

Министерство науки и образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

А.Н.Трофимов

Основы теории цифровой связи

*Методические указания к выполнению практических и
лабораторных работ*

© Трофимов А.Н., 2017–2018

Предисловие

В настоящем руководстве излагаются вопросы, дополняющие курс лекций по общим вопросам теории передачи дискретных сообщений [1]. В руководстве рассматривается выполнение нескольких практических заданий, иллюстрирующих основные вопросы теории цифровой связи. Основное внимание уделено исследованию надежности передачи с использованием ряда видов дискретной модуляции, имеющих наибольшее практическое значение.

Тема 1. Исследование дискретных сигналов во временной области

1.1 Краткое теоретическое введение

1.1.1. Модуляционная и информационная скорость передачи. В системах цифровой связи используется *конечное* множество сигналов $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$, где q – количество сигналов, или объем сигнального алфавита, $q \geq 2$. В технике связи объем сигнального алфавита как правило выбирается как $q = 2^m$, где m – целое число. На практике обычно значение $m = 1, 2, \dots, 8$, хотя в принципе может быть любым.

Предполагается, что все сигналы имеют одинаковую *конечную* длительность T_s , то есть, определены на интервале $0 < t < T_s$, и передаются последовательно с периодом следования T . Очевидно, что если $T_s \leq T$, то между подряд следующими сигналами имеется пауза длительности $T - T_s$. Если же $T_s > T$, то подряд следующие сигналы накладываются друг на друга, что приводит к *межсимвольной интерференции*. Для наиболее часто встречающейся и практически важной ситуации выполняется условие $T = T_s$, то есть, сигналы следуют без наложения друг на друга и без пауз между ними. Этот случай и будет рассматриваться далее.

Модуляционная скорость V_{mod} определяется как

$$V_{\text{mod}} = \frac{1}{T}, \quad (1.1)$$

то есть она равна *числу сигналов*, переданных в единицу времени. Модуляционная скорость измеряется в бодах, 1 Бод = 1/с, (Бод, Baud, от имени Эмиль Бодо, Émile Baudot, Франция, 1845–1903).

Информационная скорость при цифровой, или дискретной, передаче определяется по формуле

$$V_{\text{inf}} = \frac{\log_2 q}{T}, \quad (1.2)$$

то есть, она численно равна *количеству информации*, переданному в единицу времени, измеряется в бит/с. Заметим, что значение $m = \log_2 q$ равно числу бит, которое переносит один сигнал.

Справедливо неравенство $V_{\text{inf}} \geq V_{\text{mod}}$. Это неравенство обращается в равенство при $q = 2$, иначе говоря, модуляционная скорость численно равна информационной скорости только при использовании двоичных сигналов. В этом случае $m = 1$, то есть, один сигнал переносит один бит.

1.2.1. Основные виды дискретных сигналов. В настоящем задании рассматриваются следующие виды дискретных сигналов: сигналы дискретной частотной модуляции (ЧМ, FSK = frequency shift keying), сигналы дискретной фазовой модуляции (ФМ, PSK = phase shift keying) и сигналы квадратурной амплитудной модуляции (КАМ, QAM = quadrature amplitude modulation). Далее приводятся краткие сведения о перечисленных видах дискретных сигналов, которые в наиболее простом случае строятся как отрезки гармонического сигнала конечной длительности, или как сигналы с *прямоугольной огибающей*.

Важной количественной характеристикой сигнала $s_i(t)$ является его *норма* (точнее, *евклидова норма*; Евклид, Εὐκλείδης, ок. 325 г до н.э. – до 285 г. до н.э.), которая определяется по формуле

$$\|s_i\| = \sqrt{\int_0^T s_i^2(t) dt}.$$

Квадрат нормы сигнала называется *энергией* сигнала, то есть

$$E_i = \|s_i\|^2 = \int_0^T s_i^2(t) dt. \quad (1.3)$$

Эта величина равна энергии электрического сигнала $s_i(t)$, рассеянной на сопротивлении 1 Ом.

1.2.1.1. Дискретная частотная модуляция. Сигналы дискретной частотной модуляции задаются следующим образом

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Из равенства (1.4) следует, что все сигналы дискретной ЧМ представляют собой отрезки функции косинуса длительности T и различаются друг от друга значениями центральной, или несущей, частоты f_i . В равенстве (1.4) через E обозначена энергия сигнала (все сигналы ЧМ имеют одинаковую энергию). Значения частот f_i , $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$, могут быть назначены различным образом, но обычно они выбираются так, чтобы сигналы, определенные равенством (1.4), были ортогональны, то есть, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^T s_i(t) s_k(t) dt = \begin{cases} E, & \text{если } i = k, \\ 0 & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (1.5)$$

Условие (1.5) выполняется, если частоты f_i , $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$, в выражении (1.4) выбраны как $f_i = l_i / T$, где l_i – любые целые числа. Равенство (1.5) полезно проверить самостоятельно, используя тригонометрическое тождество $\cos A \cos B = (\cos(A+B) + \cos(A-B)) / 2$. Частоты f_i можно выбрать так чтобы выполнялось условие $l_0 < l_1 < \dots < l_{q-1}$, причем для практически важных случаев следует выполнить условие $l_0 \gg 1$, а разность соседних значений $l_{i+1} - l_i$ сделать настолько малой насколько это возможно, например, положить ее равной 1.

1.2.1.2. Дискретная фазовая модуляция. Сигналы дискретной фазовой модуляции задаются следующим образом

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_0 t - \theta_i), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Из равенства (1.6) следует, что все сигналы дискретной ФМ представляют собой отрезки гармонической функции (косинуса) длительности T , имеют одинаковую центральную частоту f_0 и различаются друг от друга значениями начальной фазы θ_i . Для сигналов дискретной ФМ значения фазы назначаются как $\theta_i = 2\pi i / q$, $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$. Например, для $q = 4$ $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$ и $\theta_3 = 3\pi/2$. Значение центральной частоты f_0 выбирается следующим образом $f_0 = l_0 / T$, где $l_0 \gg 1$. При выполнении этого задания будем также полагать, что l_0 – целое число. В равенстве (1.6), как и ранее, символом E

обозначена энергия сигналов; это значит, что для любого $i=0,1,\dots,q-1$ выполняется условие

$$\int_0^T s_i^2(t) dt = \int_0^T \left(\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_0 t - \theta_i) \right)^2 dt = E. \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) полезно проверить самостоятельно, используя тригонометрические тождества $\cos^2 A = (1 + \cos 2A)/2$ и $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. Из выражения (1.7) следует, что все сигналы ФМ, так же как и сигналы ЧМ, имеют одинаковую энергию.

1.2.1.3. Квадратурная амплитудная модуляция. Сигналы квадратурной амплитудной модуляции задаются следующим образом

$$s_i(t) = \begin{cases} s_{i1} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t) + s_{i2} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Из равенства (1.8) следует, что каждый сигнал КАМ можно рассматривать как сумму двух сигналов амплитудной модуляции $s_{i1} \sqrt{2/T} \cos(2\pi f_0 t)$ и $s_{i2} \sqrt{2/T} \sin(2\pi f_0 t)$ с амплитудами, зависящими от номера сигнала i . Известно тождество

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \phi), \quad \text{где } \phi = \arctg(B/A).$$

Используя это выражение, равенство (1.8) можно переписать в виде

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_i}{T}} \cos(2\pi f_0 t - \theta_i), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.9)$$

где $E_i = s_{i1}^2 + s_{i2}^2$, $\theta_i = \arctg(s_{i2}/s_{i1})$ — энергия и начальная фаза i -го сигнала соответственно. Из равенства (1.9) следует, что все сигналы КАМ представляют собой отрезки гармонической функции длительности T и различаются друг от друга значениями амплитуды $\sqrt{2E_i/T}$ и начальной фазы θ_i . Значение центральной частоты f_0 назначается как $f_0 = l_0/T$, где $l_0 \gg 1$. При выполнении этого задания будем также полагать, что l_0 — целое число.

Для того, чтобы полностью определить вид сигналов КАМ нужно задать выражения для коэффициентов s_{i1} и s_{i2} в формуле (1.8). Их определение зависит от значения величины $m = \log_2 q$, точнее от ее четности. Рассмотрим далее простой частный случай, когда m — четное целое число. В этом случае $q = 2^m$ и поскольку m — четное целое число, то q принимает значения 4, 16, 64, и т.д. то есть представляет собой квадрат целого числа. Ясно, что в этом случае \sqrt{q} — целое число. Чтобы определить значения величин s_{i1} и s_{i2} , поставим в соответствие номеру сигнала i , $i=0,1,\dots,q-1$, пару целых i_1 и i_2 , $i_1, i_2 = 0,1,\dots,\sqrt{q}-1$, по правилу $i = i_1 \sqrt{q} + i_2$. Иначе говоря, i_1, i_2 это цифры в \sqrt{q} -ичном представлении числа i . Например, для $q=16$ индекс i пробегает значения 0,1,2,...,15, а соответствующие пары (i_1, i_2) при этом равны: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0),

(1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3). Величины s_{i1} и s_{i2} в формуле (1.8) определяются согласно равенствам

$$s_{i1} = A \left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right), \quad s_{i2} = A \left(1 - \frac{2i_2}{\sqrt{q}-1} \right), \quad (1.10)$$

Здесь $A = \max_i |s_{i1}| = \max_i |s_{i2}|$, то есть, наибольшее по абсолютной величине значение коэффициентов s_{i1} и s_{i2} . Пример значений i_1, i_2 и s_{i1}, s_{i2} для $q=16$ показан в Таблице 1.1

Таблица 1.1

Значения i , пар i_1, i_2 и коэффициентов s_{i1} и s_{i2} для $q=16$

i	i_1, i_2	(s_{i1}, s_{i2})
0	0,0	$(A/3)(+3,+3)$
1	0,1	$(A/3)(+3,+1)$
2	0,2	$(A/3)(+3,-1)$
3	0,3	$(A/3)(+3,-3)$
4	1,0	$(A/3)(+1,+3)$
5	1,1	$(A/3)(+1,+1)$
6	1,2	$(A/3)(+1,-1)$
7	1,3	$(A/3)(+1,-3)$
8	2,0	$(A/3)(-1,+3)$
9	2,1	$(A/3)(-1,+1)$
10	2,2	$(A/3)(-1,-1)$
11	2,3	$(A/3)(-1,-3)$
12	3,0	$(A/3)(-3,+3)$
13	3,1	$(A/3)(-3,+1)$
14	3,2	$(A/3)(-3,-1)$
15	3,3	$(A/3)(-3,-3)$

1.2. Порядок выполнения работы

1. Получить вариант задания на исследование

2. Дать описание вида модуляции:

а) по заданным параметрам вычислить недостающие значения параметров (по значениям модуляционной и информационной скоростей (1.1) и (1.2) определить количество сигналов, полагая, что все сигналы имеют вид отрезков гармоник с постоянной огибающей);

б) привести аналитические выражения для всех сигналов из сигнального множества как функций времени – см. выражения (1.4), (1.6), (1.8) в зависимости от варианта задания;

в) вычислить значения энергии всех сигналов (выражение (1.3)), проверить ортогональность (для ЧМ, формула (1.5));

г) построить графики всех сигналов.

3. Составить отчет

Тема 2. Исследование дискретных сигналов в частотной области

2.1. Краткое теоретическое введение

2.1.1. Преобразование Фурье. Описание сигналов в частотной области задается с помощью преобразования Фурье (Fourier J.B.J., 1768 – 1855). Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.1)$$

и

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.2)$$

соответственно, где j – мнимая единица, $j = \sqrt{-1}$. Функция $S(f)$, определенная равенством (2.1), называется спектральной плотностью или спектром сигнала $s(t)$. Также функция $S(f)$ называется преобразованием или образом функции $s(t)$, которая иногда называется оригиналом. Преобразование Фурье является взаимно-однозначным преобразованием; символически это преобразование обозначается как $s(t) \leftrightarrow S(f)$. Спектр $S(f)$ в общем случае представляет собой комплекснозначную (принимаящую комплексные значения) функцию вещественной переменной f . Поэтому можно записать, что

$$S(f) = |S(f)| e^{j\theta(f)} = |S(f)| \cos \theta(f) + j |S(f)| \sin \theta(f),$$

где $|S(f)|$ – амплитудный спектр (модуль комплексного спектра), $\theta(f)$ – фазовый спектр. Квадрат амплитудного спектра $|S(f)|^2$ называется энергетическим спектром. Кроме того, имеют место следующие соотношения для амплитудного и фазового спектров:

$$|S(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re} S(f))^2 + (\operatorname{Im} S(f))^2} \quad (2.3)$$

и $\theta(f) = \arctg(\operatorname{Im} S(f) / \operatorname{Re} S(f))$. Для описания сигналов в частотной области используется амплитудный спектр (2.3).

