Введение

Настоящее учебное пособие представляет собой конспект лекций, читаемых в курсе «Высшая математика» студентам экономических специальностей Южного федерального университета и предназначено в качестве материала для самостоятельной работы. Эта первая часть курса охватывает вопросы линейной алгебры. Также здесь приводятся задачи и вопросы для самостоятельного решения.

Глава 1. Матрицы и операции над ними

§ 1.1 Основные определения

Определение. ***Матрицей*** *размера* $m \times n$ *называется прямоугольная таблица чисел*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Матрицы будем обозначать заглавными латинскими буквами, их элементы — соответствующими прописными буквами с индексами: $A = \|a_{ij}\|$. Первый индекс элемента матрицы означает номер строки, в которой находится элемент, второй — номер столбца.

Определение. ***Векторами*** *назовем матрицы, состоящие из одной строки или одного столбца.*

Замечание. Понятие «вектор» в математике многозначно. В геометрии мы определяли вектор как направленный отрезок прямой. Понятие «вектор» может обозначать и упорядоченный набор некоторых объектов, а не только чисел.

Определение. *Матрицы, у которых число строк и столбцов совпадают, называются* ***квадратными****. Элементы* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$ *образуют* ***главную диагональ*** *матрицы, а их сумма называется* ***следом матрицы*** *(обозначают* trA *).*

Определение. *Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы суть нули, называется* ***единичной*** *матрицей.*

Определение. *Квадратная матрица, у которой все элементы выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется* ***нижне(верхне)-треугольной*** *(или просто треугольной).*

Определение. *Матрица, являющаяся одновременно* ***нижне-*** *и* ***верхне-треугольной*** *называется* ***диагональной.***

Определение. *Матрица, все элементы которой нули, называется* ***нулевой*** *и обозначается* O *.*

Ниже мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются действительные числа. Множество всех матриц размера $m\times n$ обозначим $M_{m\times n}$. Для множества квадратных матриц размера $n\times n$ примем обозначение M_n, и будем говорить, что рассматриваем матрицы порядка n. Множество всех векторов — столбцов длины m обозначим R^m.

Пример 1. Матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 7 & 8\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

являются матрицами размера 2×4 и 3×2 соответственно. Элементами матриц C и D являются функции:

$$C=\begin{pmatrix}x^2 & 3x-1\\ 1-x & x^6\\ 2x+x^2 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\ln x & 2\sin 3x & e^{-x^2}\\ tgx+\cos x & 1-e^n & 2e^{\sin x}\\ \arccos 2x & 2 & \ln\cos x\end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$ является нижне-треугольной матрицей.

Матрица $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ является единичной порядка 4.

Матрица $\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ является диагональной матрицей второго порядка.

Матрицы $(1,2,3,4,5)$ и $\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$ являются соответственно вектором-строкой и вектором-столбцом.

§ 1.2 Равенство матриц

Определение. *Две матрицы A и B называются* ***равными****, если они одинакового размера и соответствующие элементы обеих матриц равны.*

Пример 2. Выяснить, какие из следующих матриц равны:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\sin(\pi/2) & \cos\pi\\ 2\cos 2\pi & \sin 2\pi\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}\cos 2\pi & \sin\left(3\pi/2\right)\\ 2\sin 2\pi & \cos 2\pi\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е .

Сравнивать между собой можно лишь матрицы A, B, D, H, т.к. они одинакового размера, а соответственные элементы равны лишь у матриц A и D. Следовательно, равные лишь A и D.

§ 1.3 Транспонирование матриц

Определение. *Пусть матрица A имеет вид (1). Тогда матрица*

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

называется ***транспонированной*** *к матрице A.*

При транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами.

Пример 3. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\6&7&8&9\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&1&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-1&4\\4&-1\end{pmatrix}.$$

Транспонированными к ним будут матрицы

$$A^T=\begin{pmatrix}2&6&1\\3&7&2\\4&8&3\\5&9&4\end{pmatrix},\ B^T=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix},\ C^T=\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix},\ D^T=\begin{pmatrix}-1&4\\4&-1\end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования.

