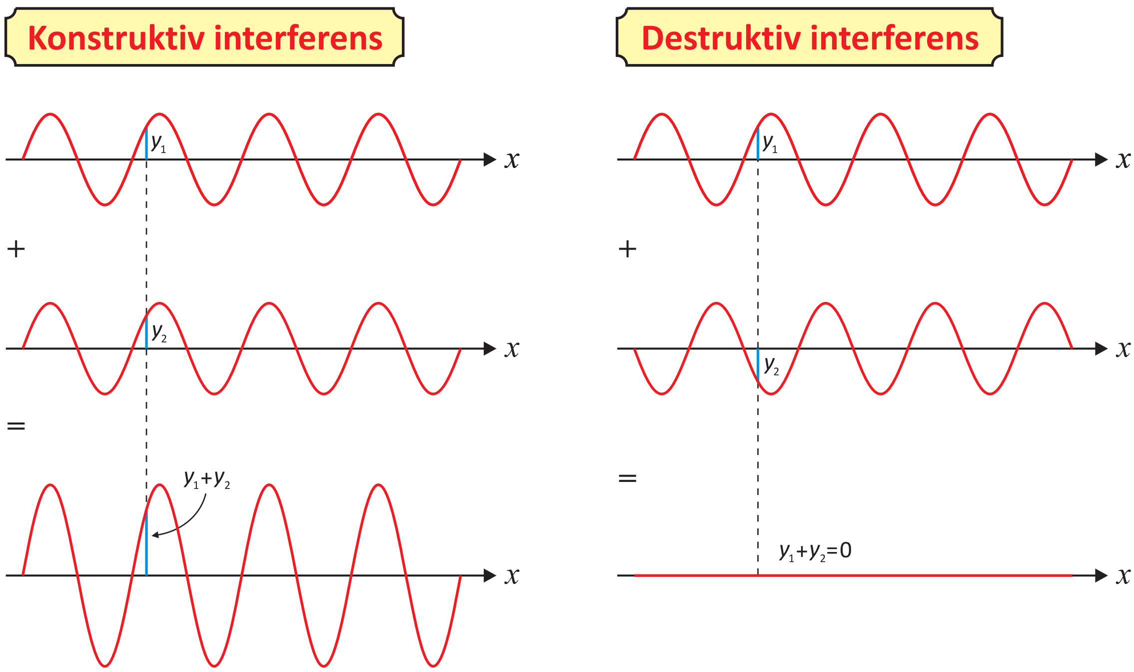
Interferens og gitterformlen

Vi skal studere fænomenet *interferens* og senere bruge denne viden til at sige noget om hvad der sker, når man sender *monokromatisk* lys, altså lys med én bestemt bølgelængde, igennem et optisk gitter. Det vil føre os frem til en udledning af *gitterformlen*.