2.1.2. Спектр отрезка гармоник. Предположим, что сигнал задан как

$$s_c(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.4)$$

где A – амплитуда, f_0 – центральная частота. Тогда можно показать, что его преобразование Фурье равно

$$S_c(f) = \frac{AT}{2} \left(\frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)T} + \frac{\sin \pi(f + f_0)T}{\pi(f + f_0)T} \right) e^{-j\pi fT}. \quad (2.5)$$

Используя определение функции sinc (sinus cardinalis (лат.), кардинальный синус)

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

равенство (2.5) можно представить в виде

$$S_c(f) = \frac{AT}{2} (\operatorname{sinc}((f - f_0)T) + \operatorname{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi fT}. \quad (2.6)$$

Следовательно, амплитудный спектр сигнала $s_c(t)$, заданного выражением (2.4), равен

$$|S_c(f)| = \left| \frac{AT}{2} (\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)) \right|.$$

Для сигнала, представляющего собой отрезок синусоиды следующего вида,

$$s_s(t) = \begin{cases} A \sin 2\pi f_0 t, & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.7)$$

преобразование Фурье вычисляется как

$$S_s(f) = \frac{AT}{2j} \left(\frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)T} - \frac{\sin \pi(f + f_0)T}{\pi(f + f_0)T} \right) e^{-j\pi fT}, \quad (2.8)$$

или

$$S_s(f) = \frac{AT}{2j} (\text{sinc}((f - f_0)T) - \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi fT}, \quad (2.9)$$

и, следовательно, его амплитудный спектр равен

$$|S_s(f)| = \left| \frac{AT}{2} (\text{sinc}((f - f_0)T) - \text{sinc}((f + f_0)T)) \right|.$$

2.1.3. Спектры основных видов сигналов дискретных сигналов. Спектры сигналов вычисляются с использованием формул (2.4) – (2.9). Рассмотрим применение указанных равенств для различных видов сигналов.

2.1.3.1. Дискретная частотная модуляция. Сигналы дискретной частотной модуляции задаются выражением (1.4). Сравнивая это равенство с выражением (2.4) и используя формулу (2.6), получаем, что преобразования Фурье $S_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, q - 1$, равны

$$S_i(f) = \sqrt{\frac{ET}{2}} (\text{sinc}((f - f_i)T) + \text{sinc}((f + f_i)T)) e^{-j\pi fT}.$$

Поэтому амплитудные спектры сигналов дискретной ЧМ вычисляются как

$$|S_i(f)| = \sqrt{\frac{ET}{2}} |\text{sinc}((f - f_i)T) + \text{sinc}((f + f_i)T)|.$$

2.1.3.2. Дискретная фазовая модуляция. Сигналы дискретной фазовой модуляции задаются выражением (1.6), которое с использованием тождества

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

можно представить в виде

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} (\cos(2\pi f_0 t) \cos \theta_i + \sin(2\pi f_0 t) \sin \theta_i), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Сравнивая слагаемые в правой части этого равенства с выражениями (2.4) и (2.7), и используя формулы (2.6) и (2.9), получаем, что преобразования Фурье $S_i(f)$ сигналов дискретной частотной модуляции $s_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, равны

$$S_i(f) = \sqrt{\frac{ET}{2}} \cos \theta_i (\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi fT} + \\ + \frac{1}{j} \sqrt{\frac{ET}{2}} \sin \theta_i (\text{sinc}((f - f_0)T) - \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi fT}.$$

Амплитудные спектры сигналов дискретной ФМ вычисляются как модули этих комплекснозначных функций $S_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$.

2.1.3.2. Квадратурная амплитудная модуляция. Сигналы КАМ задаются выражением (1.8). Сравнивая это выражение с (2.4) и с (2.7), и используя формулы (2.6) и (2.9), получаем, что преобразования Фурье $S_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, сигналов КАМ равны

$$S_i(f) = s_{i1} \sqrt{\frac{T}{2}} (\text{sinc}((f - f_0)T) + \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi fT} + \\ + (s_{i2} / j) \sqrt{\frac{T}{2}} (\text{sinc}((f - f_0)T) - \text{sinc}((f + f_0)T)) e^{-j\pi fT}.$$

Амплитудные спектры сигналов КАМ вычисляются как модули этих комплекснозначных функций $S_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$.

2.1.4. Спектр последовательности сигналов. Пусть $\{s_i(t)\}$ – сигнальное множество, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Определим последовательность индексов (мультииндекс) $\mathbf{i} = (i_0, i_1, \dots, i_{N-1})$ длины N , где $i_l \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $0 \leq l \leq N-1$. Любой заданный мультииндекс \mathbf{i} определяет последовательность сигналов длины N , которая может быть задана следующим равенством

$$s_{\mathbf{i}}(t) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{i_l}(t - lT),$$

где T – период следования сигналов. Например, для $N=7$ и $\mathbf{i} = (5, 2, 0, 3, 1, 3, 3)$, сигнальная последовательность образована сигналами $s_5(t)$, $s_2(t)$, $s_0(t)$, $s_3(t)$, $s_1(t)$, $s_3(t)$, $s_3(t)$, переданными последовательно.

Представляет интерес спектр $S_{\mathbf{i}}(f)$ сигнальной последовательности $s_{\mathbf{i}}(t)$. Он может быть получен на основе спектров сигналов, образующих последовательность. Для спектра последовательности с использованием свойства линейности преобразования Фурье и свойства сдвига во временной области, можно записать, что

$$S_{\mathbf{i}}(f) = \sum_{l=0}^{N-1} S_{i_l}(f) e^{-j2\pi f lT}. \quad (2.10)$$

Как следует из последней формулы, спектр последовательности сигналов представляет собой линейную комбинацию спектров сигналов, образующих последовательность.

2.2. Порядок выполнения работы

1. Привести вывод выражений (2.6) и (2.9) (см. раздел 1.7 в [1]).
2. Для выбранного варианта задания:

- привести выражения для преобразования Фурье для сигналов из сигнального множества;
 - вычислить амплитудные спектры всех сигналов. построить графики, определить ширину полосы частот, занимаемой каждым сигналом и множеством всех сигналов.
3. Привести вывод выражения (2.10), (см. раздел 1.7 в [1]).
 4. Вычислить спектр последовательности сигналов (для нескольких различных последовательностей различной длины), построить графики; сравнить полученные спектры со спектрами одиночных сигналов, объяснить различие; определить ширину полосы частот, занимаемой различными последовательностями сигналов, сравнить эти значения между собой, объяснить различие.
 5. Составить отчет.

Тема 3. Исследование геометрического представления сигналов

3.1. Краткое теоретическое введение

3.1.1. Геометрическое представление сигналов. Пусть $\{s_i(t)\}$ – множество сигналов, определенных на конечном интервале $[0, T]$, где T – период следования сигналов, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Для множества сигналов $\{s_i(t)\}$ можно указать множество *ортонормированных* функций $\{\varphi_j(t)\}$, определенных на интервале $[0, T]$, $j = 1, 2, \dots, D$. то есть таких, для которых выполняется условие

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (3.1)$$

В равенстве (3.1) использовано обозначение (φ_j, φ_k) для *скалярного произведения* функций $\varphi_j(t)$ и $\varphi_k(t)$ и δ_{ik} для символа Кронекера (Kronecker L., 1823 – 1891).

Напомним, что функции называются ортогональными, если их скалярное произведение (см. (3.1)) равно нулю. Скалярное произведение функции самой на себя равно квадрату ее нормы, то есть, $(\varphi_j, \varphi_j) = \|\varphi_j\|^2$. Функция называется *нормированной*, если ее норма равна 1. Если функции из некоторого множества попарно ортогональны и нормированы, то такое множество называется множеством *ортонормированных функций* или *ортонормированным функциональным базисом*.

Для заданного набора сигналов $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, может быть построен базис $\{\varphi_j(t)\}$ $j = 1, 2, \dots, D$, причем $D \leq q$. Величина D называется *размерностью пространства сигналов*. Построение базиса по заданному набору сигналов выполняется в соответствии с методом ортогонализации Грама–Шмидта (Gram J. P., 1850 – 1916, Schmidt E., 1876–1959), см. например, [1], приложение 1.

Сигнал $s_i(t)$ может быть представлен в виде линейной комбинации D базисных функций следующим образом

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^D s_{ij} \varphi_j(t). \quad (3.2)$$

где коэффициенты разложения s_{ij} представляют собой вещественные числа, которые вычисляются как скалярные произведения сигнала $s_i(t)$ и базисной функции $\varphi_j(t)$, то есть

$$s_{ij} = (s_i, \varphi_j) = \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt. \quad (3.3)$$

При фиксированном базисе $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, D$, каждому сигналу $s_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, ставится в соответствие вектор коэффициентов (3.3) $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iD})$, и наоборот, по каждому вектору \mathbf{s}_i можно восстановить сигнал $s_i(t)$ по формуле (3.2). Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством сигналов и множеством векторов коэффициентов вида

$$\{s_i(t)\} \leftrightarrow \{\mathbf{s}_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, q-1. \quad (3.4)$$

Каждый вектор \mathbf{s}_i можно рассматривать как набор координат точки в D -мерном евклидовом пространстве (сигнальном пространстве). Поэтому можно сказать, что

множество $\{s_i\}$ задает множество q сигнальных точек в сигнальном пространстве, или *сигнальное созвездие*.

Величина $d(s_i, s_k)$, определенная как

$$d(s_i, s_k) = \|s_i - s_k\| = \sqrt{\int_0^T (s_i(t) - s_k(t))^2 dt},$$

называется расстоянием (точнее, *евклидовым* расстоянием) между сигналами $s_i(t)$ и $s_k(t)$. Аналогичным образом определятся расстояние между сигнальными точками $d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k)$

$$d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k) = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\| = \sqrt{\sum_{j=1}^D (s_{ij} - s_{kj})^2}.$$

Отображение (3.4) является *изометрическим*, то есть сохраняющим расстояние, так как для всех $i, k = 0, 1, \dots, q-1$, выполняется равенство

$$d(s_i, s_k) = d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k).$$

Кроме того $(s_i, s_k) = (\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k)$ и $\|s_i\|^2 = \|\mathbf{s}_i\|^2$.

Приведем два примера функциональных базисов, полезных для выполнения этого задания.

Пример 1. Пусть $f_0 = l/T$, где l – любое целое число. Тогда функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, заданные как

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_0 t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_0 t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

образуют базис размерности $D=2$. Этот базис используется для геометрического представления сигналов ФМ и КАМ.

Пример 2. Пусть $f_j = l_j/T$, где l_j – любые целые числа, $j = 1, 2, \dots, D$. Тогда функции $\varphi_j(t)$, заданные как

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_j t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

образуют базис размерности D . Если выбрать частоты f_j равными частотам сигналов ЧМ, то этот базис будет подходящим для геометрического представления этих сигналов.

3.1.2. Разбиение сигнального пространства на решающие области. Пусть при передаче случайно выбирается один из сигналов в соответствии с вероятностным распределением P_0, \dots, P_{q-1} , $P_i > 0$, $\sum_{i=0}^{q-1} P_i = 1$. На практике часто встречается случай, когда сигналы передаются равновероятно, то есть $P_i = 1/q$ для всех i , $i=0, 1, \dots, q-1$. Этот случай и будет рассматриваться далее. Приемник наблюдает выход канала $r(t)$. Задача

приемника состоит в определении номера переданного сигнала. Пусть \hat{i} – решение, принятое приемником относительно номера переданного сигнала, $\hat{i} = 0, 1, \dots, q-1$. При этом возможно, что решение приемника будет ошибочным, то есть $\hat{i} \neq i$. Оптимально построенный приемник обеспечивает наименьшую вероятность ошибки $P_e = \Pr[\hat{i} \neq i]$. $\hat{i} = 0, \dots, q-1$. При этом возможно, что решение приемника будет ошибочным. Оптимально построенный приемник обеспечивает наименьшую вероятность ошибки $P_e = \Pr[\hat{i} \neq i]$.

Пусть для представления сигналов выбран базис $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, \dots, D$. Тогда сигнальному множеству $\{s_i(t)\}$ с использованием этого базиса ставится в соответствие множество сигнальных точек $\{\mathbf{s}_i\}$, $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^D$ (см. выражения (3.4) и (3.3)); здесь и далее \mathbb{R}^D – обозначение D -мерного евклидова пространства. Если разложить по базису сигнал на выходе канала $r(t)$, то получим точку \mathbf{r} в D -мерном евклидовом пространстве. Координаты этой точки образуют вектор \mathbf{r} . Канал формально может быть задан набором условных плотностей вероятностей $w(\mathbf{r} | i)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Для описания приема (процесса формирования решения о переданном сигнале) используем понятие *решающей области*. Разобьем некоторым образом множество всех возможных значений вектора \mathbf{r} , то есть все D -мерное пространство \mathbb{R}^D , на q непересекающихся областей R_i , $i = 0, 1, \dots, q-1$, т.е. представим \mathbb{R}^D как

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{i=0}^{q-1} R_i, \text{ где } R_i \cap R_k = \emptyset, \text{ если } i \neq k.$$

Решение о переданном сигнале принимается по правилу $\hat{i} = i$, если $\mathbf{r} \in R_i$. Понятно, что вероятность ошибки зависит от конфигурации решающих областей R_i . Поэтому задача построения оптимального приемника может быть переформулирована как задача построения решающих областей, обеспечивающих минимальную вероятность ошибки.

