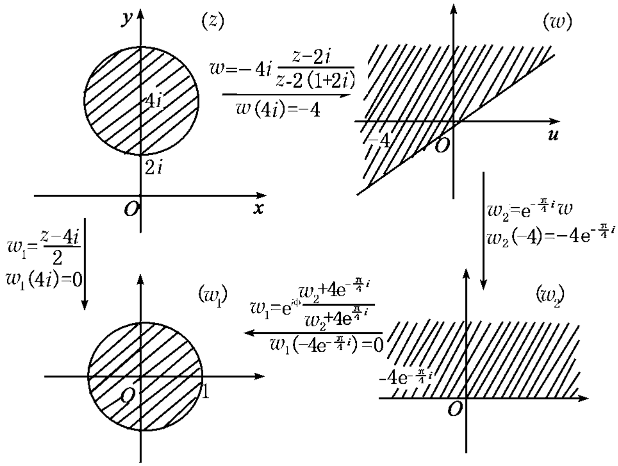

图 6—3

成 w_1 平面上单位圆 $|w_1|<1$，且 $w_1(4i)=0$.

设 $w_2=e^{-\frac{\pi}{4}i}w$，则映射 w_2 将 w 平面上的半平面 $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$ 映射成 w_2 平面上的上半平面 $\mathrm{Im}(w_2)>0$，且 $w_2(-4)=-4e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

再作从上半平面 $\mathrm{Im}(w_2)>0$ 到单位圆 $|w_1|<1$ 的共形映射，且将 $-4e^{-\frac{\pi}{4}i}$ 映射为坐标原点. 显然此映射为

$$w_1=e^{i\varphi}\frac{w_2+4e^{-\frac{\pi}{4}i}}{w_2+4e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

将 $w_1=\dfrac{z-4i}{2}$，$w_2=e^{-\frac{\pi}{4}i}w$ 代入上式，得

$$\frac{z-4i}{2}=e^{i\varphi}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}w+4e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{4}i}w+4e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

即 $$\frac{z-4i}{2}=e^{i\varphi}\frac{w+4}{w+4i}$$

又　$f(2i)=0$，　故 $e^{i\varphi}=1$

所以 $\dfrac{z-4i}{2}=\dfrac{w+4}{w+4i}$，即　$w=-4i\dfrac{z-2i}{z-2(1+2i)}$

为所求的共形映射.

【例 4】 求一共形映射,将单位圆周 $|z|=1$ 内部在第一象限内的部分映射为单位圆内部.

解题分析 有人认为这个题很简单,$w=z^4$ 就是所求的映射.这是不对的,因为 $w=z^4$ 将题中给定的区域映射成沿正实轴的半径剪开后的单位圆内部.很多初学者容易犯这样的错误!为了将已知区域映射为单位圆内部,只要能将它映射成上半平面就行了.因此,只要先将它映射成第一象限.上半单位圆可以通过分式线性映射映成第一象限,因此,只要将已知区域映成上半单位圆就可以了,这件事可以利用幂 $w=z^2$ 来完成.下面我们沿着分析过程相反的程序一步一步地做,并将完成各步的映射复合起来,就可得到所求的映射.

解题过程 第一步,通过映射 $z_1=z^2$ 将已知区域映为上半单位圆;第二步,通过映射 $z_2=-\dfrac{z_1+1}{z_1-1}$ 将上半单位圆映为第一象限;第三步,通过映射 $z_3=z_2^2$ 将第一象限映成上半平面;最后,通过分式线性映射 $w=\dfrac{z_3-i}{z_3+i}$ 将上半平面映成单位圆内部(图 6—4).因此,所求的映射为

$$w=\frac{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2-i}{\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2+i}=\frac{(z^2+1)^2-i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2+i(z^2-1)^2}$$

【例 5】 求把 z 平面上的区域 $D=\{z:|z|<1,|z+\sqrt{3}|>2\}$ 映为 w 平面上的单位圆的一个保角映射.

解题分析 注意本题只需求出满足题目要求的某个保角映射,而不是求把 D 映为 $|w|<1$ 的所有保角映射.

解题过程 由 $|z|=1$ 有 $|x+iy|=1$,从而有 $x^2+y^2=1$,关于 x 求导,得

$$2x+2yy'=0$$

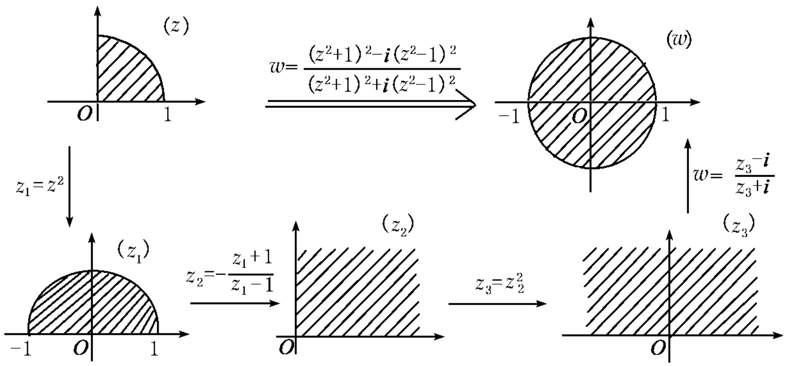

图 6—4

故

$$k_1=y'=-x/y|_{(0,1)}=0$$

同理，由 $|z+\sqrt{3}|=2$ 有 $k_2=-\sqrt{3}$，于是

$$\operatorname{tg} a=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-\sqrt{3}-0}{1+0\cdot(-\sqrt{3})}=-\sqrt{3}$$

所　　　　　　　　以 $a=-\pi/3$

即 D 是在 $z=-i,i$ 处张角为 $\pi/3$ 的月牙形区域．利用

$$\zeta=\frac{z-i}{z+i}$$

能把 D 映为 ζ 平面上开度为 $\pi/3$ 的顶点在原点的角域．适当旋转后可使此角域以正实轴为一边，另一边在第一象限内．利用幂函数可使它变为上半平面．最后把上半平面变到单位圆，把各个映射顺次复合，即得待求之映射（如图 6—5 所示）．最后有

$$w=\frac{\eta-i}{\eta+i}=\frac{\zeta^3-i}{\zeta^3+i}=\frac{e^{i\frac{5}{2}\pi}\zeta^3-i}{e^{i\frac{5}{2}\pi}\zeta^3+i}=\frac{\zeta^3-1}{\zeta^3+1}$$

$$=\frac{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3-1}{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+1}=\frac{(z-i)^3-(z+i)^3}{(z-i)^3+(z+i)^3}$$

此类题的解不是唯一的，还可从不同角度得到不同答案.

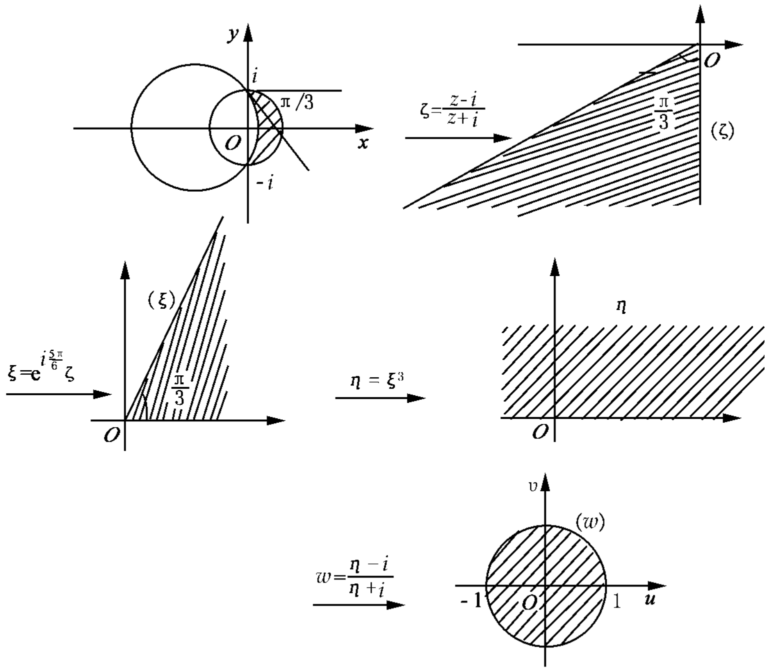

图 6—5

历年考研真题评析

【题 1】 求一个共形映射 $w=f(z)$，它把 z 平面上的区域 D：$\begin{cases}|z+1|<2\\|z-3|<2\sqrt{3}\end{cases}$ 映射为 w 平面的上半平面.（吉林大学 2005 年）

解题分析 本题的解法是一种比较通用的解法，先把区域 D 映射为角形域，再射到第Ⅰ象限，最后映射到上半平面.

解题过程 圆周$|z+1|=2$ 与圆周$|z-3|=2\sqrt{3}$的交点是 $z_1=-\sqrt{3}i$ 和 $z_2=\sqrt{3}i$，因此分式线性映射

$$w_1=\frac{z+\sqrt{3}\ i}{z-\sqrt{3}\ i}$$

$$\left(w_1(-\sqrt{3}\ i)=0,w_1(1)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},w_1(\sqrt{3}\ i)=\infty\right)$$

把区域 D 共形映射为 w_1 平面的角形域：

$$\frac{2}{3}\pi<\arg w_1<\frac{7}{6}\pi$$

设

$$w_2=\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi i}w_1$$

w_2 **又将角形域** $\frac{2}{3}\pi<\arg w_1<\frac{7}{6}\pi$ **映射为第 Ⅰ 象限：**$0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$，**再将第 Ⅰ 象限** $0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}$ **映射为上半平面** $0<\arg w<\pi$，**从而**

$$w=w_2^2=(\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}\mathrm{w}_1)^2=e^{-\frac{4}{3}\pi i}\left(\frac{z+\sqrt{3}i}{z-\sqrt{3}i}\right)^2$$

即为所求的一个共形映射，如图 6—6.

