CFD_HW4

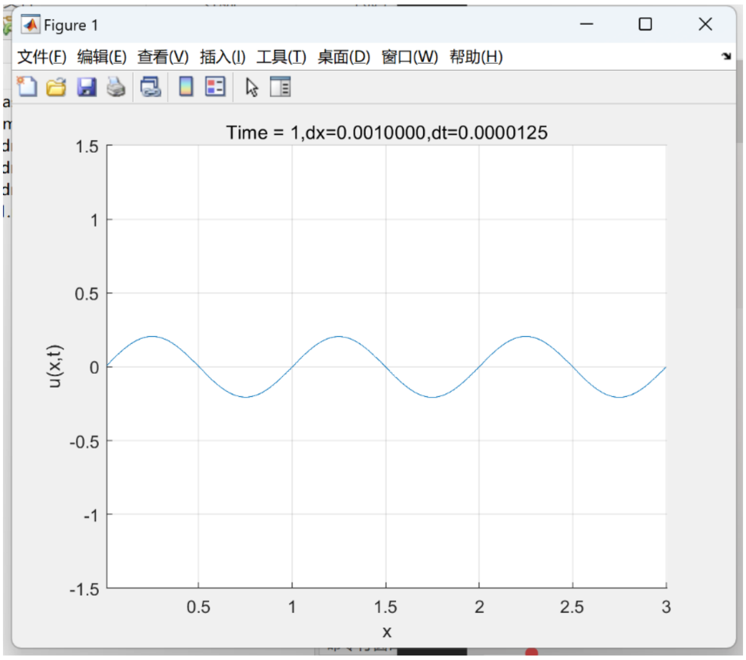
潘浩然 2100011091

（1） 计算 t=1 时的结果：（取 a=1，nu=0.04）

程序实现部分如下：

```
function u_mid = laxwendroff(ax,L,T,Nx,Nt,ifacc)

    dx = L / Nx;
    dt = T / Nt;
    a = 1;
    nu = 0.04;
    c = a * dt / dx;
    d = nu * dt / dx / dx;

    x = linspace(0, L, Nx+1);
    x = x(1:end-1);
    u = zeros(Nx, Nt+1);

    u(:, 1) = sin(2 * pi * x);

    for n = 1:Nt
        un = u(:, n);
        unp1 = u(:, n+1);
        for i = 2:Nx-1
            unp1(i) = (d - c/2) * un(i+1) + (1 - 2*d) * un(i) + (d + c/2) * un(i-1);
        end

        unp1(1) = unp1(Nx-1);
        unp1(Nx) = unp1(2);
        u(:, n+1) = unp1;
    end

    if ifacc == 1
        plot(ax,x,u(:,end));
        xlabel(ax,'x');
        ylabel(ax,'u(x,t)');
        title(ax,sprintf('Time = 1,dx=%.7f,dt=%.7f',dx,dt));
    end
```

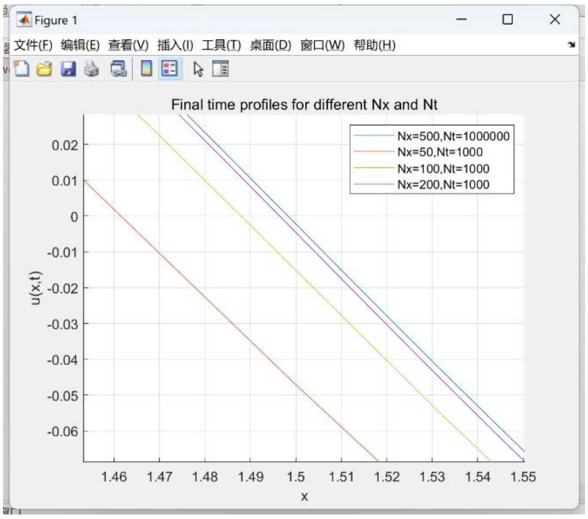
计算得到的结果如图所示：



（2） 取细网格为精确解，用粗网格验证精度阶数

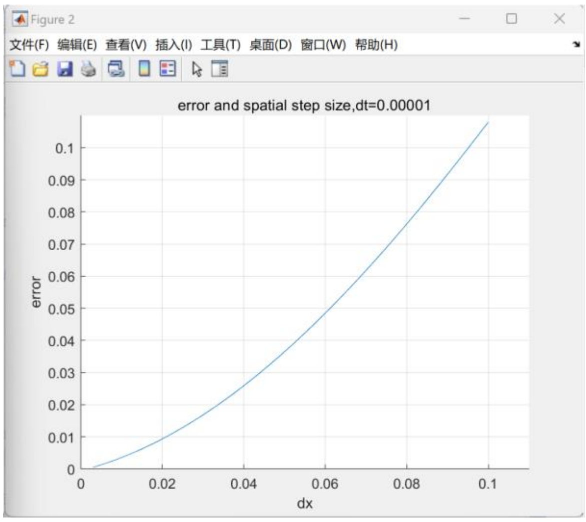
细网格为如上图所示的 dx=0.001，dt=0.0000125 的网格，得到上述的解。

