Activité 5-1 : Limites et continuités

Ayant déterminé la surface du carré servant à l'entrainement, Mélon souhaite étudier ces valeurs pour des valeurs de x de plus en plus grandes et de plus en plus petite. Son frère aîné l'informe qu'il pourra utiliser la notion de limite

Consigne 1(Définition)

On considère la fonction f : $x \mapsto \frac{sinx}{x}$

1) Détermine l'ensemble de définition Df de f
2) a) Complète le tableau suivant

x(radian)	-1	$-0,1$	$-0{,}01$	0	0,01	0,1	1
f(x)							

b) Que constates-tu sur les valeurs de f(x) lorsque x prends des valeurs de plus en plus proche de 0

Définition :

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df, a et l des nombres réels. Le nombre réel l est la limite de f en a ou encore l est la limite de f(x) lorsque x tend vers a signifie que pour tout intervalle ouvert V de centre l, il existe un intervalle I de centre a tels que l'image directe de $I \cap Df$ par f soit contenue dans V. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ ou \ \underset{a}{lim} f(x) = l$$

Remarque :

- Le nombre réel a peut ne pas appartenir au domaine de définition de f
- Lorsqu'une fonction f admet une limite en a , cette limite est unique.

Propriété :

Lorsqu'une fonction f est définie en a et admet une limite en a, alors cette limite est égale à f(a)

Limites de quelques fonctions élémentaires

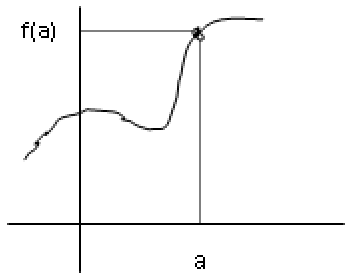
$\lim_{x \to x_0} k = k \ (k\epsilon\mathbb{R})$; $\lim_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim_{x \to 0} x^n = 0 \ (n\epsilon\mathbb{N}^*)$;

Continuité

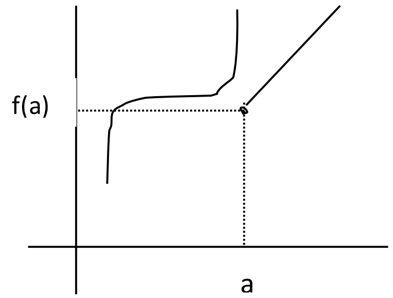
Une fonction est continue en a lorsqu'elle est définie en a et admet une limite en a égale à f(a).

Illustration :

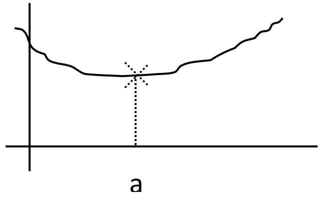
Reconnaissance graphique de la continuité d'une fonction en un point a



f est continue en a



f est définie en a mais f est non continue en a



f est non continue en a parce que non définie en a.

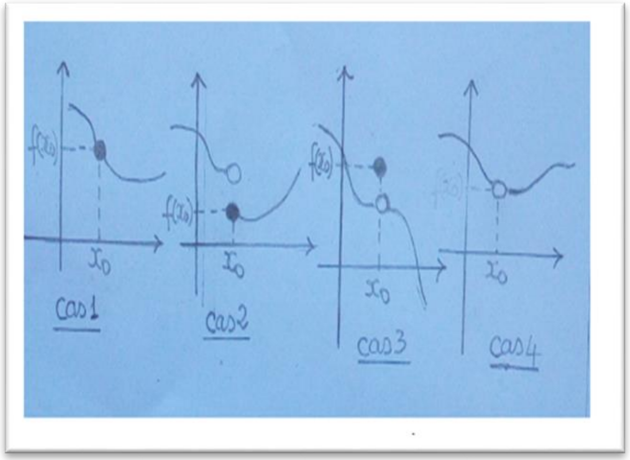
Propriétés :

P1 : Les fonctions élémentaires : $x \longmapsto C \quad (C \epsilon \mathbb{R})$; $x \longmapsto ax \quad (a \epsilon \mathbb{R})$; $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^n$ $(n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto cosx$ et $x \longmapsto sinx$ sont continues sur leur ensemble de définition.

P2 : La somme, le produit ou le quotient de deux fonctions (quelconques) élémentaires est continue en tout point de son ensemble de définition.

***Consigne 2** : Représentation graphique de fonction continue en x_0.*

Dans chacun des cas suivants, dis si la fonction dont la courbe représentative est dessinée est continue ou non en x_0.



Consigne 2 : Propriété

1) On considère les fonctions f et g définies de par :

$f(x) = \sqrt{x+8} \; et \;\; g(x) = x^2 - 4$

Calcule la limite en 1 de : f, g $(f+g)$; (fg) et $\left(\frac{f}{g}\right)$

2) Que constates-tu ?

Propriété :

P1 : Soient f et g des fonctions, a, l, l' des nombres réels. Si $\lim\limits_{a}$ f = l et $\lim\limits_{a}$ g = l'

alors : $\lim\limits_{a}$ (f + g) = l + l' ; $\lim\limits_{a}$ f.g = l.l' ;

Si de plus l' ≠ 0, alors $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$

P2 : Si f et g sont continues en a , les fonctions f+g, fg sont aussi continues en a . Si de plus g(a) est différent de zéro alors la fonction $\frac{f}{g}$ est une fonction continue en a

Consigne 3 : limite à gauche et à droite

On considère la fonction h: $x \longmapsto \frac{x^2}{|x|}$

1) Détermine les restrictions h_1 et h_2 respectives de h aux intervalles $]-\infty; 0[\; et \;]0; +\infty[$
2) Calcule la limite l_1 de h_1 en 0 . (On dit que h(x) tend vers l_1 lorsque x tend vers 0 par valeur inférieure ou que h a pour limite l_1 à $gauche$)
3) Calcule la limite l_2 de h_2 en 0 . (On dit que h(x) tend vers l_2 lorsque x tend vers 0 par valeur supérieure ou que h a pour limite l_2 à $droite$)

Synthèse :

- *On note :* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$, *la limite de f à gauche en a*
- *On note :* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$, *la limite de f à droite en a*

Continuité à droite – Continuité à gauche :

Soit f une fonction définie en a :

✓ f est continue à gauche en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

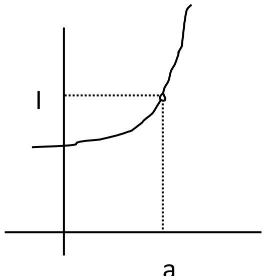
✓ f est continue à droite en a lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

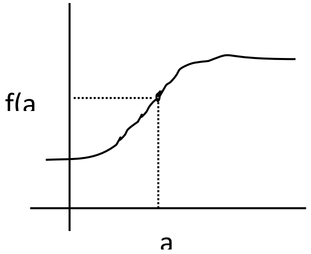
- ✓ f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite en a et continue à gauche en a

Propriété :

Soit a et l des réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a ;

- ✓ Dans le cas où f n'est pas définie en a : f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à l
- ✓ Dans le cas où f est définie en a : f admet une limite en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à f(a) ;





$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l\,;\, \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

Continuité sur un intervalle

Propriétés :

P1 : Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$ si et seulement si f est continue en tout élément de $]a;b[$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$

P2 : Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert $[a\,;b]$ si et seulement si f est continue sur $]a;b[$, continue à droite en a et à gauche en b.

Consigne 4 : Propriété

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par par : $f(x) \mapsto |x|$

1) Calcule les limites en a des restrictions de f au intervalle $]-\infty;0]$ *et* $[0;+\infty[$ puis justifie que f est continue en tout élément $a > 0$ et $a < 0$
2) Justifie que f est continue en 0
3) Déduis-en que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété :

P1 : La fonction valeur absolue est continue en tout élément de $\mathbb{R}$

P2 : Soit f une fonction continue en x_0 ;

- La fonction $|f|$ est continue en x_0
- Si de plus $f(x_0) \geq 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0

Consigne 5 :Propriété

On considère les fonctions u et v de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = 2x^2 + x - 1$ et $v(x) = x^2 + 5x - 4$

1) Justifie que $u \leq v$ sur $[1;3]$
2) Calcule puis compare les limites en 2 de u et v
3) Déduis-en une propriété
4) Soit f ;g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que $f \leq g \leq h$. Si f et h admettent la même limite l en a, démontre en utilisant le résultat précédent que g admet également la limite l en a

Propriété :

P1 : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que $f \leq g$ sur I

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$

P2 : Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que $f \leq g \leq h$ sur I (Théorème des gendarmes)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = l$

Remarque : Ces propriétés s'appliquent également aux cas de limites à gauche ou à droite.