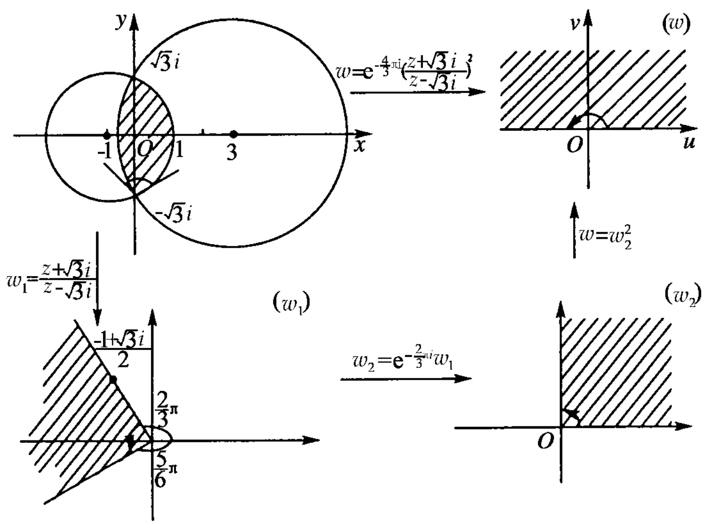

图 6—6

【题 2】 求一单叶共形映射 $w=f(z)$，将圆盘 $|z|<1$ 变为角形域 $\frac{\pi}{3}<\arg w<\frac{2}{3}\pi$.（浙江大学 2005 年）

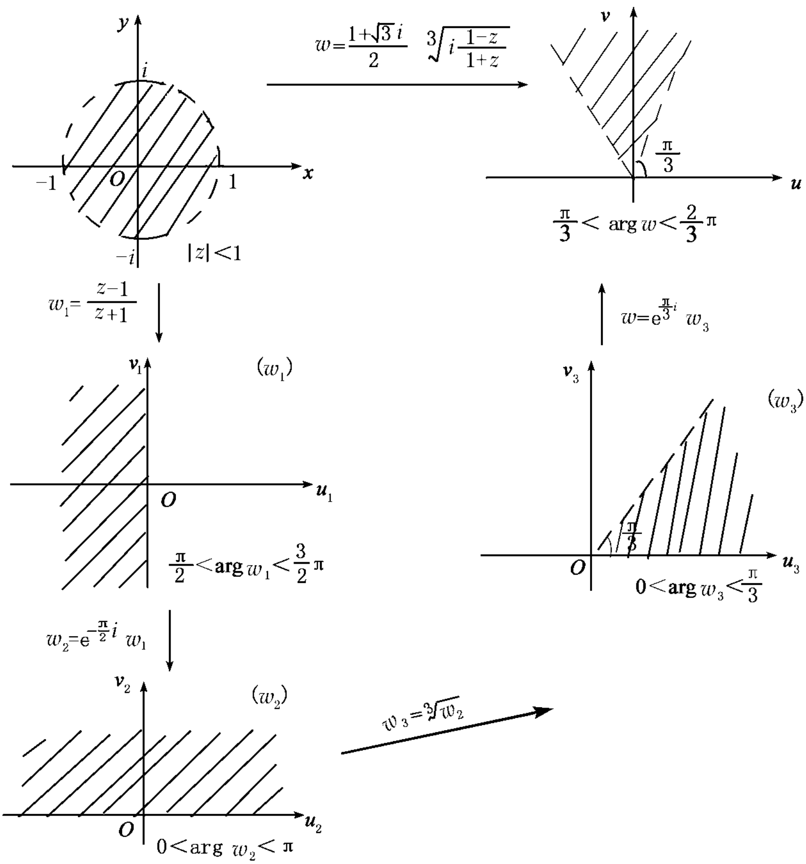

图 6－7

解题分析 本题的解法是先把单位圆映射到左半平面，再映射到上半平面，继而映射到第 Ⅰ 象限，最后映射到角形域.

解题过程 如图 6－7 所示.

【题 3】 试作一单叶解析函数 $w=f(z)$，把 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$，并且使 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f'(0)>0$.（东北大学 2005 年）

解题分析　这里提供以下两种方法供参考，请体会它们的不同思路.

解题过程　解法 1　分式线性映射

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$，因为 $f(0)=\frac{1}{2}$

所以
$$\frac{1}{2}=-\alpha e^{i\theta} \tag{①}$$

又 $f'(0)>0$，所以
$$e^{i\theta}(1-|\alpha|^2)>0 \tag{②}$$

由式②得，$\theta=2k\pi$，将 $\theta=2k\pi$ 代入式①：$\alpha=-\frac{1}{2}$

故
$$w=\frac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z}=\frac{2z+1}{2+z}$$

为所求的单叶解析函数.

解法 2　先求出将 $|w|<1$ 映射为 $|z|<1$ 的分式线性映射 $z=f^{-1}(w)$，满足 $f^{-1}(\frac{1}{2})=0$，再求其逆映射 $w=f(z)$.

因为
$$f^{-1}(\frac{1}{2})=0$$

所以 $z=e^{i\theta}\dfrac{w-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}w}=e^{i\theta}\dfrac{2w-1}{2-w}$，$w=\dfrac{1+2ze^{-i\theta}}{2+ze^{-i\theta}}$，

$$w'(0)=\frac{3}{4}e^{-i\theta}>0$$

$$\theta=2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

故 $w=\dfrac{1+2z}{2+z}$ 为所求的单叶解析函数.

【题 4】 设在 $|z|<1$ 内,$f(z)$ 解析,并且 $|f(z)|<1$,但 $f(\alpha)=0$,其中 $|\alpha|<1$. 证明:在 $|z|<1$ 内,有不等式

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|$$

(东北大学 2005 年)

分析 分式线性映射 $w=\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ 在 $|z|<1$ 内解析,且将 $|z|<1$ 共形映射成 $|w|<1$,且 $w(\alpha)=0$. 其反函数 $z=\varphi^{-1}(w)$ 在 $|w|<1$ 内解析,将 $|w|<1$ 共形映射成 $|z|<1$,且 $\varphi^{-1}(0)=\alpha$.

证明 作复合函数 $\varphi(w)=f[\varphi^{-1}(w)]$,则 $\varphi(w)$ 在 $|w|<1$ 内解析,且 $\varphi(0)=f(\alpha)=0$

$$|\varphi(w)|=|f(\varphi^{-1}(w))|=|f(z)|<1$$

故 $\varphi(w)$ 满足施瓦兹引理的条件,由该引理得

$$|\varphi(w)|\leqslant|w|\quad(|w|<1)$$

即

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|\quad(|z|<1)$$

施瓦兹引理　如果函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析,并且满足条件 $f(0)=0$,$|f(z)|<1(|z|<1)$,则在单位圆 $|z|<1$ 内恒有 $|f(z)|\leqslant|z|$. 且有 $|f'(0)|\leqslant1$.

课后习题全解

○1. 求 $w=z^2$ 在 $z=i$ 处的伸缩率和旋转角. 问:$w=z^2$ 将经过点 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 w 平面上哪一个方向? 并作图.

解 因为 $w'=2z,w'\Big|_{z=i}=2i$

所以伸缩率 $|w'(i)|=|2i|=2$

旋转角(即转动角)$\mathrm{Arg}w'(i)=\mathrm{Arg}(2i)=\dfrac{\pi}{2}$

因为 $w=z^2$ 且 $z_0=i$

所以 $w(i)=-1$，并由旋转角意义可知：

过 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向 $\xrightarrow{w=z^2}$ 过 $u=-1$ 平行于虚轴的正向，如图 6—8.

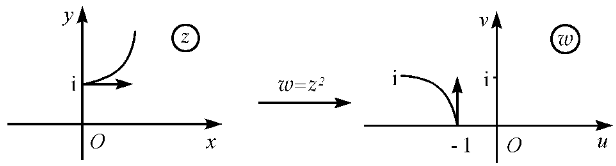

图 6—8

◎2. 一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩率和旋转角的不变性？映射 $w=z^2$ 在 z 平面上每一点都具有这个性质吗？

分析　映射的伸缩率与旋转角的不变性，以及具备这些性质的区域.

解　1）由第六章 §1 节定理 1 知条件为：该解析函数的导数不等于 0；

2）因为 $w=z^2$　　所以 $w'=2z$

由使 $w'\Big|_{z=0}=2z\Big|_{z=0}=0$ 的点不具有该性质可得：

$w=z^2$ 在 $z\neq 0$ 处具有伸缩率与旋转角的不变性.

○3. 设 $w=f(z)$ 在 z_0 解析，且 $f'(z_0)\neq 0$. 为什么说：曲线 C 经过映射 $w=f(z)$ 后在 z_0 的转动角与伸缩率跟曲线 C 的形状和方向无关？

解　因为曲线 C 经过映射 $w=f(z)$ 后在 z_0 的转动角和伸缩率分别为 $\mathrm{Arg}(f'(z_0))$、$|f'(z_0)|$，只与 $w=f(z)$ 有关，所以与经过 z_0 的曲线 C 的形状及方向无关.

◎4. 在映射 $w=iz$ 下，下列图形映射成什么图形？

1）以 $z_1=i$，$z_2=-1$，$z_3=1$ 为顶点的三角形；

2）圆域 $|z-1|\leqslant 1$.

分析　图形在已知映射下映射成什么样的新图形，还是考查伸缩

率与旋转问题.

解 1)分别将 $z_1=i, z_2=-1, z_3=1$ 代入 $w=iz$ 得

$w_1=-1, w_2=-i, w_3=i$

因为 $w'=i\neq 0, |w'|=|i|=1$

所以 $w=iz$ 是整个复平面上的分式线性共形映射,具有保角性及保伸缩性,$|w|=|iz|=|z|$,$\mathrm{Arg}w=\mathrm{Arg}z+\frac{\pi}{2}$,辐角增加 $\frac{\pi}{2}$.

直线上的无穷远点会被映射成无穷远点.