Далее будем рассматривать типичный для практики случай, когда сигналы передаются равновероятно, то есть $P_i = 1/q$ для всех i , $i = 0, 1, \dots, q-1$. В этом случае определение решающих областей можно выразить как

$$R_i = \{\mathbf{r} : w(\mathbf{r} | i) > w(\mathbf{r} | k), \forall k \neq i, k = 0, 1, \dots, q-1\}. \quad (3.5)$$

Получающийся в этом случае алгоритм носит название приема по максимуму правдоподобия (МП). Для канала с аддитивным белым гауссовским шумом со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ отклик на переданный сигнал $s_i(t)$, наблюдаемый на приемной стороне, имеет вид

$$r(t) = s_i(t) + n(t),$$

где $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум. В этом случае условные плотности вероятности $w(\mathbf{r} | i)$ D -мерного вектора \mathbf{r} имеют следующий вид

$$w(\mathbf{r} | i) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left(-\frac{d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)}{N_0} \right). \quad (3.6)$$

Второе равенство в (3.6) следует из того, что $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 = d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)$. Тогда нетрудно заметить, что определение решающих областей для случая канала с гауссовским шумом (3.5) может быть с учетом (3.6) переписано в виде

$$R_i = \{\mathbf{r} : d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) < d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k), \forall k \neq i, k = 0, 1, \dots, q-1\}. \quad (3.7)$$

Определение (3.7) означает, что каждая решающая область R_i состоит из точек сигнального пространства, расстояние от которых до сигнальной точки \mathbf{s}_i меньше, чем расстояние до любой другой сигнальной точки \mathbf{s}_k . Такие области называются областями Вороного (Вороной Н.Ф., 1868 – 1908) или областями Дирихле (Dirichlet J.P.G.L., 1805 – 1859).

3.2. Порядок выполнения работы

1. Для выбранного варианта задания выбрать множество базисных функций.
2. Проверить выполнение условий (3.1) для выбранного множества базисных функций.
3. Построить множество сигнальных точек, то есть, вычислить координаты каждой сигнальной точки и изобразить сигнальное созвездие.
4. Построить разбиение сигнального пространства на решающие области.
5. Составить отчет.

Тема 4. Моделирование оптимального приемника дискретных сигналов в канале с аддитивным белым гауссовским шумом

4.1. Краткое теоретическое введение

4.1.1. Правило оптимального приема. Задача оптимального приема дискретных сигналов формулируется следующим образом. Пусть $\{s_i(t)\}$ – множество сигналов, используемых для передачи и заданных на интервале $[0, T]$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, $\{P_i\}$ – априорное распределение, заданное на этом множестве, $P_i > 0$, $\sum_{i=0}^{q-1} P_i = 1$. Далее будем полагать, что все сигналы передаются равновероятно, то есть, что $P_i = 1/q$ для всех $i = 0, 1, \dots, q-1$.

Сигнал на выходе канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) имеет вид

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad (4.1)$$

где $s(t) \in \{s_i(t)\}$, $n(t)$ – АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Задача приемника состоит в определении номера переданного сигнала по принятому сигналу $r(t)$. Пусть \hat{i} – решение принятое приемником относительно номера переданного сигнала, $\hat{i} = 0, 1, \dots, q-1$. При этом возможно, что решение приемника будет ошибочным, то есть $\hat{i} \neq i$. Оптимально построенный приемник обеспечивает наименьшую вероятность ошибки $P_e = \Pr[\hat{i} \neq i]$.

Выберем базис $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, \dots, D$, для представления сигналов. Тогда вместо множества сигналов $\{s_i(t)\}$ можно рассматривать множество D -мерных вещественных сигнальных векторов (сигнальных точек) $\{\mathbf{s}_i\}$, где $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, \dots, s_{iD})$ и $s_{ij} = (s_i, \varphi_j) = \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt$ – скалярное произведение i -го сигнала и j -ой базисной функции, $j = 1, \dots, D$. Аналогично можно построить разложение принятого сигнала $r(t)$ по базисным функциям $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_D)$, где $r_j = (r, \varphi_j) = \int_0^T r(t) \varphi_j(t) dt$. Очевидно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D)$ и $n_j = (n, \varphi_j) = \int_0^T n(t) \varphi_j(t) dt$ – скалярное произведение шума и j -ой базисной функции. Равенство (4.2) представляет собой конечномерное представление равенства (4.1). Случайные величины (с.в.) n_j независимы между собой и имеют гауссовское (Гаусс К.Ф., Gauß C.F., Gauss C.F., 1777 – 1855) распределение с нулевым математическим ожиданием, поскольку шум имеет нулевое среднее, и дисперсией $N_0/2$. То есть, $\bar{n}_j = 0$, $\overline{n_j^2} = N_0/2$, и $\overline{n_j n_k} = 0$, $j, k = 1, \dots, D$, $j \neq k$. Эти свойства следуют из свойств белого гауссовского шума.

Для построения алгоритма оптимального приема нужно знать вид условных плотностей вероятностей $w(\mathbf{r} | i)$, определяемых каналом. При условии, что передан i -й сигнал справедливо равенство $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$, поэтому для канала с АБГШ

$$w(\mathbf{r} | i) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left(- \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left(- \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^D (r_j - s_{ij})^2 \right),$$

или

$$w(\mathbf{r} | i) = K \exp(-d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)/N_0), \quad (4.3)$$

где $K = (\pi N_0)^{-D/2}$ – постоянный множитель, $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)$ – евклидово расстояние между точками \mathbf{r} и \mathbf{s}_i в \mathbb{R}^D (\mathbb{R}^D – обозначение D -мерного евклидова пространства),

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^D (r_j - s_{ij})^2}.$$

Для сигналов, которые передаются равновероятно, оптимальное решающее правило задается правилом максимального правдоподобия, то есть $\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} w(\mathbf{r} | i)$. Это решающее правило с учетом выражения (4.3) может представлено в эквивалентной форме

$$\hat{i} = \arg \min_{0 \leq i \leq q-1} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i), \quad (4.4)$$

которое означает, что в канале с АБГШ при равновероятном использовании сигналов оптимальное решение принимается по критерию минимума евклидова расстояния. Решение по правилу (4.4) может быть выражено в эквивалентной форме как

$$\text{если } \mathbf{r} \in R_i, \text{ то } \hat{i} = i, \quad (4.5)$$

где R_i – i -ая решающая область, определенная равенством (3.7).

4.2. Моделирование передачи по каналу и оптимального приема.

Цель выполнения этого задания состоит в построении программной модели канала с АБГШ и приемника, реализующего алгоритм оптимального приема. В результате моделирования должны быть получены оценки вероятности ошибки приема сигнала для разных отношений сигнал/шум.

Процесс моделирования состоит в многократном выполнении следующих шагов:

- случайный равновероятный выбор номера сигнала i , подлежащего передаче, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- получение сигнала $r(t)$ на выходе канала согласно равенству $r(t) = s_i(t) + n(t)$, где $n(t)$ – АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$;
- вычисление вектора $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_D)$ с компонентами $r_j(t) = \int_0^T r(t) \varphi_j(t) dt$;
- формирование решения \hat{i} по правилу (4.5) или (4.4);
- фиксации результата: если $\hat{i} \neq i$, то решение на приемной стороне сформировано неправильно и нужно увеличить счетчик числа ошибок.

Оценка вероятности ошибки получается путем деления числа произошедших ошибок на число испытаний. При большом числе испытаний эта оценка должна быть близка к истинной вероятности ошибки или к ее верхней границе, которые вычисляются по соответствующим формулам.

Указанные шаги выполняются для нескольких значений отношения сигнал шум, в результате получается зависимость *оценки вероятности ошибки*, полученной *экспериментально*, от отношения сигнал/шум. Эта зависимость при правильном выполнении задания должна хорошо соотноситься с *теоретической зависимостью* вероятности ошибки от отношения сигнал/шум. Формулы для вероятности ошибки от отношения сигнал/шум, определяющие теоретическую зависимость, могут быть, например, найдены в соответствующем разделе пособия [1].

Исходными данными для моделирования являются следующие:

- набор значений отношения сигнал шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$;
- сигнальное множество $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- функциональный базис $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, D$;
- описание решающих областей R_i , $i = 0, 1, \dots, q-1$.

В результате моделирования должны быть экспериментально получены оценки вероятности ошибки $P_e^{(1)}, P_e^{(2)}, \dots, P_e^{(n)}$, соответствующие значениям отношения сигнал/шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$.

Основные шаги алгоритма моделирования, записанного на *псевдокоде*, представлены на рис. 4.1.

```

/* Цикл по значениям отношения сигнал/шум в дБ */
for  $\gamma_{dB} = \gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$ 

     $\gamma \leftarrow 10^{\gamma_{dB}/10}$ ; /* отношение сигнал/шум */

    Вычислить значение дисперсии отсчета шума  $\sigma^2$ 
    с использованием значения  $\gamma$ ;

    Назначить максимальное число ошибок  $N_{err\max}$  в пределах 20...50...100;

     $N_{err} \leftarrow 0$ ; /* начальное значение счетчика числа ошибок */
     $N_{test} \leftarrow 0$ ; /* начальное значение счетчика числа испытаний */

    /* Цикл моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */

    while  $N_{err} < N_{err\max}$ 

        /* Моделирование передатчика и канала */

        Случайно выбрать  $i$  в интервале  $0, 1, \dots, q-1$ ;
        Вычислить сигнал на выходе канала
         $r(t) \leftarrow s_i(t) + n(t)$ ;

        /* Моделирование приемника */

        Вычислить значение вектора  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_D)$  с компонентами
         $r_j = (r, \varphi_j) = \int_0^T r(t) \varphi_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, D$ ;

        if  $\mathbf{r} \in R_k$  then  $\hat{i} = k$  end if /* формирование решения */

        /* Фиксация результата */

        if  $\hat{i} \neq i$  then  $N_{err} \leftarrow N_{err} + 1$ ; end if

         $N_{test} \leftarrow N_{test} + 1$ ; /* увеличение счетчика числа испытаний */

    end while /* конец цикла моделирования при одном значении
    отношения сигнал/шум */

    /* Вычисление экспериментальной оценка вероятности ошибки */

     $P_e^{(n)} \leftarrow N_{err} / N_{test}$ ;

end for /* конец цикла по значениям отношения сигнал/шум в дБ */

```

Рис.4.1. Алгоритм моделирования

4.3. Порядок выполнения работы

1. Для выбранного варианта задания разработать и отладить программу моделирования с использованием алгоритма, показанного на рис. 4.1. При разработке программы следует использовать построенные ранее а) сигнальное множество, б) множество базисных функций, и в) решающие области.
2. Выполнить моделирования для нескольких значений отношения сигнал/шум.
3. Для выбранного варианта вычислить значения вероятности ошибки или ее верхней границы по соответствующим теоретическим формулам (см. пособие [1]).
4. Построить графики для данных, полученных в пп.2 и 3.
5. Составить отчет.

Тема 5. Моделирование передачи сигналов частотной модуляции по каналу с аддитивным белым гауссовским шумом и случайной фазой

5.1. Краткое теоретическое введение

5.1.1. Модель канала. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом и случайной фазой описывается более сложной моделью, чем рассмотренный ранее канал с аддитивным белым гауссовским шумом. Этот канал относится к классу каналов со случайными параметрами. В рассматриваемом случае случайным параметром является фаза сигнала, поступающего на приемник. Рассмотрим далее передачу с использованием дискретной частотной модуляции (ЧМ), то есть

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.1)$$

где E – энергия принятого сигнала, T – длительность сигнала, $i = 0, 1, \dots, q-1$. В (5.1) предполагается, что значения частот f_i , $i = 0, 1, \dots, q-1$, выбраны так, что выполняется условие ортогональности в усиленном смысле.

Если передан сигнал $s_i(t)$, определенный равенством (5.1), то сигнал на выходе канала со случайной фазой имеет вид

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t - \theta) + n(t), \quad 0 < t < T, \quad (5.2)$$

где θ – случайный фазовый сдвиг, $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум. Распределение случайного фазового сдвига может быть задано различным образом. Наиболее простым и распространенным является предположение о равномерном распределении фазового сдвига, то есть, функция плотности вероятности величины θ задается как

$$w(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Причины случайного фазового сдвига могут быть различными; в частности, он может возникать из-за условий распространения сигнала и/или из-за нестабильного формирования сигнала в передатчике. На рис. 5.1 показана иллюстрация для описанной модели канала.

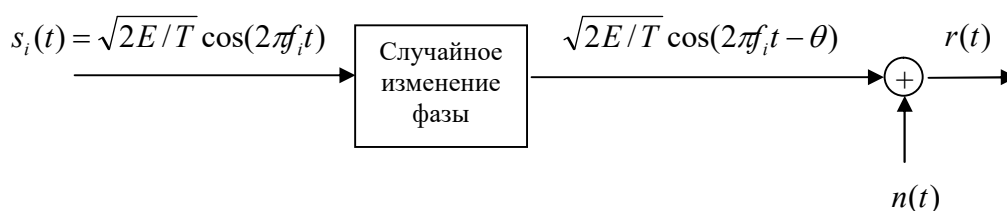


Рис. 5.1. Модель канала со случайной фазой и шумом

5.1.2. Правило оптимального приема. При использовании сигналов ЧМ, заданных равенством (5.1), оптимальное решающее правило может быть сформулировано следующим образом

$$\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} ((r_{ci})^2 + (r_{si})^2), \quad (5.4)$$

где величины r_{ci} и r_{si} вычислены как

$$r_{ci} = \int_0^T r(t) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t dt, \quad (5.5a)$$

$$r_{si} = \int_0^T r(t) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t dt. \quad (5.5b)$$

Детали вывода решающего правила (5.4) могут быть найдены, например, в соответствующем разделе пособия [1]. На рис. 5.2 приведена схема оптимального приемника, реализующего решающее правило (5.4).