1. Interferens

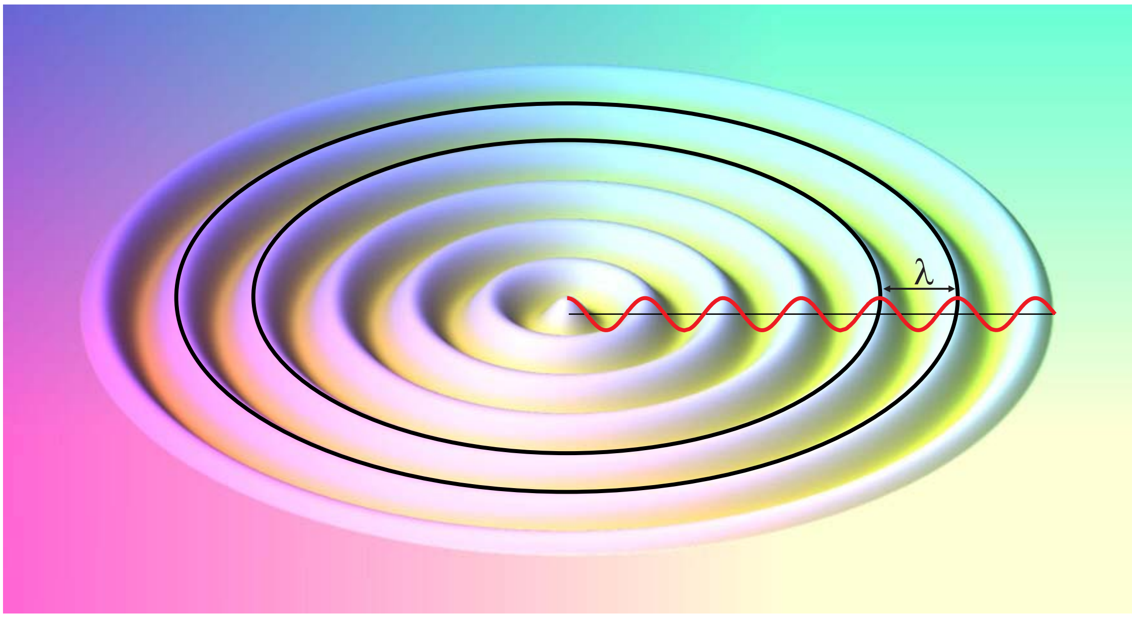
Man siger, at der forekommer *interferens*, hvis to eller flere bølger vekselvirker eller "blandes", altså mødes på samme sted til samme tidspunkt. I ethvert punkt P kan resultatet af interferensen beregnes ved *Superpositionsprincippet*: Udsvinget af den resulterende bølge i P fås ved at lægge udsvingene af hver af de oprindelige bølger i punktet P sammen, underforstået til samme tidspunkt. Man taler om *konstruktiv interferens* i et punkt P til et tidspunkt t, hvis udsvingene af bølgerne i P til tidspunktet t har samme fortegn og forstærker hinanden, hvilket resulterer i en bølge med et større udsving. På tilsvarende vis taler man om *destruktiv interferens* i P til tidspunktet t, såfremt bølgerne i P til tidspunktet t har forskellige fortegn, så man opnår en bølge med et mindre udsving. Situationerne kan illustreres skematisk på nedenstående figur, hvor også superpositionsprincippet er illustreret.

Figur 1

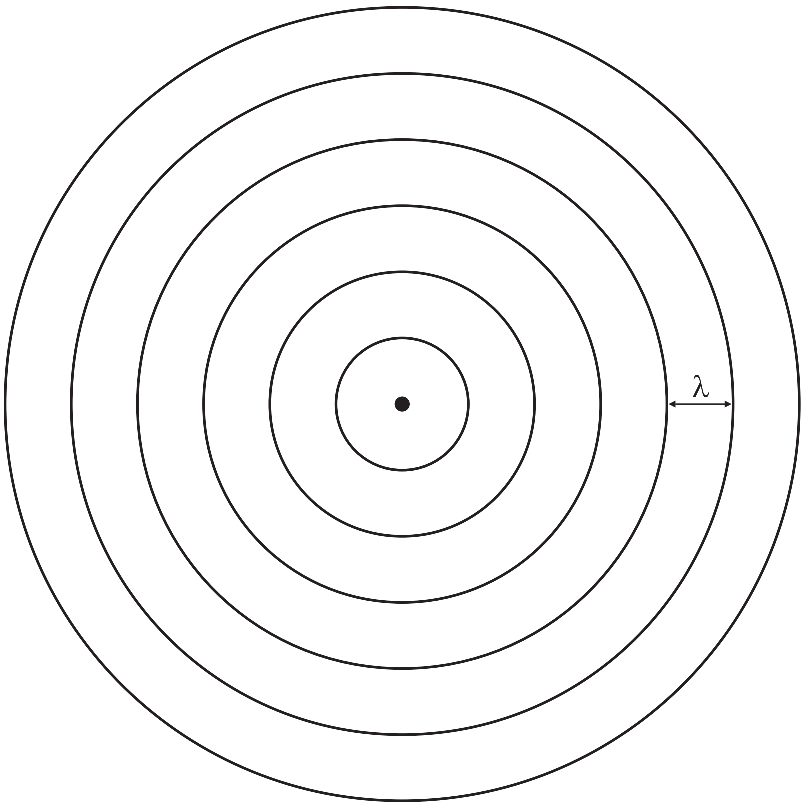


Ofte siger vi, at bølgerne er *i fase* eller *i modfase* i de to situationer med henholdsvis konstruktiv og destruktiv interferens. Figur 1 viser 1-dimensionale bølger. Der findes også 2-dimensionale bølger. Et godt eksempel er *ringbølger*, som man kan iagttage ved at kaste en sten ud i vandet i en rolig sø. Bølgen er her en *flade*, og den kan afbildes i en tredimensional figur, som vist på figur 2. Ofte vælger man dog at afbilde en ringbølge i en todimensional figur, som det er gjort i figur 3. Figuren viser en række koncentriske cirkler, som skal symbolisere de steder, hvor bølgen er i top. To sådanne cirkler er indtegnet på den tredimensionale figur til illustration. Det er oplagt, at afstandene mellem de koncentriske ringe er lig med *bølgelængden* λ.