$w=iz$ 将直线映射为直线.

映射成的图形是以 $w_1=-1, w_2=-i, w_3=i$ 为顶点的三角形. 如图 6—9(a).

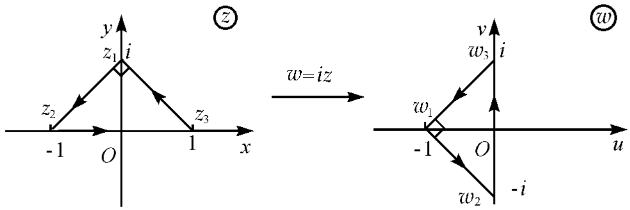

图 6—9(a)

2)设 $z=x+iy, w=u+iv$,则 $w=iz$

即
$$u+iv=i(x+iy)$$
$$u+iv=-y+ix$$

所以
$$u=-y, v=x$$

$$|z-1|\leqslant 1 \text{ 即}(x-1)^2+y^2\leqslant 1 \xrightarrow{w=iz} u^2+(v-1)^2\leqslant 1$$

即
$$|w-i|\leqslant 1$$

映射成如图 6—9(b).

○5. 证明:映射 $w=z+\frac{1}{z}$ 把圆周 $|z|=c$ 映射成椭圆:

$$u=\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\theta, v=\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\theta.$$

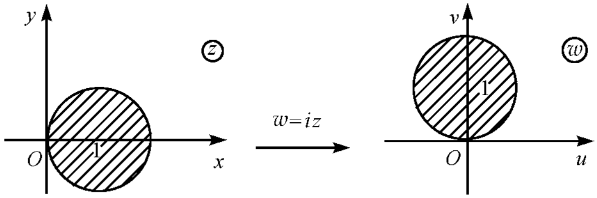

图 6—9(b)

证明 $|z|=c \Rightarrow z=ce^{i\theta}=c(\cos\theta+i\sin\theta)$

则 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c}e^{-i\theta}=\dfrac{1}{c}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

$$=\frac{1}{c}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

设 $w=u+iv$,**则**

$$w=z+\frac{1}{z}=c(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{c}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\theta+i\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\theta$$

所以 $u=\left(c+\dfrac{1}{c}\right)\cos\theta, v=\left(c-\dfrac{1}{c}\right)\sin\theta$ **得证.**

◎6. **证明:在映射** $w=e^{iz}$ **下,互相正交的直线族** $\mathrm{Re}(z)=c_1$ **与** $\mathrm{Im}(z)=c_2$ **依次映射成互相正交的直线族** $v=u\,\mathrm{tg}c_1$ **与圆族** $u^2+v^2=e^{-2c_2}$.

分析 **图形在已知映射下映射成什么样的新图形,还是考查率与旋转问题.**

证明 **设** $z=x+iy, w=u+iv$

由 $\mathrm{Re}(z)=c_1$ **可得**

$$w=u+iv=e^{i(c_1+iy)}=e^{-y}(\cos c_1+i\sin c_1)$$

则 $$u=e^{-y}\cos c_1, v=e^{-y}\sin c_1$$

得 $$v=u\,\mathrm{tg}c_1$$ **为一直线族**

由 $\mathrm{Im}(z)=c_2$ **得**

$$w=u+iv=e^{iz}=e^{i(x+ic_2)}=e^{-c_2}(\cos x+i\sin x)$$

得 $$u=e^{-c_2}\cos x, v=e^{-c_2}\sin x$$

$u^2+v^2=(e^{-c_2})^2=e^{-2c_2}$，为一圆族.

因为 $w'=ie^{iz}\neq 0$ 且 $w=e^{iz}$ 为解析函数，故 $w=e^{iz}$ 是共形映射，有保角性.

已知 $\text{Re}(z)=c_1$ 与 $\text{Im}(z)=c_2$ 相互正交，故 $v=u\text{tg}c_1$ 与 $u^2+v^2=e^{-2c_2}$ 也相互正交.

◎7. 映射 $w=z^2$ 把上半个圆域：$|z|<R,\text{Im}(z)>0$ 映射成什么？

分析 图形在已知映射下映射成什么样的新图形，还是考查伸缩率与旋转问题.

解 上半个圆域：$|z|<R,\text{Im}(z)>0$

设 $w=re^{i\varphi}$，则当 z 在圆周上时，$w=z^2=R^2e^{i2\theta}$

故 $r=R^2$， $\varphi=2\theta\Rightarrow 0<\varphi<2\pi$

即 $w=z^2$ 把上半个圆域映射成圆心在原点，半径为 R^2，且沿由 0 到 R^2 的半径有割痕的圆域，见图 6－10.

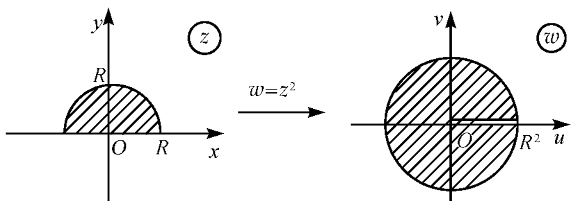

图 6－10

◯8. 下列区域在指定的映射下映射成什么？

1) $\text{Re}(z)>0,w=iz+i$；

2) $\text{Im}(z)>0,w=(1+i)z$；

3) $0<\text{Im}(z)<\frac{1}{2},w=\frac{1}{z}$；

4) $\text{Re}(z)>1,\text{Im}(z)>0,w=\frac{1}{z}$；

5) $\text{Re}(z)>0,0<\text{Im}(z)<1,w=\frac{i}{z}$.

解 设 $z=x+iy,w=u+iv$

1) 由 $w=u+iv=iz+i=i(x+iy)+i=-y+i(1+x)$

知
$$\begin{cases} u=-y \\ v=x+1 \end{cases}$$

因为
$$\mathrm{Re}(z)=x>0$$

所以
$$v=x+1>1$$

即
$$\mathrm{Im}(w)>1$$

2)映射成图 6—11(a).

由 $w=u+iv=(1+i)z=(1+i)(x+iy)$
$=(x-y)+i(x+y)$

知

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \quad 故 \quad \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

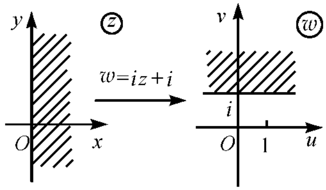

图 6—11(a)

因为 $\mathrm{Im}(z)=y>0$,所以 $\dfrac{v-u}{2}>0$ 即 $v>u$, $\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$,映射成图 6—11(b).

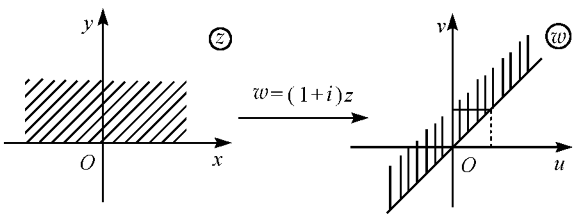

图 6—11(b)

3)由 $z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}=x+iy$ 知

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

因为 $0<\mathrm{Im}(z)<\frac{1}{2}$，所以 $0<\frac{-v}{u^2+v^2}<\frac{1}{2}$

由 $\frac{-v}{u^2+v^2}>0\Rightarrow v<0$ 即 $\mathrm{Im}(w)<0$

由 $\frac{-v}{u^2+v^2}<\frac{1}{2}\Rightarrow u^2+v^2+2v>0$

即 $u^2+(v+1)^2>1$（以 $(0,-1)$ 为圆心，1 为半径的圆的外部，且 $\mathrm{Im}(w)<0$）

即 $|w+i|>1$ 且 $\mathrm{Im}(w)<0$

映射成图 6－11(c).

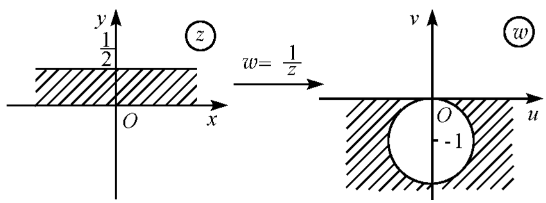

图 6－11(c)

4）由 $z=x+iy=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$ 知

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

因为 $\mathrm{Re}(z)>1,\mathrm{Im}(z)>0$

所以 $\begin{cases}\frac{u}{u^2+v^2}>1\\ \frac{-v}{u^2+v^2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ v<0\end{cases}$

即 $\left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 且 $\mathrm{Im}(w)<0$

映射成图 6－11(d).

5）由 $z=x+iy=\frac{i}{w}=\frac{i}{u+iv}=\frac{v+iu}{u^2+v^2}$ 知，

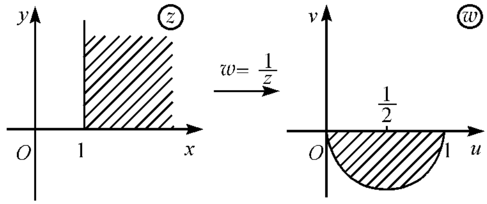

图 6－11(d)

$$x=\frac{v}{u^2+v^2},y=\frac{u}{u^2+v^2}$$

因为 $\mathrm{Re}(z)>0,0<\mathrm{Im}(z)<1$

所以 $\begin{cases}\dfrac{v}{u^2+v^2}>0\\ 0<\dfrac{u}{u^2+v^2}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u>0\\ v>0\\ \left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}$

即 $\left|w-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$，且 $\begin{cases}\mathrm{Im}(w)>0\\ \mathrm{Re}(w)>0\end{cases}$

映射成图 6－11(e).

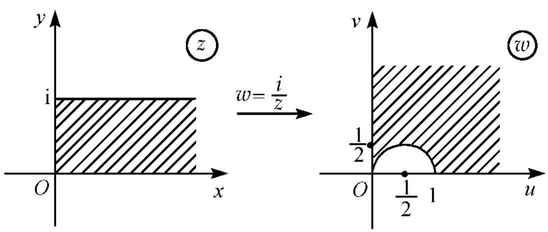

图 6－11(e)

◎9. 如果分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$，(1)映射成上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$；(2)映射成下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$，那么它的系数满足什么条件？

分析　已知两图形，求它们之间的映射，可以分情况考虑.

