

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR
UNIVERSITE DES MONTAGNES
FACULTE DES SCIENCES ET DE
TECHNOLOGIE

REPUBLIC OF CAMEROON
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
UNIVERSITE DES MONTAGNES
FACULTY OF SCIENCES AND
TECHNOLOGY



Thème

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES REGIMES DE RETRAITE :
équation d'équilibre générale et capitalisation

Rédigé et soutenu par:

TONLEU SONKOUÉ Blondel

En vue de l'obtention du Master professionnel en Mathématiques et Informatique pour
la Finance et l'Assurance

Option : Actuariat

Encadreur académique :

Dr Christian TASSAK

Dr, Enseignant-chercheur

Encadreur professionnel :

Pr FONO Louis Aimé

Maître de Conférences

REMERCIEMENTS

Le travail que nous présentons n'est sans doute que le fruit d'une somme d'efforts qui prie individuellement a concouru à sa réalisation ; le soin m'étant donné par cette occasion d'adresser ma gratitude :

- Au Dieu tout puissant sans qui rien ne serait possible ;
- A mes parents qui m'ont toujours encouragés dans mes études et pour leurs conseils ;
- Au Pr Louis AIME FONON coordonnateur du laboratoire Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales de l'Université de Douala pour m'avoir donné la chance de continuer ma formation dans son laboratoire et pour son encadrement au cours de cette période ;
- Au Dr Christian TASSAK de l'Université de Douala pour son co-encadrement dans l'élaboration de ce mémoire ;
- The World Academy of sciences (TWAS) : ce travail a pu être réalisé grâce au bon environnement de travail fourni par la TWAS au laboratoire par le projet Research Grant N 17 – 487RG/AC_G – FR3240297728 ;
- Au Dr FANTCHO Joseph Chargé de cours à l'Université des Montagnes ;
- Au Pr François NKANKAM Doyen de la Faculté de Science et de Technologie ;
- Au Pr WAMON coordonnateur des filières mathématiques et informatiques appliquées à la finance ;
- Je remercie tous mes enseignants qui n'ont ménagé aucun effort pour nous donner une formation de qualité ;
- Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

DÉDICACE

À mes parents et à mes frères et soeurs.

RÉSUMÉ

Ce mémoire dresse un état des lieux des systèmes généraux des régimes de retraite et pose des bases pour le calcul des prestations des pensionnés de la zone CIPRES. En général il existe deux grands systèmes de financement que sont la capitalisation et la répartition, mais le système par répartition actuellement utilisé en régime obligatoire a un inconvénient qui est celui de ne pas permettre le maintien du niveau de vie du retraité. Pour remédier à ce problème, certains États de la zone CIPRES disposent ou envisagent de mettre en place un système de retraite complémentaire obligatoire financé par capitalisation. Ceci est la raison pour laquelle nous faisons une étude plus approfondie de la capitalisation.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons en premier lieu au contexte de la retraite en zone CIPRES tout en analysant les régimes de retraite existant de quelques pays de cette Zone. Par la suite, nous présentons les systèmes généraux de financement et nous achevons par la présentation proprement dite de la capitalisation.

MOTS-CLES : retraite, Afrique subsaharienne francophone, CIPRES, secteur formel, prestation définie, cotisation définie, protection sociale, réforme, capitalisation, répartition.

ABSTRACT

This work provides an overview of the general systems of pension plans and sets the basics for the calculation of benefits from the CIPRES area. In general there are two large systems of capitalization and distribution, but the partitioning system currently used in a compulsory scheme has a disadvantage in that it does not allow the maintenance of the standard of living of the pensioner. To remedy this problem, some States in the CIPRES area have or plan to put in place a compulsory supplemental pension system financed by capitalization. This is the reason why we do a further study of capitalization. In this memory, we are first of all be interested in the context of retirement in the CIPRES zone while analyzing the existing pension plans of some countries in the CIPRES area. In a second place, we present the general financing systems and we end with the actual presentation of capitalization.

KEYWORDS : Retirement, Francophone sub-Saharan Africa, CIPRES, Formal Sector, Finished Pardon, Fined Contribution, Social Protection, Form, Capitalization , division.

Table des matières

REMERCIEMENTS	i
DÉDICACE	ii
RÉSUMÉ	ii
ABSTRACT	iii
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 GENERALITES SUR LES REGIMES DE RETRAITE DE LA ZONE CIPRES	3
1.1 Les systèmes de retraite en zone CIPRES	3
1.1.1 Présentation du marché de la retraite en zone CIPRES	3
1.1.2 Etat des lieux des systèmes de retraite en zone CIPRES	4
1.1.3 Fonctionnement des regimes de retraites en zone CIPRES	5
1.2 Présentation des différents éléments actuariels	10
1.2.1 Choix du salaire	10
1.2.2 Choix de la durée de carrière (le rapport entre la durée de carrière prise et la durée maximale de carrière).	11
1.2.3 Éléments soustractifs (prendre en compte l'appartenance d'un individu à un ou aux deux piliers)	11
1.2.4 Relation entre prestation et cotisation	11
1.2.5 Méthodes de financement d'une prestation : la répartition et la capitalisation	12
1.2.6 Véhicule de financement ou support financier d'un régime de retraite	12
1.2.7 Calcul des éléments de démographie	12
2 SYSTEMES GENERAUX DE FINANCEMENT	15
2.0.1 Équation d'équilibre générale actuarielle d'un régime de retraite .	15
2.0.2 Classification des principales méthodes de financement en prestation définie : Utilisation de la relation d'équivalence actuarielle .	17
2.0.3 Capitalisation ou Repartition : le Paradoxe de Samuelson	19
3 PRINCIPE GENERAL DE LA CAPITALISATION	21
3.1 Methodologie générale de la capitalisation	21

3.1.1	Caractéristique et classification des regimes par capitalisation . . .	21
3.1.2	Fonction de base en capitalisation	22
3.2	Methodes de capitalisation individuelle	23
3.2.1	Principe généraux de la capitalisation individuelle	23
3.2.2	Présentation des différentes méthodes de capitalisation individuelle	24
3.3	Principes généraux de la capitalisation collective	29
3.3.1	Technique de nivellement et fonds de financement	30
3.3.2	AGGREGATE COST METHOD	31
3.3.3	ATTAINED AGE NORMAL	32
4	CAS PRATIQUE	34
4.1	Exercices	34
4.2	Solutions	37
	CONCLUSION	48
	BIBLIOGRAPHIE	49

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le besoin d'une pension de retraite naît lorsqu'une personne n'est plus en état de travailler avec suffisamment de force, ou ne peut retrouver un travail suffisamment rémunérateur pour subvenir à ses besoins. Historiquement, la notion de régime de retraite, en tant que mécanisme systématique et organisé sur une base légale ou réglementaire d'octroi de prestations aux personnes âgées, est relativement récente. Qu'il s'agisse de régimes de sécurité sociale mis en place au niveau de l'ensemble d'un pays, de régimes de retraite professionnels s'adressant à tous les membres d'une profession ou encore de plans complémentaires créés au sein des entreprises, on peut affirmer qu'il s'agit essentiellement des créations du XXe siècle.

Malgré les difficultés que connaît le continent, en l'occurrence le manque de dynamisme de l'économie, les conflits, les luttes intestines et l'instabilité politique, la pauvreté recule sensiblement en Afrique(*cf.* Bailey [2004]). La retraite obligatoire contribue à la lutte contre la pauvreté en assurant aux personnes âgées un revenu minimum. Cependant, ces difficultés *supra* ont un impact sur la viabilité des régimes de retraite de la zone CIPRES, ce qui affecte le niveau de la pension, dégradant ainsi la qualité de vie des retraités.

Si l'Afrique dispose d'une population particulièrement jeune (assez largement rurale) et d'indicateurs démographiques assez reluisants, en revanche les systèmes de retraite existants sont confrontés à des défis causés par la dynamique des risques principalement démographique, financière et politique. Ainsi, selon les prévisions de la banque mondiale, l'Afrique devrait entrer, d'ici une vingtaine d'années, dans une phase de vieillissement rapide et prononcée du fait de l'allongement de l'espérance de vie et de la forte baisse de la fécondité (*cf.* La Lettre de l'Observatoire des Retraites [2013]). Cette nouvelle situation démographique risque, si rien n'est fait, d'aggraver encore plus le déficit des régimes de retraite de la zone CIPRES.

En général, il existe deux grands systèmes de financement que sont la capitalisation et la répartition, mais le système par répartition actuellement utilisé en régime obligatoire a un inconvénient qui est celui de ne pas permettre le maintien du niveau de vie du retraité. Pour remédier à ce problème, certains États de la zone CIPRES disposent ou envisagent de mettre en place un système de retraite complémentaire obligatoire financé par capitalisation.

De plus, les méthodes utilisées pour le calcul des prestations sont mal connues par les spécialistes de cette zone. Plusieurs auteurs¹ ont effectué une étude littéraire des régimes de retraite de cette zone tout en précisant que la méthode actuellement utilisée pour le calcul des prestations est la répartition. Cependant, aucun document ne montre

1. (*cf.* Annycke, P [2008])., (*cf.* Bozio, A., Piketty, T [2008])., (*cf.* Garanke, S. [2006])., (*cf.* Florent, G et All. []).

le fonctionnement réel de ces méthodes de financement et les outils nécessaires à leur construction. Nous nous sommes donc donnés pour objectif de contribuer à l'étude de ces régimes de retraite et de proposer un document fiable pour le calcul des prestations retraite des pays de la zone. Dans ce mémoire, nous proposons dans le chapitre 1 un tour d'horizon sur les régimes de retraite de la zone CIPRES ensuite, au chapitre 2, nous présentons les systèmes généraux de financement. Le troisième chapitre de notre mémoire porte sur une présentation détaillée de la méthode de financement par la capitalisation et le dernier chapitre présente quelques cas pratiques.

Chapitre 1

GENERALITES SUR LES REGIMES DE RETRAITE DE LA ZONE CIPRES

Dans ce chapitre nous faisons une présentation du système de retraite de la zone CIPRES.

1.1 Les systèmes de retraite en zone CIPRES

1.1.1 Présentation du marché de la retraite en zone CIPRES

La retraite est un sujet sensible en zone CIPRES¹, souvent considérée comme un cauchemar par les populations de ces pays en ce sens que les prestations reçues à la retraite sont très faibles et souvent en dessous du SMIG et cela malgré un ratio de dépendance démographique moins alarmant. En réalité, deux actifs cotisent en moyenne pour un retraité en zone CIPRES.

Les causes de ce cauchemar sont d'ordres interne et externe. Les causes internes du déficit sont nombreuses à savoir la mauvaise gouvernance, l'augmentation du nombre des retraités, la baisse du nombre des actifs (occasionnée par des problèmes économiques que traversent les États et des programmes successifs d'ajustement structurel), d'où une dégradation du ratio de dépendance démographique et implicitement des problèmes administratifs qui entraînent une incitation faible à participer au régime. En outre, les causes externes comprennent la dynamique des risques, la difficulté de recouvrement des cotisations (réduisant ainsi les ressources du régime).

Au niveau du risque démographique, nous observons principalement une diminution de la mortalité et une augmentation de l'espérance de vie dues en partie aux progrès de la médecine et à d'autres facteurs connexes comme la lutte contre le VIH/SIDA, la mortalité infantile et la mortalité maternelle. Au niveau du risque économique, nous

1. La Conférence Interafricaine de la Prévoyance Sociale (CIPRES) est un organisme de contrôle et d'appui technique aux Caisses Africaines de Sécurité Sociale. Il regroupe les quinze pays suivants : Benin, Burkina Faso, Cameroun, Centrafrique, Comores, Congo (Brazzaville), la RD Congo, Côte d'Ivoire, Gabon, Guinée équatoriale, Mali, Niger, Sénégal, Tchad et Togo.

pouvons citer une augmentation du niveau de l'inflation, un taux de chômage élevé favorisé par des troubles politiques récurrents, une politique macro-économique peu incitative. De plus, la fragilité de ces économies est due en grande partie aux multiples crises économiques, aux politiques d'ajustements structurels à partir des années 1980 freinant ainsi le développement de certains secteurs créateurs d'emplois.

1.1.2 Etat des lieux des systèmes de retraite en zone CIPRES

Nous évoquons surtout les crises politico-militaires qui ont touchées un certain nombre de pays (le Cameroun , la Côte d'Ivoire, le Mali et le Burkina Faso notamment) et un système financier moins développé qui ne fournit pas une large gamme d'instruments financiers pour optimiser le placement des ressources collectées. De plus, à ces éléments se superpose en permanence un contexte subsaharien francophone un peu défavorable marqué par une expansion du secteur informel. Dans les pays de la CIPRES, le système de retraite est conçu autour du modèle bismarckien². Il se décline en : (i) un régime de retraite **obligatoire** dont la gestion est confiée aux sociétés d'État (institutions), jouissant souvent d'une personnalité morale et d'une autonomie financière ;(ii) et un régime de retraite **facultatif** géré par des entreprises privées en occurrence les sociétés d'assurance.

a) Le régime de retraite obligatoire

Les régimes de retraite obligatoires en zone CIPRES correspondent au **régime de base** (pilier I). Ce sont des systèmes de retraite à prestations définies financés par répartition. Ce régime de base couvre uniquement les employés du secteur **formel** (les employés des secteurs public et privé), il est régulé par la CIPRES. Quant au régime facultatif, il comprend la retraite complémentaire (deuxième Pilier) et la retraite supplémentaire (pilier III) et est assuré par des entreprises d'assurance privées dont l'organisme de contrôle est la CIMA. Pour être en conformité avec la législation internationale, les gouvernements subsahariens francophones ont le devoir d'assurer une protection sociale minimum à leurs populations, aboutissant ainsi à la création d'institutions de protection sociale. Héritage de la colonisation, le système de retraite de base existant dans la zone CIPRES est un système de retraite obligatoire, émanant des lois votées par les assemblées nationales. Ce système de retraite est géré par répartition c'est-à-dire que les pensions des retraités sont financées directement par des cotisations prélevées au même moment au sein de la population active affiliée au système. Pour maintenir le niveau de vie du retraité, certains États de la zone CIPRES disposent ou envisagent de mettre en place un système de retraite complémentaire obligatoire financé par capitalisation. Pour l'heure, seulement le Sénégal et le Togo disposent d'un régime de retraite complémentaire obligatoire. En outre, certains pays de la Zone CIPRES ont entamé des réformes qui prennent en compte la problématique de la retraite complémentaire. Pour exemple, la réforme en 2012 du système de retraite ivoirien prend en compte la question de la mise en place d'un régime de retraite complémentaire et de l'extension de la couverture sociale aux travailleurs non-salariés (TNS).