1) Если $A\in M_{m\times n}$, то $A^T\in M_{n\times m}$.
2) $(A^T)^T=A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этих свойств очевидно.

Определение. *Если $A^T=A$, то матрица A называется* ***симметричной****.*

Из свойства 1) следует, что симметричные матрицы всегда квадратные (матрица D в примере 3).

§ 1.4 Сложение матриц

Операция сложения определена для матриц одного размера. Пусть $A, B \in M_{m\times n}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц A и B называется матрица

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Сложим две матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 0+6 & -1+3 & -5+0 \\ 4+1 & 2+4 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получили матрицу C того же размера.

Свойства операции сложения матриц

1) Операция сложения матриц коммутативна и ассоциативна, т.е.
   $A+B=B+A$ — коммутативность.
   $(A+B)+C=A+(B+C)$ — ассоциативность.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из соответствующих свойств действительных чисел.

2) $A+O=O+A$. Здесь O — матрица того же размера, что и матрица A.
3) Для любой матрицы A существует единственная матрица B такая, что $A+B=O$.

Определение. *Матрица B называется* ***противоположной*** *матрице A и обозначается — A, если $A+B=O$. С помощью противоположной матрицы вводится понятие вычитания матриц, а именно $A-B=A+(-B)$.*

4) Операция сложения и транспонирования связаны соотношением

$$(A+B)^T=A^T+B^T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

$$A=\|a_{ij}\|,\ B=\|b_{ij}\|;\ A^T=\|a_{ji}\|,\ B^T=\|b_{ji}\|;\ A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|;$$

$$(A+B)^T=\|a_{ji}+b_{ji}\|=A^T+B^T.$$

§ 1.5 Умножение матрицы на число

Определение. *Произведением матрицы A вида (1) на число λ называется матрица*

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Умножим матрицу A на действительное число λ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}, \lambda = 3/5.$$

$$B = \lambda A = \begin{pmatrix} 3/5 \cdot (-2) & 3/5 \cdot 3 \\ 3/5 \cdot 1 & 3/5 \cdot 4 \\ 3/5 \cdot 12 & 3/5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/5 & 9/5 \\ 3/5 & 12/5 \\ 36/5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число

1) $1 \cdot A = A$,
2) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
5) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

§ 1.6 Умножение матриц

Даны две матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, тогда их произведение определяется так:

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}, i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,r.$

Здесь для удобства записи использовали знак суммы $\sum$.

Пример 6. Перемножим две матрицы. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&1&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-9&1&0\\4&1&1\\-2&2&-1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е .

Т.к. число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то можно говорить о произведении матрицы A на матрицу B:

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-9)+(-2)\cdot4+3\cdot(-2) & 1\cdot1+(-2)\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot0+(-2)\cdot1+3\cdot(-1)\\ 4\cdot(-9)+1\cdot4+7\cdot(-2) & 4\cdot1+1\cdot1+7\cdot2 & 4\cdot0+1\cdot1+7\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23&5&-5\\-46&19&-6\end{pmatrix}$$

Отметим, что в данном случае произведение BA не существует, т.к. число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A.

Свойства операции умножения матриц

1) Если $A\in M_{m\times n}, B\in M_{n\times r}$, то $AB\in M_{m\times r}$

2) Умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е., если AB и BA существует, то не обязательно $AB=BA$. В этом заключается одно из отличий операции умножения матриц от операции умножения чисел (последнее всегда коммутативно).

Пример 7.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix},$$

т.е. $AB\neq BA$.

Определение. *Матрицы, для которых $AB=BA$, называются* ***перестановочными****.*

Простейшим примером матрицы, перестановочной со всеми квадратными, является единичная матрица соответствующего порядка.