Consigne 6 :Consolidation 1

Calcule la limite de la fonction f en a dans chacun des cas suivants

1)$f(x) = x^3 + 5x - 2 \;\; a = -1$ 2) $f(x) = \sqrt{-x} - 3x \; ; a = -4$

3) $f(x) = \dfrac{2sinx}{tanx} \;\; ; a = \dfrac{\pi}{3}$

4) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+4} \;\; ; \;\; a = 2$

5)$f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9} ; a = 3$

Consigne 7 :Consolidation 2

1) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2-3x}{9x^2-4} \; pour \; x \neq \dfrac{2}{3} \\ f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

a) Détermine le domaine de définition de f

b) Etudie la continuité de f en $\frac{2}{3}$

2) En utilisant une comparaison, justifie que la fonction g définie par $g(x) = x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite en zéro (0) à préciser

Activité4: Extension de la notion

Melon établit une relation $A(x)$ entre x et l'aire de la surface des carrés concentriques. Cette relation se traduit par la fonction $A(x) = \frac{3x+1}{2x}$. Melon s'intéresse au comportement de $A(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes et des valeurs de plus en plus proches de 0

Consigne 1 : Limite à l'infini

1) Complète les tableaux ci-dessous :

X	-10000	-100000	-1000000	10000	1000000	100000000
A(x)						

x	$-0{,}0001$	$-0{,}001$	$-0{,}01$	0,01	0,001	0 ,0001
A(x)						

2a) Dis le comportement de $A(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grand

b)Dis le comportement de $A(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeur inférieure

c) Dis le comportement de $A(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeur supérieure

Synthèse

- On peut rendre A(x) aussi proche de $\frac{3}{2}$ que l'on veut en choisissant x suffisamment grand :On dit la limite de A(x) lorsque x tend vers $+\infty$ est $\frac{3}{2}$ et on écrit $\lim_{x \to +\infty} A(x) = \frac{3}{2}$
- Par analogie on peut rendre A(x) aussi proche de $\frac{3}{2}$ que l'on veut en choisissant x suffisamment petit :On dit la limite de A(x) lorsque x tend vers $-\infty$ est $\frac{3}{2}$ et on écrit $\lim_{x \to -\infty} A(x) = \frac{3}{2}$
- On peut rendre A(x) aussi grand ou aussi petit que l'on veut en choisissant x suffisamment proche de 0 :On dit que A(x) a une limite infinie lorsque x tend vers 0 et on écrit $\lim_{x \to 0} A(x) = \infty$ $(-\infty \; ou \; +\infty$ selon que x tend vers 0 par valeur supérieure ou par valeur inférieure.

Propriétés :

$\lim_{x\to+\infty} k = k \ (k\epsilon\mathbb{R})$; $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ (nϵ N^*)

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \ Si \ n \ est \ impair \\ +\infty \ si \ n \ \ est \ pair \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $(\text{n}\epsilon \ N^*)$; $\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \ Si \ n \ est \ impair \\ +\infty \ si \ n \ \ est \ pair \end{cases}$$

Autres propriétés :

P1 : Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul :

- ✓ $\lim_{\substack{x\to a \\ x \succ a}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$
- ✓ $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} -\infty \ Si \ n \ est \ impair \\ +\infty \ si \ n \ \ est \ pair \end{cases}$

P2 : La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

P 3 : La limite à l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est égale à celle du quotient du monôme de plus haut degré de P par le monôme de plus haut degré de Q

P 4 : Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.

Interprétation graphique de limites (Asymptotes)

Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- ➢ La droite d'équation $x = a$ est asymptote parallèle à l'axe des ordonnées à (C) si et seulement si :

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ ou $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ ou $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = +\infty \ (-\infty)$

Illustration

- ➢ La droite d'équation $y = b$ est asymptote parallèle à l'axe des abscisses à (C) au voisinage au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$)

Illustration

Consigne 2(Consolidation)

On donne $f(x) = \frac{-5x+2}{x+3}$

1) Détermine le domaine de définition de f
2) a) Calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition
c) Précise les différentes asymptotes de la courbe représentative de f

Propriétés :

- ✓ Soit f une fonction. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ✓ Soit f une fonction. S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]a;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Ces résultats sont analogues $-\infty, x_0$. Les théorèmes (d'encadrement et des gendarmes) sont vrais lorsque x tend vers $-\infty$; $+\infty \ ou \ x_0$

Consigne 3 :Consolidation 1

Dans chacun des cas suivants, étudie la limite de la fonction f en x_0

1) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$
2) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$; $x_0 = -2$
3) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$; $x_0 = 1$
4) $f(x) = \frac{5}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$; $x_0 = 2$
5) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$

Consigne 4 : Consolidation 2

1) Calcule :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4}{1-2x};$$

2) On pose $f(x) = \frac{2-x}{9-x^2}$ et
3) $g(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^2+2x-3}$
   Détermine les limites de f et g respectivement en 3 et en 1
4) Calcule les limites suivantes :
   $\lim_{x\to2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$; $\lim_{x\to4} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim_{x\to4} \frac{2x-8}{4-x}$; $\lim_{x\to0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Consigne 5 : Consolidation 3

On considère les fonctions f, g, h et i définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = x^2+x+5 & si\ x \le 2 \\ f(x) = 3x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = x^2+7 & si\ x \le 2 \\ g(x) = 3x+5 & si\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x+4}{2x+3} & si\ x \le 0 \\ h(x) = x^2-x+a & si\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} & si\ x > 1 \\ i(x) = l & si\ x = 1 \end{cases}$$

1) Détermine le domaine de définition des fonctions f, g , h et i
2) Etudie la continuité de f et g en 2
3) Etudie la continuité de h en 0 suivant les valeurs du nombre réel a
4) Détermine la valeur du nombre réel l pour laquelle i est continue en 1

Activité 5: Dérivation

Pour être en bonne forme pour la compétition, Melon fait du surplace sur un tapis roulant. L'appareil affiche régulièrement la distance $d(t)$ parcourue en fonction du temps. Melon $decide$ de connaître sa vitesse moyenne V_m ; il relève alors les distances $d(t_0)$ et $d(t_1)$ aux instants respectifs t_0 et t_1 $(t_0 < t_1)$

Consigne 1 :Définition

1) Exprime V_m en fonction de t_0 , t_1 et des distances correspondantes. (La vitesse moyenne ainsi obtenue est appelée taux de variation de la fonction distance entre t_0 et t_1)
2) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+4$. Détermine le taux de variation de f entre 1 et 2

Définition :

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f ; on appelle fonction taux de variation de f en x_0, la fonction notée T_{x_0} et définie sur D_f -{x_0 } par :

$$T_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Dérivabilité d'une fonction :

Une fonction f définie en x_0 est dérivable en x_0 si son taux de variation T_{x_0}a une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

- ✓ On a alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- ✓ En posant h=x-x_0 on a

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et x_0 un élément de K et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $M_o(x_0; f(x_0))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(x_0)$ et d'équation : $y = f'(x_0)(\mathrm{x} - x_0) + f(x_0)$

Consigne 2(Dérivabilité à gauche et à droite)

Soit la fonction définie la fonction $f(x) = |x^2 - 4|$

1) Détermine les restrictions de f faux intervalles $]-\infty; -2]$; $[2; \infty+[$ et $]-2; 2[$
2) Calcule alors les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad et \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

3) f est –elle dérivable en 2 ?

Dérivabilité à gauche-Dérivabilité à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et x_0 un élément de K.

- ➢ On dit que f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe un nombre réel l tel

que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.

Le nombre réel l est appelé nombre dérivé de f à gauche en x_0 noté $f'_g(x_0)$.

- ➢ On dit que f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un nombre réel l' tel

que : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'$.