2. Les deux modèles de base d'un régime de retraite sont : le modèle de Bismarck (où les prestations sont remises en fonction des revenus), le modèle de Bervidge (chaque retraité reçoit ce dont il a besoin pour survivre).

b) Le régime de retraite facultatif

Le régime de retraite facultatif est un régime de retraite volontaire, non imposé par les lois du pays concerné. En zone CIPRES, il sert en complément au régime de base décrit plus haut jouant ainsi la fonction des deux autres piliers. Ce régime est entièrement géré par des compagnies d'assurance sous la forme de produits d'assurance sur la vie. Quel que soit le montage des produits Épargne-retraite, ils sont toujours basés sur le principe de la capitalisation. Il s'agira ici de constituer une épargne lors de sa vie active en vue de disposer d'un capital ou d'une rente à la retraite. En pratique, il existe deux types de capitalisation en zone CIPRES à savoir :

- La capitalisation individuelle : chaque individu finance sa propre retraite. Elle peut être perçue comme un produit d'assurance vie. Elle correspond au pilier III du dispositif de la retraite en occurrence la retraite supplémentaire.
- La capitalisation collective : il s'agit des **régimes professionnels** organisés au sein d'une entreprise ou d'un secteur d'activité, octroyant à chacun des affiliés de ces régimes un complément à la sécurité sociale. Elle correspond au second pilier c'est-à-dire à la retraite complémentaire.

c) Présentation des régimes de retraite

En Côte d'Ivoire, la retraite est assurée par deux institutions à savoir la Caisse Générale de Retraite des Agents de l'État (CGRAE) pour le secteur public et la Caisse Nationale de Prévoyance Sociale (CNPS) pour le secteur privé. Ils ont le statut de « personne morale » sous la dénomination de « société d'état ».

La retraite de la population sénégalaise est assurée par deux institutions de prévoyance sociale en occurrence l'Institution de Prévoyance Retraite du Sénégal (IPRES) qui couvre les employés du secteur privé, les agents non fonctionnaires de l'État, les employés des administrations locales et, d'autre part le Fonds national de Retraites (FNR) qui couvre les fonctionnaires civils et militaires.

Le système camerounais de sécurité sociale est un régime d'assurance sociale. Il couvre environ 10 % de la population active et comprend 2 régimes : (a) le régime des travailleurs relevant du code de travail, géré par la Caisse Nationale de Prévoyance Sociale (CNPS) ; (b) et le régime des Fonctionnaires et assimilés, géré par l'État (ministère de l'économie et des finances). Dans ces pays, le régime de retraite de base est obligatoire, à prestations définies et financé par répartition.

1.1.3 Fonctionnement des regimes de retraites en zone CIPRES

Dans cette section, nous allons comparer les systèmes de retraite de la zone CIPRES. En pratique, notre analyse portera sur trois pays provenant de l'Afrique de l'Ouest et de l'Afrique centrale, en occurrence la Côte d'Ivoire, le Sénégal et le Cameroun.

a) Analyse du financement

Le financement des différentes branches du système de Prévoyance Sociale en zone CIPRES est assuré, conformément aux dispositions des textes en vigueur, par (i) des cotisations sociales et des majorations encourues pour retard de versement des cotisations ; (ii) des revenus des placements de fonds ; (iii) des dons et legs ; (iv) des subventions du

budget de l'État ou toutes autres ressources attribuées aux régimes par un texte législatif ou réglementaire.

Les cotisations constituent la composante la plus importante du financement (plus de 80 %). Elles sont composées de deux parties à savoir la part employeur et la part salarié en des proportions différentes.

i)-La Côte d'Ivoire

Les cotisations de la CGRAE ont une tendance haussière ces dernières années passant de 75,36 milliards FCFA à 145,28 milliards FCFA, soit un saut de 93 % sur la période 2010 – 2013 grâce à la réforme du régime de pension en 2012 et au versement effectif des cotisations par l'État.

En ce qui concerne la CNPS, les statistiques disponibles proviennent de l'AISS³ sur la période 2000-2006. Les cotisations ont subi une légère amélioration (5 %) sur cette période. Par contre, les revenus de placement constituent une faible composante des recettes du régime. Il s'agit d'un point à améliorer par les régimes de retraite de la zone CIPRES.

ii)-Le Sénégal

Les cotisations du FNR ont connu une progression remarquable. Estimées à 17,9 milliards FCFA en 1997 elles ont atteint en 2011 la somme de 59,9 milliards FCFA, soit une hausse de 218 %. De même, les cotisations de l'IPRES ont connu la même tendance que celles du FNR. Ainsi, les cotisations du régime général ont connu une hausse de 11,9 milliards FCFA sur la période 2009-2010, tandis que celles du régime complémentaire des cadres ont augmenté de 6,6 milliards FCFA. Cette évolution s'explique aussi par la progression des affiliés de la CGRAE, passant de 186445 en 2010 à 212289 en 2013, soit une hausse de 14 % sur la période 2010-2013. A fin mars 2014, ils étaient de 221 003. Sur la période 1992-2011, les cotisants du FNR ont augmenté de 32 %, soit 680 personnes. Le rapport de gestion de l'IPRES révèle une amélioration des cotisants du régime général (RG) de 6,6 % et du régime complémentaire des cadres (RCC) de 4,1 % sur la période 2009 - 2010.

iii)-Le Cameroun

Le montant des cotisations a augmenté de 7,5% par rapport à 2016, passant de 156 304 721 867 en 2016 à 168 032 075 670 F CFA en 2017, avec cependant une baisse non négligeable des cotisations du régime d'assurance volontaire (-15,62%). Cette croissance est plus impactée par les branches de pensions de vieillesse, invalidité et décès (PVID) et prestations familiales (PF), avec respectivement 11,75% et 4,78%.

En règle générale, l'évolution des cotisations dans les pays de la zone CIPRES, résulte de l'augmentation des cotisants et de la mise en application des réformes.

b) Les dépenses

Les régimes de retraite en zone CIPRES doivent faire face au moins mensuellement à des engagements (dépenses) pour honorer leur promesse. Ces dépenses comprennent les dépenses liées au fonctionnement de la caisse de retraite et les dépenses techniques associées au paiement des prestations des différentes branches. En zone CIPRES, les dépenses techniques de la branche « vieillesse » sont des prestations allouées aux retraités ou à leurs ayants droit en cas de décès. Elles sont composées des :

3. Association internationale de la sécurité sociale.

- **prestations de vieillesse** : L'assuré bénéficie de cette pension s'il atteint l'âge de la retraite. Ce dernier varie entre 55 et 60 ans selon les pays de la zone CIPRES. Elle représente une proportion du revenu moyen perçu par le travailleur durant les derniers mois d'activité. Cependant, le bénéficiaire peut décider d'anticiper sa retraite, dans ce cas, il bénéficie d'une pension de retraite anticipée, calculée en appliquant un coefficient d'abattement à sa pension de vieillesse. Plus généralement, ce coefficient est de 5 % par année.
- **prestations de survivant** : Il s'agit de pensions ou de rentes de réversion octroyées aux ayants droit en cas de décès de l'assuré.
- **prestations d'invalidité** : Elle permet de garantir un revenu de remplacement au travailleur victime d'une incapacité pour des raisons non professionnelles lorsque celui-ci ne peut plus gagner correctement sa vie par son activité professionnelle. Le bénéficiaire doit respecter une durée minimale d'activité et une période « plancher » d'assurance (cotisation effective).
- **Autres prestations** : Il s'agit, entre autres, des allocations vieillesse et aux survivants. À cela peuvent s'ajouter les frais médicaux, de transport, funéraires et les autres charges techniques.

i) La Côte d'Ivoire

Les dépenses techniques de la **CGRAE** continuent de progresser passant de 51,86 milliards FCFA en 2010 à 136,85 milliards FCFA en 2013, soit une hausse de 164 % sur quatre ans. La réforme de 2012 a permis à la caisse d'être excédentaire dès 2013. En outre, le déficit de la **CNPS** est apparu dès l'exercice 2003 pour une valeur de 15,84 milliards FCFA. L'effectif des assurés sociaux de la CNPS a connu une évolution de 24 % sur la période 2008-2013 passant de 550 000 en 2008 à 683 365 en 2013. Les bénéficiaires de la CGRAE ont régressé de 3% sur la même période passant de 81930 en 2010 à 79087 en 2013. Le ratio de dépendance est passé de 2,3 en 2010 à 2,7 en 2013 et à 2,8 à fin mars 2014.

ii) Le Sénégal

Les dépenses techniques du **FNR** ont augmenté de 168 % passant de 21,29 milliards FCFA en 1997 à 57 milliards FCFA en 2011. Nous pouvons voir que le régime était déficitaire avant la réforme de 2002. Cette dernière a permis d'améliorer le solde technique du régime pendant les neuf années suivantes. Cependant, le déficit est survenu au cours de l'exercice 2011, estimé à 90 millions de FCFA. Les dépenses du régime général et du régime complémentaire des cadres de l'**IPRES** ont subi respectivement une hausse de 160 % et de 516 % sur la période 1994-2010. Respectivement, les réserves ont aussi progressé pour les deux régimes de l'ordre de 956% (RG) et de 2575 % (RCC).

iii) Le Cameroun

La branche retraite de la **CNPS** Cameroun est en déficit en ce sens que les dépenses augmentent plus rapidement que les recettes. En effet, sur la période 2009-2013, nous observons une hausse de 16 % des recettes, tandis que les dépenses ont progressé de 21 %, passant de 47,86 milliards FCFA en 2009 à 57,99 milliards FCFA en 2013. Le déficit de l'exercice 2013 est estimé à 8,14 milliards FCFA.

Nous pouvons déduire à partir des exemples *supra* que la hausse des dépenses des régimes de retraite de la zone CIPRES, résulte généralement de l'augmentation du nombre de bénéficiaires et de l'évolution du **risque de longévité**.

c) La politique de placement des ressources

La politique de placement des ressources issues de la sécurité sociale est très importante pour assurer la viabilité du régime sur le long terme. À cet effet, l'Association internationale de la sécurité sociale (AISS) présente dans son rapport technique n°13 les principes directeurs pour le placement des fonds des régimes de sécurité sociale. Pour mener une politique de placement efficace, les régimes de retraite doivent disposer d'un comité de placement supervisé par des administrateurs indépendants, dont le but sera de définir clairement les tâches d'exécution et de supervision. Autrement dit, Ils doivent établir au sein de l'organisme une institution de placement interne ou faire appel à des sociétés extérieures ayant une expertise dans la gestion d'actifs.

Les décisions d'investissement doivent être guidées par deux objectifs fondamentaux : (i) **la sécurité** : les placements devraient aider le régime à remplir ses engagements de la façon la plus économique ; (ii) **le rendement** : les placements devraient avoir un rendement aussi élevé que possible dans les limites du risque acceptable.

Elles doivent aussi tenir compte des règles prudentielles de la réglementation locale. En zone CIPRES, les régimes de retraite ne disposent pas d'une politique de placement efficace. Plusieurs études actuarielles menées (par le bureau international du travail et des cabinets internationaux) sur les caisses de retraite de la Côte d'Ivoire, du Sénégal et ⁴ du Cameroun révèlent que le portefeuille de placement était constitué majoritairement de reconnaissance de dettes de l'État qui ne rapportait pas de revenus. Cette situation est fréquente pour les régimes de retraite du secteur public n'ayant pas une autonomie financière (CGRAE, FNR Sénégal etc.). Dans ces régimes, l'État garantit le financement du déficit lorsqu'il survient.

En règle générale, les décisions de placement ou d'utilisation des fonds dans les pays de la CIPRES sont souvent guidées par des impératifs politiques et non par une analyse de rentabilité comme le recommande l'AISS. De plus, les marchés financiers de l'Afrique subsaharienne francophone ne sont pas suffisamment liquides et n'offrent pas encore des opportunités de placement à des taux de rendement significatifs. Par exemple, les taux de rendements des placements en zone CIMA étaient respectivement de 3,97 %, 4,78 % et 4,55 % en 2003, 2004 et 2005.

En pratique, les ressources des systèmes de retraite de la zone CIPRES sont principalement placées dans **les obligations d'État, l'immobilier et les dépôts à terme (DAT)**. Le portefeuille des régimes de retraite publics est composé des obligations d'État et des DAT. Par contre, celui du secteur privé se compose **des obligations d'État, de l'immobilier et des DAT**, en des proportions approximatives respectives de 15 %, 12 %, et 46 %.

Par exemple, au Niger, l'étude actuarielle de 2002 montre que le portefeuille de la CNSS était composé des dépôts au Trésor général (58 %) pour un montant de 41,27 milliards FCFA, des créances certaines et incertaines (22 %) pour un montant de 15,52 milliards FCFA et des actifs qui ne rapportent aucun intérêt comme les créances et les dépôts dans des comptes de banque (*cf. Niger, BIT [2002]*).

4. L'explication à cette situation est que les bénéficiaires du FNR croissent plus vite que les cotisants. Le nombre de bénéficiaires a été multiplié par 2,2 sur la période 1997-2011, soit 13.266 personnes (*cf. NDIAYE et DIABATE [2012]*) : Le rapport de gestion de l'IPRES révèle que les bénéficiaires ont progressé de 1,4% pour le RG et de 7,7 % pour le RCC sur la période 2009 - 2010.

d) L'analyse des réformes

Face aux déficits techniques des caisses de retraite observés pendant plusieurs années sur certaines branches d'une part et aux défis démographiques auxquels le continent africain sera confronté ces vingt prochaines années d'autre part, les gouvernements de certains pays de la zone CIPRES ont entamé un ensemble de réformes paramétriques, non paramétriques, juridiques et institutionnelles visant à rétablir l'équilibre des régimes.