Figur 2

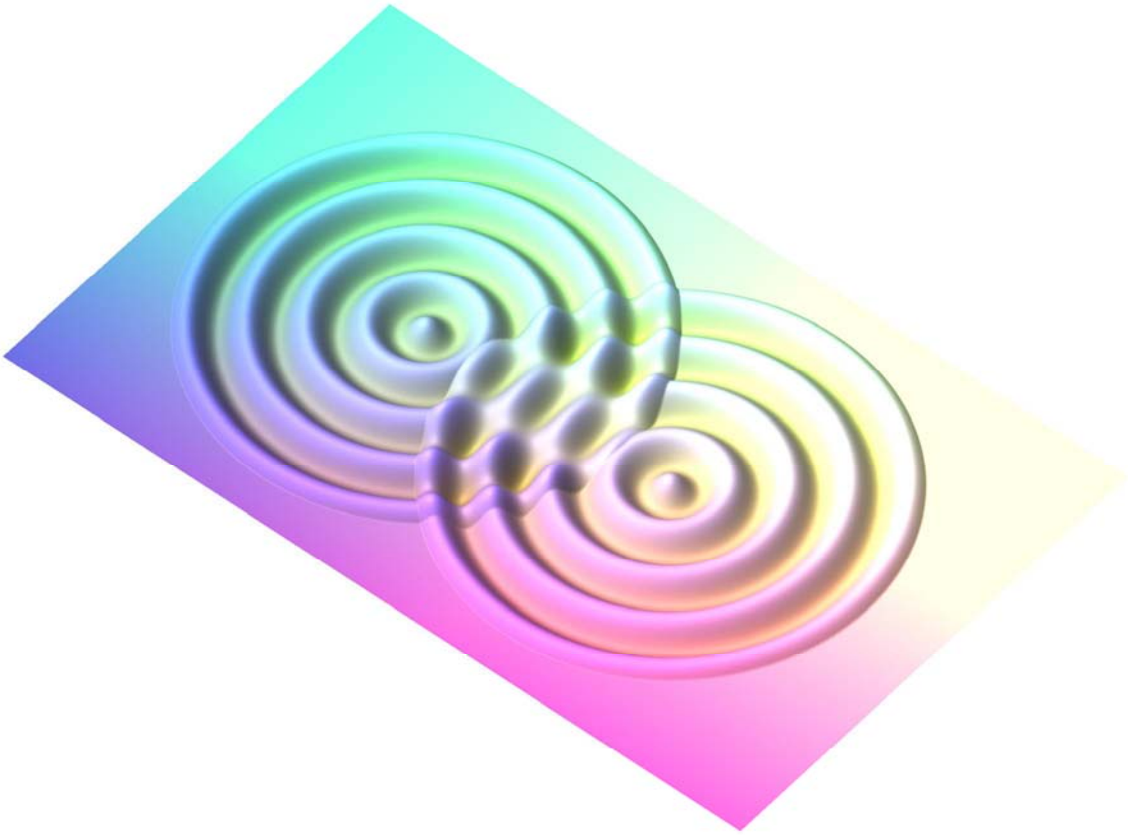


Figur 3

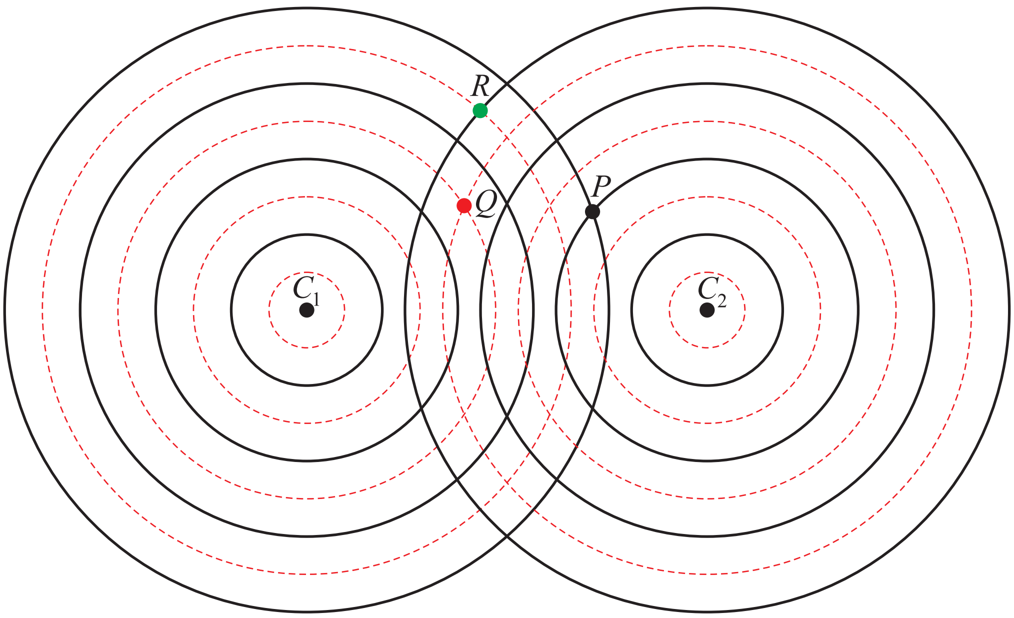


Det spændende er naturligvis at undersøge hvad der sker, når to ringbølger møder hinanden, altså *interfererer*. På et tredimensionalt øjebliksbillede kan det se ud som vist på figur 4 herunder. For overblikkets skyld er det imidlertid ofte hensigtsmæssigt at ty til den todimensionale figur 5. Af hensyn til de videre forklaringer har jeg på figur 5 med røde stiplede cirkler angivet de steder, hvor bølgen er i "bund".

Figur 4



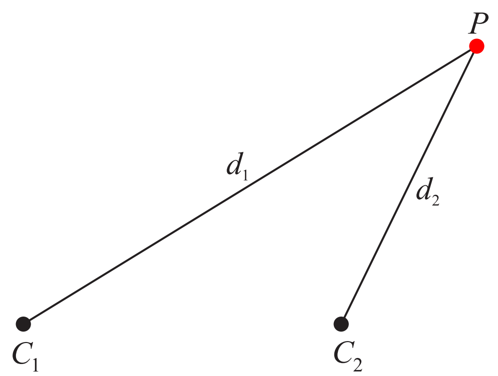
Figur 5



I ethvert punkt i planen kan man finde udsvinget for den resulterende bølge ved brug af superpositionsprincippet, dvs. man lægger udsvingene af de to oprindelige bølger sammen med fortegn. På figur 5 er der konstruktiv interferens i punktet *P*, da begge bølger er i top her. På samme måde er der konstruktiv interferens i punktet *Q*, hvor begge bølger er i bund. Her giver det samlet et stort negativt udsving. I punktet *R* derimod er der destruktiv interferens, da en bund i bølgen fra venstre bølge møder en top i bølgen fra højre. Det betyder et reduceret udsving i *R*, faktisk et udsving på 0.

På figur 5 observerer vi, at forskellen i afstandene fra punktet *P* til bølgecentrene C_1 og C_2, er $4\lambda - 2\lambda = 2\lambda$. For punktet *Q* er forskellen i afstand $2\frac{1}{2}\lambda - 3\frac{1}{2}\lambda = -\lambda$, mens den for punktet *R* er $3\frac{1}{2} - 4\lambda = -\frac{1}{2}\lambda$. Dette leder os på sporet af et kriterium for, hvornår de to bølger forstærker eller svækker hinanden: Hvis den ene bølge har tilbagelagt en afstand, som er et helt antal bølgelængder længere end den anden bølge, så vil bølgerne være *i fase* i punktet. Det betyder, at bølgerne vil have samme udsving i punktet, og dermed vil bølgerne forstærke hinanden. Hvis den ene bølge derimod har tilbagelagt en afstand, som er et ulige antal halve bølgelængder længere end den anden bølge, så vil bølgerne være i *modfase* i punktet, og bølgerne vil svække hinanden. Vi kan formulere dette i nedenstående boks, hvor forudsætningerne også er anført.