由所学得，lax-wendroff 为二阶格式。在空间步长上，先简单取三个彼此之间是二倍关系的步长，将数值解绘制在同一个坐标轴上，可以得到解的图像如下：



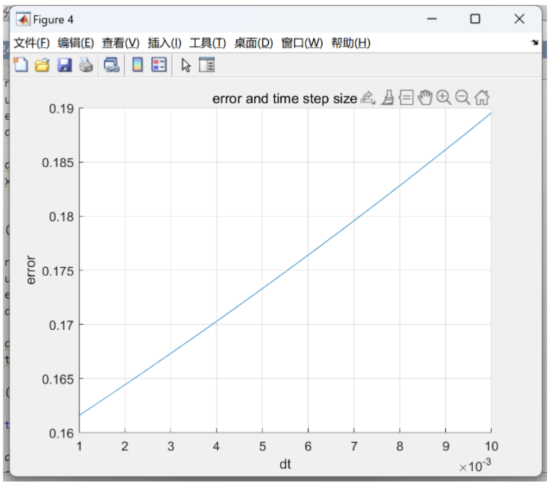
在 x=1.5 附近，可以比较直观的观测到步长变为原来的二倍时，误差（与蓝线之间的距离）变为了不止二倍。

接下来枚举步长变化，将步长-误差（x=1.5 处与精确解间差的绝对值）的变化作图：



可见函数图像接近二次函数，验证了空间精度是二阶的。

时间精度上，理论来讲也是二阶的，但由于时间步长受到稳定性等方面的限制，选取受限，二阶精度观察并不明显，只能看出跟一阶精度相近或略高一点（如下图）：



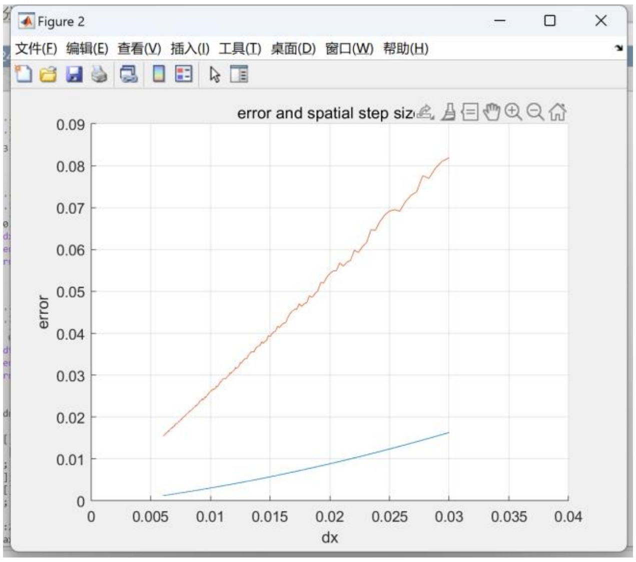
综合来讲，考虑到空间上二阶精度很明显，整个格式的二阶精度得到验证。

(3) 当 d 与 c 满足一定关系时，验证精度变化

当关系式满足时，可以将 dt 表示为 dx 的函数：

$$\Delta t = \frac{\sqrt{36\nu^2 + 4a^2\Delta x^2} - 6\nu}{2a^2}.$$

此时不再固定时间步长，而是枚举空间步长时，计算相应的时间步长，并用 lax-wendroff 格式计算数值解，绘制步长-误差（取 x=0 处数值解与精确解的插值）关系图，与前面的图进行对比：



首先说明橙色线条震荡的原因：由于 dt 是根据 dx 计算的，它几乎不被时长 1 整除，所以最后一个时间单位对应的时间距离 t=1 有一个微小的偏移，且偏移量不固定，所以曲线有震荡，但仍然可以据此观测精度阶数。

蓝色曲线的空间精度原本是接近二阶的，如 dx=0.01 时 err=0.003，但 dx=0.02 时 err 已经=0.0088，明显大于 0.006；而橙色曲线向上的斜率比蓝色更高，说明精度阶数比蓝色曲线更加提高。

由此可见，d 与 c 满足上述关系式时，该格式的精度阶数有所提高，收敛更快。