Le nombre réel l' est appelé nombre dérivé de f à droite en x_0 noté $f'_d(x_0)$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et x_0 un élément de K.

f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\begin{cases} f est\ dérivable\ à\ gauche\ en\ x_0 \\ f\ est\ dérivable\ à\ droite\ en\ x_0 \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \end{cases}$$

Dérivabilité sur un intervalle

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. L'ensemble de dérivabilité de f est l'ensemble des nombres réels de D_f où elle est dérivable.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

On dit que f dérivable sur l'intervalle

- $]a, b[$ lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
- $[a, b]$ lorsqu'elle est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.
- $[a; b[$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a.

Demi-tangentes

- Si f est dérivable à gauche en x_0 alors sa courbe représentative

admet au point $M_o(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente (T_g) de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ définie par : $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \le x_0 \end{cases}$

- Si f est dérivable à droite en x_0 alors sa courbe représentative admet au point $M_o(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente (T_d) de coefficient directeur $f_d'(x_0)$ définie par : $\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$

- f est une fonction définie et continue sur un intervalle K contenant a. Lorsque la limite à droite ou la limite à gauche en a de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie, la représentation graphique de f admet un demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point $M_o(a; f(a))$.

On distingue les cas suivants :

- ✓ Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet au point $M(a; f(a))$ une demi tangente verticale définie par le système : $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$.

- ✓ Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe (C_f) admet au point $M(a; f(a))$ une demi tangente verticale définie par le système : $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$.

Consigne 3 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de la fonction f en x_0 puis donne une interprète géométrique des résultats obtenus

1) $f(x) = x^2 - x;\ x_0 = 1$
2) $f(x) = \frac{x+1}{x-1};\ x_0 = 2$
3) $f(x) = \sqrt{x};\ x_0 = 0$
4) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \ si\ x < 0 \\ x^2 + 1 \ si\ x \geq 0 \end{cases};\ x_0 = 0$

Consigne 4 :Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K

1) Vérifie que : $\forall x \epsilon K$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2) Déduis-en que si f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3) Tire donc une conclusion par rapport à la continuité de f en x_0
4) La fonction valeur absolue est continue en 0 ; est-elle dérivable en 0 ?

Propriété :

Si une fonction est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0

Remarque : La réciproque n'est pas toujours vraie c'est-à-dire toute fonction en x_0 n'est pas dérivable en x_0

Consigne 5 : Fonction dérivée

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 3$

1) Soit x_0 un nombre réel ; justifie que pour nombre réel x distinct de x_0 on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$

2) Déduis-en que la fonction f est dérivable en tout élément x_0 de $\mathbb{R}$ et précise $f'(x_0)$

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K . On appelle fonction dérivée de f sur K, la fonction notée f' qui à tout x élément de K associé le nombre dérivé $f'(x)$ de f . L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f .

Tableau des dérivées des fonctions élémentaires

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont des constantes réelles.

Fonctions f	Intervalles sur lesquels f est dérivable	Dérivées f'
$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$
$x \longmapsto x^n$; $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^r$; $r \in \mathbb{Q}$	$]0;+\infty[$	$x \longmapsto rx^{r-1}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto sinx$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto cosx$
$x \longmapsto cosx$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -sinx$
$x \longmapsto tanx$	Tout intervalle de $\mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$	$x \longmapsto \frac{1}{cos^2x} = 1+tan^2x$
$x \longmapsto cotanx$	Tout intervalle de $\mathbb{R}\backslash \{k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}\}$	$x \longmapsto -\frac{1}{sin^2x} = -(1+cotan^2x)$

Consigne 6 : Dérivées et opérations sur les fonctions

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K

1) Démontre que la fonction $(u+v)$ est dérivable sur K et $(u+v)' = u'+v'$
2) Démontre que la fonction (uv) est dérivable sur K et $(uv)' = u'v+v'u$
3) On suppose que v est non nul pour élément x de k

a) Démontre que la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur K et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

b) En utilisant les résultats précédent et la question 2) montre que la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur K et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Tableau des opérations sur les dérivées

Dans le tableau ci-dessous, a, b et α sont de constantes réelles ; u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle K

Fonctions	Dérivées
αu	$\alpha u'$
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-asin(ax+b)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'sin(u)$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{cos^2u} = u'(1+tan^2(u))$
$\text{cotan}(u)$	$-\frac{u'}{sin^2u} = -u'(1+cotan^2(u))$

Dérivée seconde d'une fonction dérivable d

Définition

Soit f une fonction et K un intervalle.

- Si f est dérivable sur K, sa dérivée f' est appelé dérivée première de f ;
- Si f' est dérivable sur K, sa dérivée f'' est appelé dérivée seconde de f

Exemple :

Sens de variation d'une fonction :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K :

- f est croissante si et seulement si f ' est positive sur K ;
- f est décroissante si et seulement si f ' est négative sur K ;
- f est constante si et seulement si f ' est nulle sur K ;

Remarque :

Si f' a un signe constant sur un intervalle K et ne s'annule qu' en un nombre fini d'élément de K alors f est strictement monotone sur K.

Propriété : Extrémum d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle] a, b [et x_0 un élément de] a, b [; Si f ' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extrémum relatif en x_0 (Maximum ou minimum)

Consigne 7 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calcule sa dérivée

1) $f(x) = -5x^3 + 4x^2 + 2$;
2) $f(x) = x^2 \cos^4 x + x - 1$
3) $f(x) = \frac{2-4x}{x^2-2}$;
4) $f(x) = \tan^2 x$
5) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{-2x + x^2}$;
6) $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{7})$

Consigne 8 : Asymptote oblique

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+5}{x-3}$

1) Détermine les réels a ,b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{C}{x-3}$
2) Déduis-en que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)$=0

   On dit que la droite d'équation y=ax+b est asymptote à la courbe représentative de f

Propriété :

On dit que la droite (D) d'équation $\mathrm{y = ax + b}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$

Illustration

Branches paraboliques

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C)

admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty(-\infty)$ alors la

courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \infty$

avec a$\in \mathbb{R}^*$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$..

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$

avec a$\in \mathbb{R}^*$ et b $\in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

Définition analogue au voisinage de $-\infty$

Etude de fonction

Pour étudier une fonction en l'absence de consignes particulières, on peut procéder comme suit :

- Déterminer l'ensemble de définition
- Etudier le comportement (calcul des limites) aux bornes de l'ensemble de définition
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en tout point de son ensemble de dérivabilité
- Calculer sa dérivée et préciser son sens de variation
- Regrouper les résultats ainsi obtenus dans un tableau de variation
- Tracer la courbe représentative de f , après avoir éventuellement préciser et tracer les asymptotes.

Consigne 9 : Consolidation

I) **Etude d'une fonction polynôme**

Etudie la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$$

II) **Etude d'une fonction rationnelle**

III) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) Détermine l'ensemble de définition de g
2) Etudie le sens de variation de g puis dresse le tableau de variations de g
3) Montre qu'il existe des réels a ,b et c tels que, pour réel $x \neq 1, on\ ait$:

$$g(x) = ax + b + \frac{C}{x-1}$$

4) Démontre que la droite (D) d'équation

y=x-2 est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

5) Précise les autres asymptotes puis trace ces asymptotes et construis la courbe représentative de g

Activité 7 ***Primitive d'une fonction***

Melon après avoir pris connaissance de la notion des dérivées, veut connaître les liens entre une fonction et sa dérivée.

Consigne 8.1

On considère les fonctions suivantes :

$f(x) = (x+1)^2 + 1$ *et* $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 3$

1) Détermine l'ensemble de dérivabilité Kde F.
2) Détermine la dérivée première de F et compare le résultat à f.

Stratégie : TI : ***TG :*** ***TC :***

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K.

On appelle primitive de f sur K toute fonction F de K vers $\mathbb{R}$ dérivable sur K et telle que pour tout x élément de K ; $F'(x) = f(x)$.

2. Propriétés

P_1 : Toute fonction continue sur un intervalle K admet une primitive sur K.

P_2 : Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K.

- Pour tout nombre réel a, la fonction $x \longmapsto F(x) + a$ est une primitive de f sur K.
- Toute primitive de f sur K est de la forme $x \longmapsto F(x) + a$; $(a \in \mathbb{R})$.