Пример 8.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}6&14&1\\0&6&14\\0&0&6\end{pmatrix}=BA.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3&4\\6&3\end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix}9&10\\15&24\end{pmatrix}=BA.$$

3) Умножение матриц ассоциативно:
$(AB)C = A(BC)$
(при условии существования указанных произведений).
4) Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения:
$(A+B)C = AC + BC$,
$F(A+B) = FA + FB$.
5) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.
6) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.
7) Пусть E — единичная матрица. Тогда для любой квадратной матрицы A того же порядка что и E

$$EA = AE = A.$$

Отметим ещё одно отличительное свойство умножения матриц: произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулю. Ненулевые матрицы A и B, удовлетворяющие условию $AB = O$, называются ***истинными делителями нуля.***

Пример 9.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ AB = O,\ BA = \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ AB = BA = O.$$

Операция возведения матрицы в целую положительную степень определяется так:
$A^k = A \times A \times A \times \ldots \times A$ (произведение k сомножетелей).

§ 1.7 Скалярное произведение векторов

Определение. *Пусть* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k), b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ *векторы одинаковой размерности. Их* ***скалярным произведением*** *назовём число*

$$(a,b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $(a,b) = (b,a)$;
2) $(a, b+c) = (a,b) + (a,c)$
3) $(\lambda a, b) = \lambda(a,b)$, где λ — некоторое число.

Пример 10. Вычислить скалярное произведение векторов $a = (3,5,1,-7)$ и $b = (-1,3,5,4)$.

$$(a,b) = 3(-1) + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + (-7) \cdot 4 = -11.$$

§ 1.8 Сравнение матриц

В экономических приложениях матричного исчисления зачастую используются матрицы, элементы которых принимают только неотрицательные значения. Такие матрицы будем называть неотрицательными.

Определение. *Матрица* $A = \|a_{ij}\|$ ***неотрицательная****, если все* $a_{ij} \geq 0$.

Понятие неотрицательной матрицы позволяет ввести сравнение матриц в следующем смысле.

Определение. *Пусть даны матрицы* A *и* B *одинакового размера. Будем читать* $A \geq B$*, если матрица* $A - B$ *неотрицательна.*

Пример 11. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Сравнимы ли они?

Р е ш е н и е .

Т.к. матрица $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ неотрицательна, то, следовательно, $A \geq B$.

Заметим, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ не сравнимы.

§ 1.9 Многочлен от матрицы

Пусть дан многочлен $f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$ и квадратная матрица A.

Определение. ***Многочленом*** *f от матрицы A назовем выражение* $f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E$*, где* E *— единичная матрица того же порядка, что и матрица* A.

Пример 12.

а) Найти значение многочлена $f(t) = 2t - 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е .

Многочлен $f(A)$ имеет вид:

$$f(A) = 2A - 3E = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Найти значение многочлена $f(t) = 3t^2 - 5t + 2$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(A)=3A^2-5A+2E=3\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&4&12\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}5&10&15\\0&5&10\\0&0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&21\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

§ 1.10 Обратная матрица

Определение. *Квадратная матрица A называется* ***обратимой****, если существует матрица B такая, что $AB=BA=E$. Матрица B называется* ***обратной*** *матрицей для матрицы A и обозначается A^{-1}.*

Следовательно, для обратимых матриц выполняется равенство: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Свойства обратимых матриц.

1) Обратная матрица определяется единственным образом.
2) Если A обратима, то A^{-1} также обратима и $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.
3) $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.
4) $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}, \lambda\neq 0$.
5) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
6) $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

Алгоритм нахождения обратной матрицы будет описан позже.

§ 1.11 Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц называются следующие преобразования:

1) перемена местами двух строк $C_i\leftrightarrow C_j$ или столбцов $C^i\leftrightarrow C^j$,
2) умножение строки или столбца на число λ, отличное от нуля (обозначается λC_i *или* λC^i);
3) добавление к одной строке или столбцу другой строки или столбца, умноженных на произвольное число (обозначается $C_i+\lambda C_j$ или $C^i+\lambda C^j$).