Figur 6



Konstruktiv og destruktiv interferens

Antag givet to bølger, som har samme bølgelængde og fart, og som er sendt af sted i takt fra to punkter C_1 og C_2, Da gælder:

1. Bølgerne vil *forstærke* hinanden i et punkt *P*, såfremt vejlængdeforskellen $\Delta d = d_2 - d_1$ er et helt antal bølgelængder: $0 \cdot \lambda, \pm 1 \cdot \lambda, \pm 2 \cdot \lambda, \pm 3 \cdot \lambda, \ldots$

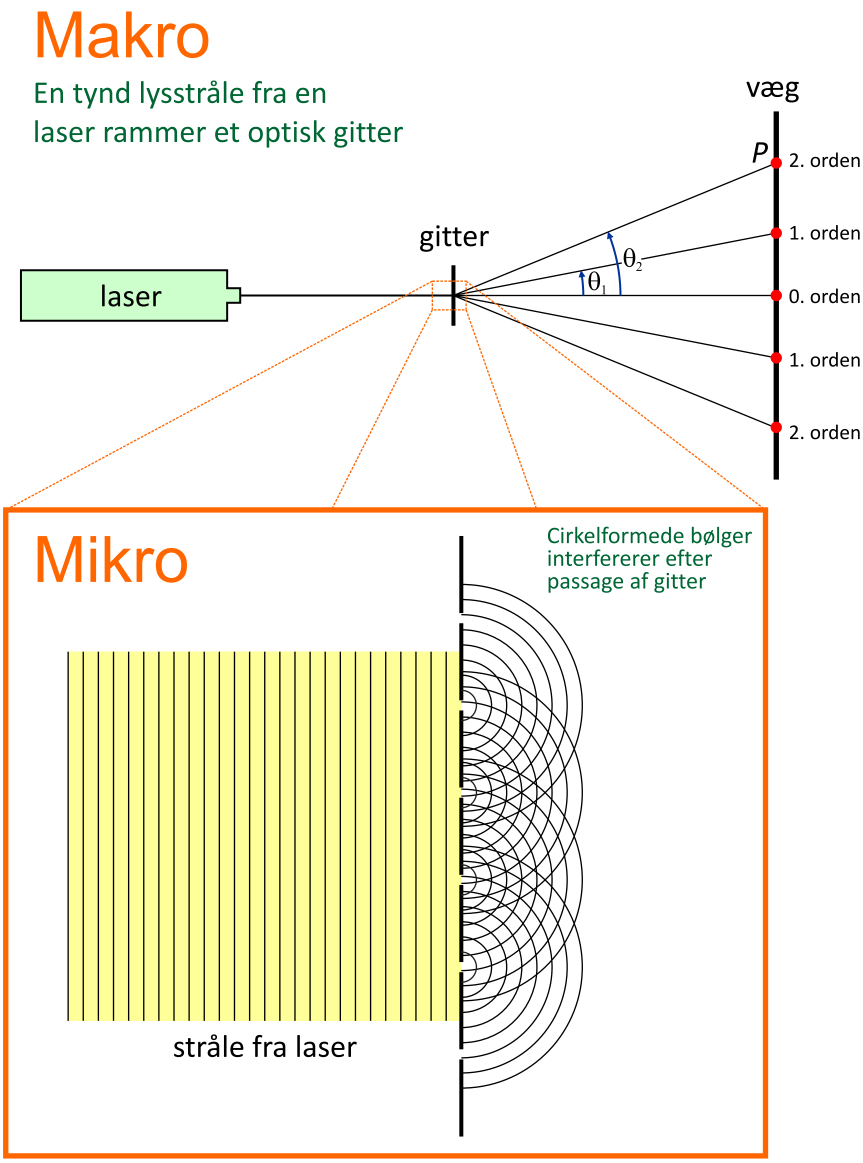
2. Bølgerne vil *svække* hinanden i et punkt *P*, såfremt vejlængdeforskellen $\Delta d = d_2 - d_1$ er et ulige antal halve bølgelængder: $\pm\frac{1}{2} \cdot \lambda, \pm\frac{3}{2} \cdot \lambda, \pm\frac{5}{2} \cdot \lambda, \ldots$

Disse egenskaber gælder uafhængigt af tidspunktet.