Dans les pays de la zone CIPRES, les réformes observées mettent surtout l'accent sur le financement du régime. Ainsi, une attention particulière est accordée à l'optimisation de la politique de recouvrement des cotisations, contraignant les entreprises à déclarer leurs employés, sous peine de se voir refuser un marché de l'État (*cf.* Garanke [2006]).

En Côte d'Ivoire, le gouvernement ivoirien a adopté en 2012 sur la base des recommandations d'une étude actuarielle qu'il a fait réaliser, un ensemble de textes législatifs qui entérine la réforme de la branche "vieillesse". Cette dernière a abouti à des réformes paramétrique, non paramétrique, juridique et institutionnelle. Nous présentons ci-dessous les réformes paramétriques :

Paramètres (Secteur public)	Avant la réforme	Après la réforme	Paramètres (Secteur privé)	Avant la réforme	Après la réforme
Age de la retraite	55 ans	60 ans	Age de la retraite	55 ans	60 ans
Taux d'annuité	2%	1,75%	Taux d'annuité	1,33% avant le 01/01/2000 et 1,7% après cette date.	1,33% avant le 01/01/2000 et 1,7% après cette date.
Cotisation salariale	6%	8,33%	Cotisation salariale	3,20%	6,30%
Cotisation patronale	12%	16,67%	Cotisation patronale	4,80%	7,70%

FIGURE 1.1 – Évolution des paramètres des régimes : source Florent G et all

A la CGRAE, la pension est calculée comme le produit des éléments suivants (i) N = Nombre d'années de services effectifs ; (ii) I = Indice de liquidation ; (iii) V = Valeur du point à la retraite ; (iv) et T = Le taux de liquidation ou d'annuité. Par contre, à la CNPS, le montant de la pension de retraite est calculé en pourcentage des salaires soumis à cotisation. Il est égal au produit du salaire moyen, des **15 meilleures années** de la carrière par le taux de remplacement. Le taux de remplacement est égal au produit du taux de rendement annuel par la durée de la carrière. Cependant le taux de remplacement ne peut excéder 50 %. **Au Sénégal**, la réforme du système de retraite a lieu en 2002 avec l'assistance technique de la banque mondiale dont le but était d'évaluer les régimes de pension obligatoires à la fois pour les travailleurs du secteur privé et du secteur public, et de proposer des réformes en vue d'assurer l'allocation de pensions adéquates aux bénéficiaires des différents régimes (*cf.* Ndiaye et Diabate [2012]). En ce qui concerne le FNR, les réformes étaient principalement d'ordre paramétrique que l'on peut résumer dans le tableau ci-dessous (*cf.* Annycke [2008]) :

Paramètres	Jusqu'en 2001	À partir de 2002
Age de la retraite	55 ans (nés en 1946 ou avant)	60 ans (nés en 1947 ou après).
Taux d'annuité	2%	1.8%
Cotisation salariale	15%	12%
Cotisation patronale	20%	23%

FIGURE 1.2 – Évolution des paramètres des régimes : source Florent G et all

D'autres réformes sont entrées en vigueur en 2006, y compris l'indexation des prestations sur l'inflation (uniquement pour l'IPRES) et l'ouverture d'un compte notionnel pour les régimes actuels à prestations définies. Afin de renforcer la gouvernance du système, le gouvernement a également créé un Comité de supervision intérimaire chargé du contrôle du Fonds de sécurité sociale et un organisme de surveillance des processus de financement. Grâce à ces mesures, le déficit du Fonds de sécurité sociale a été résorbé dès le début de 2008 (*cf.* Banque mondiale [2012]). Depuis 2010, la situation financière du FNR commence à se détériorer malgré la réforme de 2002 à cause de la générosité du régime (taux de remplacement avoisinant 99.9%). Cette information découle des études actuarielles menées en 2012 pour la période 2010-2050 (*cf.* Ndiaye et Diabate [2012]).

Au Cameroun, la réforme du système de retraite a démarré à partir de la déclaration gouvernementale de décembre 1999, issue des constats et recommandations de l'audit SATEC⁵ de mai 1990 financé par la banque mondiale. Ce projet de réforme (en cours) permettra au Cameroun de se conformer aux règles de l'OIT⁶. Il porte principalement sur la structuration du régime de retraite formel, la mise en place d'un régime de retraite complémentaire et l'extension de la couverture « retraite » aux travailleurs non-salariés (*cf.* Fouomene [2013]).

1.2 Présentation des différents éléments actuariels

Les différents paramètres utilisés sont les suivants :

1.2.1 Choix du salaire

Choix de l'un des salaires suivant :

- Prendre le salaire jusqu'à un certain plafond
- Prendre une certaine tranche
- Prendre un pourcentage du salaire

5. le groupe SATEC est un courtier d'assurance Français exerçant dans plusieurs domaines notamment celui de l'audit.

6. qui signifie : organisation international du travail. C'est un organisme spécialisé de l'ONU chargé au niveau mondial d'élaborer les normes internationales du travail.

- Prendre la moyenne de tous les salaires obtenus au cours de ses différents emplois
- Prendre une moyenne indexée des salaires
- Prendre la moyenne de salaires des n dernières années
- Salaire final de l'individu

1.2.2 Choix de la durée de carrière (le rapport entre la durée de carrière prise et la durée maximale de carrière).

Choix de l'une des durées suivantes :

- différence entre l'âge de retraite et l'âge d'affiliation
- différence entre l'âge de la retraite et l'âge d'entrée en service
- prise en compte d'une partie des années de services.

1.2.3 Éléments soustractifs (prendre en compte l'appartenance d'un individu à un ou aux deux piliers)

Remarque : Il existe une possibilité de verser une rente(RR) ou un capital(CR) et les deux sont donnés par la relation :

$$RR = CR \frac{1}{a} \quad (1.1)$$

où a est le montant de la rente à un moment donné.

Description des paramètres du régime à contribution définie dans le choix de l'un des paramètres suivants :

- Un pourcentage du salaire
- Un pourcentage du salaire plafonné
- Une cotisation par tranche
- Une cotisation croissante

1.2.4 Relation entre prestation et cotisation

La relation entre prestation et cotisation est la suivante :

- La communauté de risque (Sous ensemble de la population rendu solidaire dans le financement de la retraite. Elle est constituée de l'ensemble des cotisants et bénéficiaires en un même instant).

Cette communauté de risque engendre deux classes de méthodes extrêmes :

1. La capitalisation individuelle
2. La répartition pure

En plus de ces deux méthodes extrêmes, il existe 3 familles de méthodes intermédiaires qui sont : la capitalisation collective et non individuelle ou répartition étalée et non plus immédiate.

- La relation d'équivalence actuarielle

Elle est donnée par la relation qui stipule l'égalité entre les valeurs actuelles des cotisations pour la communauté et les valeurs actuelles des prestations pour la communauté.

1.2.5 Méthodes de financement d'une prestation : la répartition et la capitalisation

Les deux méthodes de financement d'un régime de retraite sont :

- La répartition : les cotisations payées par les actifs sont utilisées pour payer les prestations des retraités. On ne constitue aucune réserve sauf celle pour faire face à des changements démographiques.
- La capitalisation : les cotisations versées par les actifs sont mises en réserve pour pouvoir payer leur retraite.

Il existe d'autres méthodes de financement combinant diverses formes de capitalisation et répartition : la capitalisation collective et non individuelle ou la répartition étalée et non plus immédiate.

1.2.6 Véhicule de financement ou support financier d'un régime de retraite

Les différents véhicules de financement d'un régime de retraite sont :

- La réserve interne
- La réserve externe
- Les fonds sectoriels ou multi-employeurs
- Les assurances collectives ou de groupe.

1.2.7 Calcul des éléments de démographie

a) Diagramme de Lexis

Il permet de représenter dans un plan à deux dimensions la variable temps (t) et âge (x). Dans ce graphe, un individu est représenté par :

- un point d'entrée (x_0, t_0) : x_0 peut être l'âge d'entrée en service ;
- un point de sortie $(x_n, t_0 + x_n - x_0)$: x_n peut être l'âge de décès ou de retraite ;
- une ligne de vie qui est la diagonale rejoignant les 2 précédents points.

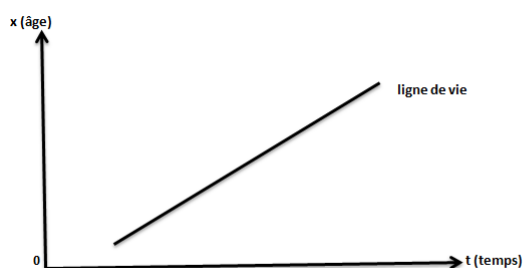


FIGURE 1.3 – Représentation du diagramme de vie

b) Modèle discret de population

Modèle décrivant l'effectif d'une population comme fonction des variables x et t .
Les deux variables discrètes avec pour valeurs possible : $X = \{x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \dots, x_0 + n\}$,
 $T = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_0 + n\}$ où n représente le nombre d'années passées en service.
Une fonction de population est une fonction donnant à la date t l'effectif d'une population d'âge x , notée : $\{L(x, t), x \in X, t \in T\}$.
L'effectif total est donné par :

$$N(x) = \sum_{x=x_0}^{x_n} L(x, t). \quad (1.2)$$

Nous essayons de comprendre la dynamique de population à partir de deux phénomènes :

- Les entrées dans la population. On notera $\{E(x, t), x \in X, t \in T\}$ la fonction donnant à la date t l'effectif des nouveaux entrants à l'âge x
- Les sorties de la population.

La probabilité pour un individu d'âge x au temps t d'être en vie à l'âge $x + h$ est notée : $P_t(x, x + h)$ avec $x \in X$ et $t \in T$.

La fonction de population et ces fonctions précédentes sont reliées par la relation :

$$L(x + h, t + h) = L(x, t)P_t(x, x + h) + \sum_{k=1}^h E(x + k, t + k)P_{t+k}(x + k, x + h). \quad (1.3)$$

Cette équation stipule que pour être présent dans h années dans la population, il faudrait y être initialement et y avoir survécu, soit y être entré entre temps et avoir également survécu.

c) Ratios Démographiques

Traditionnellement, la population globale est partitionnée en 3 sous groupes d'âge.

- Les jeunes : $x \in [0, x_1]$ où x_1 est l'âge après un an de service,
- Les actifs : $x \in [x_1, x_r]$ où x_r est l'âge de la retraite,
- Les retraités : $x \in [x_r, w]$ avec w étant l'âge limite .

i) Définition et calcul des ratios

Les différents ratios utiles dans le calcul des prestations sont les suivants :

- Quotient de vieillesse :
Rapport entre l'effectif des retraités et l'effectif des actifs. Il permet de mesurer la dépendance des retraités par rapport aux actifs.
- Taux de support potentiel :
Il représente l'inverse du quotient de vieillesse qui permet de mesurer le nombre d'actifs par retraité.
- Coefficient d'intensité de vieillissement :
Elle mesure parmi les retraités la proportion au delà d'un certain âge.
- Quotient de jeunesse :
C'est le rapport entre l'effectif des jeunes et l'effectif des actifs .

- Coefficient de dépendance :
C'est la somme des quotients de vieillesse et du quotient de jeunesse. Il mesure le degré global de dépendance de la population inactive.

ii) Étude d'un cas particulier : population à l'état stationnaire

On distingue l'état stationnaire relatif et l'état stationnaire absolu.

Une population est à l'état stationnaire relatif si sa fonction de population satisfait au critère de séparation c'est-à-dire :

$$L(x, t) = \varphi(t)N(x).$$

où φ est une fonction unique du temps et N est une fonction unique de l'âge.

Une population est à l'état stationnaire absolu si sa fonction de population est indépendante du temps c'est à dire :

$$L(x, t) = N(x).$$

iii) Construction

Elle est basée sur deux hypothèses :

- Les entrées dans la population se font à un âge uniforme noté x_0 .

- Les probabilités de survie sont indépendantes du temps.

Dans ce cas la fonction de population est :

$$L(x, t) = E(t - (x - x_0))P(x_0, x) \tag{1.4}$$

avec $E(t - (x - x_0))$ étant la fonction d'entrée.

Remarque :

- La fonction population linéaire n'est pas séparable.
- La fonction population exponentielle est séparable.
- Les ratios sont constants si la fonction population est à l'état stationnaire absolu.

Dans ce chapitre, nous avons présenté le fonctionnement des régimes de retraite dans les pays de la zone CIPRES et les différents paramètres utilisés dans le calcul des prestations. Pour cette présentation des régimes de la zone CIPRES, nous avons fait une étude des régimes de retraite de trois pays de cette zone qui sont : le Cameroun, la Côte d'Ivoire et le Sénégal. Dans le prochain chapitre, nous ferons une présentation des systèmes généraux de financement

Chapitre 2

SYSTEMES GENERAUX DE FINANCEMENT

Dans ce chapitre, nous présentons l'équation d'équilibre générale actuarielle d'un régime de retraite et nous classons les différentes méthodes de financement en prestation définie.

2.0.1 Équation d'équilibre générale actuarielle d'un régime de retraite

a) Équation générale

L'équation d'équilibre générale actuarielle d'un régime de retraite est : $\sum_{\text{individus}} \text{Valeurs actuelles des contributions} + \text{réserve initiale} = \sum_{\text{individus}} \text{Valeurs actuelles des prestations}$.

L'on adoptera les notations suivantes :

- La réserve initiale notée $V(0)$ ou V_0 .
- La réserve globale d'un régime de retraite est :

$$V(t) = V_r(t) + V_a(t),$$

avec $V_r(t)$ étant la réserve nécessaire pour financer en totalité les retraites des individus déjà pensionnés en t et $V_a(t)$ est la réserve des actifs, c'est à dire la différence entre la réserve totale et celle des retraités.

- Le taux de cotisation moyen du régime à l'instant s est noté $\pi(s)$.
- Le salaire moyen à l'instant s de la population active est noté $\bar{s}(s)$.
- L'effectif de la population présente à l'instant s est $L(x, s)$,
- L'âge de la retraite est x_r .
- La masse salariale totale à l'instant s est notée

$$S(s) = \sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, s) \bar{s}(s).$$

- La prestation des pensions moyennes payées à l'instant s est noté $\bar{p}(s)$.