P₃ : Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle K, y_0 un nombre réel et x_0 un élément de K. Il existe une primitive de f sur K et une seule qui prend la valeur $y_0$en x_0.

3. *Primitives et opérations sur les fonctions*

Propriété

Soit f et g deux fonctions admettant respectivement pour primitive sur un intervalle K les fonctions Fet G.

- La fonction $f + g$ admet pour primitive sur K la fonction $F + G$.
- La fonction (αf); $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$ admet pour primitive sur K la fonction αF.

4. *Primitives de fonctions usuelles*

a , $b$et$c$ sont des constantes réelles.

Fonction f	*Primitives de f*	*Sur l'intervalle*
$x \mapsto a\ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N} - \{1\})$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ***ou***$]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto x^r\ (r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0; +\infty[$ ***si*** $r \geq 0$ $]0; +\infty[$ ***si*** $r < 0$
$x \mapsto sinx$	$x \mapsto -cosx + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto sinx + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$	$x \mapsto tanx + c$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$
$x \longmapsto 1 + cotan^2x = \frac{1}{sin^2x}$	$x \longmapsto -cotan\ x + c$	$]k\pi\ ;\ \pi + k\pi[$

Consigne 8.2

On considère les fonctions définies par : $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = 3\sin x - 2\cos x$.

1) Détermine les primitives de chacune de ces fonctions sur un intervalle K que l'on précisera.
2) Détermine la primitive F sur K de f qui prend la valeur 2 pour $x = -1$.
3) Détermine la primitive G sur K de g qui s'annule en π.

Stratégie : TI : ***TG :*** ***TC :***

Séquence 5 : SUITES NUMERIQUES

Activité1 : Généralités sur les suites

Pour suivre sa progression , Mélon coche à la fin de chaque entrainement un disque dont le rayon est égal au nombre n de tirs réussi lors de l'entrainement

Consigne 1(Définition)

1) Donne en fonction de n, l'aire de la surface f des disques
2) Quel est l'ensemble de définition de f
3) On suppose qu'au 1^{er}entrainement, Mélon a réussi un tir ; au $2^{ème}$, il en a réussi deux…Détermine f(n+1) en fonction de f(n)

Définition :

On appelle suite numérique U , toute fonction de IN vers IR. . E étant l'ensemble de définition d'une suite numérique $n \mapsto u_n$, on note cette suite $(u_n)_{n\in E}$ ou (u_n) si aucune confusion n'est à craindre.

L'image d'un entier naturel n par U , notée U_n est appelée le terme général de la suite ou encore terme d'indice n.

Remarque :

Une suite peut être définie à l'aide d'une formule exprimant U_n en fonction de n (formule explicite) ou par son premier terme et un procédé permettant à partir de chaque terme, de calculer le terme suivant (formule de récurrence)

Exemple :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} : U_n = \pi n^2$ (**formule explicite)**

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = V_n + (2n+1)\pi \end{cases}$ **(formule de récurrence)**

Domaine de définition

Dans la pratique l'ensemble de définition E d'une suite est l'ensemble des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à un nombre entier donné.

Exemple :

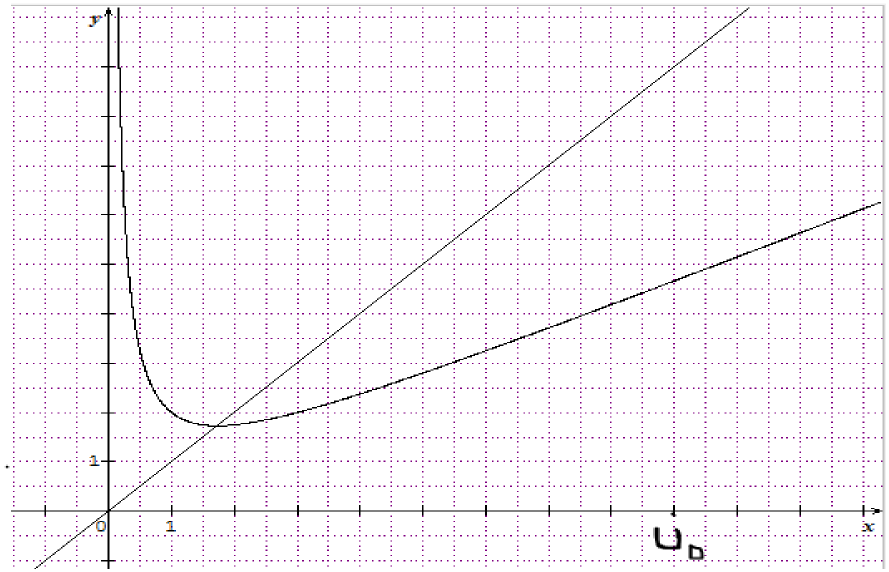
$U_n = \frac{5n}{n^2-2n}$; $E = \{n \epsilon \mathbb{N} \,/\, n \geq 3\}$

$U_n = \frac{n^2+n+5}{n}$; $E = \{n \epsilon \mathbb{N} \,/\, n \geq 1\}$

Représentation graphique d'une suite

Une suite numérique étant une fonction, on peut donc la représenter dans le plan mini d'un repère. Il est également possible de représenter les termes d'une suite sur l'axe des ordonnées.

On donne la suite $(\boldsymbol{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Soit (C) la courbe représentative f dans ce repère
(O, I, J).(Δ) est la droite dont une équation est $y = x$.



1)a) Place le point M_0 de coordonnées (u_0, u_1) avec $u_1 = f(u_0)$.On désigne par P_0le point de (Δ)d'ordonnée u_1.
b) Quelle est l'abscisse du point P_0 ?
c) Donne alors une méthode de constructions de u_1 sur l'axe des ordonnée et sur l'axe des abscisses.
2) Construction de u_2 sur les axes de coordonnées.
Soit M_1 le point de (C) d'abscisse u_1.
Quelle est l'ordonnée de M_1?
3) Soit P_1 le point de (Δ) d'ordonnée u_2.
a) Quelle est l'abscisse de P_1?
b) Donne alors une méthode pour construire u_2 sur les axes de coordonnées.
4)On construit ainsi de proche en proche sur les axes de coordonnées les termes de $(\boldsymbol{U_n})$

***Stratégie* : TI :10 min TG : 10 min TC :10 min**

Réinvestissement

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :$U_n = \frac{n^2}{9} - 1$; $\begin{cases} V_0 = \frac{3}{2} \\ V_{n+1} = 4 - V_n \end{cases}$

1) Calcule U_3 , U_6 et le cinquième terme de la suite (V_n)

2) a) Construis dans un repère (O , I ,J), la courbe représentative de la fonction f : $x \longmapsto \frac{x^2}{9} - 1$

b) Utilise cette courbe pour représenter sur l'axe (OJ) , les 6 premiers termes de la suite (U_n)

3) a) Dans un autre repère orthonormé (O,I ,J), construis la courbe représentative de la fonction g : $x \longmapsto 4 - x$ et la droite d'équation y = x

b) En déduire une représentation des 4 premiers termes de la suite (V_n)

Consigne 3(Définitions et propriété)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite de terme général $U_n = \frac{3n}{n+1}$

1) Démontre que (U_n) est bornée
2) Construis sur $[0; +\infty[$, la courbe représentative de la fonction f : $x \longmapsto \frac{3x}{x+1}$
3) En déduire le sens de variation de la suite (U_n)
4) **Information** : Une suite est convergente lorsqu'elle a une limite finie. Justifie que la suite (U_n) est convergente

Définitions :

Soit une suite numérique $(u_n)_{n \in E}$.

.

- ✓ $(u_n)_{n \in E}$ est majorée (respectivement minorée) si et seulement si il existe un réel M (respectivement il existe un réel m) tel que $\forall \; n \in E, \; u_n \leq M$ (respectivement $\forall \; n \in E, u_n \geq m$).
- ✓ $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire qu'il existe m et M tel que $\forall \; n \in E, m \leq u_n \leq M$

Propriétés

Soit une suite numérique $(u_n)_{n \in E}$.