解　对 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，取 $z_k\in R$，即实轴上的点，a,b,c,d 均为实数时，

$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$也为实数,故 w 必将实轴仍映射为实轴.

$$w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

1)当 $ad-bc>0$,即 $w'>0$(a,b,c,d 均为实数,z 也在实轴上变)时,取 z_k 沿着增大的方向走时,w_k 也沿着增大的方向走,由于在前进方向左侧的区域始终在前进的方向左侧.

w 将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $\mathrm{Im}(w)>0$,如图 6—12(a).

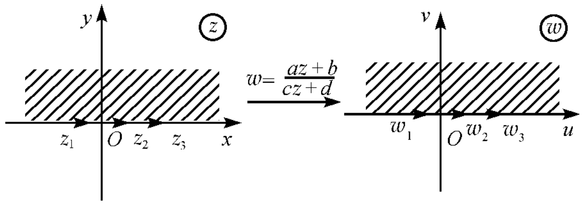

图 6—12(a)

2)当 $ad-bc<0$ 即 $w'<0$(a,b,c,d 均为实数,z 也在实轴上变)时取 z_k 沿增大方向走时,w_k 沿减小方向走,由于在前进方向左侧的区域始终在前进方向的左侧,且实轴经 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$映射后,前进方向变反(即与 u 轴反向).

故 w 将 $\mathrm{Im}(z)>0$,映射成 $\mathrm{Im}(z)<0$,如图 6—12(b).

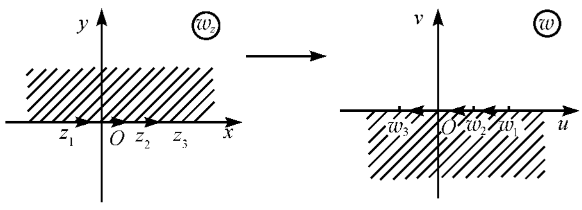

图 6—12(b)

◎10. 如果分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$能将 z 平面上的某条直线映射成 w 平面上的单位圆,那么它的系数应满足什么条件?

分析 已知两图形,求它们之间的映射,可以分情况考虑.

解　如果 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将直线映射成单位圆，则直线上的 $z=\infty$ 点必被映射到单位圆 $|w|=1$ 上，故将 $z=\infty$ 代入 $|w|=\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|$ 有

$$|w|_{z=\infty}=\left|\frac{a+\dfrac{b}{z}}{c+\dfrac{d}{z}}\right|_{z=\infty}=\left|\frac{a}{c}\right|=1，即 |a|=|c|$$

而 $w i'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$　即 $ad-bc\neq 0$

所以条件为　$|a|=|c|$ 且 $ad-bc\neq 0$

◯11. 试证：对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可以认为 $ad-bc=1$.

证明　在 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 中由于 $ad-bc\neq 0$ 故可变为

$$w=\frac{\dfrac{a}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}z+\dfrac{b}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{c}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}z+\dfrac{d}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}} \qquad ①$$

式①与原式是等价的. 设 $w=\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$　②

在式②中 $a'd'-b'c'=\dfrac{ad}{ad-bc}-\dfrac{bc}{ad-bc}=1$

故对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可认为

$$ad-bc=1$$

◎12. 试求将 $|z|<1$ 映射成 $|w-1|<1$ 的分式线性映射.

分析　已知两图形，求它们之间的映射，可以分情况考虑.

解　由教材 P204 例 4 知，将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射的表式为

$$w_1=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right),|\alpha|<1$$

$|w_1|<1$ 向右平移一个单位,即得 $|w-1|<1$,如图 6—13.

即 $w=1+w_1=1+e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$,$|\alpha|<1$

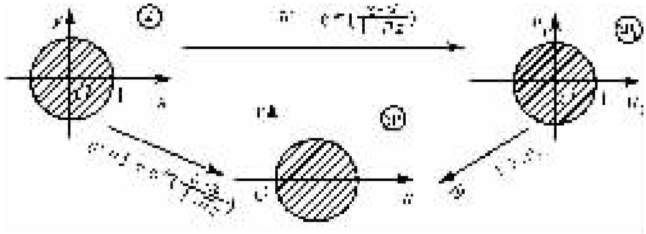

图 6—13

○13. 设 $w=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$,试证:$\varphi=\arg w'(\alpha)$.

证明　因为 $w'=e^{i\varphi}\dfrac{(1-\bar{\alpha}z)-(z-\alpha)(-\bar{\alpha})}{(1-\bar{\alpha}z)^2}=e^{i\varphi}\dfrac{1-\overline{\alpha}\alpha}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$

所以 $w'(\alpha)=e^{i\varphi}\dfrac{1-\overline{\alpha}\alpha}{(1-\overline{\alpha}\alpha)^2}=e^{i\varphi}\dfrac{1}{1-\overline{\alpha}\alpha}$

由于 $1-\alpha\bar{\alpha}$ 是正实数,故 $\varphi=\arg w'(\alpha)$.

◎14. 试求将圆域 $|z|<R$ 映射成圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射.

分析　已知两图形,求它们之间的映射,可以分情况考虑.

解　1)先把 $|z|<R$ 映射成 $|\xi|<1$ 作 $\xi=\dfrac{z}{R}$,因为 $|z|<R$,所以 $|\xi|<1$.

2)再把 $|\xi|<1$ 映射到 $|w|<1$

即 $w=e^{i\varphi}\left(\dfrac{\xi-\alpha}{1-\bar{\alpha}\xi}\right)=e^{i\varphi}\left(\dfrac{\dfrac{z}{R}-\alpha}{1-\bar{\alpha}\dfrac{z}{R}}\right)=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-R\alpha}{R-\bar{\alpha}z}\right)$,　$|\alpha|<1$

映射成图 6—14.

●15. 求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$,并满足条件:

1)$f(i)=0$,$f(-1)=1$;　　2)$f(i)=0$,$\mathrm{Arg}f'(i)=0$;

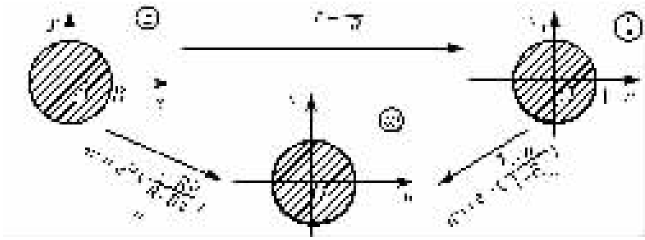

图 6－14

3) $f(1)=1, f(i)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

分析　先设分式线性映射的一般形式，再根据具体情况求解.

解　把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射的一般形式为

$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right), \mathrm{Im}(\lambda)>0, \theta\in R$$

1) $f(i)=0, f(-1)=1$

因为 $f(i)=0$ 表示 $i\xrightarrow{w}0$ 即将 i 变换为 w 面上的原点，所以 $\lambda=i, \bar{\lambda}=-i$　故 $w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$

由 $f(-1)=1$ 可得

$$1=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{-1-i}{-1+i}\right)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{(-1-i)^2}{(-1+i)(-1-i)}=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\frac{2i}{2}=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot i$$

故 $\mathrm{e}^{i\theta}=-i=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2})}$　所以 $w=-i\frac{z-i}{z+i}$

2) $f(i)=0, \mathrm{Arg} f'(i)=0$

因 $f(i)=0$，所以 $\lambda=i, \bar{\lambda}=-i$

所以
$$w=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

则
$$w'=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}$$

故
$$w'(i)=\mathrm{e}^{i\theta}\frac{2i}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2}=\mathrm{e}^{i\theta}\left(-\frac{i}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{i\theta}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

因为 $\operatorname{Arg}f'(i)=0$ **所以** $\theta-\dfrac{\pi}{2}=0$

即 $\theta=\dfrac{\pi}{2},\quad w=i\dfrac{z-i}{z+i}$

3)**设** $\lambda=x+iy$

由 $f(1)=1,f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$**可得**

$$\begin{cases}1=e^{i\theta}\left(\dfrac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right) & ①\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{5}}=e^{i\theta}\left(\dfrac{i-\lambda}{i-\bar{\lambda}}\right) & ②\end{cases}$$

① ÷ ② **得** $\sqrt{5}=\left(\dfrac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right)\left(\dfrac{i-\bar{\lambda}}{i-\lambda}\right)$

$$=\left(\frac{1-x-iy}{1-x+iy}\right)\left(\frac{i-x+iy}{i-x-iy}\right) \qquad ③$$

整理 ③ **得**

$$\begin{cases}\sqrt{5}(x^2+y^2-x-y)=x^2+y^2-x+y & ④\\ \sqrt{5}(1-y-x)=1+y-x & ⑤\end{cases}$$

由 ④⑤ **相减得** $x^2+y^2-1=0$

即 $x^2+y^2=1$ ⑥

由 ⑤⑥ **得** $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$(**舍去,因** $w=e^{i\theta}$ **不合题意**)**及** $\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\[2ex] x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

将 x,y **值代入** ① **得** $e^{i\theta}=\dfrac{\sqrt{5}+2i}{3}$

所以 $w=\dfrac{\sqrt{5}+2i}{3}\left[\dfrac{z+\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{2}{3}i}{z+\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2}{3}i}\right]=\dfrac{3z+(\sqrt{5}-2i)}{(\sqrt{5}-2i)z+3}$

小结 掌握这类给出附加条件的求分式线性映射的方法.

● 16. **求把单位圆映射成单位圆的分式线性映射,并满足条件:**

1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(-1)=1$;

2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$;

3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,$\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$;

4) $f(a)=a$,$\operatorname{Arg} f'(a)=\varphi$.

分析 先设分式线性映射的基本形式,再由具体要求求解.