Пример 13. Пусть дана матрица $B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$,

Выполним преобразование первого типа — поменяем местами вторую и третью строки

Тогда получим $B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&0&2\\0&2&4\end{pmatrix}$.

Выполним преобразование второго типа — умножим первую строку исходной матрицы на 2. В итоге получим $B=\begin{pmatrix}4 & 8 & -2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Выполним преобразование третьего типа — прибавим ко второй строке первую, умноженную на — 3. Получим матрицу $B=\begin{pmatrix}4 & 8 & -2\\ -12 & -22 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Теорема. *Элементарные преобразования обратимы и обратные им преобразования являются элементарными преобразованиями того же типа:*

1) $C_i \leftrightarrow C_j$ обратно к $C_j \leftrightarrow C_i$,
2) $(1/\lambda)C_i$ обратно к $\lambda C_i, \lambda \neq 0$,
3) $C_i - C_j$ обратно к $C_i + C_j$.

Для столбцов ситуация аналогична.

Теорема. *Любая матрица путем конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к треугольному виду.*

§ 1.12 Приведённые матрицы

Определение. *Матрица называется* ***приведённой****, если в каждой её ненулевой строке найдётся хотя бы один ненулевой элемент (он называется ведущим) такой, что в его столбце остальные элементы — нули.*

Например, следующая матрица A имеет приведённый вид

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ведущими элементами являются в первой строке — $a_{15}=2$, во второй строке — $a_{21}=-2, a_{22}=-1$, в четвертой строке $a_{44}=-1$. Заметим, что ведущий элемент в строке не обязан быть единственным (см. вторую строку).

Теорема. *Любая матрица путем конечного числа элементарных преобразований строк может быть сведена к приведенному виду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .
Пусть матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся определением приведенной матрицы.

Если первая строка нулевая, переходим ко второй и т.д., пока не найдем ненулевую строку. В ненулевой строке (пусть это будет i-я строка) выбираем ненулевой элемент (пусть это будет элемент a_{ik}).

Совершим над матрицей следующие элементарные преобразования:

$$C_1 - C_i\frac{a_{11}}{a_{i1}},\ C_2 - C_i\frac{a_{21}}{a_{i1}},\ \ldots.,\ C_{i-1} - C_i\frac{a_{i-1,1}}{a_{i1}},\ C_{i+1} - C_i\frac{a_{i+1,1}}{a_{i1}},\ldots,\ C_m - C_i\frac{a_{m1}}{a_{i1}}.$$

Очевидно, после этого все элементы i-го столбца, кроме элемента a_{i1}, станут нулевыми. Затем выбираем следующую ненулевую строку, в ней ненулевой элемент и производим аналогичные преобразования со строками матрицы. За конечное число шагов переберем все ненулевые строки, после чего получаем матрицу, которая по определению будет приведенной.

Пример 14. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Сведём матрицу к приведённому виду.

Р е ш е н и е .
Возьмём в качестве ведущего элемент $a_{21} = 1$ (ведущие элементы будем выделять круглыми скобками) и выполним указанные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ (1) & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 3C_2 \\ C_3 - 2C_2 \\ C_4 - 2C_2 \end{matrix}.$$

В итоге получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 & -6 \\ (1) & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

На следующем шаге в качестве ведущего возьмём элемент $a_{33} = 2$, выполним указанные преобразования и в итоге получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 & -6 \\ (1) & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & (2) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1+2C_3 \\ 2C_2-3C_3 \\ C_4+C_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ (2) & 2 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & (2) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $2C_2-3C_3$ совмещает в себе два элементарных преобразования: сначала вторая строка умножается на два, а затем из нее вычитается три третьих строки.

В качестве ведущего элемента в четвёртой строке можно взять лишь $a_{43}=4$. Выполняя указанные преобразования получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ (2) & 2 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & (2) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & (4) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4C_1-6C_4 \\ 4C_2+7C_4 \\ 4C_3-C_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (8) & 8 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & (8) & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & (4) & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Теперь в каждой ненулевой строке есть ненулевой элемент, в столбце которого все остальные элементы нули, т.е. матрица B приведённая.

