**Ma trận lân cận (Neighborhood Matrix)**

Cho N là một hàm lân cận trên một **CC** X.

Gọi Y={y1,y2,...,yn} và Z={z1,z2,...,zm} là hai tập hợp các ô trên **X** sao cho N(yi) ≤Z, ∀i,1≤i≤ n

Khi đó, **ma trận lân cận** của **N** đối với **Y** và **Z** là một ma trận 2 ngôi , có cấp ∣Z∣x|Y| sao cho phần tử thứ (i,j) là [(x)]ij có giá trị là 1 nếu zi ∈ N(yi) và 0 trong trường hợp còn lại.

**Như vậy: Khi đề cập đến ma trận lân cận, ta phải có:**

1. **Một hàm lân cận N cho trước**
2. **Hai tập hợp các ô cần so sánh**

**Incidence trên một CC**

Trong nội dung này, ta sẽ đề cập đến loại lân cận của một CC cùng với các **ma trận thiết lập trên nó: incidence** và **adjacency (liên hợp)**. Về lân cận **incidence**, ta cũng phân chia thành: **Incidence trên (up-incidence), Incidence dưới (down-incidence),** hay incidence trên/dưới bậc K.

**Định nghĩa hàm lân cận incidence trên/dưới**

Cho trước một **CC** (S,X,rk). Hai ô x,y trên **CC** được gọi là **incident** nếu x≤y hoặc y≤ x. **Đặc biệt:** Một **hàm lân cận incidence dưới, kí hiệu là** N (x) của 1 ô x∈X được định nghĩa là **1** tập hợp các ô: {y∈X∣y≤x}; Một **hàm lân cận incidence trên, kí hiệu là**  N (x) của 1 ô x∈X được định nghĩa là **1** tập hợp các ô: {x∈X∣x≤y}.

Ta lưu ý gì về định nghĩa này?

Ta có thể hiểu N↓ (x) (down-incidence) là gồm các ô “nó chứa”. Còn N (x)(up-incidence) là gồm các ô “chứa nó” }”nó” ở đây là ô x đã cho

**Định nghĩa hàm lân cận incidence trên/dưới bậc K**

Cho trước một **CC (S,X,rk).** Với K∈N tùy ý, ta xây dựng định nghĩa hàm lân cận incidence dưới bậc K ký hiệu là N↓,k(x) của 1 ô x ∈ X là 1 tập hợp các ô {y∈X|y≤x ,rk(y)=rk(x)-K }. Tương tự hàm lân cận incidence trên bậc K, ký hiệu là N ,k(x) của 1 ô x∈ X là 1 tập hợp các ô {y∈X|y≤x ,rk(y)=rk(x)-K }.

Ta lưu ý gì về định nghĩa này?

Ta có thể hiểu N↓,k(x) (k down-incidence) là gồm các ô “nó chứa” và nhỏ hơn nó k bậc. Còn N ,k(x) (k up-incidence) là gồm các ô “chứa nó” và lớn hơn nó k bậc }”nó” ở đây là ô x đã cho

**Dễ dàng ta có:**

N↓(x)=⋃K∈NN↓k(x)

**Chứng minh:**  
Muốn chứng minh hai tập bằng nhau A=B, ta cần phải chứng minh A≤B và B≤A:

Như vậy trước tiên ta sẽ CM:

N↓(x) ≤⋃K∈NN↓,k(x) ; tức là với 1 ô y bất kỳ thuộc N↓(x); ta sẽ chứng minh **y** ∈ ⋃K∈NN↓,k(x)

Theo định nghĩa, với y∈ N↓(x); tức là y ⊆ x

 Giả sử y có bậc/hạng là K0 tức là rK(y) = K0, và rK(x) = K1

 Khi đó, ta có được y ∈ N ↓,k1−K0(x)

 Mà N ↓,k1−K0(x) ⊆⋃K∈NN↓,k(x)  **Lưu ý**, chỉ số này là khoảng cách giữa rk(x) và rk(y) theo định nghĩa

 Vậy **y** ∈ ⋃K∈NN↓,k(x) (1)

 **Ở chiều ngược lại**, ta sẽ c/m ⋃K∈NN↓,k(x)⊆N↓​(x). Thật vậy, với **y** ∈ ⋃K∈NN↓,k(x) , nghĩa là y sẽ là 1 ô nằm trong x và có bậc cách bậc của x K đơn vị nào đó. Nhưng điều đó cũng có nghĩa là **y** ∈ N↓​(x).

 Vậy ⋃K∈NN↓,k(x)⊆N↓​(x) (2). **Từ (1) và (2) ta kết luận** N↓(x)=⋃K∈NN↓k(x)

### Một số định nghĩa:

* **Tập hợp các mặt (faces) của 1** ô x ∈ X được định nghĩa là N↓,1(x) (nghĩa là các ô nằm trong x, và nhỏ hơn x 1 bậc)
* Tập hợp các đối mặt (cofaces) của 1 ô x ∈ X được định nghĩa là N ,1(x) (nghĩa là các ô chứa x, và lớn hơn 1 bậc)

### Ma trận incidence

Cho 1 CC (S,X,rk) . Với r,k∈Z≥0 thỏa điều kiện 0≤r<k≤dim(X), ta định nghĩa ma trận (r,k) **incidence**  
Br,k ​giữa Xr và Xk là 1 ma trận hai ngôi, cấp ∣Xr∣×∣Xk∣, trong đó phần tử thứ (i,j) ký hiệu là [Br,k]ij  nhận giá trị là **1** nếu Xir incidence với Xkj bằng **0** trong trường hợp còn lại.

Lưu ý rằng Xr và Xk là tập hợp các ô bậc r và tập k tương ứng.  
∣ Xr∣,∣Xk∣ là số lượng ô cấp r hay cấp k trong Xr và Xk.