- ✓ $(u_n)_{n \in E}$ est constante si tous les termes de la suite ont la même valeur ($\forall \, n \in E, u_{n+1} = u_n$).
- ✓ $(u_n)_{n \in E}$ est croissante (respect décroissante) si et seulement si pour tout n élément de E ,$u_n \leq u_{n+1}$($respect. u_n \geq u_{n+1}$)
- ✓ $(u_n)_{n \in E}$ est strictement croissante (respect strictement décroissante) si et seulement si pour tout n élément de E ,$u_n < u_{n+1}$($respect. u_n > u_{n+1}$)

Remarque (Méthodes pratiques)

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique $(u_n)_{n \in E}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- Pour une suite de termes positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 ;
- Lorsque u_n est définie par une formule explicite $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de f.
- Lorsque u_n est définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ on utilise le raisonnement par récurrence.

Convergence d'une suite

Soit $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{E}}$ une suite numérique

On dit que la suite $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{I}}$ est convergente lorsqu'elle admet une limite finie. Elle est divergente dans le cas contraire.

Propriétés

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente
- Toute suite croissante et non majorée est divergente
- Toute suite décroissante et non minorée est divergente
- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, $(\mathrm{u_n})$ une suite de nombres réels de I definie par $U_n = \mathrm{f(n)}$ et l un nombre réel :
  - ✓ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ alors (U_n) converge vers un nombre réel l
  - ✓ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \infty$ alors (U_n) diverge

Consigne4 :Consolidation

1) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par :$U_n = -n^2+1$; $V_n = 2 - \frac{1}{2n}$ et $W_n = 3 \times 2^n$

a) Vérifie si les suites (U_n) et (V_n) sont bornées

b) Etudie le sens de variation de ses trois suites

2) Etudie la convergence de la (W_n) dans chacun des cas suivants :

a) $W_n = \frac{3n^2+1}{5n^2+2n+3}$

b) $W_n = \sqrt{n^2+1}$

c) $W_n = \frac{2n}{2n+5}$

d) $W_n = \frac{2n+7}{4n^2+5}$

e) $W_n = \frac{n^2+1}{2n+3}$

Activité2 : Suites arithmétiques

Mélon s'intéresse au périmètre des disques qu'il coche à la fin de chaque entrainement

Consigne 1(Définition et propriété)

1) Donne en fonction de n, le périmètre U_n du disque

2) a) Calcule U_1, U_2, U_3 *et* U_4 puis $U_2 - U_1; U_3 - U_2; U_4 - U_3$

b)Que remarques-tu ?

3) Détermine U_{n+1} en fonction U_n

Définition :

Une suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ est dite arithmétique si et seulement si il existe un nombre réel r tel que pour tout élément n de E, on a : $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre réel r est appelé la raison de la suite (U_n)

Propriétés

P1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_o . Pour tout nombre entier naturel n on a $u_n = u_0 + nr$

P2 : De façon générale si le premier terme est u_k alors pour tout nombre entier naturel n on a $u_n = u_k + (n-k)r$

Consigne 2 : Somme des termes consécutifs

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0

1) Pour tout entier naturel p tel que $0 \le p \le n$ on a : $U_p + U_{n-p} = U_0 + U_n$

2) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n$

a) Ecris la somme S_n en commençant par le terme d'indice le plus grand

b) Prouve que 2 $S_n = (n+1)(U_0 + U_n)$ puis déduis que $S_n = \frac{1}{2}(n+1)(U_0 + U_n)$

Propriété

Soit S_n , la somme des n premiers termes de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, U_0 est le premier terme de cette somme et U_{n-1} est le dernier terme de cette somme : $S_n = u_0 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$

$S_n = nombre\ de\ terme \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$

Consigne 3 : Consolidation 1

1) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique tels que $U_0 = 4$ et $U_3 = 17$. Calcule U_{45}

2) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite tel que $W_n = -3n + 7$. Démontre que (W_n) une suite arithmétique dont tu préciseras la raison

3) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de raison (-5) et de premier terme $V_0 = 3$. Détermine la somme des termes de V_1à V_{10} de cette suite

Consigne 4 : Consolidation 2 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $U_n = U_{n+1} - 5$

a) Démontre que (U_n) est une suite arithmétique et précise sa raison

b) Détermine U_n explicitement en fonction de n

c) Calcule $S_n = U_3 + U_4 + \cdots + U_n$ et détermine pour que $S_n = 6456$

Activité3 : Suites géométriques

Mélon envisage connaître l'aire de la surface des carrées concentriques dans le dispositif de leur évaluation. Ce dispositif est constitué d'un carré ABCD de côté 8dm et d'une suite de carrés telle que les sommets du carré à construire sont les milieux du carré précédent

Consigne 1(Définition et propriété)

C_0 désigne le côté du carré ABCD, C_1 *et* C_2 désignent respectivement les côtés du premier et du deuxième carré construis à l'intérieure de ABCD

1) On note V_n l'aire de la surface du carré de côté C_n $(n \epsilon \mathbb{N})$
   a) Calcule $V_0; V_1$ *et* V_2 puis $\frac{V_1}{V_0}$ et $\frac{V_2}{V_1}$
   b) Que remarques-tu ?
2) Détermine V_{n+1}en fonction V_n

Définitions :

Une suite numérique $(u_n)_{n \in E}$ est dite géométrique si et seulement si il existe un nombre réel q tel que pour tout élément n de E, on a : $u_{n+1} = q\, u_n$. Le nombre réel q est appelé la raison de la suite (u_n)

Propriété

P1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p. Pour tout entier naturel n $on\ a\ \ u_n = q^{n-p} u_p$ (preuve)

P2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique . S' il existe deux nombres réels α *et* q tel que pour tout entier naturel n $on\ a\ \ u_n = \alpha q^n$ alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = \alpha$

Limites remarquables

Soit q un nombre réel strictement positif

✓ Si $0 < q < 1\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

✓ Si $q = 1\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

✓ Si $q > 1\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Consigne 2 :Somme des termes consécutifs

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q ; S_n la somme de (n+1) termes consécutifs de cette suite. V_0 désigne le premier terme de la somme S_n

1) Ecris S_n en fonction des termes consécutifs
2) Justifie que $S_n - qS_n = V_0 - V_0 q^{n+1}$
3) Déduis-en S_n :
   a) Si $q \neq 1$
   b) Si q=1

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . La somme S_n des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$

✓ Si $q = 1\ \ alors\ \ S_n = nu_0$

✓ Si $q \neq 1\ \ alors\ S_n = u_0 \times \frac{q^n - 1}{q-1}$ ou

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= premier\ terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ terme}}{1 - raison}$$

Consigne 3 : Consolidation

1) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite géométrique tels que $V_1 = 6$ et $V_4 = 48$. Calcule V_{15}
2) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1) \end{cases}$

a-) Démontre que la suite (v_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique. Précise sa raison et son premier terme.

b-) Exprime v_n puis u_n en fonction de n.

c-) Etudie la convergence de la suite (u_n).

d-) Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$ et $T = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

Principe du raisonnement par récurrence

Soit (P_n) $(n \in I)$ une proposition .

Pour démontrer que (P_n) est une proposition vraie, on procède comme suit :

- On vérifie que (P_{n_0}) est vraie (n_0 étant le plus petit élément de I).
- On suppose que pour tout entier naturel $k \geq n_0$, (P_k) est vraie.
- On démontre que (P_{k+1}) est vraie. On conclut que la proposition (P_n) est vraie.

Consigne 4 : Consolidation

Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n

a) $10^n - 1$ est divisible par 9.

b) $1 + 2 + 3 + \cdots \ldots . + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

.