§ 1.13 Технологическая матрица

Пусть предприятие, используя m видов ресурсов, производит n видов изделий. На производство одного изделия j-го вида тратится a_{ij} единиц ресурса i-го вида, т.е. a_{ij} — число единиц i-го вида сырья для производства одной единицы j-го вида изделий (норма расхода i-го сырья на производство j-го вида изделий). Матрица $A = \left\| a_{ij} \right\|$ — матрица норм расхода (технологическая матрица)

изделие / сырье	***П*₁**	***П*₂**	. . .	***Пⱼ***	. . .	***Пₙ***
P_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1n}
P_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2j}	. . .	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
P_i	a_{i1}	a_{i2}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{in}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
P_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mj}	. . .	a_{mn}

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$ есть расход всех видов ресурсов на производство одной единицы продукции j-го вида (реализуется технологический процесс производства j-го вида изделий). Сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ — расход i-го ресурса на единицу каждого продукта (единичная интенсивность каждой технологии).

Введём в рассмотрение план производства продукции всех видов, задаваемый вектором $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$. Естественно считать $x \ge 0$. Для реализации этого плана потребуется $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$ единиц ресурса 1-го вида, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j$ единиц ресурса 2-го вида, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ единиц ресурса i-го вида. Указанные суммы есть компоненты вектора-столбца, представляющего собой произведение матрицы A на вектор плана x.

Введём в рассмотрение ещё и вектор удельной прибыли $p=(p_1,p_2,...,p_n)$, где p_j – удельная прибыль от реализации единицы продукции j-го вида. Тогда скалярное произведение (p,x) представляет собой величину прибыли, полученной от реализации всей продукции.

Пусть вектор $b=(b_1,b_2,...,b_m)^T$ – вектор запасов всех видов ресурсов, имеющихся на складе. Тогда очевидно, что матричное неравенство $A \cdot x \le b$ означает реальность реализации плана производства x при имеющихся запасах b и использовании технологий A. И здесь приходим к одной из основных задач экономического планирования — задаче оптимального планирования:

из всех возможных планов производства найти такой, который бы при наличии определённых запасах ресурсов приносил бы максимальную прибыль, т.е.

$$(p,x) \to \max,$$
$$Ax \le b, \qquad .$$
$$x \ge 0$$

Пример 15. Завод производит электродвигатели двух видов. На один электродвигатель первого вида нужно 5 кг. металла и 3 кг. проволоки, второго вида — 3 кг. металла и 2 кг. проволоки. От реализации одного электродвигателя завод получает прибыль 600 и 500 руб. соответственно. Завод располагает 4,8 т. металла и 3 т. проволоки. Сколько видов продукции производит завод? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Рассмотрите несколько планов производства и определите, какие из них допустимы. Например, допустимы ли планы $\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$?

Решение.

Вектор удельных прибылей $C=(600,500)$. Вектор запасов ресурсов $B=\begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}$.

Матрица норм расхода $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Видов продукции — 2, видов ресурсов — 2. Чтобы определить допустим ли план производства $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, надо либо непосредственно подсчитать расход ресурсов на этот план и сравнить с имеющимися запасами, или проверить выполнение матрично-векторного неравенства $AX \le B$. В итоге получаем, что оба плана допустимы.

Историческая справка

Понятие матрицы впервые появилось в середине 19 века. Термин «матрица» ввёл Д.Сильвестр. Начала теории матриц содержит статья ирландского математика и физика У.Гамильтона (1805–1865) «Линейные и векторные функции» (1853). Основы матричного исчисления заложены А.Кели (1821–1895) в «Мемуаре о теории матриц» (1858). Современные обозначения — две вертикальные чёрточки — ввёл английский математик А.Кели(1843–1845), а круглые скобки — английский математик Д.Коллис (1913).