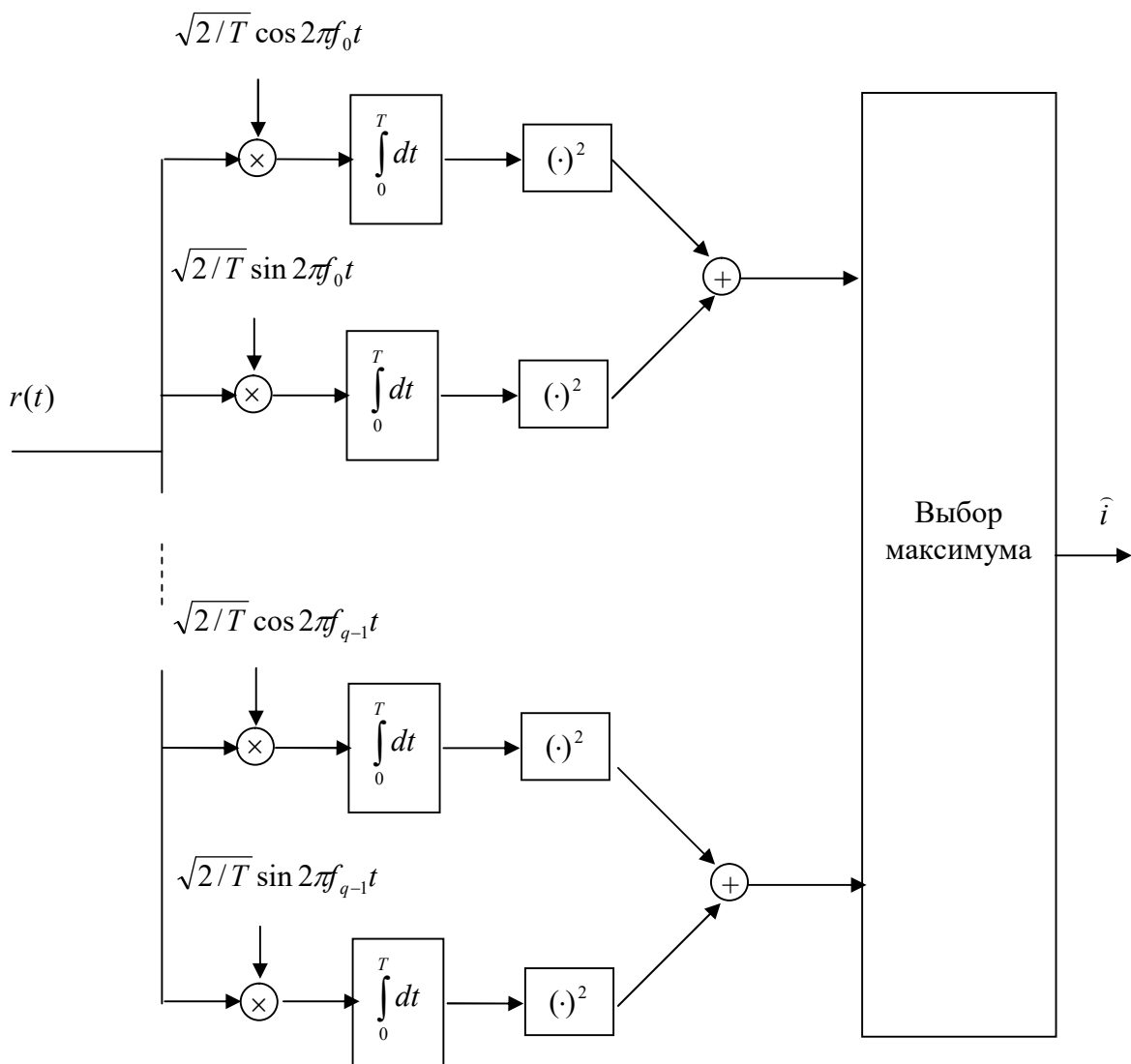


Рис.5.2. Схема оптимального приемника ЧМ сигналов в канале со случайной фазой

5.2. Моделирование передачи по каналу со случайной фазой и оптимального приема

Цель выполнения этого задания состоит в построении программной модели канала с АБГШ и случайной фазой и приемника, реализующего алгоритм оптимального приема ЧМ сигналов. В результате моделирования должны быть получены оценки вероятности ошибки приема сигнала для разных отношений сигнал/шум.

Процесс моделирования состоит в многократном выполнении следующих шагов:

- случайный равновероятный выбор номера сигнала i , подлежащего передаче, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- получение сигнала $r(t)$ на выходе канала по согласно равенству (5.2);
- вычисление величин r_{ci} и r_{si} , по формулам (5.5) для $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- формирование решения \hat{i} по правилу (5.4);
- фиксация результата: если $\hat{i} \neq i$, то решение на приемной стороне сформировано неправильно и нужно увеличить счетчик числа ошибок.

Оценка вероятности ошибки получается путем деления числа произошедших ошибок на число испытаний. При большом числе испытаний эта оценка должна быть близка к истинной вероятности ошибки или к ее верхней границе, которые вычисляются по соответствующим формулам.

Указанные шаги выполняются для нескольких значений отношения сигнал/шум, в результате получается зависимость *оценки вероятности ошибки*, полученной *экспериментально*, от отношения сигнал/шум. Эта зависимость при правильном выполнении задания должна хорошо соотноситься с *теоретической зависимостью* вероятности ошибки от отношения сигнал/шум.

Важное замечание. Равенство (5.2) задает модель канала со случайной фазой и может использоваться для моделирования. Однако, более эффективно моделирование выходного сигнала канала может быть организовано следующим образом. Представим выход канала (5.2) в эквивалентном виде с использованием тождества

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

как

$$r(t) = \cos \theta \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi f_i t + \sin \theta \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin 2\pi f_i t + n(t). \quad (5.6)$$

Вычисление выхода канала по формуле (5.6) оказывается более эффективным, чем вычисление по формуле (5.2), так как в этом случае не требуется вычислять много значений тригонометрических функций \sin и \cos для аргумента, зависящего от случайной фазы θ , при *каждом* проходе цикла моделирования. При вычислении по формуле (5.6) нужно лишь вычислить значения $\cos \theta$ и $\sin \theta$, зависящие от значения случайной фазы θ и умножить их на значения функций $\sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t$ и $\sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_i t$, которые должны быть вычислены до начала цикла моделирования.

Исходными данными для моделирования являются следующие:

- набор значений отношения сигнал шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$.
- сигнальное множество ЧМ сигналов $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- функциональный базис $\{\sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t\} \cup \{\sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$.

В результате моделирования должны быть экспериментально получены оценки вероятности ошибки $P_e^{(1)}, P_e^{(2)}, \dots, P_e^{(n)}$, соответствующие значениям отношения сигнал/шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$.

Основные шаги алгоритма моделирования, записанного на псевдокоде, представлены на рис. 5.3.

Построить базисные функций и sin и cos составляющие сигналов по формулам

$$\varphi_i^{(\cos)}(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t, \quad \varphi_i^{(\sin)}(t) = \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t, \quad i = 0, 1, \dots, q-1;$$

$$s_i^{(\cos)}(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t, \quad s_i^{(\sin)}(t) = \sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_i t, \quad i = 0, 1, \dots, q-1;$$

for $\gamma_{dB} = \gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$ /* Цикл по значениям отношения сигнал/шум в дБ */

$\gamma \leftarrow 10^{\gamma_{dB}/10};$ /* отношение сигнал/шум */

Вычислить значение дисперсии отсчета шума σ^2 с использованием значения γ ;

Назначить максимальное число ошибок $N_{err\max}$ в пределах 20...50...100;

$N_{err} \leftarrow 0;$ /* начальное значение счетчика числа ошибок */

$N_{test} \leftarrow 0;$ /* начальное значение счетчика числа испытаний */

/* Цикл моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */

while $N_{err} < N_{err\max}$

/* Моделирование передатчика и канала */

Случайно выбрать i в интервале $0, 1, \dots, q-1$;

Вычислить сигнал на выходе канала

$$r(t) \leftarrow \cos \theta s_i^{(\cos)}(t) + \sin \theta s_i^{(\sin)}(t) + n(t);$$

/* Моделирование приемника */

Для $i = 0, 1, \dots, q-1$ вычислить значения r_{ci} и r_{si} по формулам

$$r_{ci} = \int_0^T r(t) \varphi_i^{(\cos)}(t) dt, \quad r_{si} = \int_0^T r(t) \varphi_i^{(\sin)}(t) dt;$$

$$\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} ((r_{ci})^2 + (r_{si})^2) \quad /* \text{формирование решения} */$$

/* Фиксация результата */

if $\hat{i} \neq i$ then $N_{err} \leftarrow N_{err} + 1$; end if

$N_{test} \leftarrow N_{test} + 1;$ /* увеличение счетчика числа испытаний */

end while /* конец цикла моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */

/* Вычисление экспериментальной оценка вероятности ошибки */

$$P_e^{(n)} \leftarrow N_{err} / N_{test};$$

end for /* конец цикла по значениям отношения сигнал/шум в дБ */

Рис.5.3. Алгоритм моделирования передачи и оптимального приема (ЧМ сигналы, канал со случайной фазой)

5.3. Порядок выполнения работы

1. Для выбранного варианта задания разработать и отладить программу моделирования с использованием алгоритма, показанного на рис. 5.1.
2. Выполнить моделирования для нескольких значений отношения сигнал/шум.
3. Для выбранного варианта вычислить значения вероятности ошибки или ее верхней границы по соответствующим теоретическим формулам (см. пособие [1]).
4. Построить графики для данных, полученных в пп.2 и 3.
5. Составить отчет.

Тема 6. Моделирование передачи с использованием сигналов с ортогональными огибающими по каналу со случайной фазой

6.1. Краткое теоретическое введение

6.1.1. Сигналы с ортогональными огибающими. Передача с использованием сигналов с ортогональными огибающими представляет собой один из способов цифровой передачи по каналу со случайной фазой. В этом случае сигналы передаются на одной несущей частоте и имеют вид $s_i(t) = m_i(t)\sqrt{2E} \cos 2\pi f_0 t$, где $m_i(t)$ – ортонормированные на интервале $[0, T]$ огибающие, $i = 0, 1, \dots, q-1$, E – энергия сигнала. В качестве огибающих могут быть использованы *любые* ортонормированные функции. Важно только чтобы они были *низкочастотными* по сравнению со значением несущей частоты f_0 . Рассмотрим использование в качестве огибающих кусочно-постоянных функций, полученных с использованием кода Адамара¹ (Hadamard J.S., 1865 – 1963) соответствующего порядка. Огибающие, построенные с использованием кода Адамара, состоят из q элементов сигнала, или чипов (chip), длительности $T_c = T/q$. Условие низкочастотности огибающей состоит в данном случае в том, что $f_0 \gg 1/T_c$, то есть на длительности чипа должно помещаться много периодов несущей. Пример огибающих, построенных на основе кода Адамара для $q = 8$, показан на рис.6.1.

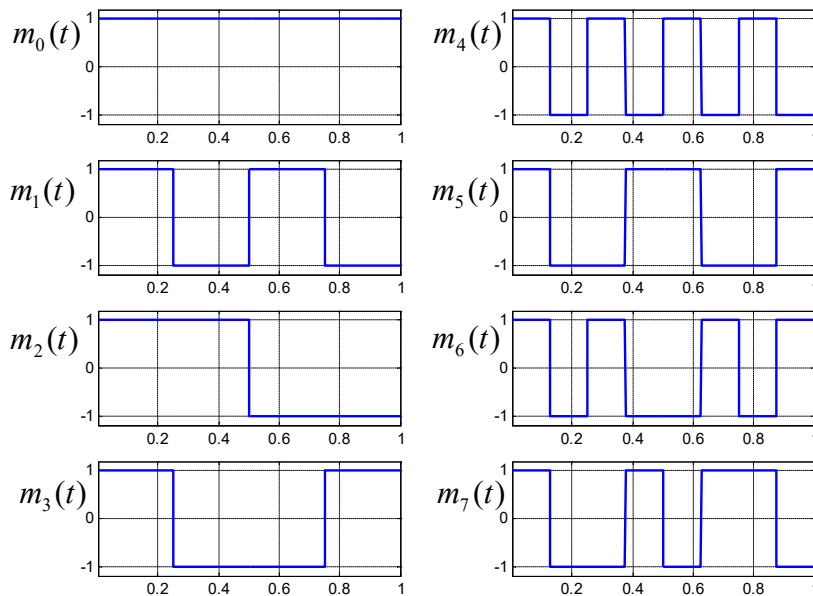


Рис.6.1 Ортогональные огибающие, построенные на основе кода Адамара,
 $q = 8$, $T = 1$.