解 将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的映射的一般形式:

$$w=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right),(|\alpha|<1,\varphi\in\mathrm{R})$$

1) 由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 知,所求映射将 $|z|<1$ 内的点 $z=\frac{1}{2}$ 映射成 $|w|<1$ 的中心,可得 $\alpha=\frac{1}{2}$

所以
$$w=\mathrm{e}^{i\varphi}\left[\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right]=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)$$

由此并结合 $f(-1)=1$ 得

$$\mathrm{e}^{i\varphi}\left[\frac{-2-1}{2-(-1)}\right]=1$$

所以
$$\mathrm{e}^{i\varphi}=-1$$

即
$$\varphi=\pi$$

所以
$$w=-\frac{2z-1}{2-z}=\frac{2z-1}{z-2}$$

2) 由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 知,所求映射将 $|z|<1$ 内的点 $z=\frac{1}{2}$ 映射成 $|w|<1$ 的中心

所以
$$w=\mathrm{e}^{i\varphi}\left[\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right]=\mathrm{e}^{i\varphi}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)$$

由此并结合 $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ 得

$$w'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{i\varphi}\frac{2(2-z)+(2z-1)}{(2-z)^2}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}e^{i\varphi}\Rightarrow\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\arg(e^{i\varphi})=\varphi$$

所以 $$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$w=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)=i\,\frac{2z-1}{2-z}$$

3）由 2）可知 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\arg(e^{i\varphi})=\varphi=0$

所以 $w=e^{0}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)=\frac{2z-1}{2-z}$

4）将大问题化解为两个易于解决的小问题：

1° 先将 $|z|<1$ 映射到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\operatorname{Arg}\xi'(a)=\varphi$；

2° 再将 $|w|<1$ 映射到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\operatorname{Arg}\xi'(a)=0$.

由于分式线性映射的逆存在，且也为分式线性映射，设 $\xi=f_1(z)=f_2(w)$，记 $f_2^{-1}=f$，则从 $|\xi|<1$ 到 $|w|<1$ 的映射为 $w=f(\xi)$，故 $w=f[f_1(z)]$.

$w=f(\xi)$ 将 $|\xi|<1$ 内的 $\xi=0$ 映射到 $|w|<1$ 内的 $w=a$，由于 $w\to\xi$ 在 a 点的旋转角为 0，故从 $\xi\to w$，在 0 点的旋转角也为 0，则

$$\operatorname{Arg}w'(a)=\operatorname{Arg}f'(\xi_0=0)+\operatorname{Arg}\xi'(z_0=a)$$
$$=0+\varphi=\varphi$$

这样以 $|\xi|<1$ 为中介，建立起满足题意从 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的映射 w.

① 求将 $|z|<1$ 映到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\operatorname{Arg}\xi'(a)=\varphi$ 的映射 $\xi=f_1(z)$，由 3）可知，$\xi=e^{i\varphi}\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$

② 求将 $|w|<1$ 映到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0, \operatorname{Arg}\xi'(a)=0$ 的映射 $\qquad \xi=f_2(w)$

由 2）可知 $\qquad \xi=\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}$

故由 1°、2° 得 $\qquad \dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) \qquad$ 且 $|a|<1$

见图 6－15.

小结 主要掌握此类题目的方法步骤.

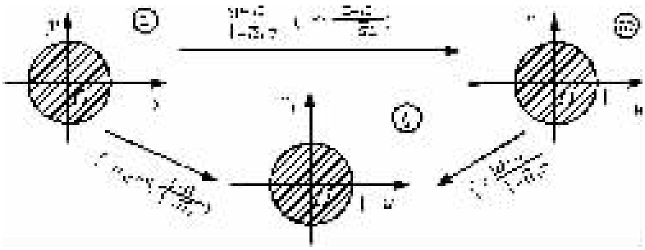

图 6－15

◎17. 把点 $z=1,i,-i$ 分别映射成点 $w=1,0,-1$ 的分式线性映射把单位圆 $|z|<1$ 映射成什么？并求出这个映射.

分析 已知两图，求出分式线性映射后，再分析此映射会把 $|z|<1$ 映射成什么.

解 将 $\begin{cases} z_1=1 \\ w_1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_2=i \\ w_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z_3=-i \\ w_3=-1 \end{cases}$ 代入

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

得 $$\frac{w-1}{w-0}\cdot\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-i-i}{-i-1}$$

整理得 $$w=\frac{(1+i)(z-i)}{(1+z)+3i(1-z)}$$

因为 $|z|=1$ 上的点 $z=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$ 被 w 映射成 ∞，所以 $|z|=1$ 被 w 映射成直线，并由 $z=1,i,-i$ 分别映射成 $w=1,0,-1$ 可知，$|z|=1$ 映射成实轴的负向.

因为 $z=0$ 被 w 映射成 $w=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

所以 $|z|<1$ 反映成下半平面，见图 6－16.

○ 18. 求出一个把右半面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的映射.

解　任取 $\mathrm{Re}(z)>0$ 内的一点 α，作映射 w 使之对应 $w=0$，则根据分式线性映射的保对称点的性质，点 α 关于虚轴的对称点 $-\bar{\alpha}$ 应对应 $w=0$ 关于单位圆周的对称点 ∞，

因此 w 应具有形式：

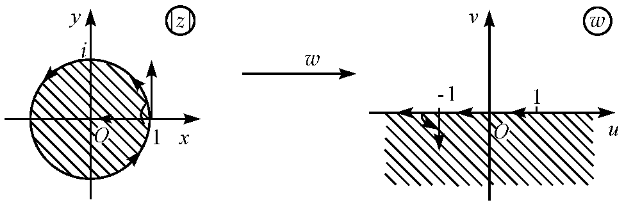

图 6－16

$w=k\dfrac{z-\bar{\alpha}}{z-(-\bar{\alpha})}=k\dfrac{z-\bar{\alpha}}{z+\bar{\alpha}}$，其中 k 为常数

因为 $z=0$ 对应着 $|w|=1$ 上的一点

所以由 $|w|=|k|\cdot\left|\dfrac{0-\alpha}{0+\bar{\alpha}}\right|=|k|\cdot\left|\dfrac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=1$

可知 $|k|=1$，可以令 $k=e^{i\theta}(\theta\in R)\Rightarrow w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$

○19. 把图 6－17(a)～(j) 中阴影部分所示(边界为直线段或圆弧)的域共形地且互为单值地映射成上半平面，求出实现各映射的任一个函数：

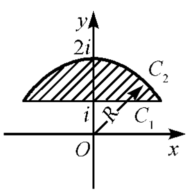

图 6－17(a)

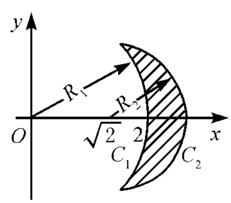

图 6－17(b)

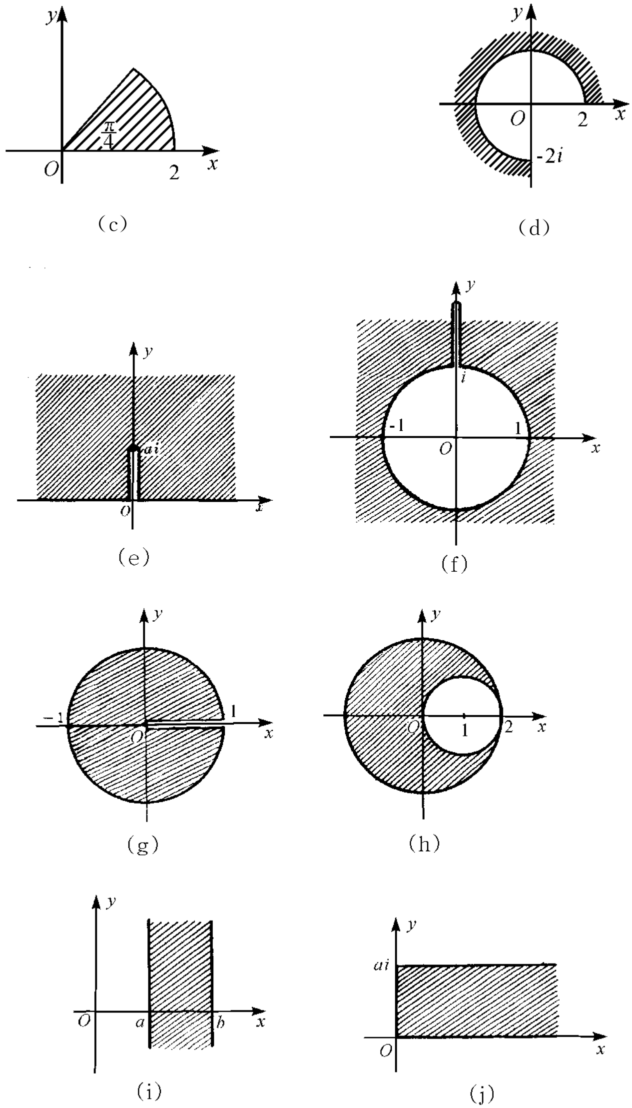

图 6－17

1) $\mathrm{Im}(z) > 1$，$|z| < 2$；

2) $|z| > 2$，$|z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}$；

3) $|z|>2$,$0<\mathrm{Arg}z<\frac{\pi}{4}$;

4) $|z|>2$,$0<\mathrm{Arg}z<\frac{3\pi}{2}$;

5) 沿连结点 $z=0$ 和 $z=ai$ 的线段有割痕上半平面;

6) 单位圆的外部,且沿虚轴由 i 到 ∞ 有割痕;

7) 单位圆的内部,且沿由 0 到 1 的半径有割痕的域;

8) $|z|<2$, $|z-1|>1$;

9) $a<\mathrm{Re}(z)<b$;

10) $\mathrm{Re}(z)>0$,$0<\mathrm{Im}(z)<a$.