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Дать определение матрицы. Привести примеры. Как матрицы обозначаются? Что означает первый индекс в обозначении элемента матрицы? Что означает второй индекс?

2. Перечислить виды матриц, дать их определение и привести примеры различных видов матриц.

3. Является ли квадратная нуль-матрица верхне(нижне)-треугольной, диагональной?

4. Что такое след матрицы? Вычислить след матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Каковы размеры матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ д) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}?$$

Чему равны элементы a_{12}, a_{31}, a_{24} в примере а)?

Какая из матриц является матрицей-строкой, квадратной, диагональной,треугольной?

6. Сформулировать условие равенства матриц. Что такое соответствующие элементы матриц?

7. Какие из следующих матриц равны:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}?$$

8. Дать определение операции транспонирования матрицы. Перечислить свойства этой операции.

9. Записать матрицы, транспортированные данным:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Если матрица A^T имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & 2 \\ 1 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то каков вид матрицы A?

11. Какие из перечисленных видов матриц не меняются своего вида при транспонировании: треугольные, диагональные, квадратные, нулевые?

12. Дать определение операции сложения матриц. Перечислить свойства этой операции.

13. Что такое противоположная матрица?

14. Какие из матриц можно сложить:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Выполнить операцию сложения.

15. Дать определение операции умножения матрицы на число. Перечислить свойства этой операции.

16. Матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Каковы размеры матрицы C, если известно, что $A \cdot C = B$?

17. Какого размера должны быть матрицы-сомножители A и B, чтобы их произведение $A\ B$ было матрицей размера:

а) 1×2, б) 4×3, в) 3×1, г) 1×1, д) 2×2?

18. Дать определение операции умножения матриц. Перечислить свойства этой операции.

19. Найти произведение матриц AB, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

г) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$:

ж) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & -8 & -20 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ -1 & 13 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$;

к) $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 10 & -2 & 9 & -3 & 8 \end{pmatrix}$:

л) $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$;

м) $A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$.

20. Найти произведение матриц $ABCD$ если:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

с) $A=\begin{pmatrix}4&3&-1&2\\5&4&3&1\\2&-1&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\0&1\\4&5\\9&7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-10&5&-1\\1&-5&10\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\7\\-1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}5&3&8&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5&0&1\\4&0&2&3\\2&4&-8&2\\0&5&4&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&2\\3&6\\5&7\\-1&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

21. Найти $\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3(A+B)+\lambda_4 B+\lambda_5 A$ если:

а) $\lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=\frac{3}{4},\ \lambda_3=-1,\ \lambda_4=-\frac{3}{4},\ \lambda_5=-\frac{5}{4}$,

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&0\\-3&-2&4&1\\20&2&5&-8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&3&-4&5\\-8&7&-1&2\\-16&2&0&12\end{pmatrix};$$

б) $\lambda_1=3,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-4,\ \lambda_4=-7,\ \lambda_5=-6$,

$$A=\begin{pmatrix}1/7&2&3\\-1&2/7&2\\4&1&3/7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6/12&-1&-4\\3&5/6&-3\\1&4&4/8\end{pmatrix};$$

22. Найти $(A+B)^T$, (B^T+A^T), если:

а) $A=\begin{pmatrix}3&-4&1\\2&-5&2\\1&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4&1\\-2&7&-2\\1&0&-3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3&-4\\5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&3\\-3&2\end{pmatrix}$.

23. Найти $(A+B)^T\cdot C^T\cdot D^T$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}50&70\\90&-20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}10&-9\\13&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\5&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

24. Найти $AB-C+A^TA$, если:

а) $A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 25 & 35 & 45 \\ 31 & 21 & 19 \\ 5 & 10 & 37 \end{pmatrix}$.