Consigne 5 : Consolidation

On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 35} \end{cases}$

a) Démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 7$

b) Démontre que la suite (v_n) est croissante

SA 3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquence 1: Angles orientés-trigonométrie

Activité1 : Angles orientés

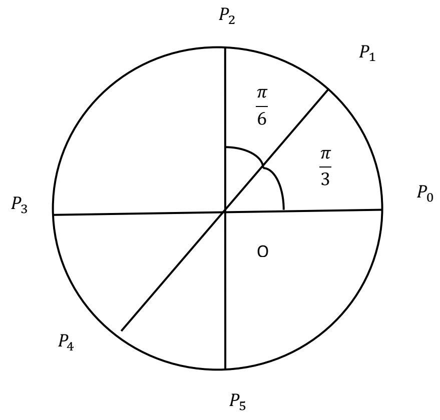
Pour signaler le début de la récréation, le surveillant du lycée a appuyé longuement sur le bouton qui actionne la sirène. L'aiguille fait alors plusieurs tours avant de s'immobiliser

INFORMATIONS

- ✓ Sur un cercle, il existe deux sens de parcours, un sens positif ou direct et un sens négatif ou indirect. Par convention, le sens positif est le sens contraire au sens de déplacement des aiguilles d'une montre.
- ✓ Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle angle orienté, le couple de deux vecteurs non nuls. Il se note souvent $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ ou tout simplement $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$

Consigne 1 :Définition et propriété

Voici quelques positions du bout de l'aiguille dans son déplacement



1) Donne une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_1}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_3}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_4}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_5}})$
2) Vérifie que :
$(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_1}})$+ $(\widehat{\overrightarrow{OP_1};\overrightarrow{OP_2}})$= $(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_2}})$
3) On suppose que l'aiguille a fait n tours $(n \in \mathbb{N})$ et se retrouve à une position P_n confondue à P_1. Donne en fonction de n une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OP_0};\overrightarrow{OP_n}})$

Propriété :

P1 : Si θ *et* θ' sont deux mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ alors il existe un et un seul nombre entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$

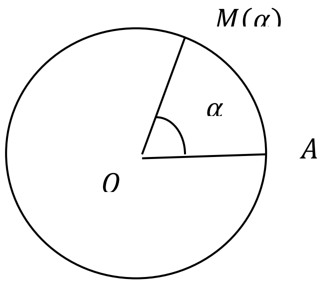
P2 : Tout angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ admet une et une seule mesure α *dans* $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle.

P1 : Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ trois vecteurs non nuls , k un nombre réel on a : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{u'}}) + (\widehat{\vec{u'};\vec{v}})$

Définition :

$\forall x \epsilon \mathbb{R}$, $\exists \alpha \epsilon [0,2\pi[$ tel que $x = \alpha + 2k\pi;\ k\epsilon\ \mathbb{Z}$

La relation de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrie (C), qui à $x = \alpha + 2k\pi$ ($k\epsilon\ \mathbb{Z}$; $\alpha\epsilon[0,2\pi[$) associe le point M de (C) tel que mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}})=\alpha$ avec A un point donné sur (C) , est une surjection. Cette surjection est appelée surjection canonique et M est l'image de α par cette surjection.



Remarque 1 :

Dans un repère orthonormé d'origine O, le cercle de centre O , de rayon 1 et orienté positivement est appelé cercle trigonométrique.

Remarque 2 :

Si $x = \alpha + 2k\pi$ ($k\epsilon\ \mathbb{Z}$) alors on note $x \equiv \alpha[2\pi]$ et on lit x congru α modulo 2π.

Congruence :

Pour tous nombres réels x et y on a $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow\ x = y + 2k\pi$ ($k\epsilon\ \mathbb{Z}$)

Consigne :

Soit x,y et z des nombres réels. Démontre que $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow\ x + z \equiv y + z[2\pi]$

Définitions :

- ✓ Soit $\hat{\alpha}\ et\ \hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives $\alpha\ et\ \beta$.On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}\ et\ \hat{\beta}$, l'angle orienté noté $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$ dont l'une des mesures est $\alpha + \beta$
- ✓ Deux angles orientés sont égaux quand il existe une mesure de l'un égale à une mesure de l'autre
- ✓ Deux angles orientés sont opposés quand il existe une mesure de l'un opposée à une mesure de l'autre

Consigne 2 : Consolidation

1) Détermine la mesure principale de $\frac{37\pi}{3}$; 48π ; 31π et - $\frac{119\pi}{4}$
2) Donne trois (3) autres mesures de l'angle orienté $\frac{21\pi}{4}$

Consigne 3 :Propriété

Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ $\vec{u'}\ et\ \vec{v'}$ quatre vecteurs et k un nombre réel. Démontre que :

1) $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'};\vec{v'}}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u};\vec{u'}}) = (\widehat{\vec{v};\vec{v'}})$
2) $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$
3) Si k> 0 alors$(\widehat{k\vec{u};\vec{v}})=(\widehat{\vec{u};k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$
4) Si k< 0 alors$(\widehat{k\vec{u};\vec{v}})=(\widehat{\vec{u};k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) + \pi$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ $\vec{u'}\ et\ \vec{v'}$ quatre vecteurs non nuls et k un nombre réel.

- ✓ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'};\vec{v'}}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u};\vec{u'}}) = (\widehat{\vec{v};\vec{v'}})$
- ✓ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$. Autrement dit si θ est une mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ alors $-\theta$ est une mesure de $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$
- ✓ Si k> 0 alors$(\widehat{k\vec{u};\vec{v}})=(\widehat{\vec{u};k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

- ✓ Si k< 0 alors$(\widehat{k\vec{u};\vec{v}})=(\widehat{\vec{u};k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u};\vec{v}})+\pi$ (si θ est une mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ alors $\pi+\theta$ est une mesure de $(\widehat{\vec{u};-\vec{v}})$
- ✓ $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ (si θ est une mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ alors θ est une mesure de $(\widehat{-\vec{u};-\vec{v}})$

Consigne 4 : Consolidation

On considère un carré ABCD de sens indirect et O est le centre de ABCD.

Détermine la mesure des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}})$; $(\widehat{\overrightarrow{DO};\overrightarrow{DC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}})$ $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}})$

Angles orientés nuls, droits et plats

Propriété :

Soit $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\hat{\delta}$, l'angle orienté droit direct on a :

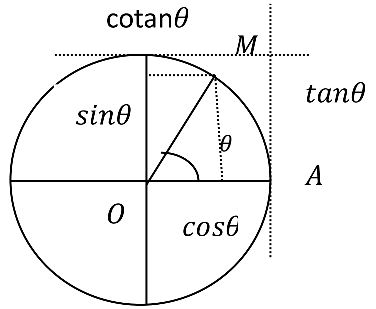
- ✓ $2\hat{\alpha}=\hat{0} \Leftrightarrow \hat{\alpha}=\hat{0}$ ou $\hat{\alpha}=\hat{\pi}$
- ✓ $2\hat{\alpha}=2\hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\alpha}=\hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha}=\hat{\beta}+\hat{\pi}$
- ✓ $2\hat{\alpha}=\hat{\pi} \Leftrightarrow \hat{\alpha}=\hat{\delta}$ ou $\hat{\alpha}=-\hat{\delta}$

Activité2 : Trigonométrie

Zoé voudrait étudier les liens trigonométriques, des angles orientés engendrés par le déplacement de l'aiguille de la sirène.

INFORMATIONS

- En considérant la figure ci-dessous où (C) est un cercle trigonométrique, (O,I ,J) repère orthonormé



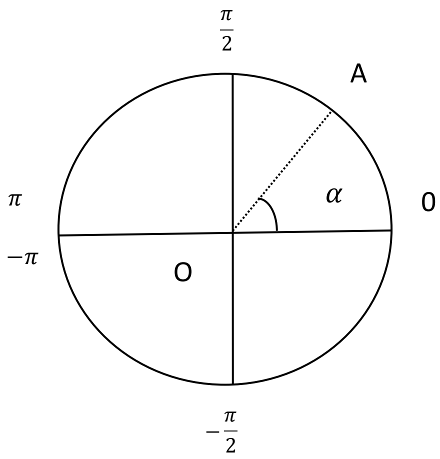
- ✓ Le cosinus de θ *noté* $\cos\theta$ est l'abscisse de M
- ✓ Le sinus de θ *noté* $\sin\theta$ est l'ordonnée de M
- ✓ La tangente de θ est le nombre réel noté $\tan\theta$ et définie par $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ avec $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

- Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif k on a **les propriétés suivantes :**

- $-1\leq\cos\theta\leq 1$; $-1\leq\sin\theta\leq 1$;
- $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta;\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$
- $\tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta;\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$;
- $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ avec $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

Consigne 1 : Propriété

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous ; A est l'image de l'angle orienté α