6.1.2. Оптимальный прием сигналов с ортогональными огибающими. Для того, чтобы описать идею построения приемника сигналов с ортогональными огибающими

¹ Код Адамара определяется как набор векторов, совпадающих со строками матрицы Адамара. Матрица Адамара порядка $n = 2^k$ может быть определена рекурсивно как $H_n = \begin{bmatrix} H_{n/2} & H_{n/2} \\ H_{n/2} & -H_{n/2} \end{bmatrix}$, и

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

рассмотрим сначала случай отсутствия аддитивного шума. Принятый сигнал в этом случае имеет вид

$$r(t) = m_i(t)\sqrt{2E} \cos(2\pi f_0 t - \theta) = m_i(t)\sqrt{2E} (\cos \theta \cos 2\pi f_0 t + \sin \theta \sin 2\pi f_0 t),$$

где θ – случайный фазовый сдвиг. В приемнике сначала выполняется низкочастотная демодуляция (перенос спектра в низкочастотную область). Эта операция выполняется следующим образом. Сначала принятый сигнал умножается на *местные несущие* $\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ и $\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$ и потом пропускается через фильтр низких частот, то есть вычисляются низкочастотные компоненты принятого сигнала

$$r_c(t) = (r(t)\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} \quad (6.1a)$$

и

$$r_s(t) = (r(t)\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}}. \quad (6.1б)$$

Здесь через $(\cdot)_{\text{НЧ}}$ обозначена операция линейной низкочастотной фильтрации выражения, стоящего в скобках. Рассмотрим вычисление $r_c(t)$,

$$\begin{aligned} r_c(t) &= (r(t)\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \sqrt{2E} \sqrt{2} (m_i(t) \cos(2\pi f_0 t - \theta) \cos 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \\ &= 2\sqrt{E} (m_i(t) \cos \theta \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t + \sin \theta \sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \\ &= \sqrt{E} (m_i(t) (\cos \theta (1 + \cos 4\pi f_0 t) + \sin \theta \sin 4\pi f_0 t))_{\text{НЧ}} = \sqrt{E} m_i(t) \cos \theta. \end{aligned}$$

При переходе к последнему выражению учтено, что НЧ фильтр полностью подавляет составляющие удвоенной частоты. Также при выводе выражения для $r_c(t)$ использованы тождества $\cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2$ и $\cos x \sin x = \sin 2x / 2$. Аналогично

$$\begin{aligned} r_s(t) &= (r(t)\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \sqrt{2E} \sqrt{2} (m_i(t) \cos(2\pi f_0 t - \theta) \sin 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \\ &= 2\sqrt{E} (m_i(t) \cos \theta \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t + \sin \theta \sin 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \\ &= \sqrt{E} (m_i(t) (\cos \theta \sin 4\pi f_0 t + \sin \theta (1 - \cos 4\pi f_0 t)))_{\text{НЧ}} = \sqrt{E} m_i(t) \sin \theta. \end{aligned}$$

После этого в приемнике вычисляются скалярные произведения функций $r_c(t)$ и $r_s(t)$ и ортогональных огибающих, то есть величины

$$r_{ck} = \int_0^T r_c(t) m_k(t) dt, \quad (6.2a)$$

$$r_{sk} = \int_0^T r_s(t) m_k(t) dt. \quad (6.2б)$$

Далее они возводятся в квадрат, и решение принимается по правилу

$$\hat{i} = \arg \max_{0 \leq k \leq q-1} ((r_{ck})^2 + (r_{sk})^2). \quad (6.3)$$

Схема некогерентного приемника для сигналов с ортогональными огибающими показана на рис.6.2.

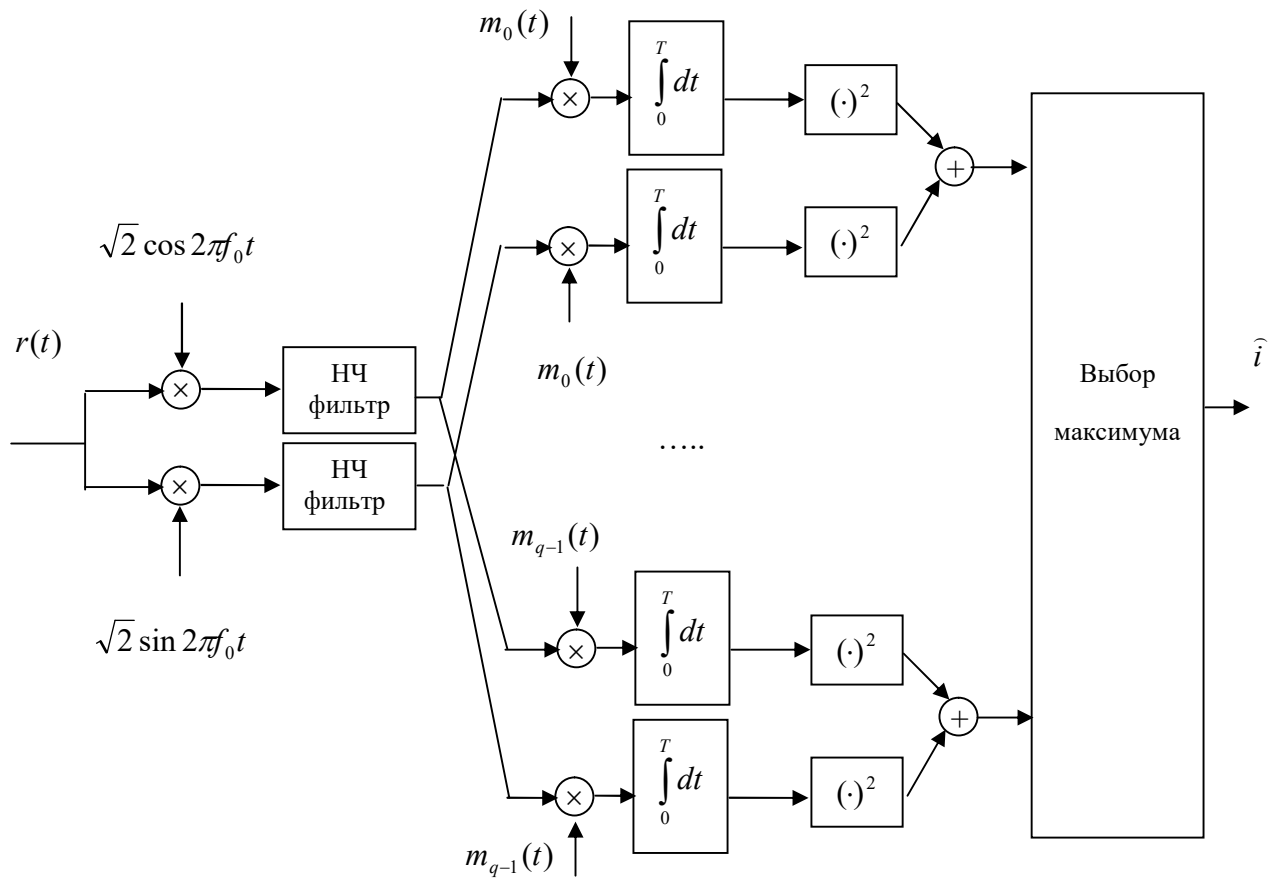


Рис.6.2. Схема некогерентного приемника для сигналов с ортогональными огибающими.

6.2. Моделирование передачи сигналов с ортогональными огибающими по каналу со случайной фазой

Цель выполнения этого задания состоит в построении программной модели канала с АБГШ и случайной фазой и приемника, реализующего алгоритм оптимального приема сигналов с ортогональными огибающими. В результате моделирования должны быть получены оценки вероятности ошибки приема сигнала для разных отношений сигнал/шум.

Процесс моделирования состоит в многократном выполнении следующих шагов:

- случайный равновероятный выбор номера сигнала i , подлежащего передаче, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- получение сигнала $r(t)$ на выходе канала по согласно равенству

$$r(t) = m_i(t) \sqrt{2E} \cos(2\pi f_0 t - \theta) + n(t), \quad (6.4)$$

где $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум, θ – случайный фазовый сдвиг, равномерно распределенный в интервале $[0, 2\pi]$;

- вычисление низкочастотных компонентов принятого сигнала $r_c(t)$ и $r_s(t)$ по формулам (6.1);
- вычисление величин r_{ci} и r_{si} по формулам (6.2) для $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- формирование решения \hat{i} по правилу (6.3);
- фиксация результата: если $\hat{i} \neq i$, то решение на приемной стороне сформировано неправильно и нужно увеличить счетчик числа ошибок.

Оценка вероятности ошибки получается путем деления числа произошедших ошибок на число испытаний. При большом числе испытаний эта оценка должна быть близка к истинной вероятности ошибки или к ее верхней границе, которые вычисляются по соответствующим формулам.

Указанные шаги выполняются для нескольких значений отношения сигнал шум, в результате получается зависимость *оценки вероятности ошибки*, полученной *экспериментально*, от отношения сигнал/шум. Эта зависимость при правильном выполнении задания должна хорошо соотноситься с *теоретической зависимостью* вероятности ошибки от отношения сигнал/шум. Формулы для вероятности ошибки от отношения сигнал/шум, определяющие теоретическую зависимость, могут быть найдены, например, в соответствующем разделе пособия [1].

Важное замечание 1. Равенство (6.4) описывает влияние канала со случайной фазой и может использоваться для моделирования. Однако, более эффективно моделирование выходного сигнала канала может быть организовано следующим образом. Выход канала (6.4) может быть представлен в эквивалентном виде с использованием тождества

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

как

$$r(t) = \cos \theta m_i(t) \sqrt{2E} \cos 2\pi f_0 t + \sin \theta m_i(t) \sqrt{2E} \sin 2\pi f_0 t + n(t). \quad (6.5)$$

Вычисление выхода канала по формуле (6.5) оказывается более эффективным, чем вычисление по формуле (6.4), так как в этом случае не требуется вычислять много значений тригонометрических функций \sin и \cos для аргумента, зависящего от случайной фазы θ , при *каждом* проходе цикла моделирования. При вычислении по формуле (6.5) нужно лишь вычислить значения $\cos \theta$ и $\sin \theta$, зависящие от значения случайной фазы θ и умножить их на значения функций

$$s_{ci}(t) = m_i(t) \sqrt{2E} \cos 2\pi f_0 t, \quad (6.6a)$$

$$s_{si}(t) = m_i(t) \sqrt{2E} \sin 2\pi f_0 t, \quad (6.6b)$$

которые должны быть вычислены до начала цикла моделирования, то есть получить выходной сигнал канала в виде

$$r(t) = \cos \theta s_{ci}(t) + \sin \theta s_{si}(t) + n(t). \quad (6.7)$$

Заметим, что выражение (6.7) полностью эквивалентно выражению (6.4), хотя в реально существующей системе передачи функции $s_{ci}(t)$ и $s_{si}(t)$ *не существуют*, а используются только в программной модели для ускорения вычислений.

Важное замечание 2. Вычисление НЧ составляющих $r_c(t)$ и $r_s(t)$ принятого сигнала $r(t)$ при моделировании следует выполнять с использованием библиотечной функции `filter`, реализующий алгоритм цифровой фильтрации. Цифровой фильтр НЧ можно построить как фильтр Баттерворта порядка 4..5..6. Вычисление параметров этого цифрового фильтра в этом случае следует выполнить с использованием функции `butter`.

Исходными данными для моделирования являются следующие:

- набор значений отношения сигнал шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$;
- множество ортогональных огибающих $\{m_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- множества функций $\{s_{ci}(t)\}$ и $\{s_{si}(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- параметры цифрового НЧ фильтра.

В результате моделирования должны быть экспериментально получены оценки вероятности ошибки $P_e^{(1)}, P_e^{(2)}, \dots, P_e^{(n)}$, соответствующие значениям отношения сигнал/шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$.

Основные шаги алгоритма моделирования, записанного на псевдокоде, представлены на рис. 6.3.

```

Построить ортогональные огибающие  $m_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, q-1$ .
Построить  $\sin$  и  $\cos$  составляющие сигналов по формулам (6.6).
Вычислить параметры НЧ фильтров с использованием функции butter.m.

for  $\gamma_{dB} = \gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$  /* Цикл по значениям отношения сигнал/шум в дБ */
     $\gamma \leftarrow 10^{\gamma_{dB}/10}$ ; /* отношение сигнал/шум */

    Вычислить значение дисперсии отсчета шума  $\sigma^2$  с использованием значения  $\gamma$ ;
    Назначить максимальное число ошибок  $N_{err\max}$  в пределах 20...50...100;
     $N_{err} \leftarrow 0$ ; /* начальное значение счетчика числа ошибок */
     $N_{test} \leftarrow 0$ ; /* начальное значение счетчика числа испытаний */

    /* Цикл моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */

    while  $N_{err} < N_{err\max}$ 
        /* Моделирование передатчика и канала */
        Случайно выбрать  $i$  в интервале  $0, 1, \dots, q-1$ ;

        Вычислить сигнал на выходе канала
         $r(t) \leftarrow \cos \theta s_{ci}(t) + \sin \theta s_{si}(t) + n(t)$ ;

        /* Моделирование приемника */
        Вычислить  $r_c(t)$  и  $r_s(t)$  /* НЧ фильтрация с использованием функции
            filter */

        for  $k = 0, 1, \dots, q-1$ 
            вычислить значения  $r_{ck}$  и  $r_{sk}$  по формулам
            
$$r_{ck} = \int_0^T r_c(t) m_k(t) dt, \quad r_{sk} = \int_0^T r_s(t) m_k(t) dt;$$

        end for

         $\hat{i} = \arg \max_{0 \leq k \leq q-1} ((r_{ck})^2 + (r_{sk})^2)$  /* формирование решения */

        /* Фиксация результата */
        if  $\hat{i} \neq i$  then  $N_{err} \leftarrow N_{err} + 1$ ; end if

         $N_{test} \leftarrow N_{test} + 1$ ; /* увеличение счетчика числа испытаний */

    end while /* конец цикла моделирования при одном значении
        отношения сигнал/шум */

    /* Вычисление экспериментальной оценка вероятности ошибки */

     $P_e^{(n)} \leftarrow N_{err} / N_{test}$ ;

end for /* конец цикла по значениям отношения сигнал/шум в дБ */

```

Рис.6.3. Алгоритм моделирования передачи и оптимального приема (сигналы с ортогональными огибающими, канал со случайной фазой)

6.3. Порядок выполнения работы

1. Для выбранного варианта задания разработать и отладить программу моделирования с использованием алгоритма, показанного на рис. 6.3.
2. Выполнить моделирования для нескольких значений отношения сигнал/шум.
3. Для выбранного варианта вычислить значения вероятности ошибки или ее верхней границы по соответствующим теоретическим формулам (см. пособие [1]).
4. Построить графики для данных, полученных в пп.2 и 3.
5. Составить отчет.