解 (1) 如图 6—18(a) 所示,由已知可解出 C_1 与 C_2 的交角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 先将 C_1 与 C_2 交点$(-\sqrt{3},i)$,$(\sqrt{3},i)$ 分别映射成 ξ 平面中的 $\xi=0$ 与 $\xi=\infty$,并使所围区域映射成角形域 $0<\mathrm{Arg}\xi<\frac{\pi}{3}$,可得

$$\xi=k\left[\frac{z-(-\sqrt{3}+i)}{z-(\sqrt{3}+i)}\right],k \text{ 为常数}$$

ξ 应把 C_1 上的 $z=i$ 映射到实轴的正半轴上,

故 $\xi=k\left[\frac{i-(-\sqrt{3}+i)}{i-(\sqrt{3}+i)}\right]=-k$,取 $k=-1$ 使 $\xi=1$ 落在实轴的正半轴上.

再通过 $w=\xi^3$ 将角形域 $0<\mathrm{Arg}\xi<\frac{\pi}{3}$ 映成上半平面,故所求映射为

$$w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$$

2) 如图 6—18(b) 所示,由已知可解得 C_1 与 C_2 交点是$(\sqrt{2},-\sqrt{2}i)$,$(\sqrt{2},\sqrt{2}i)$. 在$(\sqrt{2},-\sqrt{2}i)$,C_1 与 C_2 交角为$\frac{\pi}{4}$,

作映射 $\xi=k\left[\frac{z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}\right]$

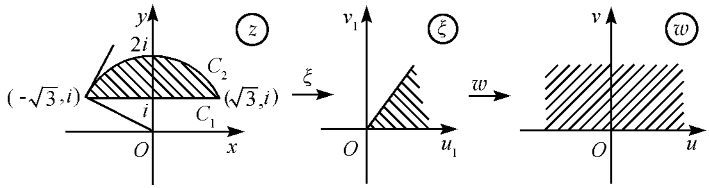

图 6－18(a)

$$= k\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}, (k \text{ 为常数})$$

该映射将 z 平面上的$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}i)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}i)$ 分别映到 ξ 平面上的 $0, \infty$ ，将所围区域映射到角形域 $0 < \mathrm{Arg}\xi < \frac{\pi}{4}$，则 C_2 上的点于 $z = 2\sqrt{2}$ 应映射成

$\xi = k\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+i)} = ki$ 应落在正实轴上，故取 $k = -i$，

再通过 $w = \xi^4$ 将角形域 $0 < \mathrm{Arg}\xi < \frac{\pi}{4}$ 映射成上半平面，最终得到

$$w = \xi^4 = \left[-i\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4 = \left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$$

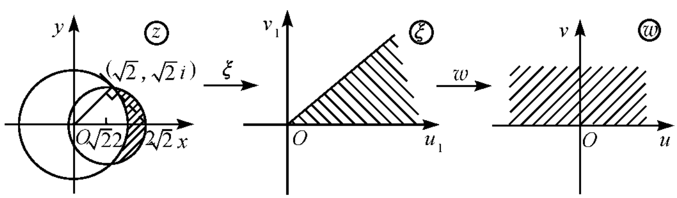

图 6－18(b)

3) 如图 6－18(c) 所示，先作映射 $\xi = z^4$ 将扇形域变成上半圆域，再作 $\zeta = k\frac{\xi+16}{\xi-16}$ 将 C_1, C_2 的交点$(-16, 0)$, $(16, 0)$ 分别映射成 ζ 平面上的 $0, \infty$ ，把上半圆域映射成角形域 0

$< \operatorname{Arg}\zeta < \dfrac{\pi}{2}$.

ζ 应将 C_1 上的点 $\xi = 0$ 映射成:

$\zeta = k\dfrac{0+16}{0-16} = -k$ 正实轴上一点,故可取 $k = -1$

最后作 $w = \zeta^2$ 将角形域 $0 < \operatorname{Arg}\zeta < \dfrac{\pi}{2}$ 映射为上半平面.

所以所求映射为

$$w = \zeta^2 = \left(-\frac{\xi+16}{\xi-16}\right)^2 = \left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$$

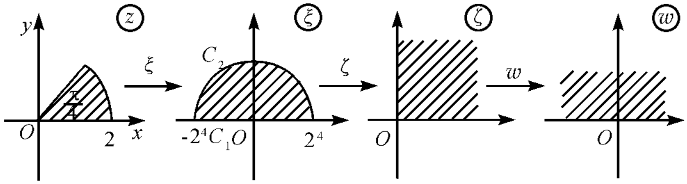

图 6－18(c)

4) 如图 6－18(d) 所示,先作映射 $\xi = z^{\frac{2}{3}}$. 将区域 $|z| > 2$, $0 < \operatorname{Arg} z < \dfrac{3}{2}\pi$ 映射成上半圆的外域 $|\xi| > 2^{\frac{2}{3}}$, $0 < \operatorname{Arg}\xi < \pi$,再作映射 $\eta = k\dfrac{\xi + 2^{\frac{2}{3}}}{\xi - 2^{\frac{2}{3}}}$, k 为常数,将 C_1 与 C_2 的交点 $\xi_1 = -2^{\frac{2}{3}}$, $\xi_2 = 2^{\frac{2}{3}}$ 分别映射成 η 面上的 $0,\infty$. 把上半圆的外域映射成角形域 $0 < \operatorname{Arg}\eta < \dfrac{\pi}{2}$

把 C_1 上的点 $2^{\frac{2}{3}}i$ 映射成 η 面上正实轴上一点,则

$\eta = k\dfrac{2^{\frac{2}{3}}i + 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}i - 2^{\frac{2}{3}}}$　　　取 $k = i$ 使 $\eta = 1$

最后作映射 $w = \eta^2$ 将角形域 $0 < \operatorname{Arg}\eta < \dfrac{\pi}{2}$ 映射成上半平面. 故所求映射为

$$w=\eta^2=-\left(\frac{\xi+2^{\frac{2}{3}}}{\xi-2^{\frac{2}{3}}}\right)^2=-\left(\frac{z^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}\right)^2$$

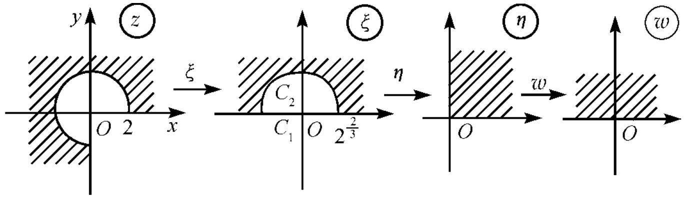

图 6－18(d)

5）如图 6－18(e) 所示，先应用映射 $\xi=z^2$，便得到一个具有割痕 $-a^2\leqslant \mathrm{Re}(\xi)<+\infty,\mathrm{Im}(\xi)=0$ 的 ξ 平面，再把 ξ 平面向右作一距离为 a^2 的平移：$\zeta=\xi+a^2$，便得到了去掉正实轴的 ζ 平面，最后通过映射 $w=\sqrt{\zeta}$，便得到上半 w 平面.

故所求映射为　$w=\sqrt{\zeta}=\sqrt{\xi+a^2}=\sqrt{z^2+a^2}$

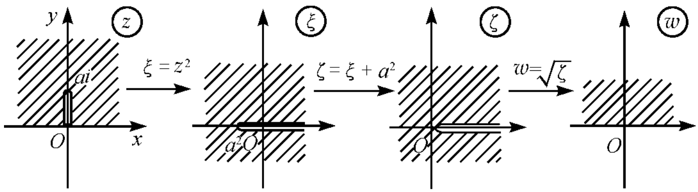

图 6－18(e)

6）如图 6－18(f) 所示，首先，通过映射 $z_1=i\dfrac{z-i}{z+i}$ 将已知区域映射成一个具有割痕 $\mathrm{Re}(z_1)=0,0\leqslant \mathrm{Im}(z_1)\leqslant 1$ 的上半平面，再应用映射 $z_2=z_1^2$，便得到一个具有割痕 $-1\leqslant \mathrm{Re}(z_2)<+\infty,\mathrm{Im}(z_2)=0$ 的 z_2 平面，把 z_2 平面向右作一距离为 1 的平移：$z_3=z_2+1$，便得到去掉了正实轴的 z_3 平面，最后通过 $z_4=\sqrt{z_3}$，便得到上半 z_4 平面.

故所求映射为

$$z_4=\sqrt{z_3}=\sqrt{1+z_2}=\sqrt{1+z_1^2}=\sqrt{1-\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2}$$

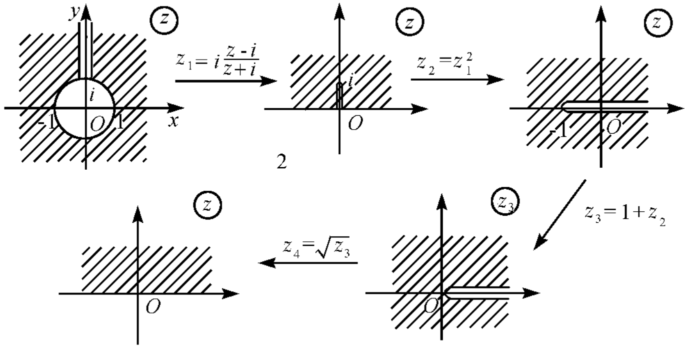

图 6—18(f)

7）如图 6—18(g) 所示，首先通过 $z_1 = z^{\frac{1}{2}}$ 将已知域映射成 z_1 平面上的上半单位圆，再应用 $z_2 = -\dfrac{z_1+1}{z_1-1}$ 将上半单位圆映射成角形域 $0 < \mathrm{Arg} z_2 < \dfrac{\pi}{2}$，最后用 $z_3 = z_2^2$ 将角形域 $0 < \mathrm{Arg} z_2 < \dfrac{\pi}{2}$ 映射成上半平面，故所求映射为

$$w = z_3 = z_2^2 = \left(-\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$$

8）如图 6—18(h) 所示，① 应用 $z_1 = \dfrac{1}{z-2}$ 将切点 $z=2, z=0, z=-2$ 分别映射成 $\infty, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}$，则 $|z|<2$，$|z-1|<1$ 映射成带形域 $-\dfrac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) < -\dfrac{1}{4}$；

② 平移：$z_2 = z_1 + \dfrac{1}{2}$；

③ 旋转：$z_3 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i} z_2 = iz_2$；

④ 放大：$z_4 = 4\pi z_3$；

⑤ 应用 $z_5 = \mathrm{e}^{z_4}$ 将水平带形域 $0 < \mathrm{Im}(z_4) < \pi$ 映射成角形域 $0 < \mathrm{Arg}(z_5) < \pi$ 即上半平面.