- La prestation totale payée à l'instant s est notée

$$B(s) = \sum_{x=x_1}^{\omega} L(x, s) \bar{p}(s).$$

- Le taux de capitalisation des réserves sur une période est noté i .
- L'âge après un ans de service est x_1 .
- L'âge limite est w .

b) Expression des réserves

L'expression des réserves est la suivante :

- La réserve nécessaire pour financer en totalité les retraites des individus déjà pensionnés en t est :

$$V_r(t) = \sum_{x=x_1}^{\omega} \sum_{s=t}^{t+\omega+s} L(x + s - t, s) \bar{p}(s) (1 + i)^{(t-s)}.$$

- La réserve collective sous forme rétrospective est :

$$V(t) = V(0)(1 + i)^t + \sum_{s=0}^{t-1} (\pi(s)S(s) - B(s))(1 + i)^{t-s}.$$

- La formule de récurrence des réserves est :

$$V(t + 1) = V(t) + (\pi(t)S(t) - B(t))(1 + i).$$

- La forme récurrente est :

$$\Delta V(t + 1) = V(t + 1) - V(t) = iV(t) + (\pi(t)S(t) - B(t))(1 + i).$$

- La valeur prospective des réserves est obtenue par différence entre les Valeurs actuelles des prestations futures et les Valeurs actuelles des contributions futures :

$$\sum_{s=t}^{\infty} (B(s)(1 + i)^{-(s-t)}) - \sum_{s=t}^{\infty} (\pi(s)S(s))(1 + i)^{-(s-t)}.$$

L'équilibre actuariel s'exprime en égalisant à tout instant la réserves rétrospectives (ce qu'on a) et la réserves prospectives (ce qu'on devrait avoir) :

$$V(0)(1+i)^t + \sum_{s=0}^{t-1} (\pi(s)S(s) - B(s))(1+i)^{t-s} = \sum_{s=t}^{\infty} (B(s)(1+i)^{-(s-t)}) - \sum_{s=t}^{\infty} (\pi(s)S(s))(1+i)^{-(s-t)}.$$

Remarque

- Dans un régime à prestations définies, le vecteur B est fixé et une méthode de financement est de déterminer π ,
- Dans un régime à contributions définies, le vecteur π est fixé et les prestations octroyées doivent vérifier l'équation.

- En REPARTITION PURE, on a $V(t) = 0 \forall t$, alors d'après la relation de récurrence, $\pi(s)S(s) - B(s) = 0$.
- Dans un régime à prestations définies, le taux de cotisation est : $\pi(s) = \frac{B(s)}{S(s)}$.
- Dans un régime à cotisations définies, les prestations sont : $B(s) = \pi(s)S(s)$ et $\bar{p}(t) = \frac{\pi(s)S(s)}{\sum_{x=x_1}^{\omega} L(x,t)}$.
- En INITIAL FUNDING, on a $\pi(t) = 0 \forall t$ alors, la réserve initiale doit être suffisante pour payer les prestations futures du régime c'est à dire :

$$V(0) = \sum_{s=0}^{\infty} (B(s))(1+i)^{-s} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} L(x,s)\bar{p}(s)(1+i)^{-s}. \quad (2.1)$$

- La PRIME MOYENNE GENERALE : en partant d'une réserve nulle, on doit avoir un taux de cotisation constant dans le temps c'est à dire $\pi(t) = \pi \forall t$

Remarque

- Tout vecteur π satisfaisant à la relation d'équilibre telle que les réserves engendrées sont comprises à tout instant entre les deux premières méthodes est appelé méthode de financement admissible
- Ces méthodes sont rejetées car elles peuvent conduire à certains moments à une réserve négative. On peut essayer de remédier à ce problème en considérant que rien n'est payé à un instant T .

2.0.2 Classification des principales méthodes de financement en prestation définie : Utilisation de la relation d'équivalence actuarielle

a) La répartition pure

La répartition pure est basée sur le principe d'équivalence à tout instant entre d'une part, les cotisations versées par les actifs et, d'autre part, les prestations de pensions versées à tous les retraités. De plus il est important de noter que dans cette méthode la réserve globale ou collective est considérée nulle, la réserve des actifs doit pour cela être l'opposé de celle des retraités ($V(t) = 0$ et $V_a(t) = -V_r(t) < 0$). On a :

- La cotisation récoltées en t est : $\bar{s}(t)\pi_R(t) \sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x,t)$ avec $\pi_R(t)$ étant le taux de cotisation en répartition pure,
- La dépense de pension en t : $\bar{p}(t) \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x,t)$

En égalisant les deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_R(t) &= \frac{\bar{p}(t) \cdot \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x,t)}{\bar{s}(t) \cdot \sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x,t)} \\ &= tr(t) \cdot QV(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $tr(t)$ étant un paramètre socio-économique et $QV(t)$ le quotient de vieillesse.

b) La répartition étalée

La répartition étalée se base sur les mêmes principes que la répartition, mais plutôt que d'égaliser recettes et dépenses sur une période, on en égalise les valeurs actuelles sur

plusieurs périodes on aura :

Valeur actuelle des cotisations des actifs perçues entre t et $t + T$ = Valeur actuelle des pensions payées aux retraités entre t et $t + T$.

Plus formellement on a :

- valeur actuelle des cotisations sur $[t, t+T]$: $\pi_{Re}(t) \sum_{s=0}^T \bar{s}(t+s) \sum_{x=x_r}^{x_r-1} L(x, t+s).V^s$
où V^s est le facteur d'actualisation avec $V^s = \frac{1}{1+i}$
 - valeur actuelle des dépenses sur $[t, t+T]$: $\sum_{s=0}^T \bar{p}(t+s) \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x, t+s).V^s$
 - application du principe d'équivalence :

$$\pi_{Re}(t) = \frac{\sum_{s=0}^T \bar{p}(t+s) \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x, t+s).V^s}{\sum_{s=0}^T \bar{s}(t+s) \sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t+s).V^s}.$$
- Pour une population stationnaire on a :

$$\begin{aligned} \pi_{Re}(t) &= \frac{\sum_{x=x_r}^{\omega} N(x) \sum_{s=0}^T \bar{p}(t+s). \varphi(t+s).V^s}{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} N(x) \sum_{s=0}^T \bar{s}(t+s). \varphi(t+s).V^s} \\ &= \bar{tr}(t).QV(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec $\bar{tr}(t)$ étant le taux de remplacement moyen pondéré entre t et $t + T$ et QV le quotient de vieillesse.

Remarque : L'inconvénient de cette méthode est qu'elle peut aboutir à des réserves négatives.

c) La méthode de répartition des capitaux de couverture

Elle est basée sur le principe d'équivalence à tout instant entre d'une part, les cotisations versées par les actifs sur une période et, d'autre part, les capitaux constitutifs permettant de financer jusqu'au décès les pensions de la génération partant à la retraite à cette période. De plus, le réserve globale doit être égale à celle des retraités et celle des actifs étant nulle ($V(t) = V_r(t)$ et $V_a(t) = 0$). On a :

- les cotisations récoltées en t est : $s(t)\pi_{cc}(t) \sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t)$ avec $\pi_{cc}(t)$ étant le taux de cotisation en répartition des capitaux de couverture.
- les dépenses capitaux constitutifs en t : $p(t) \sum_{x=x_1}^{\omega} L(x, t+x-x_r).p(x, t+x-x_r).V^{(x-x_r)}$
- l'application du principe d'équivalence :

D'après ces deux égalités, on obtient :

$$\pi_{cc}(t) = \frac{p(t) \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x, t+x-x_r). \bar{p}(x, t+x-x_r).V^{(x-x_r)}}{\bar{s}(t) \sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t)} \quad (2.4)$$

On supposera ici que la population est à l'état stationnaire absolu et que les retraites sont indexées en progression géométrique de taux j . On obtient :

$$\pi_{cc}(t) = \frac{N(X_r)}{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} N(x)}. \bar{tr}(t).a_{x_r}. \quad (2.5)$$

où $a_{x_r} = \sum_{x=x_r}^{\infty} p(x_r; x)(1+j)^{(x-x_r)}.V^{(x-x_r)}$ le prix de rente indexé.

Remarque

Comme en répartition, la méthode des capitaux de couverture peut être étalée sur plusieurs années donnant naissance à la répartition étalée des capitaux de couverture.

d) La capitalisation individuelle

Chaque actif finance durant sa vie active, sa propre retraite. Il y'a dans ce cas équivalence individu par individu entre la valeur actuelle des cotisations versées durant l'activité et la valeur actuelle des pensions payées après retraite. De plus, la réserve totale doit être supérieure à celle des retraités ($V(t) > V_r(t)$ et $V_a(t) > 0$). On a :

- la valeur actuelle des cotisations est :

$$\sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{s}(t+x-x_1) \cdot \pi_c(t, x) \cdot V^{(x-x_r)}$$
avec $\pi_c(t, x)$ le taux de cotisation à appliquer à l'âge x au temps $t+x-x_1$, x_1 l'âge d'entrée en service et x_1 l'âge de la retraite ;
- la valeur actuelle des dépenses est :

$$\sum_{x=x_1}^{\omega} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{p}(x, t+x-x_1) \cdot V^{(x-x_1)},$$
- application du principe d'équivalence :

$$\sum_{x=x_r}^{x_r-1} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{s}(t+x-x_1) \cdot \pi_c(t, x) \cdot V^{(x-x_r)} = \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{p}(x, t+x-x_1) \cdot V^{(x-x_1)}.$$

$\{\pi_c(t, x_1), \pi_c(t, x_1+1), \dots, \pi_c(t, x_r-1)\}$ doit satisfaire à la relation d'équivalence .

Il existe donc une infinité de méthodes de capitalisation individuelle.

En considérant un taux de cotisation constant , c'est à dire :

$\pi_c(t, x_1), \pi_c(t, x_1+1), \dots, \pi_c(t, x_r-1) = \pi_c(t)$ on aura :

$$\pi_c(t) = \frac{\sum_{x=x_1}^{\omega} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{p}(x, t+x-x_1) \cdot V^{(x-x_1)}}{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} L(x, t+x-x_1) \cdot \bar{s}(t+x-x_1) \cdot V^{(x-x_1)}}$$

Si l'on suppose qu'il s'agit d'une population à l'état stationnaire absolu, et que les retraites sont indexées en progression géométrique de taux j et que les salaires sont indexés en progression géométrique de taux k (retraites et salaires pouvant être indexés à des taux différents), alors on aura :

$$\pi_c(t) = \frac{p(t)}{s(t)} \cdot ((1+g)^{(x-x_1)} \cdot {}_{x-x_1}E_{x_1}) \cdot \left(\frac{a_{x_r}^j}{a_{x_1, x_r-x_1}^k} \right).$$

Dans ce cas, le taux de cotisation est le produit des 3 éléments suivants :

- un taux de remplacement $\frac{\bar{p}(t)}{\bar{s}(t)}$,
- un différé entre l'âge d'entrée en service et l'âge de la retraite tenant compte du taux d'indexation g ,
- le rapport entre 2 annuités.

2.0.3 Capitalisation ou Repartition : le Paradoxe de Samuelson

On se propose ici de trouver une relation d'équivalence théorique entre un système de répartition pure et un système de capitalisation, on voudrait obtenir des conditions permettant d'assurer la suprématie d'une des deux méthodes de financement. Le problème qui se pose ici est celui des phénomènes dits de première et de dernière génération.

- Le phénomène de première génération est celui se présentant à la création ex nihilo d'un régime de retraite ; dans ce cas, l'effectif initial de retraités, bien que n'ayant jamais cotisé, pourra recevoir directement en répartition une retraite pleine : c'est le cadeau de première génération. Au contraire, en capitalisation, à défaut d'avoir cotisé, ces retraités "initiaux" n'auront droit à aucune prestation.

- Le phénomène de dernière génération se présente lorsque le financement du régime s'arrête définitivement ; dans ce cas, les actifs ayant cotisé précédemment ne recevront plus aucune prestation en répartition alors qu'en capitalisation ils récupéreront une retraite correspondant aux sommes épargnées précédemment.

Samuelson considère que le régime de retraite est stationnaire c'est à dire que le régime de retraite est supposé exister depuis suffisamment longtemps et n'est pas voué à une disparition prochaine. Il montre que les prestations générées en répartition et en capitalisation sont de la même forme. Plus formellement, il se donne comme fonction de population la fonction $L(x, t) = A. \exp^{\rho(t)}. \exp^{\rho(x-x_1)}. p(x_1, x)$. Il obtient les différentes prestations suivantes :

- prestation obtenue en répartition :

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \tau. \bar{s}(t). \frac{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} \exp^{-\rho(x-x_1)}. p(x_1, x)}{\sum_{x=x_r}^{\omega} \exp^{-\rho(x-x_r)}. p(x_1, x)} \\ &= \tau. \bar{s}(t). \varphi(\rho) \end{aligned} \quad (2.6)$$

τ étant le taux de cotisation sur le salaire.

- prestation obtenue en capitalisation :

$$\begin{aligned} P_c(t) &= \tau. \bar{s}(t). \frac{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} \exp^{-(\delta-\sigma)(x-x_1)}. p(x_1, x)}{\sum_{x=x_r}^{\omega} \exp^{-(\delta-\sigma)(x-x_1)}. p(x_1, x)} \\ &= \tau. \bar{s}(t). \varphi(\delta - \sigma) \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec δ le taux d'intérêt, σ le taux de croissance des salaires.

Elles sont donc liées à une fonction φ nous avons :

$$\varphi(\zeta) = \frac{\sum_{x=x_1}^{x_r-1} \exp^{-\zeta(x-x_1)}. p(x_1, x)}{\sum_{x=x_r}^{\omega} \exp^{-\zeta(x-x_1)}. p(x_1, x)} \quad (2.8)$$

Samuelson étudie le comportement de cette fonction et montre qu'elle est monotone et décroissante.