1) Place sur ce cercle les points B, C et D images respectives des angles orientés $\pi - \alpha$; $\pi + \alpha$ et $-\alpha$
2) a) Ecris $\cos(-\alpha)$; $\cos(\pi+\alpha)$ et $\cos(\pi-\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$

   b) Ecris $\sin(-\alpha)$; $\sin(\pi+\alpha)$ et $\sin(\pi-\alpha)$ en fonction de $\sin\alpha$

3) Place sur ce cercle les points E et F images respectives des angles orientés $\frac{\pi}{2} - \alpha$; et $\frac{\pi}{2} + \alpha$
4) a) Ecris $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ et $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ en fonction de $\sin\alpha$

   b) Ecris $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$

Synthèse :

Pour tout nombre réel α on a :

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; $\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$; $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$; $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$

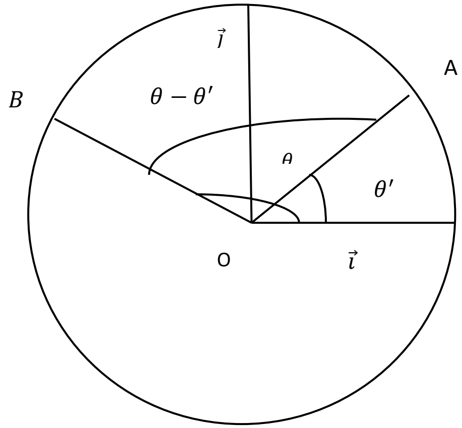
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha)$; $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos(\alpha)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(\alpha)$

Fais un rappel sur tableau trigonométrique et cercle trigonométrique

Consigne 2 : Formule d'addition

On donne la figure ci-dessous



Démontre que $\forall \theta, \theta' \epsilon \mathbb{R}$ on a ;

$$\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$$

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$

$$\sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$$

$$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$$

Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b :

cos(a + b) = cos a cos b – sin a sin b

cos (a - b) = cos a cos b + sin a sin b

sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a

sin (a-b) = sin a cos b – sin b cos a

Consigne 3 : Formule de duplication et de linéarisation

Démontre les propriétés suivantes :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

Formules de duplication et de linéarisations

Pour tout nombre réel a on a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

Autres formules (Conséquences des formules d'addition)

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

En posant $a + b = p$ et $a - b = q$ on a

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Consigne 4 : Propriété

Soit α un tel que $\tan\frac{\alpha}{2}$ soit défini. On pose $\tan\frac{\alpha}{2} = t$

Démontre que :

1) $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
2) $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$
3) $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

Propriété :

Pour tout nombre réel α un tel que $\tan\frac{\alpha}{2}$ soit défini. En posant $\tan\frac{\alpha}{2} = t$ on a :

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \; ; \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Consigne 5 :Consolidation

Démontre que pour tout nombre réel α on a

1) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha+\frac{4\pi}{3}) = 0$
2) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha+\frac{4\pi}{3}) = 0$

Activité3 : Equations et inéquations trigonométriques

Informations :

- ❖ Pour tout nombre réel t$\epsilon[-1;1]$ il existe au moins un nombre réel $\alpha\epsilon]-\pi;\pi]$ tel que $\cos\alpha = t$
- ❖ Pour tout nombre réel t$\epsilon[-1;1]$ il existe au moins un nombre réel $\alpha\epsilon]-\pi;\pi]$ tel que $\sin\alpha = t$
- ❖ Pour tout nombre réel t$\epsilon[-1;1]$ il existe au moins un nombre réel $\alpha\epsilon\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = t$

- **Equation du type cos$x$=a**

  Pour tous nombres réels x *et* α on a :

$\cos x = cos\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \; ou \; x = -\alpha + 2k\pi, (k\epsilon\mathbb{Z})$

- **Equation du type sin$x$=a**

Pour tous nombres réels x *et* α on a :

$\sin x = sin\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \; ou \; x = \pi - \alpha + 2k\pi, (k\epsilon\mathbb{Z})$

- **Equation du type tan$x$=a**

Pour tous nombres réels x *et* α tels que $tanx$ *et* $tan\alpha$ soit défini on a :

$$\tan x = tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi \;, (k\epsilon\mathbb{Z})$$

Remarque :

$$sinx = 0 \iff x = k\pi, (k\epsilon\mathbb{Z}) et \; cosx = \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k\epsilon\mathbb{Z})$$

Consigne 1 : Résolution

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1) $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
2) $\sin(x-\frac{\pi}{4}) + \sin(x+\frac{\pi}{6})=0$
3) $\tan 3x = -\sqrt{3}$
4) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})$

Quelques cas particuliers :

- **Equation du type acos$x$ + $bsinx + C = 0$**
  - ✓ Si $a = 0 \; ou \; b = 0$, On se ramène à une équation du type $sinx = a' \; et \; cosx = a'$
  - ✓ Si $(a,b) \neq (0;0)$ alors $a^2 + b^2 \neq 0$ et on a :
    $acosx + bsinx + C = 0 \iff \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx\right) + C = 0$ Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ donc il existe un réel θ tel que cos$\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$acosx + bsinx + C = \iff (cos\theta cosx + cos\theta sinx) = -\frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$acosx + bsinx + C = \iff \cos(x-\theta) = -\frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On se ramène à résoudre l'équation :

$$\cos(x-\theta) = -\frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- **Equation du type sin$x$=cosα et cos$x$=sinα**

Il suffit de transformer à l'aide de formule trigonométrique sinα en cosα et cosα en sinα

Consigne 2 : Résolution

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{7})$
3) $\cos 2x = \sin(\frac{\pi}{4} + x)$

Consigne 3 : Inéquation

1) Résous les inéquations $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ sur les intervalles $]-\pi;\pi]$; $[0;2\pi]$ et $\mathbb{R}$

2) Résous les inéquations $\cos x < \frac{1}{2}$ et $\cos 4x \geq -\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

Activité4 : Fonctions circulaires

Zoé constate qu'en dehors des fonctions étudiées jusqu'à ici certaines fonctions reste encore à étudier tel que $f_1(x) = x^2 + 3$ et $f_2(x) = \frac{5x^2+3}{x}$.

Consigne 1 :Parité

1) Justifie que pour tout $x\epsilon\mathbb{R}$, $-x\epsilon\mathbb{R}$ et $f_1(-x) = f_1(x)$
2) Justifie que pour tout $x\epsilon\mathbb{R}^*$, $-x\epsilon\mathbb{R}^*$ et $f_2(x) = -f_2(x)$

Parité – Périodicité

Propriété

- Une fonction numérique f à variable réelle est paire si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, x\epsilon Df, -x \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire.

- Une fonction numérique f à variable réelle est impaire si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, x\epsilon Df, -x \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine du repère si f est impaire.

- Une fonction numérique f à variable réelle est périodique s'il existe un réel non nul p tel que et seulement si :

$$\begin{cases} \forall\, x\epsilon Df, (x+p) \in Df \\ f(x+p) = f(x) \end{cases}$$

On appelle période de f, le plus petit réel T strictement positif tel que

$$\begin{cases} \forall\, x\epsilon Df, (x+T) \in Df \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Exemples : les fonctions sinus et cosinus sont périodiques et de période 2π.
La fonction tangente est périodique et de période π

NB :

- Les fonctions : $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ sont périodiques et de période $\frac{2\pi}{|a|}$. $(a;b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
- La fonction $\mapsto \tan(ax+b)$, où a et b son de nombres réels avec a≠0, est périodique et de période $\frac{\pi}{|a|}$.
- Si f est une fonction périodique de période T, on choisit comme ensemble d'étude l'ensemble E tel que ; $E = D_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ ou $E = D_f \cap [0;T]$
- Si f est une fonction paire ou impaire et périodique de période T, on choisit comme domaine d'étude l'ensemble E tel que ; $E = \left[-\frac{T}{2};0\right] \cap D_f$ ou $E = \left[0;\frac{T}{2}\right] \cap D_f$.