综上得

$$z_5 = e^{z_4} = e^{4\pi z_3} = e^{4\pi i z_2} = e^{4\pi i(z_1+\frac{1}{2})} = e^{4\pi i(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2})} = e^{2\pi i(\frac{z}{z-2})}$$

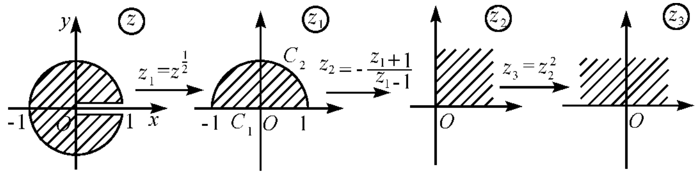

图 6－18(g)

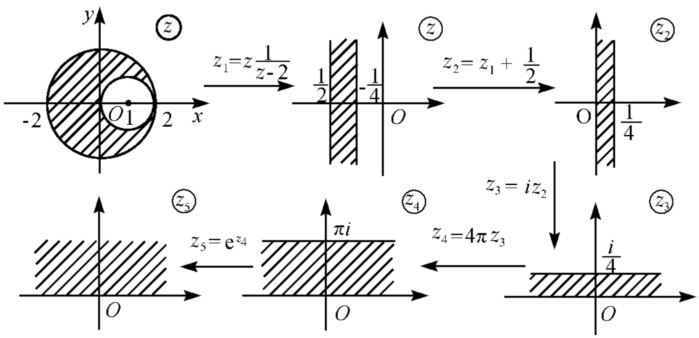

图 6－18(h)

9）如图 6－18(i) 所示，① 向左平移 a 个单位：$z_1 = z - a$；

② 旋转：$z_2 = iz_1$；

③ 放大(缩小)：$z_3 = \dfrac{\pi}{b-a} z_2$；

④ 应用 $z_4 = e^{z_3}$ 将水平带形域：$0 < \mathrm{Im}(z_3) < \pi$ 映射成上半平面.

综上可得　$z_4 = e^{z_3} = e^{\frac{\pi}{b-a}z_2} = e^{\frac{\pi}{b-a}iz_1} = e^{\frac{\pi i(z-a)}{b-a}}$

10）如图 6－18(j) 所示，① 放缩：$z_1 = \dfrac{\pi}{a} z$；

② $z_2 = -e^{-z_1}$ 将 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z_1) < \pi$ 映射成上半单位圆；

③ 应用 $z_3 = -\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$ 便得到角形域 $0 < \mathrm{Arg} z_3 < \dfrac{\pi}{2}$；

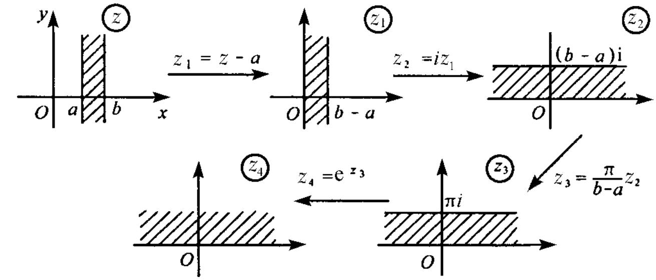

图 6－18(i)

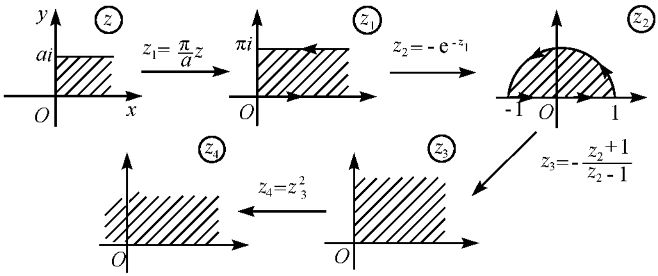

图 6－18(j)

④ 应用 $z_4=z_3^2$ 便得到上半平面.

综上得 $$z_4=z_3^2=\left(-\frac{z_2+1}{z_2-1}\right)^2=\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{a}z}-1}{e^{-\frac{\pi}{a}z}+1}\right)^2$$

● *20. 求把上半 z 平面映射成 w 平面中如图 6－19(a) 所示的阴影部分的映射，并使 $x=0$ 对应于 A 点，$x=-1$ 对应于 B 点.

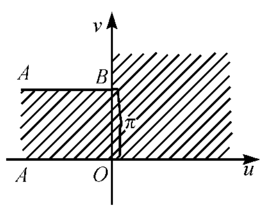

图 6－19(a)

分析 先根据要求列表，然后计算出映射后的图形，再求解.

解 作 z_i 与 w_i 的对应如表 6－1：

表 6－1

i	z_i	w_i	α_i
1	0	∞	0
2	x_2	0	π
3	∞	∞	$-\frac{\pi}{2}$
4	-1	πi	$\frac{3}{2}\pi$

因此

$$w=k\int(z-0)^{\frac{0}{\pi}-1}\cdot(z-x_2)^{\frac{\pi}{\pi}-1}\times(z+1)^{\frac{\frac{3}{2}\pi}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c$$

$$=k\int\frac{1}{z}(z+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z+c=k\left[2\sqrt{z+1}+\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right]+c$$

$$=k\left[2\sqrt{z+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\right]+c$$

为了确定常数 k 与 c，把上式改写成

$$u+iv=(k_1+ik_2)\left\{2\sqrt[4]{(x+1)^2+y^2}\cdot\right.$$

$$\left[\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+$$

$$\left.\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+i\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right]\right\}+c_1$$

$$+ic_2\quad(j=0,1)$$

即 $u=c_1+2\cdot\sqrt[4]{(x+1)^2+y^2}\cdot$

$$\left[k_1\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)-k_2\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+$$

$$k_1\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|-k_2\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\quad(j=0,1)$$

$v=c_2+2\cdot$

$$\sqrt[4]{(x+1)^2+y^2}\left[k_1\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)+k_2\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]$$

$$+k_2\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+k_1\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right](j=0,1)$$

当 w 沿实轴上的 $OC\to\infty$ 时，z 沿 $OC'\to\infty$，$\mathrm{Arg}z=0$，$y=0$，得到

$$v=0=c_2$$

$$+\lim_{x\to\infty}\left\{2\sqrt[4]{(x+1)^2+0^2}\left[k_1\sin\left(\frac{2j\pi}{2}\right)+k_2\cos\left(\frac{2j\pi}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+k_2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+k_1\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right]\right\}$$

$$=c_2+\infty\cdot k_2+0\cdot k_2+k_1\cdot 0\cdot\infty+k_1\cdot 0$$

$$=c_2+\infty\cdot k_2$$

所以 $c_2=k_2=0$

当 w 沿 $CB\to\pi i$ 时，z 沿 $C'B'\to-1$，$\mathrm{Arg}z=\pi$，$y=0$

$$u=0=c_1+\lim_{x\to-1^-}\left\{2\sqrt[4]{(x+1)^2+0^2}\left[k_1\cos\left(\frac{\pi+2j\pi}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.-k_2\sin\left(\frac{\pi+2j\pi}{2}\right)\right]+k_1\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|$$

$$\left.-k_2\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right]\right\}$$

$$=c_1-k_2\pi=c_1$$

$v=\pi=c_2+k_1\pi=k_1\pi$，即 $\quad k_1=1$

所以 $$k=1,c=0$$

所求映射为 $$w=2\sqrt{z+1}+\ln\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$$

见图 6－19(b).

小结 求点点对应的映射，要掌握求解步骤.

● ＊21. 求把图 6－20(a) 所示的阴影部分映射成上半平面的映射，

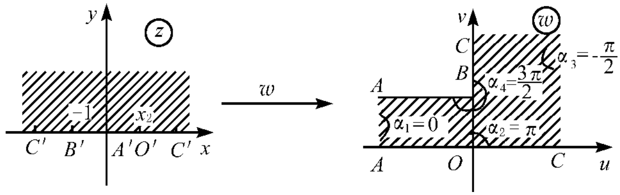

图 6－19(b)

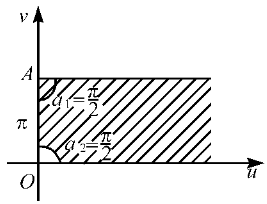

图 6－20(a)

并使 A 点对应 $x=-1$，O 点对应于 $x=1$.

分析　先根据题目要求列出对应的表再求出映射.