Il en conclut que la répartition sert des prestations supérieures à celles de la capitalisation si le taux d'accroissement de la population est supérieur à la différence entre le taux d'intérêt et le taux de croissance des salaires et que dans ce cas, le cadeau de première génération de la répartition se \ll *propage* \gg de génération en génération, aussi grâce à la dynamique importante de la démographie, chaque génération reçoit plus en prestations que la valeur capitalisée de ses cotisations.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes généraux de financement que sont : la répartition pure, la répartition étalée, la méthode de répartition des capitaux de couverture et la capitalisation individuelle. Dans le chapitre suivant, nous ferons une présentation plus approfondie de la méthode de capitalisation.

Chapitre 3

PRINCIPE GENERAL DE LA CAPITALISATION

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes de capitalisation individuelle et collective.

3.1 Methodologie générale de la capitalisation

3.1.1 Caractéristique et classification des regimes par capitalisation

Il existe une infinité de méthodes de capitalisation, les critères permettant de les caractériser sont les suivantes :

1. la vitesse de formation des réserves
 - la méthode « *initial funding* » : versement d'une prime unique à l'année d'affiliation finançant la totalité de l'engagement.
 - la méthode « *late funding* » : financement par versements périodiques de la prime.
2. le caractère individuel ou collectif de la méthode.
 - capitalisation individuelle : méthode consistant à individualiser la réserve globale. La réserve globale est :
 $V(t) = \sum_i V^i(t)$ avec $V^i(t)$ étant la réserve individuelle de l'individu i et sa valeur prospective est :

$$V^i(t) = \sum_{s=t}^{\infty} (B(s)^i (1+i)^{-(s-t)}) - \sum_{s=t}^{\infty} (\pi^i(s) S^i(s)) (1+i)^{-(s-t)},$$

où $B^i(s)$ est la prestation probabilisée payée à l'individu i à l'instant s .

$S^i(s)$ est le salaire probabilisé de l'individu i à l'instant s .

$\pi^i(s)$ est le taux de cotisation de l'individu i à l'instant s . Ici, à chaque affilié correspond un équilibre actuariel.

- capitalisation collective : méthodes dans lesquelles les réserves globales ne sont pas individualisables et servent globalement pour l'ensemble du collectif. La

valeur prospective de la réserve est :

$$\sum_{s=t}^{\infty} (B(s)(1+i)^{-(s-t)}) - \sum_{s=t}^{\infty} (\pi(s)S(s))(1+i)^{-(s-t)}.$$

3.1.2 Fonction de base en capitalisation

Toute méthode de capitalisation engendre deux mécanismes qu'il convient de quantifier :

- un mécanisme de fixation des charges annuelles que sont les cotisations à verser.
- un mécanisme de formation progressive des réserves et tout particulièrement des réserves d'actifs. Ce phénomène va engendrer à la fois un phénomène d'actifs et un phénomène de passifs.

Nous définissons ci-dessous les fonctions de base en capitalisation.

1. *Accrued Liability* (Passif Actuariel) : provision globale représentant la dette vis-à-vis des affiliés ; il s'agit donc d'un élément bilantaire de passif. Nous noterons $AL(t)$ sa valeur à l'instant t .
2. *Assets / Fund* (Actifs Représentatifs) : valeur représentative des actifs en support du passif actuariel ; il s'agit donc d'un élément bilantaire d'actif. Nous noterons $F(t)$ la valeur à l'instant t .
3. *Normal Cost* (coût Normal) : cotisation périodique à verser selon des conditions standards générées par la méthode choisie. Nous noterons $NC(t)$ la valeur à l'instant t .
4. *Unfunded Accrued Liability* (Passif Non Financé) : partie non nancée du passif actuariel ; c'est à tout instant la difference entre $\ll AccruedLiability \gg$ et $\ll Assets \gg$. Nous noterons $UAL(t)$ sa valeur à l'instant t . On a :

$$UAL(t) = A(t) - F(t)$$

5. *Adjustment* (cotisation d'ajustement) : complément de cotisation par rapport au normal cost, en vue de combler le passif non financé. Nous noterons $ADJ(t)$ la valeur à l'instant t , elle peut être unique ou étalée dans le temps c'est à dire :
 - ajustement unique :

$$ADJ(t) = UAL(t)$$

- ajustement étalé :

$$ADJ(t) = \frac{UAL(t)}{\ddot{a}}$$

où \ddot{a} est une annuité financière ou viagère sur une durée fixée.

6. *Global cost* (coût global) : cotisations totales à verser résultant du normal cost et de la cotisation d'ajustement. Nous noterons $C(t)$ la valeur à l'instant t . On a :

$$C(t) = NC(t) + ADJ(t)$$

Remarque

- Les éléments « *AccruedLiability* » et « *NormalCost* » sont typiquement des éléments de passif, définis à partir d'hypothèses actuarielles ; ces deux notions sont liées par la relation prospective des réserves :

$$\sum_{s=t} \sum_i (B^i(s)(1+i)^{-(s-t)}) - \sum_s (NC(s)(1+i)^{-(s-t)}) = PVFB(t) - PVENC(t)$$

PVFB(t) = present value of future benefits = valeur actuelle des prestations futures.

PVENC(t) = present value of future normal costs = valeur actuelle des coûts normaux futurs.

- Dans une méthode de capitalisation individuelle, ces fonctions de base sont individualisées par affilié.

3.2 Methodes de capitalisation individuelle

3.2.1 Principe généraux de la capitalisation individuelle

On se placera ici dans le cadre d'un engagement de retraite à prestations définies, organisé au sein d'un second pilier et financé par capitalisation individuelle.

Il existe de nombreuses méthodes de capitalisation individuelle, chacune étant caractérisée par son propre rythme de constitution des provisions nécessaires et donc une répartition différente dans le temps du financement. Trois critères permettent de générer les principales familles de capitalisation individuelle :

1. premier critère : méthodes avec ou sans projection
 - méthodes sans projection : méthodes où on ne tient compte que des données financières connues au moment du calcul (salaires, plafonds,...).
 - méthodes avec projection : méthodes où on tient compte de projections des données financières à l'âge de la retraite.
2. second critère :
 - méthodes en primes uniques successives (UNIT CREDIT METHOD) : méthodes visant à répartir l'engagement de pension en unités égales à financer chaque année en primes uniques (financement annuel intégral de portions fixées des prestations). La contrainte porte donc sur le passif actuariel ; le normal cost en résultera.
 - méthodes en primes constantes (LEVEL PREMIUM METHOD) : méthodes visant à financer l'engagement par des versements annuels constants ou stables.
3. troisième critère : lorsqu'à l'affiliation au plan le régime reconnaît des services prestés antérieurement (par exemple depuis l'entrée en service), certaines méthodes financent de façon séparée ses services passés initiaux.

Le tableau suivant regroupe les différentes méthodes :

Type de prime	non projecté	projecté
Prime unique	UNIT CREDIT COST(UC)	PROJECTED UNIT CREDIT COST(PUC)
Prime constante	INDIVIDUAL LEVEL PRE-MUIM(ILP)	PROJECTED INDIVIDUAL LEVEL PRE-MUIM(ILP)
Prime contante avec séparation des services passés initiaux	INDIVIDUAL WITH SUPPLEMENTAL LIABILITIES(ISL) ENTRY AGE NORMAL(EA)	PROJECTED INDIVIDUAL WITH SUPPLEMENTAL LIABILITIES(PISL) PROJECTED ENTRY AGE NORMAL(PEA)

3.2.2 Présentation des différentes méthodes de capitalisation individuelle

Pour comparer ces méthodes, nous considérons un regime à octroyer pour une carrière de 40 ans, une pension correspondant à 50% du dernier salaire d'activité, payable à partir de 60 ans . Pour chaque individu, la réserve à 60 ans est :

$$V_{60} = \frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot S(60) \cdot a_{60}$$

avec :

- N durée de carrière prise en compte($N \leq 40$) ;
- $S(60)$ dernier salaire d'activité ;
- a_{60} prix de la rente à 60 ans donné par :

$$a_{60} = \sum_{x=60}^{\omega} \frac{l_x}{l_{60}} \frac{(1+k)^{x-60}}{(1+i)^{x-60}}$$

ou l_x est donnée par la table de mortalité, i le taux d'actualisation, k le taux d'indexation de la rente.

Dans la suite, nous procédons à la comparaison des méthodes précédemment citées :

1. UNIT CREDIT COST(UC)

On considère un affilié entré en service et affilié en $t = 0$ à l'âge x_0 .

L'objectif de la méthode est, compte tenu des données observées en un instant quelconque de calcul, de déterminer la reserve permettant de servir en totalité à la retraite les prestations correspondantes aux années déjà prestées.

En termes de passif actuariel, à tout instant t (fin d'année) on aura :

$$AL_t = \frac{t}{40} \cdot 50\% \cdot S(t-1) \cdot a_{60 \cdot 60-x} E_x,$$

où ${}_{60-x}E_x$ est la valeur actuelle probable d'un capital de 1 franc payable dans $60-x$ années si une tête x est en vie au bout des n années. Quant au normal cost :

— S'il n'y a pas reconnaissance d'années antérieures à l'affiliation, la durée totale de la carrière est donnée par : $N = T = X_r - X_0$.

— Le premier normal cost correspond alors simplement au financement d'une année de service et est donné par :

$$NC_0 = \frac{1}{40} \cdot 50\% \cdot S(0) \cdot a_{60 \cdot 60-x_0} E_{x_0}.$$

— Le normal cost à $t+1$ est donné par :

$$\left[\underbrace{\frac{1}{40} 50\% S(t+1)}_{\text{coût de l'année}} + \underbrace{\frac{t+1}{40} 50\% (S(t+1) - S(t))}_{\text{revalorisation du passé}} \right] a_{60 \cdot 60-x-1} E_{x+1}$$

— S'il y'a reconnaissance d'années de service antérieures à l'affiliation la méthode va induire un financement initial important correspondant au rattrapage intégral de ces années, on l'appelle Back service initial. La durée totale de carrière dans ce cas est

$$N = N_1 + T = (X_0 - X_e) + (X_r - X_0).$$

où N_1 est le nombre d'années reconnues antérieurement à l'affiliation.

— Le premier normal cost doit prendre en compte le poids du passé :

$$NC_0 = \frac{N_1 + 1}{40} \cdot 50\% \cdot S(0) \cdot a_{60 \cdot 60-x_0} E_{x_0}$$

— Le normal cost à $t+1$ est

$$NC_{t+1} = \left[\underbrace{\frac{1}{40} 50\% S(t+1)}_{\text{coût de l'année}} + \underbrace{\frac{t+1}{40} 50\% (S(t+1) - S(t))}_{\text{revalorisation du passé}} + \frac{N_1}{40} 50\% (S(t+1) - S(t)) \right] a_{60 \cdot 60-x-1} E_{x+1}$$

2. PROJECTED UNIT CREDIT

Ici on effectue les mêmes opérations qu'en UNIT CREDIT, à la seule différence qu'on utilise un salaire projecté. Ici, $S(t)$ qui est le salaire à l'instant t de calcul est remplacé par l'un de ses estimateurs.

Si on a par exemple :

$$S^*(t) = S(t) \cdot (1 + g)^{60-x-1},$$

alors le salaire projecté en $t + 1$ devient :

$$S^*(t + 1) = S^*(t) \cdot \frac{(1 + g_r(t))}{(1 + g)}.$$

En appliquant ces salaires projectés, on obtient les cas suivants :

— S'il n'y a pas reconnaissance d'années antérieures à l'affiliation le normal cost à $t + 1$:

$$NC_{t+1} = \left(\frac{1}{40} \cdot 50\% \cdot S^*(t + 1) + \frac{t + 1}{40} \cdot 50\% \cdot S^*(t) \cdot \frac{(g_r(t) - g)}{(1 + g)} \right) \cdot a_{60 \cdot 60-x-1} E_{x+1}.$$

— S'il y'a reconnaissance d'années de service antérieures à l'affiliation :

$$NC_{t+1} = \left(\frac{1}{40} \cdot 50\% \cdot S^*(t+1) + \frac{N_1 + t + 1}{40} \cdot 50\% \cdot S^*(t) \cdot \frac{(g_r(t) - g)}{(1 + g)} \right) \cdot a_{60 \cdot 60-x-1} E_{x+1}.$$

3. INDIVIDUAL LEVEL PREMIUM

L'objectif ici est de déterminer une cotisation qui, étant égale, restera constante jusqu'à l'âge de la retraite. Dans ce cas, on ne se focalise plus sur le passif actuariel comme dans la méthode UNIT CREDIT mais sur son financement et sa stabilité. La première cotisation supposée payable annuellement est donnée par la relation actuarielle suivante : Valeur actuelle de cotisations constantes sur la carrière = Valeur actuelle des engagements

Le NORMAL COST initial est donc :

$$NC_0 = \left(\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot S(0) \cdot a_{60} \right) \cdot \frac{{}_{60-x_0}E_{x_0}}{\ddot{a}_{x_0, 60-x_0-1}}.$$

Tant que le salaire sera constant, Le NORMAL COST restera constant. Or en pratique, les salaires ne sont pas toujours constants, par conséquent on est donc obligé d'assurer des compléments de capital et de payer des compléments de prime. Si en $t = 1$, le salaire passe de $S(0)$ à $S(1)$, on aura :

$$NC_1 = NC_0 + \Delta NC_1$$

où ΔNC_1 est la prime annuelle constante à payer à partir de l'âge $x_0 + 1$, pour assurer un capital égal à :

$$\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (S(1) - S(0)) \cdot a_{60}.$$

On a donc :

$$\Delta NC_1 = \left(\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (\Delta S(1)) \cdot a_{60} \right) \cdot \frac{{}_{60-x_0-1}E_{x_0+1}}{\ddot{a}_{x_0+1,60-x_0-1}}.$$

où $\ddot{a}_{x_0+1,60-x_0-1}$ est une annuité viagère payable d'avance.

De manière générale on utilisera la formule récurrente de la prime :

$$NC_{t+1} = NC_t + \Delta NC_{t+1}$$

avec

$$\Delta NC_{t+1} = \left(\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (\Delta S(t+1)) \cdot a_{60} \right) \cdot \frac{{}_{60-x_0-t-1}E_{x_0+t+1}}{\ddot{a}_{x_0+t+1,60-x_0-t-1}}.$$

On constate que cette prime ne peut à postériori plus rester constante du fait des écarts de salaire. Cette méthode s'applique indistinctement qu'il y ait ou non reconnaissance de services passés initiaux.