Limites remarquables :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0$; $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$; $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

Consigne 2 : Consolidation

Etudie la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x|$
2) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
3)

4) $f(x) = 3x^5 - 2$
5) $f(x) = \frac{2|x|+1}{x^2-1}$
6) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$

Consigne 3 :Consolidation

1) Etudions la parité des fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+|x|+2}$ et $g(x) = \cos 2x$
2) Démontre que g est périodique de période π
3) Justifie qu'on peut étudier g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Consigne 4 : Etude de fonction cosinus

1) Détermine la période de f tel que $f(x) = 2\sin\frac{5x}{2} + \cos(-3x)$
2) On pose $g(x) = \cos x$
   a) Détermine le domaine de définition de g
   b) Justifie qu'on étudier g sur $[0; \pi]$
   c) Etudie les variations de g sur $[0; \pi]$puis construis sa courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$

Consigne 5 : Calcule de limites

1) Calcule la limite en 0 de $\frac{\sin \pi x}{x}$; $\frac{\tan x}{x}$; $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ et $\left(\frac{1}{x}\right)^2 (\cos x - 1)$
2) Calcule $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$ (tu pourras fait un changement de variable)

Activité5: Eléments de symétrie ; fonctions associées à une fonction

(C_f) et (C_g) sont les représentations graphiques respectives des fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $(x) = (x+1)^3 + 3$.

Consigne 1 :Eléments de symétrie

1) Compare
   a) $f(1-x)\ et\ f(1+x)$
   b) $\frac{1}{2}[g(-1+x) + g(-1-x)]$ et 3

Axe de symétrie – Centre de symétrie

Soit f une fonction de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- ❖ On dit que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C) si et seulement si : $g: x \mapsto f(x+a)$ est paire ou si $\forall\ x \in D$,

$(2a - x) \in D\ et\ f(2a - x) = f(x)$.

- ❖ On dit que le point $\omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (C) si et seulement si : $g: x \mapsto f(x+a) - b$ est impaire ou si $\forall x \in D, (2a - x) \in D\ et\ f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Consigne 2 :Consolidation

On considère les fonctions g et h définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ et $h(x) = -x^2 + 3x - 1$. (C_g) et (C_h) désignent leurs représentations graphiques dans un repère orthogonal.

1) Justifions que le point A(2 ; 4) est un centre de symétrie de (C_g)
2) Montre que la droite (Δ) d'équation x = $\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de

Retenons :(Fonctions associées)

Le plan étant muni du repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Soit la fonction de représentation graphique (C_f.)

- ✓ La représentation graphique de x $\mapsto$ -f(x) est la courbe symétrique de (C_f) par rapport à (O, $\vec{i}$)
- ✓ La représentation graphique de x $\mapsto$f(-x) est la symétrique de (C_f)par rapport à (O ; $\vec{j}$)
- ✓ La représentation graphique de x $\mapsto$ -f(-x) est la

symétrique de(C_f) par rapport à l'origine O.

- ✓ Soit (Cf_1) et (Cf_2) les parties de (Cf) situées respectivement au dessus et en dessous de $(O;\vec{\imath})$. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est la réunion de (Cf_1) et $(Cf_2{}')$ où $(Cf_2{}')$ est l'image de (Cf_2) par rapport à $(O;\vec{\imath})$

Remarque :

- ✓ Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O $\vec{i}$, $\vec{j}$) , la représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à (O ; $\vec{j}$). Réciproquement si la courbe représentative d'une fonction est symétrique par rapport à (O ; $\vec{j}$) , alors cette fonction est paire.
- ✓ La représentation graphique d'une fonction est symétrique par rapport à O si et seulement si cette fonction est impaire.

Consigne 4 :Consolidation

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^*$vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.(C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Etudie les variations de la fonction f puis construis (C) sur $\mathbb{R}^*$
2) Construis dans le même repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ les courbes (C_1) ; (C_2) et (C_3) respectives des fonctions : $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto -f(-x)$sur $\mathbb{R}^*{}_+$
3) Construis dans un autre repère la courbe (C_5) de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ sur $\mathbb{R}^*$

Séquence 2 : Barycentre des n points pondérés nϵ $\{2;3;4\}$

Activité1 (Définition et propriétés)

Zoé nomme ABC, le grand triangle de la sirène et voudrait déterminer la position des points G_1 et G_2 vérifiant les égalités ci-dessous :

$$(E_1): 2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} = \vec{0}\ ; (E_2): 3\overrightarrow{G_2A} - 2\,\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$$

Consigne1 (Définition)

1a) Justifie que $(E_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ puis construis le point G_1

b) Justifie que $(E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_2} = -2\overrightarrow{AC}$ puis construis le point G_2

2) Recopie puis complète la définition suivante : « On appelle barycentre de deux points pondérés $(A,\alpha);(B;\beta)$ avec $\alpha+\beta \neq 0$, l'unique .....G tel que ......»

Activité2 (Homogénéité, associativité et construction du barycentre)

Consigne1 (Homogénéité et associativité)

Soit A , B et C trois pondérés deux à deux distincts du plan. α,β,γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0\ et\ \alpha+\beta \neq 0. G$ est le barycentre des points pondérés $(A,\alpha);(B;\beta)\ et\ (C,\gamma)$ et k$\epsilon\mathbb{R}^*$

1) Démontre que G est le barycentre du système des points pondérés $(A,k\alpha);(B;k\beta)$ et $(C;k\gamma)$
2) On désigne par H le barycentre du système de points pondérés $(A,\alpha);(B;\beta)$. Démontre que G est le barycentre du système des points pondérés $(H,\alpha+\beta)$; et $(C;\gamma)$

Consigne 2 (Construction du barycentre)

On considère un triangle ABC. Construis les barycentres suivants :

a) G = bar$\{(A;1);(B;2);(C;5)\}$
b) G = bar$\{(A;-1);(B;1);(C;-1)\}$

Consigne 3(Coordonnées du barycentre)

Le plan est muni du repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) .

A, B et C trois points du plan avec $A(x_A; y_A)$ $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$. a, b et c trois nombres réels tels que a+b+c$\neq 0$ et

G = bar$\{(A; a); (B; b); (C; c)\}$

1) Justifions que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b+c}\,\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{OC}$$

2) Déduis-en les coordonnées de G en fonction de a ;b ; c et des coordonnées des points A,B et C

Consigne 4(Réduction d'expression)

Soit ABC un triangle et G un point du plan tel que G = bar$\{(A; 3); (B; 2); (C; -2)\}$

1)a) Exprime $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$

b) Transforme $3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 2\,\overrightarrow{MC}^2$ par insertion de G

2) Soit I le milieu de $[BC]$

a) Justifie que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$

b) Transforme l'expression $2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2$ par insertion du point I

Activité3:Les lignes de niveau

Information :

Soit k un réel et $f$une application du plan dans $\mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau k, l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = k$

Consigne 1(Ligne de niveau de $M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}$)

A et B sont deux points distincts du plan et

$f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(l_k) = \{M\epsilon P / f(M) = k\}$

$M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}$

1) Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB)

a) Exprime $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$

b) Justifie qu'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB}$

2) Détermine α puis précise l'ensemble (l_k) des points M du plan

3) Détermine et construis l'ensemble (l_k) des points M du plan pour $k = 4; k = -4$ si $AB = 2$

Consigne 2(Ligne de niveau de $M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$)

A et B sont deux points distincts du plan et I milieu de $[AB]$

$f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(l_k) = \{M\epsilon P / f(M) = k\}$

$M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

1) Justifie que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

2) a) Montre que le point M appartient à (l_k) si et seulement si $MI^2 = k + IA^2$

b)Discute selon le signe du nombre réel $k + IA^2$, la nature de l'ensemble (l_k)

c) Détermine (l_k) pour k=0

3) Détermine et représente (l_0) et (l_5) $AB = 2$

Consigne 3(Ligne de niveau de $M \longmapsto MA^2 + MB^2$)

A et B sont deux points distincts du plan et I milieu de $[AB]$

1) Justifie que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2$

2) Soit a un nombre réel. On note (G_a) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = a$

a) Montre que le point M appartient à (G_a) si et seulement si $MI^2 = \frac{a}{2} - IA^2$

b)Détermine l'ensemble (G_a) suivant le signe de $\frac{a}{2} - IA^2$

C) Détermine (G_a) pour $\frac{a}{2} - IA^2$=0

3) Détermine et construis (G_8) et (G_{12}) pour AB=4