解　作 z_i 与 w_i 的对应如表 6－2：

故可得

$$w=k\int(z+1)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}(z-1)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c=k\int\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\mathrm{d}z+c$$

$$=k\ln(z+\sqrt{z^2-1})+c$$

$$=k\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+ik\operatorname{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})+c$$

表 6－2

i	z_i	w_i	α_i
1	-1	πi	$\frac{\pi}{2}$
2	1	0	$\frac{\pi}{2}$
3	∞	∞	0

为确定常数 k 与 c 将上式改写成

$$u+iv=(k_1+k_2i)\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+$$
$$i(k_1+ik_2)\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})+c_1+ic_2$$

即 $$u=c_1+k_1\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|-k_2\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})$$
$$v=c_2+k_2\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|+k_1\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})$$

当 w **沿** $BA\to\pi i$，z **沿** $B'A'\to-1$，$\mathrm{Arg}z=\pi$，$y=0$

所以

$$u=0$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\left\{c_1+k_1\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-k_2\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\right\}$$
$$=c_1+k_1\ln1-k_2\pi=c_1-k_2\pi$$
$$v=\pi$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\left\{c_2+k_2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+k_1\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\right\}$$
$$=c_2+k_2\cdot\ln1+k_1\pi=c_2+k_1\pi$$

再考虑，当 w **从** A **向** O **移动时**，z **从** -1 **向** 1 **逼近**，$y=0$，$x\to1^-$，**于是**，$u=0=\lim\limits_{x\to1^-}\{c_1+k_1\ln|x+\sqrt{x^2-1}-k_2Arg(x+\sqrt{x^2+1})\}$

$$=c_1+k_1\cdot0-k_2\cdot0=c_1$$

$v=0=\lim\limits_{x\to1^-}\{c_2+k_2\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+k_1\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\}$

$$=c_2+k_2\cdot0+k_1\cdot0=c_2$$

即 $c_1=c_2=0$，**故** $c=0$. **代回刚才得到的两个式子，可得** $k_1=1$，$k_2=0$，**即** $k=1$.

所以 $$w=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

由上式整理得
$$z+\sqrt{z^2-1}=e^w$$
$$z^2-1=\mathrm{e}^{2w}+z^2-2\mathrm{e}^wz$$
$$z=\frac{1+\mathrm{e}^{2w}}{2\mathrm{e}^w}=\frac{\mathrm{e}^w+\mathrm{e}^{-w}}{2}=\mathrm{ch}w$$

见图 6－20(b).

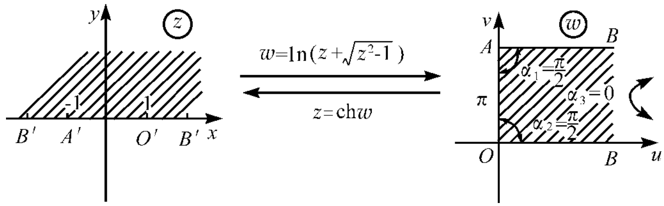

图 6－20(b)

小结　此类题目的方法步骤比较重要,主要是掌握方法.

○ $*$22.求出附录中 6,9 与 12 三个关于区域变换的映射

1)6.　$w=\sin z$;　　2)9.　$w=\dfrac{i-z}{i+z}$;

3)12.　$w=\ln\dfrac{z-1}{z+1}$.

解　1) ① 旋转:$z_1=(-i)z$,得到区域 $\mathrm{Re}(z_i)>0$,$-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(z_i)<\dfrac{\pi}{2}$;

② 上移:$z_2=z_1+\dfrac{\pi}{2}i$ 得到区域 $\mathrm{Re}(z_2)>0,0<\mathrm{Im}(z_2)<\pi$;

③ 由上题知 $w=\mathrm{ch}z_2$,将区域 $\mathrm{Re}(z_2)>0,0<\mathrm{Im}(z_2)<\pi$ 映射成上半平面.

综上得　$$w=\mathrm{ch}z_2=\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}=\frac{e^{z_1}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-z_1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}$$
$$=\frac{e^{-z_1}-e^{z_1}}{2i}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$$

见图 6－21(a).

2) 将上半平面映射成单位圆内部的映射的一般形式为

$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right),\theta\in\mathbf{R}$$

将 $\begin{cases}z_1=\infty\\ w_1=-1\end{cases}$　$\begin{cases}z_2=0\\ w_2=1\end{cases}$　$\begin{cases}z_3=1\\ w_3=i\end{cases}$　分别代入上式可得

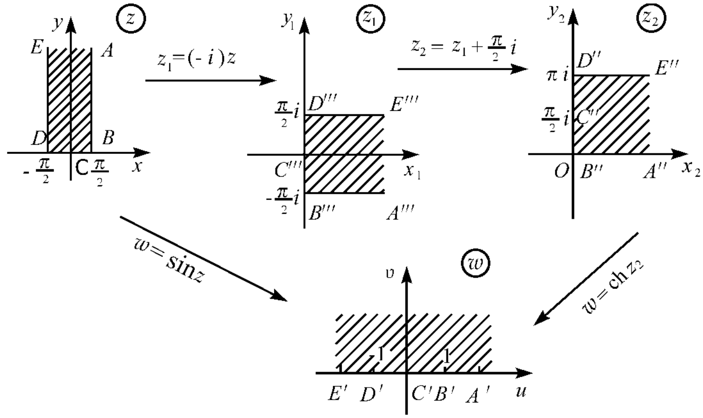

图 6－21(a)

$$-1=e^{i\theta}\left(\frac{\infty-\lambda}{\infty-\bar{\lambda}}\right)=e^{i\theta} \quad ①$$

$$1=e^{i\theta}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)=\frac{-\lambda}{\bar{\lambda}} \quad ②$$

$$i=e^{i\theta}\left(\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right)=-\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}} \quad ③$$

设 $\lambda=x+iy$，由式②可得 $x-iy=-(x+iy)$

即 $x=0,\lambda=iy$

将 $\lambda=iy$ 代入式③得 $\quad i=-\dfrac{1-iy}{1+iy}$

即 $\quad i-y=-1+iy$

即 $\quad y=1,\lambda=i$

所以所求映射为 $\quad w=(-1)\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{i-z}{i+z}$

见图 6－21(b).

(3) 作 z_i 与 w_i 对应如表 6－3：

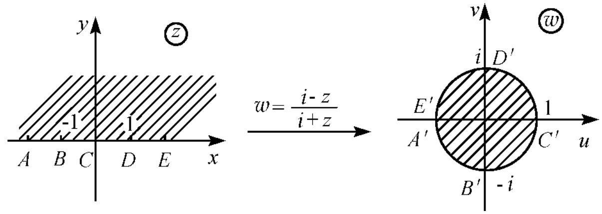

图 6－21(b)

表 6－3

i	z_i	w_i	α_i
1	∞	0	π
2	-1	∞	0
3	1	∞	0

所以
$$w = k\int (z+1)^{\frac{0}{\pi}-1}\cdot(z-1)^{\frac{0}{\pi}-1}\mathrm{d}z + c$$
$$= k\int \frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z + c = \frac{k}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c$$
$$= \frac{k}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c$$

$w=0$ **时**，$z=\infty$，

因此 $0 = \frac{k}{2}\ln\left|\frac{\infty-1}{\infty+1}\right| + i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{\infty-1}{\infty+1}\right)+c$
$$= \frac{k}{2}\ln 1 + i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}1 + c = c$$

$w=\pi i$ **时**，$z=0$，**因此**
$$\pi i = \frac{k}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right| + i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{0-1}{0+1}\right)+c$$
$$= \frac{k}{2}\ln 1 + i\,\frac{k}{2}\mathrm{Arg}(-1) + 0$$
$$= i\,\frac{k}{2}\pi$$

所以，$k=2$，$w=\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

见图 6－21(c).

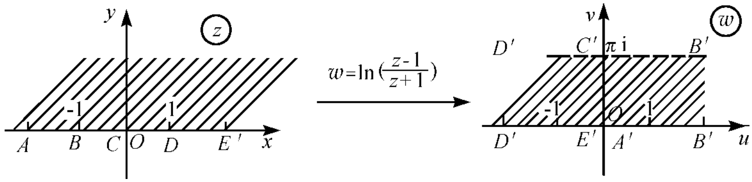

图 6—21(c)

◎*23. 求出在 w 平面中第一象限外部的等温线方程.已知在正实轴上的温度 $T=100℃$,在正虚轴上的温度 $T=0℃$(图 6—22).

分析 应用实例,求解 w 平面中第一象限外的等温线方程,应用等温方程的性质分别给出映射前的图与映射后的图,然后再求出映射即得 w 平面的等温线方程.

解 所求的等温方程必满足拉普拉斯方程:$\dfrac{\partial^2 T}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial v^2}=0$,满足二、三、四象限边界上的条件.为便于求解,用 $z=e^{-\frac{\pi}{3}i}w^{\frac{2}{3}}$ 将 w 平面的二、三、四象限变为 z 平面中的上半平面,这使问题变为在 z 平面中的上半平面内,按新的边界条件解拉普拉斯方程.

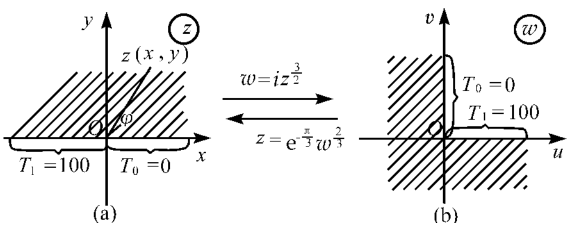

图 6—22

由图 6—22(a) 可知,z 的极角 φ 满足 $0<\varphi<\pi$,不难看出

$$T=T_0+\frac{1}{\pi}(T_1-T_0)\varphi \qquad ①$$

当 z 取实数值时,显然取得边值 ,它可看做是函数

$$iT_0+\frac{1}{\pi}(T_1-T_0)\ln w \qquad ②$$

的虚部，而这函数在上半平面是处处解析的，所以由 ① 得

$$T = 0 + \frac{1}{\pi}(100 - 0)\varphi = \frac{100}{\pi}\varphi \qquad ③$$

这里 $0 < \varphi < \pi$，为了回到 w 平面，设 $w = re^{i\theta}$，由 $z = e^{\frac{\pi}{3}i}w^{\frac{2}{3}}$ 可知，$\varphi = \frac{4}{3}k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{2\theta}{3}$，注意到 $0 < \varphi < \pi$ 和 $-\frac{3}{2}\pi < \theta < 0$，故 k 应取 1. 将之代入 ③ 整理得

$$T = \frac{100}{\pi}\left(\frac{2}{3}\theta + \pi\right) \qquad \theta \text{ 是 } w \text{ 的极角}, -\frac{3}{2}\pi < \theta < 0$$