25. Вычислить значение матричного выражения:

а) $(AB)^{10}$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

б) $(AB)^{15}$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $(AB)^{5}$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 \\ 11 & 11 & 13 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

26. Вычислить степень матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^6,\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

27. Какие матрицы называются перестановочными?
28. Какие виды матриц перестановочны всегда, если их произведение существует?
29. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, с) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

30. Что называется многочленом от матрицы?
31. Вычислить значение многочлена от матрицы:

а) $f(t)=3+4t$; A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $f(t)=3-4t+2t^2$; A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

32. Два различных по качеству вида обуви продаются в трех магазинах. Матрица A — объемы продаж этих товаров в магазинах в 1-м квартале, матрица B — во 2-м квартале.

Определить: 1) объем продаж за два квартала; 2) прирост продаж во 2-м квартале по сравнению с первым:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 6 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

33. Предприятие производит три типа продукции, используя два вида ресурсов. Норма затрат ресурсов i-го вида на производство продукции j-ого задана матрицей затрат A, выпуск продукции за квартал — матрицей B, стоимость единицы каждого вида ресурсов задана матрицей C. Найти матрицу полных затрат ресурсов каждого вида и полную стоимость всех затраченных ресурсов, если:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}15 & 25 & 20\end{pmatrix}^T;\ C=\begin{pmatrix}6 & 3\end{pmatrix}.$$

34. При каком условии для матриц A и B выполняется равенство:

а) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

б) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, если произведения AB и BA определены.

35. Что такое симметричная матрица?

Привести пример симметричной матрицы 4-го порядка.

36. Показать, что след матрицы обладает следующими свойствами:

а) $tr(A+B)=trA+trB$;

б) $tr(\alpha A)=\alpha trA$;

в) $trA^T=trA$;

г) $tr(AB)=tr(BA)$.

37. Доказать, что матрица A^TA квадратная и симметричная для любой матрицы A.

38. Дана система m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \qquad\qquad\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad (*)$$

Доказать, что запись системы в форме (*) и в форме $Ax=b$, где $A=\left\|a_{ij}\right\|, x=(x_1,\ldots x_n)^T, b=(b_1,\ldots b_m)^T$, есть одно и то же.

39. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 6 & -4 & 0\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T;\ b=\begin{pmatrix}0 & 5\end{pmatrix}.$$

Записать соответствующую систему уравнений в форме (*).

40. Дать определение обратной матрицы.

41. Чем обратимая матрица отличается от обратной?

42. Перечислить свойства обратимых матриц.

43. Какие преобразования матриц называются элементарными?

44. С помощью элементарных преобразований привести матрицы из примера к треугольному виду.

45. Дать определение приведенной матрицы.

46. Какие из ниже перечисленных матриц являются приведенными?

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

47. Что такое ранг матрицы?

48. Вычислить ранг матриц из примера 42.

49. В чём сходство и отличие операций над матрицами и числами?

50. Деревообрабатывающая фабрика из двух сортов древесины производит фанеру и брусы. На 100 кв.м. фанеры нужно 2 куб.м еловой и 6 куб.м. пихтовой древесины и прибыль равна 1700 руб. На 100 погонных метров елового бруса нужно 5 куб.м., а на 100 погонных метров пихтового бруса нужно 4 куб.м. древесины, прибыль же равна соответственно 800 и 1000 руб. Сколько видов продукции производит цех? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Докажите, что фанеру производить невыгодно, и найдите план, дающий максимальную прибыль.

51. Пусть E — единичная матрица. Проверьте, что если произведение $XE(EX)$ существует, то $XE = X\,(EX = X)$, какова бы ни была матрица X.

52. Для пространства R^3 напишите матрицу, которая: а) умножает первую компоненту вектора на 3, вторую — на 2, третью оставляет неизменной; б) делает третью компоненту суммой всех трех исходных компонент; вторую компоненту делает суммой 1-й и 2-й, а 1-ю компоненту оставляет неизменной.

53. Убедитесь на конкретных примерах, что если Y — неотрицательная вектор строка, A — матрица, X, B — векторы — столбцы, то неравенство $AX \le B$ сохранится при умножении его слева на Y. Вспомните правила действий с обычными неравенствами.