4. INDIVIDUAL WITH SUPPLEMENTAL LIABILITY

Ici on tient en compte les services passés initiaux, le financement total du plan est décomposé en deux :

- la partie des engagements relatifs aux services passés initiaux est financé en unit credit cost ;
- le solde des engagements financés est financé en individual level premium.

Le calcul des engagements initiaux relatifs aux services d'avant filiation est donné par :

$$K_1 = \frac{N_1}{40} \cdot 50\% \cdot S(0) \cdot a_{60}.$$

Le normal cost initial est donc :

$$NC_0 = \frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot S(0) \cdot a_{60} - K_1 \cdot \frac{{}_{60-x_0}E_{x_0}}{\ddot{a}_{x_0,60-x_0}}.$$

Le normal cost obtenu à l'aide de la formule récurrente est :

$$NC_{t+1} = NC_t + \Delta NC_{t+1}$$

avec

$$\Delta NC_{t+1} = \left(\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (\Delta S(t+1)) \cdot a_{60} \right) \cdot \frac{{}_{60-x_0-t-1}E_{x_0+t+1}}{\ddot{a}_{x_0+t+1,60-x_0-t-1}}.$$

avec K_1 faisant l'objet d'un financement complémentaire donné en unit credit par la prime unique initiale suivante venant s'ajouter au normal cost de la première année.

$$ADJ(0) = \frac{N_1}{40} \cdot 50\% \cdot S(0) \cdot a_{60} \cdot {}_{60-x_0}E_{x_0}.$$

avec

$$C(0) = NC_0 + ADJ(0).$$

Notons que $ADJ(0)$ peut être étalé sur plusieurs années.

5. PROJECTED INDIVIDUAL LEVEL PREMIUM

Ici on effectue les mêmes opérations que dans le level premium à la seule différence que pour éviter les augmentations de cotisation en cours de carrière, on travaille plutôt avec des salaires estimés.

Si on suppose le salaire projeté suivant :

$$S^*(t) = S(t).(1 + g)^{60-x-1}.$$

Pour ce salaire projeté constant, les primes obtenues seront constantes sinon, il conviendra d'assurer un complément de capital et on obtient :

$$\Delta NC_{t+1} = \left(\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (S^*(t+1) - S^*(t)) \cdot a_{60}\right) \cdot \frac{{}_{60-x_0-t-1}E_{x_0+t+1}}{\ddot{a}_{x_0+t+1, 60-x_0-t-1}}.$$

Remarque

On peut financer dans cette méthode de manière séparée les services passés initiaux ; cette méthode sera identique à l'INDIVIDUAL WITH SUPPLEMENTAL LIABILITY à la seule différence que ici tous les éléments sont projetés.

6. PROJECTED INDIVIDUAL LEVEL PERCENT

L'objectif est similaire à celui de la méthode PROJECTED INDIVIDUAL LEVEL PERCENT PREMIUM, mais cette fois la stabilité du financement est recherchée non pas absolument mais en pourcentage des salaires.

La méthode vise donc à définir un taux de cotisation individuelle sur salaire le plus stable possible tout au long de la carrière . Il s'agit ici d'une méthode projetée. Le taux de cotisation est obtenu par la relation d'équivalence actuarielle suivante : Valeur actuelle des cotisations à taux constant = Valeur actuelle des engagements projetés.

On a :

$$\tau \sum_{n=0}^{60-x_0-1} S(0) \cdot (1+g)^n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot {}_n p_{x_0} = \left(\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (S(0)(1+g)^{60-1-x_0} \cdot a_{60}) \cdot {}_{60-x_0-t-1}E_{x_0+t+1}\right).$$

On peut donc en tirer le taux de cotisation :

$$\tau = \frac{\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (S(0)(1+g)^{60-1-x_0} \cdot a_{60}) \cdot {}_{60-x_0-t-1}E_{x_0+t+1}}{\sum_{n=0}^{60-x_0-1} S(0) \cdot (1+g)^n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot {}_n p_{x_0}}.$$

La normal cost initial est donné par :

$$NC_0 = \tau \cdot S(0).$$

On peut simplifier cette équation en posant :

$$\frac{1+g}{1+i} = \frac{1}{1+j}$$

avec j étant le taux d'intérêt réel on obtient :

$$NC_0 = \frac{\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot (S(0) \cdot a_{60}) \cdot {}_{60-x_0}E_{x_0}^j}{(1+g)\ddot{a}_{x_0,60-x_0}^{(j)}}$$

où E^j et \ddot{a}^j sont calculés au taux d'intérêt réel. Elle est donc similaire à la méthode du NORMAL COST INDIVIDUAL LEVEL PREMIUM excepté le fait qu'on utilise un facteur d'actualisation réel pour les calculs.

7. PRÉRETRAITE ET ANTICIPATION ACTUARIELLE

Une des possibilités souvent offerte dans les plans de pension est de partir de manière anticipée et d'obtenir directement une prestation dès l'âge de départ. Il s'agit là d'un phénomène particulièrement présent en Europe (l'âge effectif de fin de carrière professionnelle étant dans de nombreux pays largement inférieur à l'âge légal de la retraite). L'impact en termes financiers est considérable puisqu'il y a à la fois réduction du nombre de cotisations et accroissement de la durée de prestation.

Ces réductions souvent jugées excessives par les bénéficiaires sont pourtant souvent totalement insuffisantes actuariellement.

3.3 Principes généraux de la capitalisation collective

On considère un engagement de pension à prestations définies, organisé au sein d'un second pilier mais cette fois financé par capitalisation collective. Il n'y a donc plus d'individualisation des éléments de réserve et de contribution, mais une vision globale au niveau du collectif.

Au sein de ces techniques collectives, on peut distinguer deux grandes méthodes :

- les méthodes de nivellement.

Les méthodes de nivellement consistent à travailler en deux étapes : on calcule d'abord les charges prévisionnelles du plan sur un horizon de temps défini par utilisation d'une méthode de capitalisation individuelle ; dans un deuxième temps on nivelle les charges globales ainsi mises en évidence ;

- les méthodes de capitalisation collective intégrale.

Elle ne s'appuient pas sur une méthode individuelle mais projettent directement l'ensemble du collectif. Au sein de cette famille, la distinction entre les grandes méthodes tient surtout à la façon de financer les services passés initiaux à la création du plan.

Comme en capitalisation individuelle, certaines méthodes financent de manière séparée ces services passés initiaux ; le tableau ci-dessous synthétise ces différents cas :

	projecté
Montant constant	AGGREGATE COST (AGC)
Montant constant avec séparation des services passés initiaux	ATTAINED AGE NORMAL(services passés revalorisé en unit credit)(AAN) FROZEN INI- TIAL LIABI- LITY (services passés valorisés en entry age) (FIL)

En vue d'illustrer ces diverses techniques nous envisagerons le plan de retraite standard déjà étudié et prévoyant à partir de 60 ans une pension correspondant à 50% du dernier salaire annuel d'activité pour une carrière complète de 40 ans.

3.3.1 Technique de nivellement et fonds de financement

a) Présentation de la méthode de nivellement

Les techniques de nivellement se basent sur une architecture du financement du plan de retraite à deux étages :

1. étage 1 : application d'une méthode donnée de capitalisation individuelle avec comptes individuels.
2. étage 2 : nivellement des charges globales résultant de l'étage 1 et alimentation d'un fonds de nivellement appelé aussi fonds de financement.

La procédure de calcul comprend trois étapes :

- première étape : application de la méthode choisie de capitalisation individuelle pour la première année.
- deuxième étape : projection sur un nombre fixé d'années des primes individuelles à l'aide :
⇒ d'hypothèses financières:
 - croissance des salaires;
 - taux d'actualisation;
 ⇒ hypothèses démographiques:
 - sorties (décès, démission, retraite);
 - entrées : éventuels remplaçants;
- troisième étape : nivellement de ces charges.

b) Avantages de la méthode de nivellement

1. Comme en capitalisation individuelle, il y'a mise en évidence claire des réserves individu par individu (« *transparence* » des droits acquis”).
2. Comme en capitalisation collective, il y' a recherche d'une stabilité collective du financement au plan.

c) Inconvénients de la méthode de nivellement

La méthode nécessite à la fois :

- un double calcul (calculs de primes individuelles et d'un taux collectif) ;
- une double gestion (contrats individuels et fonds de nivellement).

3.3.2 AGGREGATE COST METHOD

Elle vise à obtenir sur une population donnée un financement stable en pourcentage de la masse salariale, sur la durée de vie des affiliés au plan. Par rapport à la méthode de nivellement, il n'y a plus deux niveaux mais uniquement un seul étage, le niveau collectif et la projection se fait sur la durée de vie et non pas sur une période fixe pour tous.

Dans la suite, nous considérons à nouveau le plan prévoyant une rente de retraite de :

$$RR = \frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot S^{final}$$

à 60 ans.

- Soit $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, K\}$ l'ensemble des affiliés présent en $t = 0$
- Pour chaque individu, on effectue 2 projections :
 - i) projection des prestations :
La prestation projetée de l'individu j estimée à l'instant 0 on a :

$$B_j(0) = \frac{N_j}{40} \cdot 50\% \cdot S_j(0) \cdot (1 + j)^{60-x_j-1}.$$

- ii) projection des salaires :

Le salaire projeté en t de l'individu j ;

$$S_j(t) = S_j(0) \cdot (1 + j)^t.$$

On peut déterminer deux agrégats :

- a) l'agrégat des prestations : la present value of future benefits est :

$$PVFB = \sum_{j \in \mathfrak{S}} B_j(0) \cdot a_{60:60-x_j} E_{x_j}.$$

- b) l'agrégat des salaires est donné par :

$$PVFS = \sum_{j \in \mathfrak{S}} \sum_{t=0}^{60-x_j-1} \tau \cdot S_j(t) \cdot {}_tE_{x_j}.$$

Le taux de dotation par équivalence actuarielle entre l'agrégat des prestations et l'agrégat des cotisations est donné par :

$$\tau = \frac{\sum_{j \in \mathfrak{S}} B_j(0) \cdot a_{60:60-x_j} E_{x_j}}{\sum_{j \in \mathfrak{S}} \sum_{t=0}^{60-x_j-1} S_j(t) \cdot {}_tE_{x_j}} = \frac{PVFB}{PVFS}.$$

Dans le cas où le fonds initial est non nul, il suffit de le retirer de la PVFB :

$$\tau = \frac{PVFB - F(0)}{PVFS}.$$

Ce fonds collectif reçoit de l'intérêt et sert à payer directement les prestations. La charge initiale de la première année est la suivante :

$$D(0) = NC(0) = \sum_{j \in \mathfrak{S}} S_j(0),$$

Le fonds à l'instant t est donné par :

$$F(t) = [FG(t-1) + D(t-1)].(1 + i_t) - B_t,$$

avec $D(t-1)$ étant la dotation payée au fonds, i_t le taux de rendement observé du fonds et B_t la prestation payée par le fonds.

En pratique, il y aura des écarts et le taux est régulièrement recalculé par la formule :

$$\tau(t) = \frac{PVFB(t) - F(t)}{PVFS(t)},$$

avec $F(t)$ étant les avoirs réels du fonds à l'instant t , $PVFS(t)$ est la valeur actuelle à l'instant t des salaires futurs (postérieurs à l'instant t) où :

$$PVFS = \sum_{j \in \mathfrak{S}} \sum_{t=0}^{60-x_j-t-1} .S_j^*(s) ._s E_{x_j+t},$$

avec

$$S_j^*(s) = S_j(t)(1 + g)^{(s-t)}.$$

$PVFB(t)$ est la valeur actuelle à l'instant t des prestations postérieures à t où

$$PVFB(t) = \sum_{j \in \mathfrak{S}} B_j(t) . a_{60 \cdot 60-x_j-t} E_{x_j+t}$$

et

$$B_j(t) = \frac{N_j}{40} . 50\% . S_j(t) . (1 + g)^{60-x_j-t-1}.$$

Cette méthode sera rejetée car elle peut aboutir à des fonds négatifs en cours de projection.

3.3.3 ATTAINED AGE NORMAL

Dans cette variante de l'AGGREGATE COST, on maintient l'idée de niveler au mieux les charges futures projetées mais tout en évitant simultanément les problèmes de fonds insuffisant. Dans cette perspective le financement des services passés initiaux n'est plus intégré dans le calcul du taux d'aggregate mais fait l'objet d'un amortissement séparé et accéléré.

La valorisation de ces services passés se fait à l'aide de la méthode UNIT CREDIT et fait l'objet d'un financement complémentaire, soit en une fois, soit amorti sur un nombre fixé d'années.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes de capitalisation à savoir les méthodes de capitalisation individuelle et collective. Dans le prochain chapitre, nous choisirons quelques exemples dans le but de mieux illustrer ces méthodes.

Chapitre 4

CAS PRATIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons des exemples sur le choix des éléments actuariels et nous les illustrons par des activités qui nous permettront de mieux comprendre et de comparer les méthodes de financement étudiées.

4.1 Exercices

Exercice 1 : Prestation en contribution définie

- Cotisation : 10 % du salaire
- Taux de capitalisation : 4 %
- 3 catégories de salariés
- Age d'affiliation : 20 ans
- Age de la retraite : 60 ans

L'épargne accumulée à la retraite est convertie en rente viagère ; on suppose que le prix de la rente à 60 ans est de 10 ($a_{60} = 10$). Les profils de carrière des 3 catégories sont les suivants (évolution des salaires) :

Age	A	B	C
20 – 29	100	75	100
30 – 39	125	100	200
40 – 49	125	150	400
50 – 59	125	150	600

On ignore l'effet de la mortalité durant la période d'activité. En notant S_{ij} le salaire de l'année j pour la catégorie i , calculer les grandeurs suivantes : la somme des salaires de carrière, salaire moyen de carrière, l'épargne accumulée à la retraite, la rente obtenue à 60 ans.

Exercice 2 : Choix du salaire(1)

Soit un régime octroyant une rente de retraite égale à 75 % de la moyenne des salaires de carrière. Que représente ce régime, exprimé en pourcentage du salaire final ?