Тема 7. Моделирование передачи сигналов относительной фазовой модуляции по каналу со случайной фазой

7.1. Краткое теоретическое введение

7.1.1. Относительная фазовая модуляция. Пусть q , как обычно, обозначает объем сигнального алфавита. Предположим, что на l -ом тактовом интервале, то есть, на интервале $[lT, (l+1)T]$, $l = 0, 1, 2, \dots$, передается сообщение $i^{(l)}$, $i^{(l)} = 0, 1, \dots, q-1$. Сигнал относительной фазовой модуляции (ОФМ или DPSK = differential phase shift keying), переносимый на l -ом тактовом интервале сообщение $i^{(l)}$, задается следующим выражением

$$s_{i^{(l)}}(t) = \begin{cases} \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_0 t - \theta(i^{(l)}, i^{(l-1)})), & \text{если } lT < t < (l+1)T, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (7.1)$$

где E – энергия сигнала, T – длительность сигнала, совпадающая с периодом их следования, f_0 – несущая частота, $\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)})$ – фаза сигнала на l -ом тактовом интервале, зависящая от текущего от предыдущего сообщений $i^{(l)}$ и $i^{(l-1)}$, где $i^{(l-1)}, i^{(l)} = 0, 1, \dots, q-1$.

Значение фазы $\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)})$ формируется на передающей стороне следующим образом

$$\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) = \theta(i^{(l-1)}, i^{(l-2)}) + \Delta\theta_{i^{(l)}}, \quad (7.2)$$

где $\theta(i^{(l-1)}, i^{(l-2)})$ – значение фазы на предыдущем тактовом интервале (по определению будем считать, что $\theta(i^{(l-1)}, i^{(l-2)})$ при $l=0$ равно нулю, то есть $\theta(i^{(-1)}, i^{(-2)}) = 0$), $\Delta\theta_i$ – приращение фазы текущего сигнала по сравнению с фазой предыдущего сигнала, определяемое как

$$\Delta\theta_i = i 2\pi / q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q-1. \quad (7.3)$$

Например, при $q=2$ (двоичная ОФМ, или BDPSK = binary differential phase shift keying) $\Delta\theta_0 = 0$, а $\Delta\theta_1 = \pi$. При $q=4$ (четверичная ОФМ, или QDPSK = quaternary differential phase shift keying) $\Delta\theta_0 = 0$, $\Delta\theta_1 = \pi/2$, $\Delta\theta_2 = \pi$, и $\Delta\theta_3 = 3\pi/2$.

Выражения (7.1) – (7.3) показывают, что сообщение, то есть значение индекса $i^{(l)}$, определяет изменение фазы текущего сигнала по сравнению с фазой предыдущего сигнала, иначе говоря, сообщение содержится в разности фаз $\Delta\theta_{i^{(l)}}$ текущего и предыдущего сигналов.

7.1.2. Модель канала с медленно изменяющейся случайной фазой. Пусть сигнал на выходе канала на l -ом тактовом интервале, $l = 0, 1, 2, \dots$, то есть при условии, что $lT < t < (l+1)T$, задается равенством

$$r(t) = \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_0 t - \theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) - \phi^{(l)}) + n(t), \quad (7.4)$$

где $\phi^{(l)}$ – случайный фазовый сдвиг, возникающий в канале, $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум. Предположим, что случайный фазовый сдвиг $\phi^{(l)}$ изменяется медленно, то есть, что выполняется неравенство $|(\phi^{(l)} - \phi^{(l-1)})| \bmod 2\pi \ll \pi$. Это условие означает, что случайный фазовый сдвиг, возникающий в канале, имеет примерно одинаковые значения для двух последовательно переданных сигналов. При таком условии применение ОФМ

оправданно и имеет значительное преимущество перед ЧМ. Если же значения случайного фазового сдвига, возникающего в канале, *сильно отличаются друг от друга* на двух соседних тактовых интервалах, то вероятность ошибки при использовании ОФМ оказывается слишком высокой, и тогда этот вид модуляции не может быть использован на практике.

7.1.3. Оптимальный прием ОФМ сигналов в канале с медленно изменяющейся случайной фазой. Для того, чтобы описать идею построения приемника сигналов ОФМ рассмотрим сначала случай отсутствия аддитивного шума. Принятый сигнал в этом случае вид

$$r(t) = \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_0 t - \theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) - \phi^{(l)}) = \\ \sqrt{2/T} \cos(2\pi f_0 t) \sqrt{E} \cos(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) + \sqrt{2/T} \sin(2\pi f_0 t) \sqrt{E} \sin(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}). \quad (7.5)$$

Вычислим далее величины

$$r_c^{(l)} = \int_{lT}^{(l+1)T} r(t) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t dt, \quad (7.6a)$$

$$r_s^{(l)} = \int_{lT}^{(l+1)T} r(t) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t dt. \quad (7.6b)$$

Поскольку функции $\sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t$ и $\sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t$ образуют ортонормированный базис на отрезке $[lT, (l+1)T]$, то из равенств (7.5) и (7.6) следует, что

$$r_c^{(l)} = \sqrt{E} \cos(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) = \sqrt{E} \cos \Theta^{(l)},$$

$$r_s^{(l)} = \sqrt{E} \sin(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) = \sqrt{E} \sin \Theta^{(l)},$$

где $\Theta^{(l)} = \theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}$ – начальная фаза сигнала, переданного на l -ом тактовом интервале. Отсюда следует, что

$$\Theta^{(l)} = \arctan(r_s^{(l)} / r_c^{(l)}). \quad (7.7)$$

Заметим, что величина $\Theta^{(l)}$ включает в себя случайный фазовый сдвиг $\phi^{(l)}$, возникший при передаче по каналу. Найдем значение разности $\Theta^{(l)} - \Theta^{(l-1)}$, то есть, значение разности между значениями начальной фазы сигналов, переданных на текущем и предыдущем тактовом интервале

$$\Theta^{(l)} - \Theta^{(l-1)} = (\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) - (\theta(i^{(l-1)}, i^{(l-2)}) + \phi^{(l-1)}) = \\ = (\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) - \theta(i^{(l-1)}, i^{(l-1)})) + (\phi^{(l)} - \phi^{(l-1)}) \approx \Delta\theta_{i^{(l)}} \quad (7.8).$$

Последнее приближенное равенство следует из условия медленного изменения фазового сдвига, вносимого каналом, то есть из условия, что $\phi^{(l+1)} \approx \phi^{(l)}$. После вычисления величины $\Delta\theta_{i^{(l)}}$ можно определить переданное сообщение (значение индекса $i^{(l)}$) из условия (7.3). Схема приемника ОФМ сигналов показана на рис. 7.1

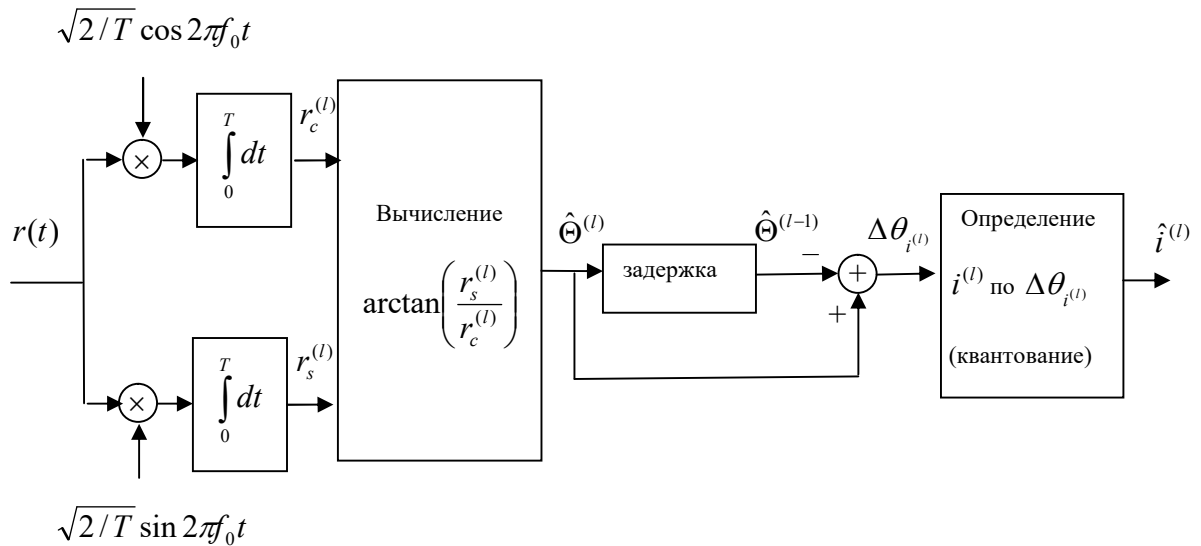


Рис.7.1. Схема приемника для сигналов ОФМ

7.2. Моделирование передачи сигналов относительной фазовой модуляции по каналу со случайной фазой

Цель выполнения этого задания состоит в построении программной модели канала с АБГШ и случайной фазой и приемника, реализующего алгоритм оптимального приема сигналов ОФМ. В результате моделирования должны быть получены оценки вероятности ошибки приема сигнала для разных отношений сигнал/шум.

Процесс моделирования состоит в многократном выполнении следующих шагов:

- случайный равновероятный выбор номера сигнала i , подлежащего передаче, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- получение сигнала $r(t)$ на выходе канала по согласно равенству (7.4);
- вычисление величин $r_c^{(l)}$ и $r_s^{(l)}$ по формулам (7.6) и далее величины $\Theta^{(l)}$ по формуле (7.7);
- вычисление разности текущего и предыдущего значений начальной фазы принятого сигнала $\Theta^{(l)} - \Theta^{(l-1)}$;
- формирование решения \hat{i} исходя из значения разности $\Theta^{(l)} - \Theta^{(l-1)}$ (см. выражение 7.8);
- фиксация результата: если $\hat{i} \neq i$, то решение на приемной стороне сформировано неправильно и нужно увеличить счетчик числа ошибок.

Оценка вероятности ошибки получается путем деления числа произошедших ошибок на число испытаний. При большом числе испытаний эта оценка должна быть близка к истинной вероятности ошибки или к ее верхней границе, которые вычисляются по соответствующим формулам.

Указанные шаги выполняются для нескольких значений отношения сигнал шум, в результате получается зависимость *оценки вероятности ошибки*, полученной *экспериментально*, от отношения сигнал/шум. Эта зависимость при правильном выполнении задания должна хорошо соотноситься с *теоретической зависимостью* вероятности ошибки от отношения сигнал/шум. Формулы для вероятности ошибки от отношения сигнал/шум, определяющие теоретическую зависимость, могут быть найдены, например, в соответствующем разделе пособия [1].

Важное замечание 1. Равенство (7.4) описывает влияние канала со случайной фазой и может использоваться для моделирования. Однако более эффективно моделирование выходного сигнала канала может быть организовано следующим образом.

Выход канала (7.4) может быть представлен в эквивалентном виде с использованием тождества

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

как

$$r(t) = \cos(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_0 t + \sin(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) \sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_0 t + n(t). \quad (7.9)$$

Вычисление выхода канала по формуле (7.9) оказывается более эффективным, чем вычисление по формуле (7.4), так как в этом случае не требуется вычислять много значений тригонометрических функций \sin и \cos для аргумента, зависящего от фазы $\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}$, при каждом проходе цикла моделирования. При вычислении по формуле (7.9) нужно лишь вычислить значения $\cos(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)})$ и $\sin(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)})$ и умножить их на значения функций

$$s_c(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_0 t, \quad (7.10a)$$

$$s_s(t) = \sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_0 t, \quad (7.10b)$$

которые должны быть вычислены до начала цикла моделирования, то есть получить выходной сигнал канала в виде

$$r(t) = \cos(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) s_c(t) + \sin(\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)}) + \phi^{(l)}) s_s(t) + n(t). \quad (7.11)$$

Важное замечание 2. При вычислении величин фазы $\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)})$ на передающей стороне по формуле (7.2) достаточно знать значения предыдущей фазы $\theta(i^{(l-1)}, i^{(l-2)})$ и фазового сдвига $\Delta\theta_{i^{(l)}}$, определяемого текущим передаваемым сообщением $i^{(l)}$. Поэтому не нужно хранить значения $\theta(i^{(l)}, i^{(l-1)})$ для всех значений l , достаточно хранить лишь предыдущее значение фазы и вычислить текущее значение. На следующем проходе цикла моделирования, то есть при следующем значении переменной l , текущее значение фазы становится предыдущим.

