SR M4

D remplacement
2018

Durée : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Projet de reconstruction d'un jardin public.

Dans son effort d'aménagement du cadre de vie, le conseil communal de Prékéto a initié un projet de construction d'un jardin public. Le relevé des caractéristiques de l'ouvrage mentionne un monument à ériger dans le jardin, sa position, ses configurations géométriques, des allées le bordant, l'effigie du roi ayant donné son nom à la commune et qui doit être sculptée sur ce monument ainsi que les positions de trois lampadaires.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$, l'une des configurations géométriques est obtenue à partir des points $A(1;-2;2)$, $B(2;0;-1)$, $C(7;-4;-2)$, $D(6;-6;1)$, $E(-13;-16;-12)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t-4 \\ y = -4t+2; \; t \in \mathbb{R} \\ z = -t+3 \end{cases}$.

La surface ABE portera l'effigie.

Vignon, un fils de l'ingénieur en charge des travaux et élève en classe terminale scientifique, veut illustrer les données relatives aux caractéristiques géométriques du monument et évaluer l'aire d'un domaine $(\mathbb{S})$ contenant ce monument.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Vignon en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1. a) Justifie que les droites (AB) et $(\mathscr{D})$ sont perpendiculaires en A.

Suite en page 2/3

b) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant les deux dro tes (AB) et $(\mathscr{D})$.

c) Justifie que les points A, B, C et D sont coplanaires.

d) Démontre que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

2. a) Démontre que $ABCDE$ est une pyramide.

b) Calcule l'aire de la surface portant l'effigie du roi.

Problème 2

On se restreint au plan de repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ s'identifiant au plan complexe dans lequel les affixes respectives a,b,c des points L_1, L_2, L_3 représentant les lampadaires sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :
(E): $z^3-(2+6i)z^2+(-12+7i)z+9+7i=0$ avec $\mathrm{Re}(a)<\mathrm{Re}(b)<\mathrm{Re}(c)$.

1. a) Justifie que $1+i$ est une solution de (E).

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s de centre L_2 qui transforme L_3 en L_1.

b) Déduis-en les caractéristiques s.

c) Précise la nature du triangle $L_1L_2L_3$.

Problème 3

Une partie des allées bordant le monument est représentée par une portion de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-x-1}{x+1} & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Le domaine $(\mathbb{S})$ est délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Suite en page 3/3

3. a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
   b) Détermine les limites de f aux bornes de D_f.
   c) Etudie la continuité de f en 0.
   d) Justifie que f est dérivable en 0.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations.
5. a) Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   b) Etudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
6. a) Etudie le sens de variation de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = e^x - x - 1$.
   b) Déduis-en le signe de $k(x)$ pour tout nombre réel x.
   c) Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (T).
7. Trace la courbe $(\mathcal{C})$.
8. Calcule l'aire du domaine $(\mathbb{S})$.

FIN