Exercice 3 : Choix du salaire(2)

1. Carrière entre les âges de 20 ans et 60 ans
2. Salaire initial unitaire $S_o = 1$ évoluant selon la grille suivante :

Age	20-29	30-44	45-54	55-58	59
Salaire	1	1.2	1.5	1.8	1.9

- Le régime octroie une rente égale à 50 % du salaire final.
- On suppose que le financement est assuré en cours de carrière par des versements constants basés sur le salaire connu au moment du calcul (le dernier salaire connu sert à tout instant d'estimateur du salaire final).
- Le taux d'actualisation : 4 %
- Pas de mortalité avant la retraite
- Prix de rente à 60 ans : $a_{60} = 10$

Donner l'évolution du pourcentage de contribution au régime, c'est-à-dire le rapport entre la cotisation à verser et le salaire.

Exercice 4 : Choix de la durée de carrière

- Mêmes hypothèses que l'exercice 3.
- On suppose que tous les affiliés sont entrés en service à 20 ans, et que le plan reconnaît les services passés.
- Pour un affilié âgé de 40 ans à l'instauration du plan, on a :
 - services futurs : $N_1 = 20$
 - services passés : $N_2 = 20$

Calculer : le Taux de contribution - services futurs, Taux de contribution - services passés et en déduire la Contribution totale.

Exercice 5 : Comparaison des méthodes de financement

On se propose de comparer les différentes méthodes de financement, dans le cas simple suivant :

1. On considère une population initiale de 600 personnes distribuées par la fonction de population :

$$L(x, 0) = \begin{cases} 10 & 20 \leq x < 30 \\ 20 & 30 \leq x < 50 \\ 10 & 50 \leq x < 60 \\ 0 & x \geq 60 \end{cases}$$

2. L'unique cause de sortie de la population est le décès supposé se faire de manière uniforme à 75 ans.
3. Au niveau des entrées, on suppose :
 - alternative 1 : une population fermée sans remplaçants

- alternative 2 : une population ouverte : c'est à dire que chaque individu partant à la retraite fixée à 65 ans est supposé être remplacé par un actif de 20 ans :

$$E(20, t) = L(65, t)$$

4. On travaille avec un taux d'intérêt nul.
5. On instaure en $t = 0$, un plan de pension octroyant une pension égale à la moitié du salaire final. Les salaires sont supposés uniformes ; ni les salaires ni les pensions ne sont indexés.

Comparer, pour les 2 alternatives (population ouvertes et fermée), les 3 méthodes de financement suivantes : répartition pure, répartition des capitaux de couverture, capitalisation individuelle.

Exercice 6 : Calcul d'anticipation

Hypothèses

- Pension unitaire à partir de 65 ans
 - Financement de 20 à 65 ans par la méthode Unit Credit Cost
 - Pas de mortalité jusque 65 ans
 - Prix de rente : annuité certaine jusqu'à l'âge fixe de décès fixé à 80 ans
 - Taux d'actualisation : 4%.
- Calcul de la rente acquise à 60 ans .

Exercice 7 : Technique de nivellement et fonds de financement

Soit le plan prévoyant une rente de retraite de :

$$RR = \frac{N}{40} . 50\% . S^{final}$$

à 60 ans.

- Soit $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, K\}$ l'ensemble des affiliés présent en $t = 0$
- On suppose qu'il n'y a pas revalorisation de services passés
- On choisit comme méthode individuelle de base l'UNIT CREDIT COST.
- On note : X_j l'âge initial en $t = 0$ de l'individu j , $S_j(0)$ le salaire initial de l'individu j . Déterminer la rente acquise.

Exercice 8 : L'aggregate cost

1. 2 affiliés présents en $t = 0$: $j = 1$: $x_1 = 60$, entrée en service à 25 ans
 $J = 2$: $x_2 = 40$, entrée en service à 25 ans

2. Plan prévoyant à 65 ans un capital unique égal à :

$$\frac{N}{40} \cdot 5 \cdot S^{final}$$

où N est compté depuis l'entrée en service.

3. Hypothèses financières et démographiques :
- Salaire unitaire pour tous.
 - Ni inflation ni mortalité.
 - Actualisation au taux zéro.
- Appliquer l'aggregate cost à ce contrat.

Exercice 9 : ATTAINED AGE NORMAL

Considérons le plan suivant :

$$\frac{N}{40} \cdot 50\% \cdot S^{final}$$

à 60 ans où N est compté depuis l'entrée en service.
Calculer la prestation à payer.

Exercice 10 : ATTAINED AGE NORMAL

Reprendre le contreexemple de l'aggregate cost , traité cette fois en attained age et montrer que cette fois il n'y a plus de problème de fonds négatif.

4.2 Solutions

Exercice 1

- La somme des salaires de carrière :

$$\sum_{j=20}^{(59)} S_{ij} = \sum_i^{(1)}$$

- Salaire moyen de carrière :

$$\frac{1}{4} \sum_{j=20}^{(59)} S_{ij} = \sum_i^{(2)}$$

- L'épargne accumulée à la retraite :

$$\sum_{j=20}^{(59)} 0.1 \cdot S_{ij} \cdot (1.04)^{60-j} = \sum_i^{(3)}$$

— Rente obtenue à 60 ans :

$$\sum_i^{(4)} = \frac{1}{a_{60}} \sum_i^{(3)} = \frac{1}{10} \sum_i^{(3)}$$

Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

	A	B	C
$\sum_i^{(1)}$	475	475	1300
$\sum_i^{(2)}$	118,75	118,75	325
$\sum_i^{(4)}$	111,2	102,2	239,4

On peut exprimer la rente obtenue en pourcentage du dernier salaire d'activité (« taux de remplacement ») ou du salaire moyen de carrière :

	A	B	C
$\sum_i^{(4)} \setminus S_{i59}$	89%	68%	40%
$\sum_i^{(4)} \setminus \sum_i^{(2)}$	94%	86%	74%

On constate que le système est très défavorable aux profils de carrière dynamiques et privilégie plutôt les profils plats.

Exercice 2

Hypothèses :

- $X_0 = 20$
- $X_r = 60$
- salaire initial unitaire $S_{20} = 1$ croissant en progression géométrique d'un facteur $(1 + j)$

La rente octroyée peut s'écrire :

$$RR = 75\% \frac{1}{40} \cdot \sum_{k=0}^{39} (1 + j)^k = 75\% \frac{1}{40} \cdot \frac{(1 + j)^{40} - 1}{j}$$

En exprimant la rente en pourcentage du salaire final :

$$TR = \frac{RR}{S_{59}} = 75\% \frac{1}{40} \cdot \frac{(1 + j)^{40} - 1}{j(1 + j)^{39}} = 75\% \cdot \alpha$$

Le tableau ci-dessous donne en fonction du taux de progression des salaires la valeur du paramètre α .

j	2%	5%	10%
α	70%	45%	27%

Exercice 3

— La cotisation initiale est donnée par :

$$p_{20} = \frac{0.5 * V^{20}}{\ddot{a}_{40|}} \times 10 = 0.051$$

où

$$v = \frac{1}{1.04}$$

et

$$\ddot{a}_{40|} = \frac{1 - v^{40}}{0.04} \cdot 1.04$$

Le taux de contribution initial est donc de 5,1 %.

- À 30 ans, l'augmentation de salaire oblige à prévoir un complément de cotisation entre cet âge et l'âge de la retraite :

$$p_{30} = p_{20} + \frac{0.5 * 0.2 * V^{30}}{\ddot{a}_{30|}} \times 10 = 0.068$$

Le taux de contribution devient :

$$\pi(30) = \frac{0.068}{1.2} = 0.056$$

- De même, aux âges suivants, on obtient :

Age	20-29	30-44	45-54	55-58	59
Salaire	5.1%	5.6%	9.3%	22.6%	46.6%

Les augmentations de salaire fin de carrière provoquent donc une explosion du coût dans ce type de plan.

Exercice 4

- Le taux de contribution - services futurs est :

$$\pi_{40}(N_2) = \frac{20}{40} \cdot 10 \cdot \frac{0.5 * V^{20}}{\ddot{a}_{40|}} = 0.081$$

- Le taux de contribution - services passés est :

$$\pi_{40}(N_1) = \frac{20}{40} \cdot 10 \cdot \frac{0.5 * V^{20}}{\ddot{a}_{40|}} = 0.081$$

- La contribution totale est :

$$\pi_{40}(N_2) + \pi_{40}(N_1) = 0.162$$

Le tableau ci-dessous donne les taux de contribution en fonction de l'âge à l'instauration du plan.

Âge à l'instauration x	Taux de contribution - services passé (1)	Taux de contribution - services futurs (2)	Taux de Contribution totale (1)+(2)
20	0	5.1%	5.1%
30	2.1%	6.4%	8.6%
40	8.1%	8.1%	16.2%
50	30%	10%	40%
55	77.7%	11.1%	88.8%

TABLEAU : évolution des taux de contribution pour services passés et services futurs

— La colonne (1) est donnée par :

$$\pi_x(N_1) = \frac{x-20}{40} \cdot \frac{0.5 * V^{(60-x)}}{\ddot{a}_{(60-x)]]}} \cdot a_{60}$$

— La colonne (2) est donnée par :

$$\pi_x(N_1) = \frac{60-x}{40} \cdot \frac{0.5 * V^{(60-x)}}{\ddot{a}_{(60-x)]]}} \cdot a_{60}$$

où $a_{60} = 10$ et $v = \frac{1}{1.04}$

Ce tableau met en évidence la croissance exponentielle du taux de contribution des services passés.

Exercice 5

Alternative 1 : population fermée

1. Méthode de répartition pure :

Compte tenu des hypothèses, le taux de cotisation à chaque instant est donné par :

$$\pi_R(t) = 0.5 \cdot \frac{\text{effectif des retraités}}{\text{effectif des actifs}}$$

Il vient successivement :

— $t < 5$:

$$\pi_R(t) = 0$$

(pas de retraité)

— $t = 6$:

$$\pi_R(6) = 0.5 \cdot \frac{10}{590} = 0.0085$$

(première génération des retraites)

— $t = 7$:

$$\pi_R(7) = 0.5 \cdot \frac{20}{580} = 0.017$$

— $t = 15$:

$$\pi_R(15) = 0.5 \cdot \frac{100}{500} = 0.1$$

— $t = 16$:

$$\pi_R(16) = 0.5 \cdot \frac{9 \times 10 + 1 \times 20}{480} = 0.11$$

— $t = 25$:

$$\pi_R(25) = 0.5 \cdot \frac{200}{300} = 0.33$$

— $t = 35$:

$$\pi_R(35) = 0.5 \cdot \frac{200}{100} = 1$$

— $t > 35$: il n'y a plus d'actif et le régime doit s'arrêter ; plus aucune prestation ne peut être versée, ni aux actifs du moment, ni aux générations déjà retraitées.

2. Méthode de répartition des capitaux de couverture

Dans ce cas le prix de rente à 65 ans est égal à 10 :

$$a_{65} = 10$$

et le taux de cotisation est donné par :

$$\pi_R(t) = 0.5 \cdot a_{65} \cdot \frac{\text{effectif partant à la retraite}}{\text{effectif des actifs}}$$

Il vient successivement :

— $t < 5$:

$$\pi_{cc}(t) = 0$$

— $t = 6$:

$$\pi_{cc}(6) = 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{10}{590} = 0.085$$

(première génération des retraites)

— $t = 7$:

$$\pi_{cc}(7) = 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{10}{580} = 0.086$$

— $t = 15$:

$$\pi_{cc}(15) = 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{10}{500} = 0.1$$

— $t = 16$:

$$\pi_{cc}(16) = 0.5 \cdot 10 \cdot \frac{20}{480} = 0.21$$

— $t = 25$:

$$\pi_{cc}(25) = 0.5 \cdot \frac{20}{300} = 0.33$$

— $t = 35$:

$$\pi_{cc}(35) = 0.5 \cdot \frac{200}{100} = 1$$

— $t > 35$: il n'ya plus d'actif et le financement doit s'arrêter ; les actifs présents à ce moment n'auront jamais de pension ; par contre, les générations déjà pensionnées continueront de toucher intégralement leur pension.

3. Méthode de capitalisation :

Chacune des classes d'âge paiera un taux de cotisation différent, mais supposé constant tout au long de la carrière.

En notant $\pi_c(x)$, le taux de cotisation pour la classe d'âge initial x en $t = 0$ (x compris entre 20 et 60), on a :

$$\pi_c(x) = 0.5 \cdot a_{65} / (65 - x)$$

— groupe ayant 20 ans en $t = 0$:

$$\pi_c(20) = \frac{0.5 * 10}{45} = 0.11$$

— groupe ayant 30 ans en $t = 0$:

$$\pi_c(30) = \frac{0.5 * 10}{35} = 0.14$$

— groupe ayant 50 ans en $t = 0$:

$$\pi_c(50) = \frac{0.5 * 10}{15} = 0.33$$

— groupe ayant 60 ans en $t = 0$:

$$\pi_c(60) = \frac{0.5 * 10}{5} = 1$$

Cet exemple simpliste permet de mettre en évidence dans une population fermée les phénomènes de première et de dernière génération et l'antagonisme fondamental de traitement entre répartition pure et capitalisation.

Considérons d'abord la première génération de retraités, c'est-à-dire le groupe âgé initialement de 60 ans :

- En répartition pure, ce groupe ne verse aucune cotisation et reçoit une retraite pleine jusqu'au décès.
- En capitalisation, ce groupe doit financer en cinq ans la totalité de sa charge de pension et a un taux de cotisation maximal.

La répartition octroie donc par rapport à la capitalisation un cadeau dit cadeau de première génération.

De manière contrastée, considérons la dernière génération de la population c'est-à-dire le groupe âgé initialement de 20 ans :

- en répartition pure : Ce groupe a dû payer (pendant 35 ans) des cotisations de plus en plus importantes, pour, arrivé à la retraite, ne recevoir aucune prestation.
- en capitalisation : ce groupe peut étaler sa charge sur 45 ans et a un taux de cotisation minimal ; ses prestations de retraite sont assurées.

Le cadeau de première génération en répartition se transforme donc dans une population fermée en un cauchemar de dernière génération.