Важное замечание 3. Значение фазового сдвига $\phi^{(l)}$, добавляемого в канале, должно медленно меняться с изменением величины l . Одной из возможных моделей такого медленного может быть следующая

$$\phi^{(l)} = (\phi^{(l-1)} + \alpha \varepsilon^{(l)} + \beta) \bmod 2\pi, \quad (7.12)$$

где $\varepsilon^{(l)}$ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$, α , β – постоянные коэффициенты, задающие скорость изменения случайной величины $\phi^{(l)}$ с изменением индекса l . Возможные значения коэффициентов α и β могут быть следующие: $\alpha = 0.002$, $\beta = 0.0005$. Очевидно, что при $\alpha = \beta = 0$ выполняется равенство $\phi^{(l)} = \phi^{(l-1)}$, которое означает неизменность фазового сдвига вносимого каналом с течением времени. Заметим, что при вычислении очередного значения $\phi^{(l)}$ нужно знать только предыдущее значение $\phi^{(l-1)}$ и значение $\varepsilon^{(l)}$. Поэтому не нужно хранить значения $\phi^{(l-1)}$ для всех значений l , достаточно хранить лишь предыдущее значение. На следующем проходе цикла моделирования, то есть при следующем значении переменной l , текущее значение фазы $\phi^{(l)}$ становится предыдущим.

Важное замечание 4. При вычислении разности фаз $\Theta^{(l)} - \Theta^{(l-1)}$ на приемной стороне достаточно знать значения предыдущей фазы $\Theta^{(l-1)}$ и текущей фазы $\Theta^{(l)}$ сдвига $\Delta\theta_{i^{(l)}}$, определяемого текущим передаваемым сообщением $i^{(l)}$. Поэтому не нужно хранить

значения $\Theta^{(l-1)}$ для всех значений l , достаточно хранить лишь предыдущее значение фазы. На следующем проходе цикла моделирования, то есть при следующем значении переменной l , текущее значение фазы $\Theta^{(l)}$ становится предыдущим.

Исходными данными для моделирования являются следующие:

- набор значений отношения сигнал шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$;
- две функции $s_c(t)$ и $s_s(t)$ (см. выражения (7.10));
- коэффициенты α и β , задающие скорость изменения случайного фазового сдвига, вносимого каналом (см. формулу (7.12)).

В результате моделирования должны быть экспериментально получены оценки вероятности ошибки $P_e^{(1)}, P_e^{(2)}, \dots, P_e^{(n)}$, соответствующие значениям отношения сигнал/шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$.

Основные шаги алгоритма моделирования, записанного на *псевдокоде*, представлены на рис. 7.2.

7.3. Порядок выполнения работы

1. Для выбранного варианта задания разработать и отладить программу моделирования с использованием алгоритма, показанного на рис. 7.2.
2. Выполнить моделирование для нескольких значений отношения сигнал/шум.
3. Для выбранного варианта вычислить значения вероятности ошибки или ее верхней границы по соответствующим теоретическим формулам (см. пособие [1]).
4. Повторить вычисления пп.2 и 3 для других значений коэффициентов α и β , задающих скорость изменения случайного сдвига, вносимого каналом.
4. Построить графики для данных, полученных в пп.2 и 3.
5. Составить отчет.

```

Построить ортогональные сигнальные функции  $s_c(t)$  и  $s_s(t)$  по формулам (7.10).
Задать значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ .
for  $\gamma_{dB} = \gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$  /* Цикл по значениям отношения сигнал/шум в дБ */
     $\gamma \leftarrow 10^{\gamma_{dB}/10}$ ; /* отношение сигнал/шум */

    Вычислить значение дисперсии отсчета шума  $\sigma^2$  с использованием значения  $\gamma$ ;
    Назначить максимальное число ошибок  $N_{err\max}$  в пределах 20...50...100;
     $N_{err} \leftarrow 0$ ; /* начальное значение счетчика числа ошибок */
     $l \leftarrow 0$ ; /* начальное значение счетчика числа испытаний */
     $\theta_{пред} \leftarrow 0$ ;  $\Theta_{пред} \leftarrow 0$ ;  $\phi_{пред} \leftarrow$  равномерно распределенное в  $[0, 2\pi]$ ;

    /* Цикл моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */
    while  $N_{err} < N_{err\max}$ 

        /* Моделирование передатчика и канала */
        Случайно выбрать  $i$  в интервале  $0, 1, \dots, q-1$ ;
         $\Delta\theta \leftarrow i 2\pi / q$ ;  $\theta \leftarrow \theta_{пред} + \Delta\theta$ ; /* фаза сигнала */
         $\theta_{пред} \leftarrow \theta$ ; /* сохранение текущей фазы для следующего раза */
         $\varepsilon \leftarrow$  равномерно распределенное в  $[-\pi, \pi]$ ;
         $\phi \leftarrow (\phi_{пред} + \alpha\varepsilon + \beta) \bmod 2\pi$  /* фаза, вносимая каналом */
         $\phi_{пред} \leftarrow \phi$ ; /* сохранение текущей фазы канала для следующего раза */

        Вычислить сигнал на выходе канала
         $r(t) \leftarrow \cos(\theta + \phi) s_c(t) + \sin(\theta + \phi) s_s(t) + n(t)$ ;

        /* Моделирование приемника */
        Вычислить величины  $r_c = \int_0^T r(t) s_c(t) dt$ ,  $r_s = \int_0^T r(t) s_s(t) dt$ .
         $\Theta \leftarrow \arctan(r_s / r_c)$ ;
        Вычислить  $\hat{i}$  по разности  $\Theta - \Theta_{пред}$  /* формирование решения */
         $\Theta_{пред} \leftarrow \Theta$ ; /* сохранение для следующего раза */

        /* Фиксация результата */
        if  $\hat{i} \neq i$  then  $N_{err} \leftarrow N_{err} + 1$ ; end if
         $l \leftarrow l + 1$ ; /* увеличение счетчика числа испытаний */

    end while /* конец цикла моделирования при одном значении
    отношения сигнал/шум */

    /* Вычисление экспериментальной оценки вероятности ошибки */
     $P_e^{(n)} \leftarrow N_{err} / l$ ;

end for /* конец цикла по значениям отношения сигнал/шум в дБ */

```

Рис.7.2. Алгоритм моделирования передачи и приема сигналов ОФМ

Тема 8. Моделирование передачи сигналов частотной модуляции по каналу с замираниями и случайной фазой

8.1. Краткое теоретическое введение

8.1.1. Модель канала. Канал с замираниями и случайной фазой описывается более сложной модель, чем рассмотренный ранее канал с аддитивным белым гауссовским шумом. Этот канал относится к классу каналов со случайными параметрами. Предположим, что передача ведется с использованием сигналов дискретной частотной модуляции (ЧМ), заданных равенством

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t), & \text{если } 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8.1)$$

где E – энергия сигнала, T – длительность сигнала, $i = 0, 1, \dots, q-1$. В (8.1) предполагается, что значения частот f_i , $i = 0, 1, \dots, q-1$, выбраны так, что выполняется условие ортогональности в усиленном смысле. В рассматриваемом случае случайными параметрами являются: 1) случайная амплитуда и 2) случайная фаза сигнала, поступающего на приемник.

Если передан сигнал $s_i(t)$, определенный равенством (8.1), то сигнал на выходе канала с замираниями и случайной фазой имеет вид

$$r(t) = \mu \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t - \theta) + n(t), \quad 0 < t < T, \quad (8.2)$$

где μ – случайный коэффициент передачи канала, $\mu \geq 0$, θ – случайный фазовый сдвиг, $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум. Умножение сигнала на случайный коэффициент передачи канала μ вызывает случайное изменение амплитуды принятого сигнала. Ясно, что при этом энергия принятого сигнала также представляет собой случайную величину, которая равна $\mu^2 E$. Среднее значение этой величины, то есть *средняя энергия сигнала* в точке приема, вычисляется как $\overline{E} = \overline{\mu^2 E}$, здесь черта сверху означает усреднение случайной величины по множеству ее значений; в частности,

$$\overline{\mu^2} = \int_0^\infty \alpha^2 w_\mu(\alpha) d\alpha,$$

где $w_\mu(\cdot)$ – функция плотности вероятности случайного коэффициента передачи канала μ .

Для удобства дальнейшего рассмотрения можно без потери общности считать, что $\overline{\mu^2} = 1$. В этом случае $\overline{E} = E$ и величину E можно трактовать как значение энергии сигнала в точке приема в случае отсутствия замираний.

В типичной модели замираний распределение случайного коэффициента передачи канала μ задается как распределение Релея (также используется написание Рэлей, Rayleigh J.W., 1842 – 1919) или как его обобщение – распределение Райса (Rice S.O., 1907 – 1986). Функция плотности вероятности $w_\mu(\cdot)$ для распределения Релея имеет вид

$$w_\mu(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha e^{-\alpha^2}, & \alpha \geq 0, \\ 0, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

Нетрудно проверить, что при таком задании функции плотности вероятности $w_\mu(\cdot)$ выполняется условие $\overline{\mu^2} = 1$. Заметим, что в общем случае функция плотности вероятности Релея зависит от параметра, он обычно обозначается как σ , и имеет более сложный вид, чем выражение (8.3).

Распределение случайного фазового сдвига θ может быть задано различным образом. Наиболее простым и распространенным является предположение о равномерном распределении фазового сдвига, то есть функция плотности вероятности величины θ задается как

$$w(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рис. 8.1 показана иллюстрация для модели канала с релейскими замираниями и случайной фазой.

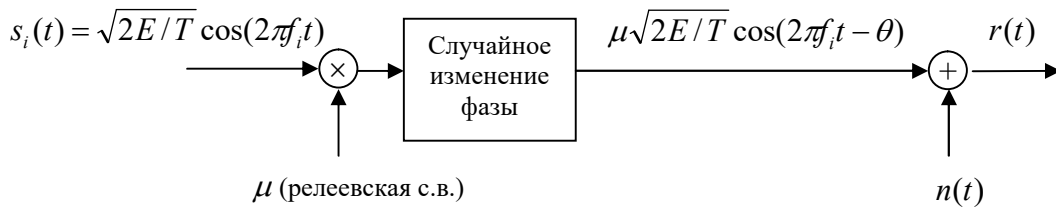


Рис. 8.1. Модель канала со релейскими замираниями и случайной фазой

В более сложной модели сигнал на выходе канала с замираниями представляет собой сумму двух компонент (составляющих): рассеянной и нерассеянной, или регулярной. Рассеянная составляющая получается как результат прохождения сигнала по каналу с релейскими замираниями, а регулярная – как результат прохождения сигнала по каналу со случайной фазой без замираний. На рис. 8.2 показана иллюстрация для модели канала с райсовскими замираниями. Символом ε обозначена *доля энергии* сигнала в нерассеянной (регулярной) составляющей. Постоянная величина ε лежит в пределах от 0 до 1 и является неизменным параметром модели канала.

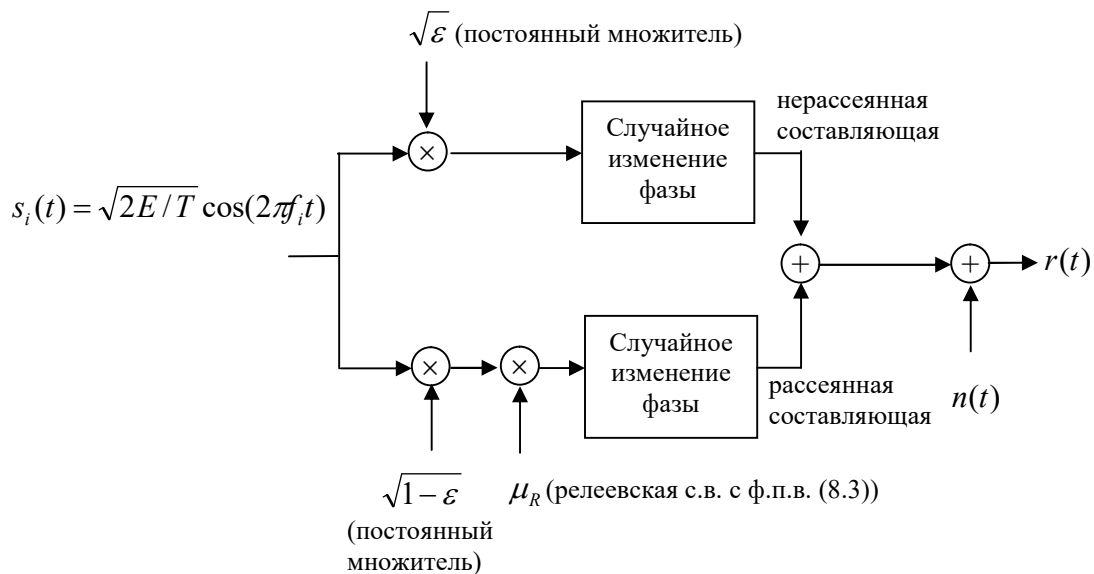


Рис. 8.2. Модель канала со райсовскими замираниями и случайной фазой

В итоге сигнал на выходе канала может быть представлен с помощью равенства (8.2), в котором случайный коэффициент передачи канала μ имеет райсовское распределение. Функция плотности вероятности $w_\mu(\cdot)$ для распределения Райса имеет в данном случае вид

$$w_\mu(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{1-\varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \varepsilon}{1-\varepsilon}\right) I_0\left(\frac{2\alpha\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}\right), & \alpha \geq 0, \\ 0, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя (Bessel F.W., 1784 – 1846) первого рода нулевого порядка, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Заметим, что в общем случае функция плотности вероятности Райса зависит от двух не связанных друг с другом параметров (они обычно обозначаются σ и m), а не от одного параметра ε , как указано в формуле (8.4). В общем случае райсовская функция плотности вероятности более сложный вид, чем выражение (8.4). В рассматриваемом случае параметры райсовской плотности связаны друг с другом через значение параметра ε следующим образом: $m = \sqrt{\varepsilon}$ и $\sigma = \sqrt{(1-\varepsilon)/2}$. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ райсовская модель сводится к релейской, а при $\varepsilon = 1$ – к модели канала со случайной фазой, но без замираний. Графики функции $w_\mu(\alpha)$, построенные согласно равенству (8.4) для различных значений параметра ε , показаны на рис. 8.3.