### Hàm lân cận liên hợp / Đối liên hợp

Cho trước 1 CC(S,X,rk), hàm lân cận liên hợp, ký hiệu là Na(x) của 1 ô x∈X được định nghĩa là tập hợp

{y∈X∣rk(y)=rk(x),∃z∈X với rk(z)>rk(x) sao cho x,y⊆z}

Hàm lân cận đối liên hợp (coadjacency neighborhood function), ký hiệu là Nco(x) của 1 ô x∈X được định nghĩa là

{y∈X∣rk(y)=rk(x),∃z∈X với rk(z)<rk(x) sao cho z⊆y, z⊆x}

Ô z thỏa mãn các điều kiện của Na(x) hay Nco(x) được gọi là ô cầu nối (bridge cell).

### Hàm lân cận liên hợp / Đối liên hợp bậc K

Cho trước 1 CC(S,X,rk). Với K∈N, ta định nghĩa 1 lân cận liên hợp bậc k, ký hiệu là Na,k(x) của 1 ô x∈X được định nghĩa là

{y∈X∣rk(y)=rk(x),∃z∈X với rk(z)=rk(x)+K sao cho x,y⊆z}

Hàm lân cận đối liên hợp bậc K, ký hiệu là Nco,k(x) của 1 ô x∈X được định nghĩa là tập

{y∈X∣rk(y)=rk(x),∃z∈X với rk(z)=rk(x)+K sao cho z⊆y, z⊆x}

**?) Hãy nêu sự giống và khác nhau giữa các loại lân cận**

**Solution:**

✅ **Giống nhau**: Đều cùng là lân cận của x(hay chứa x).

✅ **Khác nhau**:

* 4 loại lân cận đầu tiên thuộc loại lân cận *incidence*.
* Tất cả các loại này hay đều chứa các ô có bậc / hạng **KHÁC** x

4 loại lân cận còn lại thuộc loại lân cận liên hợp. Tất cả các loại này đều chứa các ô có bậc BẰNG x (kèm theo điều kiện phải có 1 ô trung gian, ô này có bậc lớn hơn tùy ý và chứa cả ô x và ô lân cận với , ô này có bậc lớn hơn K bậc của x, chứa cả ô x và ô trong lân cận với ; ô này có bậc nhỏ hơn tùy ý và bị chứa trong cả ô x và ô trong lân cận với , hay ô này có bậc nhỏ hơn K đơn vị và bị chứa trong x và cả ô trong lân cận với )

## **Ma trận liên hợp (Adjacency Matrix) & Ma trận đối liên hợp (Co-adjacency Matrix)**

### ****1) Ma trận liên hợp****

* + Với bất kỳ r∈Z≥0 và k∈Z>0 , và 0≤r<k≤dim(X); ma trận liên hợp (r,k) ký hiệu là Ar,k​​ giữa các ô của Xr với các ô của Xk được định nghĩa là 1 ma trận hai ngôi cấp ∣Xr∣×∣Xr|, Trong đó, phần tử thứ (i,j), ký hiệu là [Ar,k]ij  , bằng 1 nếu là K-liên hợp với bằng 0 cho các trường hợp khác.

### ****2) Ma trận đối liên hợp****

* Với bất kỳ r∈Z≥0 và k∈Z sao cho 0≤r<k≤dim(X), ma trận đối liên hợp (r,k)​, ký hiệu là , giữa các ô của Xr đối với các ô của Xk được định nghĩa là 1 **ma trận 2 ngôi cấp** ∣Xr∣×∣Xr|, với phần tử thứ (i,j), ký hiệu là bằng 1 nếu Xir​ là k-đối liên hợp với Xjr bằng 0 cho các trường hợp còn lại.

## **Chú ý rằng ta cũng có** Na(x) = ⋃K∈NNa,k(x)

Nco(x) = ⋃K∈NNco,k(x)

**Dữ liệu trên CCs:** Không gian đối xích (**cochain spaces**) và hàm đối xích (**cochain maps**).

### ****Định nghĩa - Không gian K-đối xích (k-cochain spaces)****

Gọi Ck(X,Rd) là một không gian véc-tơ thực của các hàm số Hk:Xk→Rd cho 1 hạng k∈Z≥0​ và 1 số chiều gọi là **d**; d còn được gọi là **số chiều dữ liệu**. Ck(X,Rd) được gọi là **không gian k-đối xích.** Các phần tử Hk trong Ck(X,Rd) được gọi là **k-đối xích (K-cochains)** hay **K-tín hiệu (K-signals).**

* **Chú ý**, đôi khi ta dùng kí hiệu Ck(X) hay chỉ là Ck nếu bản chất CC đã rõ.
* Một cách dễ hiểu/tường minh, 1 **K đối xích** được giải thích như là 1 tín hiệu **của các ô bậc k**.
* Khi X là **1 đồ thị** (*nghĩa là chỉ có ô bậc 0 và ô bậc 1*), **0-đối xích** được gọi là **các tín hiệu của đồ thị**.
* Khi sắp xếp lại theo dạng chính tắc của các ô trong Xk, ta có thể nhận diện **không gian** Ck(X,Rd) như **một không gian Euclidean**, có số chiều là ∣Xk∣×d.
* Ta có thể viết Hk​ như là một vector có dạng: [hxik,…,hx|Xk|k​] với mỗi hxjk∈Rd là một **vector đặc điểm/tính chất** liên hệ với ô Xjk​.
* Ta dùng ký hiệu Hk,j​ để ám chỉ **vector tính chất hxjk​**.
* Các **ánh xạ giữa các không gian đối xích** được gọi là ánh xạ **đối xích (cochain maps)**.