Alternative 2 : population ouverte

(a) Méthode de répartition pure.

Compte tenu des hypothèses de remplacement, la population des actifs garde constamment un effectif fixe de 600 unités.

Le taux de cotisation devient donc :

$$\pi_R(t) = 0.5 \cdot \frac{\text{effectif des retraités}}{600}$$

Il vient successivement :

— $t < 5$:

$$\pi_R(t) = 0$$

(pas de retraité)

— $t = 6$:

$$\pi_R(6) = 0.5 \cdot \frac{10}{600} = 0.0083$$

(première génération des retraités)

— $t = 7$:

$$\pi_R(7) = 0.5 \cdot \frac{20}{600} = 0.016$$

— $t = 15$:

$$\pi_R(15) = 0.5 \cdot \frac{100}{600} = 0.083$$

— $t = 16$:

$$\pi_R(16) = 0.5 \cdot \frac{9 \times 10 + 1 \times 20}{600} = 0.092$$

— $t = 25$:

$$\pi_R(25) = 0.5 \cdot \frac{200}{600} = 0.166$$

— $t = 35$:

$$\pi_R(35) = 0.5 \cdot \frac{200}{600} = 0.166$$

Le système peut se poursuivre indéfiniment

(b) Méthode de répartition des capitaux de couverture.

La conclusion est la même qu'en répartition pure ; tous les dénominateurs sont remplacés par l'effectif constant de 600 et le système peut se poursuivre.

(c) Méthode de capitalisation Pour les générations présentes en $t = 0$, le taux de cotisation est le même qu'en population fermée (pas de solidarité entre générations).

Exercice 6

Le calcul de la rente acquise à 60 ans est donné par :

(a) Réserve constituée à 60 ans :

$$V_{60} = \frac{40}{45} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^{+5} \cdot \ddot{a}_{65}$$

(b) Conversion de cette réserve en rente à 60 ans :

$$V_{60} = k \cdot \ddot{a}_{60}$$

où k sera le coefficient de réduction à appliquer. Donc :

$$\frac{40}{45} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^{+5} \cdot \ddot{a}_{65} = k \cdot \ddot{a}_{60},$$

$$k = \frac{40}{45} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^{+5} \cdot \frac{\ddot{a}_{65}}{\ddot{a}_{60}}.$$

D'une manière générale, s'il y a anticipation de n années, le coefficient devient :

$$k(n) = \frac{45-n}{45} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^n \cdot \frac{\ddot{a}_{65}}{\ddot{a}_{65-n}}.$$

Ainsi pour une anticipation de 5 ans et un taux d'actualisation de 4% on a :

$$k(5) = \frac{40}{45} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^5 \cdot \frac{\ddot{a}_{65}}{\ddot{a}_{60}} = \frac{40}{45} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^5 \cdot \frac{1-v^{15}}{1-v^{20}} = 0.5971,$$

Soit une réduction de 40% très largement supérieure aux réductions traditionnellement rencontrées.

L'importance de cette pénalité est liée à la juxtaposition de trois effets de réduction induits par le coefficient $k(n)$:

- (c) le premier terme $\frac{45-n}{45}$ illustre le fait qu'il manque n cotisations ;
- (d) le second terme $\left(\frac{1}{1.04}\right)^n$ illustre le fait que le capital constitutif doit être disponible n années plus tôt que prévu ;
- (e) le troisième terme $\frac{\ddot{a}_{65}}{\ddot{a}_{65-n}}$ illustre le fait qu'il faudra payer plus d'arrérages de rente que prévu.

Exercice 7

- (a) Première étape :

Calcul des primes individuelles de première année :
 $p_j(0)$ est la prime de l'individu j en $t = 0$.

$$p_j(0) = \frac{1}{40} \cdot 50\% \cdot S_j(0) \cdot a_{60:60-x_j} E_{x_j}.$$

Coût total : $p(0) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_j(0)$.

- (b) Deuxième étape : projection sur T années (en général T entre 10 et 20 ans)

$$p_j^*(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{40} \cdot 50\% \cdot S_j^*(t) + \frac{t}{40} \cdot 50\% \cdot (S_j^*(t) - S_j^*(t-1))\right) \cdot a_{60:60-x_j-t} E_{x_j+t} & x_j + t < 60 \\ 0 & x_j + t \geq 60 \end{cases}$$

On fait ici l'hypothèse d'absence de remplaçants. Pour le traitement projeté $S_j(t)$ on peut par exemple utiliser une croissance géométrique :

$$S_j(t) = S_j(0) \cdot (1+g)^t.$$

(c) Troisième étape : nivellement sur les T années.

Remplacer le vecteur de primes variables par un financement stable en pourcentage de la masse salariale. Pour un fonds de nivellement initial nul ($F(0) = 0$), le taux de nivellement τ sera solution de l'équation d'équivalence actuarielle :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j \in \mathfrak{S}} p_j^*(t) \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{l_{x_j+t}}{l_{x_j}} = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j \in \mathfrak{S}} \tau \cdot S_j^*(t) \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{l_{x_j+t}}{l_{x_j}}.$$

Avec τ ne dépendant ni du temps (exigence de stabilité temporelle), ni des individus (étage de capitalisation collective).

La solution est donc :

$$\tau = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j \in \mathfrak{S}} p_j^*(t) \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{l_{x_j+t}}{l_{x_j}}}{\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{j \in \mathfrak{S}} S_j^*(t) \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{l_{x_j+t}}{l_{x_j}}}.$$

qu'on note parfois en abrégé :

$$\tau = \frac{PVFP}{PVFS}.$$

où $PVFP$ est la present value of future premiums et $PVES$ est la present value of future salaries. Si le fonds $F(0)$ initial est non nul, il suffit de le retrancher de la $PVFP$:

$$\tau = \frac{PVFP - F(0)}{PVFS}.$$

Une fois le taux de dotation calculé, on peut calculer la dotation (= le coût à payer au plan) :

$$D(0) = \tau \cdot \sum_{j \in \mathfrak{S}} S_j(0).$$

Ce versement $D(0)$ est comparé au montant $P(0)$ nécessaire à l'alimentation des contrats individuels :

- si $D(0) < P(0)$: la méthode ne peut être utilisée
- si $D(0) > P(0)$: le solde $D(0) - P(0)$ alimente le fonds de nivellement :
 $F(0^+) = D(0) - P(0)$ L'année suivante, le fonds est devenu avant financement :

$$F(1^-) = F(0^+) \cdot (1+i) = (D(0) - P(0))(1+i),$$

et après versement en $t = 1$:

$$F(1^+) = F(1^-) + D(1) - P(1),$$

D'une manière générale, on a :

$$D(t) = \tau \cdot \sum_{j \in \mathfrak{S}} S_j(t).$$

$$F(t^-) = F(t-1^+).(1+i)$$

$$F(t^+) = F(t-1^-) + D(t) - P(t).$$

Si la réalité suit les hypothèses, le fonds F est nul au terme de la période.

Exercice 8

- (a) 2 affiliés présents en $t = 0$, $j = 1$, $x_1 = 60$ avec 25 ans étant l'âge d'entrée en service.
 et $j = 2$, $x_2 = 40$ avec 25 ans étant l'âge d'entrée en service.
- (b) Plan prévoyant à 65 ans un capital unique égal à :

$$\frac{N}{40} \cdot 5 \cdot S^{final}$$

où N est compté depuis l'entrée en service.

- (c) Hypothèses financières et démographiques :

- salaire unitaire pour tous
- ni inflation ni mortalité
- actualisation au taux zéro

Appliquer l'aggregate cost à ce contrat.

- i. Taux de dotation : $\tau = \frac{2 \times 5}{5+25} = \frac{1}{3}$
- ii. Dotation : $D = \frac{2}{3}$. Cette dotation reste constante durant 5 ans. En $t = 5$, le fonds a un avoir égal à :

$$F(5) = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

ce qui est insuffisant pour payer la prestation de l'individu i :

$$F(5^+) = \frac{10}{3} - 5 = -\frac{5}{3}$$

La méthode ne peut donc être appliquée.

Remarquons qu'en terme d'équilibre final, on retrouve en fin de parcours le montant nécessaire :

$$F(25) = F(5^+) + 20 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{20}{3} = 5.$$

c'est-à-dire de quoi payer le second capital.

La méthode doit néanmoins être rejetée dans ce cas car le fonds est passé à une valeur négative. On assiste en fait ici à un cas simple de transfert intergénérationnel de charges.

Comme illustré dans ce calcul, la raison de ce déséquilibre est à trouver dans le financement des services passés initiaux, reconnus par le plan mais non provisionnés à l'origine ; l'aggregate décompose ce financement sur la durée de carrière résiduelle moyenne du groupe et n'induit donc pas une vitesse suffisante d'alimentation.

Exercice 9

(a) Première étape :

On calcule la prime unique globale qui couvre pour tous les affiliés les services passés initiaux :

$$UL(0) = \sum_{j \in \mathfrak{S}} \frac{N_{1j}}{40} \cdot 50\% \cdot S_j(0) \cdot a_{60:60-x_j} E_{x_j}.$$

où N_{1j} est la durée de service pour l'individu j entre l'entrée en service et la création du plan. Ce montant est au départ non financé.

(b) Deuxième étape : On calcule un taux d'aggregate en ne tenant pas compte de cet engagement :

$$\tau = \frac{PVFP - UL(0)}{PVFS}.$$

Le coût normal est donné comme en aggregate par :

$$NC(0) = \tau \cdot \sum_{j \in \mathfrak{S}} S_j(0).$$

(c) Troisième étape :

Un financement complémentaire doit être prévu pour amortir la dette $UL(0)$. Par exemple, un financement en m années :

$$ADJ(0) = \frac{UL(0)}{\ddot{a}_{m|}}$$

La dotation totale est alors :

$$D(0) = NC(0) + ADJ(0) = \tau \cdot \sum_{j \in \mathfrak{S}} S_j(0) + \frac{UL(0)}{\ddot{a}_{m|}}$$

Exercice 10

L'application de l'ATTAINED AGE donne cette fois :

- i. Prime unique initiale : $UL(0) = (\frac{35}{40} + \frac{15}{40})5 = 6.25$. (supposée payée en une fois initialement)
- ii. Taux de dotation : $\tau = \frac{2 \times 5 - 6.25}{5 + 25} = 0.125$
- iii. Dotation : $D = 0.125 \times 2 = 0.25$ Cette dotation reste constante durant 5 ans. En $t = 5$, le fonds a un avoir égal à :

$$F(5) = 6.25 + 5 \times \frac{1}{4} = 7.5.$$

Ce qui est à présent suffisant pour payer en $t = 5$ la prestation de l'individu. Au terme on aura :

$$F(25) = 7.5 - 5 + 20 \times \frac{1}{8} = 5.$$

Ce qui permet de payer la dernière prestation.

CONCLUSION

Dans ce travail, dont l'un des axes majeurs portait sur la contribution à l'étude des régimes de retraite, il en ressort que les systèmes de retraite obligatoire en zone CIPRES, financés par répartition, sont confrontés à des difficultés mettant en jeu leur viabilité.

Les régimes de retraite sont pour la plupart déficitaires et cette situation est d'autant plus alarmante que l'Afrique doit faire face d'ici 2050 à un vieillissement important de sa population. Pour pallier à ce problème, les gouvernements des pays de la zone CIPRES ont entamé une série de réformes avec le soutien technique de la banque mondiale. Ces réformes, généralement paramétriques, permettent simplement à l'organisme d'être excédentaire sur un temps limité. Elles abordent également les problématiques de la politique de recouvrement des créances, de la retraite complémentaire obligatoire et de l'extension de la couverture sociale au secteur informel.

Si l'étude s'est portée sur trois pays de la zone CIPRES, l'analyse comparée de ces systèmes de retraite nous a permis de tirer des enseignements intéressants. D'une part, les cotisations sont élevées dans la zone CIPRES, par comparaison aux revenus des populations. D'autre part, les régimes de retraite de la zone CIPRES sont pour la plupart déficitaires car les charges croissent plus vite que les ressources. Cette progression rapide des charges peut être expliquée principalement par le **risque de longévité**. C'est pour pallier à tous ces problèmes que nous avons fixé des bases de calcul des prestations par capitalisation.

A l'issue de ce travail, il serait intéressant d'effectuer une analyse plus approfondie de la méthode de financement par répartition.

BIBLIOGRAPHIE

- (d) Bailey, C. (2004) : Extension de la couverture de la sécurité sociale en Afrique. Bureau international du Travail, Département de la Sécurité sociale. - Genève : BIT.
- (e) La Lettre de l'Observatoire des Retraites (2013) : Les retraites dans le monde - État des lieux continent par continent. Publication du COR.
- (f) Annycke, P. (2008) : Sénégal - L'analyse des prestations et des indicateurs de résultats de la protection sociale. Bureau international du Travail, Département de la Sécurité Sociale -Genève : BIT, 2008 xvii, 159 p.
- (g) Bozio, A., Piketty, T. (2008) : Pour un nouveau système de retraite - Des comptes individuels de cotisations financés par répartition. Centre pour la Recherche Économique et ses Applications (C E P R EMAP), 101 p.
- (h) Garanke, S. (2006) : Le recouvrement des cotisations de sécurité sociale en Afrique francophone. Association internationale de la sécurité sociale, 15p.
- (i) Florent, G.et All () ; État des lieux des systèmes de retraite en Afrique subsaharienne francophone. Version 2.7
- (j) Ndiaye B., Diabate B. (2012) : rapport d'évaluation actuarielle du régime de retraite des fonctionnaires du Sénégal pour la période 2010-2050. République du Sénégal.
- (k) Annycke, P. (2008) : Sénégal - L'analyse des prestations et des indicateurs de résultats de la protection sociale. Bureau international du Travail, Département de la Sécurité Sociale àGenève : BIT, 2008 xvii, 159 p.
- (l) Banque mondiale (2012) : La stratégie de protection sociale en Afrique 2012-2022. Banque mondiale, Washington D.C.
- (m) Fouomene, E. (2013) : Les protections traditionnelles et le développement du système de sécurité social au Cameroun. Thèse de doctorat : Université. Genève, 2013, no. D. 865.