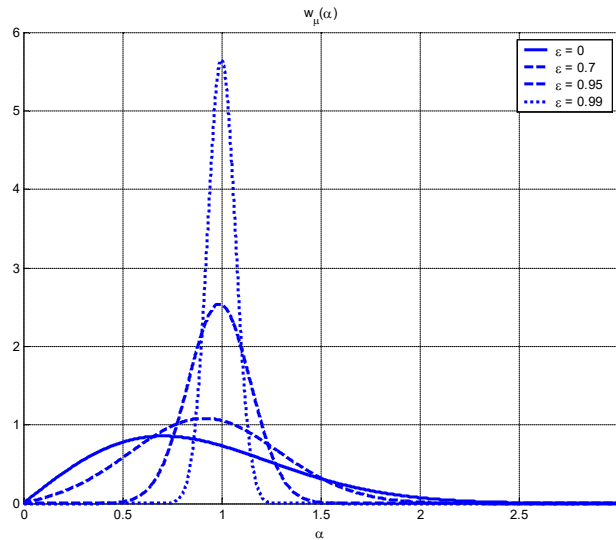


Рис.8.3. Графики функции $w_\mu(\alpha)$, определенной равенством (8.4)

Из графиков видно, что при приближении значения ε к единице график функции плотности вероятности $w_\mu(\alpha)$ сужается, и в пределе она стремится к дельта-функции $\delta(\alpha - 1)$, что означает, что коэффициент передачи канала μ становится равным постоянной величине 1.

8.1.2. Правило оптимального приема. При использовании сигналов ЧМ, заданных равенством (8.1), оптимальное решающее правило может быть сформулировано следующим образом

$$\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} \left((r_{ci})^2 + (r_{si})^2 \right), \quad (8.5)$$

где величины r_{ci} и r_{si} вычислены как

$$r_{ci} = \int_0^T r(t) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t dt, \quad (8.6a)$$

$$r_{si} = \int_0^T r(t) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t dt. \quad (8.66)$$

Детали вывода решающего правила (8.5) могут быть найдены, например, в соответствующем разделе пособия [1]. На рис. 8.4 приведена схема оптимального приемника, реализующего решающее правило (8.5). Заметим, что оптимальное решающее правило и схема оптимального приемника для рассматриваемой модели канала с замираниями совпадают с аналогичными правилом и схемой для канала со случайной фазой (см. Тему 5).

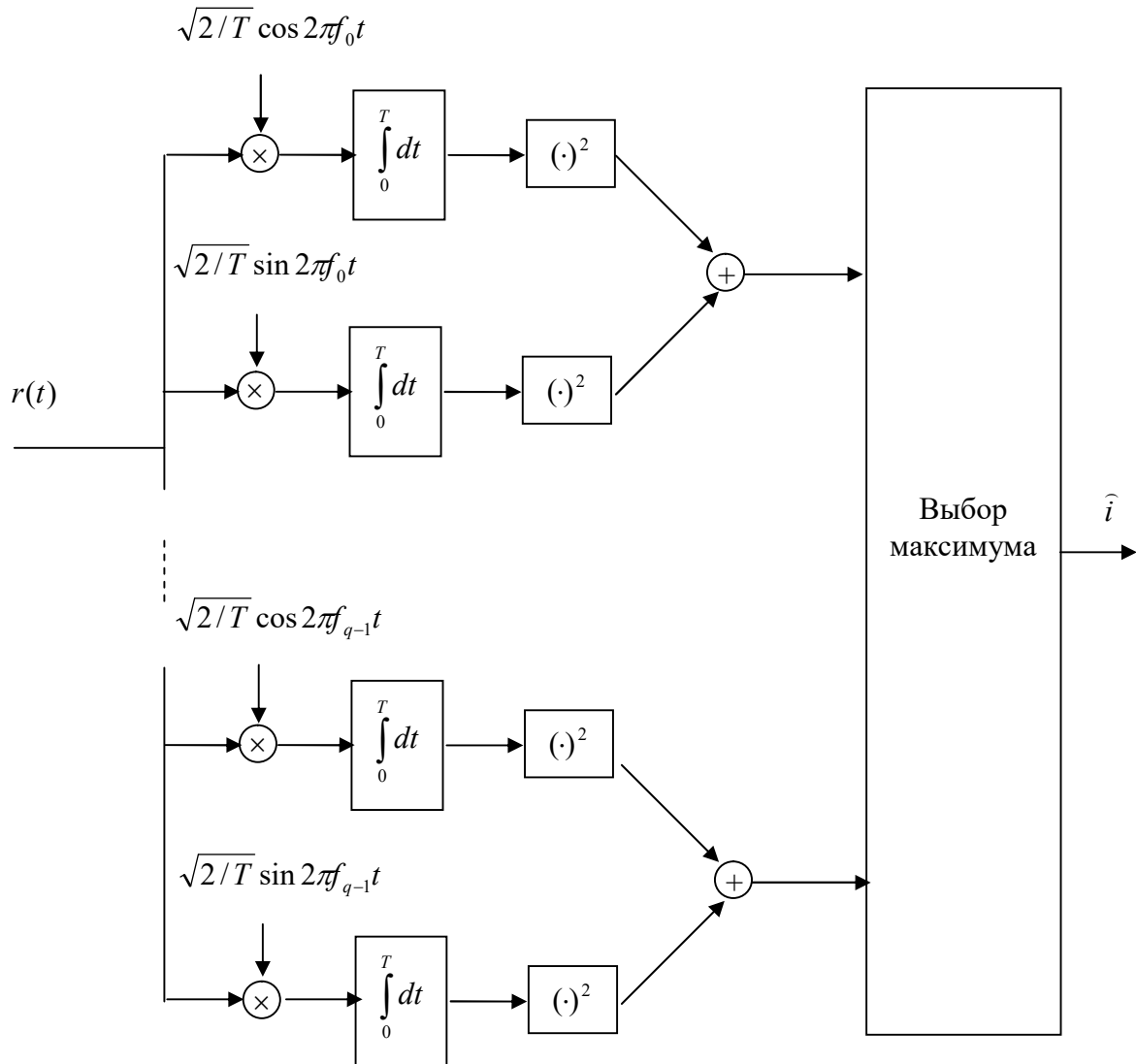


Рис.8.4. Схема оптимального приемника ЧМ сигналов в канале с замираниями и случайной фазой

8.2. Моделирование передачи по каналу с замираниями и оптимального приема

Цель выполнения этого задания состоит в построении программной модели канала с замираниями приемника, реализующего алгоритм оптимального приема ЧМ сигналов. В результате моделирования должны быть получены оценки вероятности ошибки приема сигнала для разных отношений сигнал/шум.

Процесс моделирования состоит в многократном выполнении следующих шагов:

- случайный равновероятный выбор номера сигнала i , подлежащего передаче, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- получение сигнала $r(t)$ на выходе канала по согласно равенству (8.2);
- вычисление величин r_{ci} и r_{si} , по формулам (8.6) для $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- формирование решения \hat{i} по правилу (8.5);
- фиксация результата: если $\hat{i} \neq i$, то решение на приемной стороне сформировано неправильно и нужно увеличить счетчик числа ошибок.

Оценка вероятности ошибки получается путем деления числа произошедших ошибок на число испытаний. При большом числе испытаний эта оценка должна быть близка к истинной вероятности ошибки или к ее верхней границе, которые вычисляются по соответствующим формулам.

Указанные шаги выполняются для нескольких значений отношения сигнал/шум, в результате получается зависимость *оценки вероятности ошибки*, полученной *экспериментально*, от отношения сигнал/шум. Эта зависимость при правильном выполнении задания должна хорошо соотноситься с *теоретической зависимостью* вероятности ошибки от отношения сигнал/шум.

Важные замечания. 1) Случайный коэффициент передачи канала μ при моделировании может быть построен как

$$\mu = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где x , y – независимые гауссовские случайные величины с математическим ожиданием равным $\sqrt{\varepsilon/2}$ и дисперсией $(1-\varepsilon)/2$.

2) Равенство (8.2) задает модель канала с замираниями и случайной фазой и может использоваться для моделирования. Однако, более эффективно моделирование выходного сигнала канала может быть организовано следующим образом. Представим выход канала (8.2) в эквивалентном виде с использованием тождества

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

как

$$r(t) = (\mu \cos \theta) \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi f_i t + (\mu \sin \theta) \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin 2\pi f_i t + n(t). \quad (8.7)$$

Вычисление выхода канала по формуле (8.7) оказывается более эффективным, чем вычисление по формуле (8.2), так как в этом случае не требуется вычислять много значений тригонометрических функций \sin и \cos для аргумента, зависящего от случайной фазы θ , при *каждом* проходе цикла моделирования. При вычислении по формуле (8.7) нужно лишь вычислить значения $\mu \cos \theta$ и $\mu \sin \theta$, зависящие от значений случайных параметров канала μ и θ и умножить их на значения функций $\sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t$ и $\sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_i t$, которые должны быть вычислены до начала цикла моделирования.

Исходными данными для моделирования являются следующие:

- значение ε , задающее долю энергии сигнала, переданную по нерассеянной компоненте;
- набор значений отношения сигнал шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$;
- сигнальное множество ЧМ сигналов $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$;
- функциональный базис $\{\sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t\} \cup \{\sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t\}$, $i = 0, 1, \dots, q-1$.

В результате моделирования должны быть экспериментально получены оценки вероятности ошибки $P_e^{(1)}, P_e^{(2)}, \dots, P_e^{(n)}$, соответствующие значениям отношения сигнал/шум $\gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$.

Основные шаги алгоритма моделирования, записанного на псевдокоде, представлены на рис. 8.5.

Построить базисные функций и sin и cos составляющие сигналов по формулам

$$\varphi_i^{(\cos)}(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t, \quad \varphi_i^{(\sin)}(t) = \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t, \quad i = 0, 1, \dots, q-1;$$

$$s_i^{(\cos)}(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t, \quad s_i^{(\sin)}(t) = \sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_i t \quad i = 0, 1, \dots, q-1;$$

for $\gamma_{dB} = \gamma_{dB}^{(1)}, \gamma_{dB}^{(2)}, \dots, \gamma_{dB}^{(n)}$ /* Цикл по значениям отношения сигнал/шум в дБ */

$\gamma \leftarrow 10^{\gamma_{dB}/10};$ /* отношение сигнал/шум */

Вычислить значение дисперсии отсчета шума σ^2 с использованием значения γ ;

Назначить максимальное число ошибок $N_{err\max}$ в пределах 20...50...100;

$N_{err} \leftarrow 0;$ /* начальное значение счетчика числа ошибок */

$N_{test} \leftarrow 0;$ /* начальное значение счетчика числа испытаний */

/* Цикл моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */

while $N_{err} < N_{err\max}$

/* Моделирование передатчика и канала */

Случайно выбрать i в интервале $0, 1, \dots, q-1$;

Вычислить сигнал на выходе канала

$$r(t) \leftarrow (\mu \cos \theta) s_i^{(\cos)}(t) + (\mu \sin \theta) s_i^{(\sin)}(t) + n(t);$$

/* Моделирование приемника */

for $i = 0, 1, \dots, q-1$ **вычислить значения r_{ci} и r_{si} по формулам**

$$r_{ci} = \int_0^T r(t) \varphi_i^{(\cos)}(t) dt, \quad r_{si} = \int_0^T r(t) \varphi_i^{(\sin)}(t) dt;$$

end for

$$\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} ((r_{ci})^2 + (r_{si})^2) \quad /* \text{формирование решения} */$$

/* Фиксация результата */

if $\hat{i} \neq i$ **then** $N_{err} \leftarrow N_{err} + 1$; **end if**

$N_{test} \leftarrow N_{test} + 1$; /* увеличение счетчика числа испытаний */

end while /* конец цикла моделирования при одном значении отношения сигнал/шум */

/* Вычисление экспериментальной оценка вероятности ошибки */

$$P_e^{(n)} \leftarrow N_{err} / N_{test};$$

Рис.8.5. Алгоритм моделирования передачи и оптимального приема (ЧМ сигналы, канал с замираниями и случайной фазой)

8.3. Порядок выполнения работы

1. Для выбранного варианта задания разработать и отладить программу моделирования с использованием алгоритма, показанного на рис. 8.5.
2. Выполнить моделирования для нескольких значений параметра ε и нескольких значений отношения сигнал/шум.
3. Для рассмотренных вариантов вычислить значения вероятности ошибки или ее верхней границы по соответствующим теоретическим формулам (см. пособие [1]).
4. Построить графики для данных, полученных в пп.2 и 3.
5. Составить отчет.

Литература

1. Трофимов А.Н. Основы теории цифровой связи: учебное пособие. – СПб.: ГУАП, 2014. – 184 с.: ил.