2. Optisk gitter

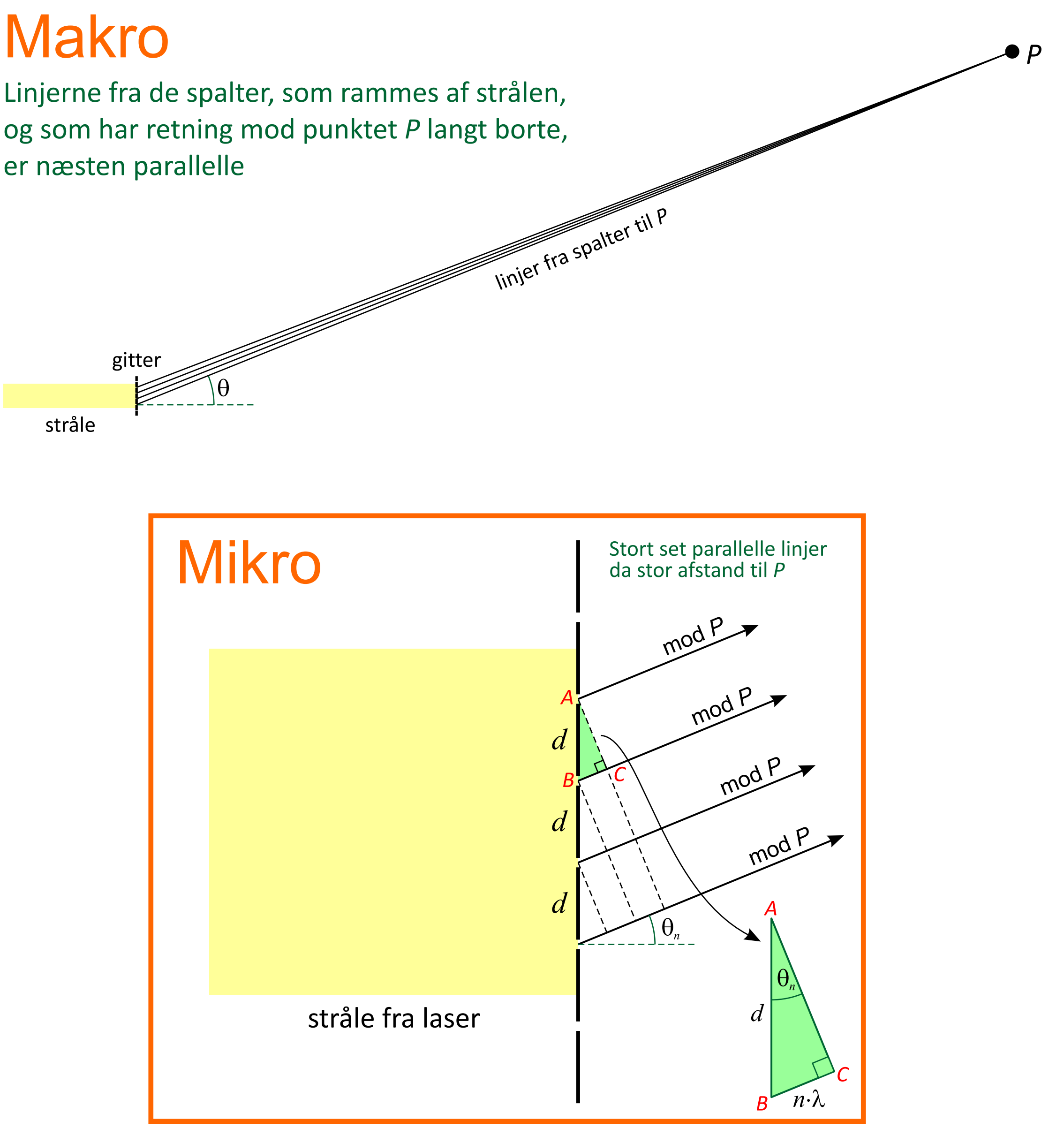
Vi skal betragte en situation, som er mere kompliceret end den, hvor der blot er tale om interferens mellem to ringbølger. Et *optisk gitter* eller blot *gitter* er en glasplade, hvori der er skåret en masse ridser med meget lille afstand. Ridserne fungerer som spalter, når lys rammer dem. Hvis man sender en tynd laserstråle bestående af lys med kun én bølgelængde λ vinkelret ind mod et optisk gitter, vil man kunne observere en række punkter på en væg anbragt et stykke bagved og parallel med gitteret. Dette er illustreret på figur 7. Udover den øverste del af figuren, som viser situationen *makroskopisk*, er der zoomet ind på det lille område, hvor strålen rammer gitteret. Det er nemlig nødvendigt at studere lysets *bølgenatur* for at kunne forstå, hvad der sker. Derfor skal vi ned på det mikroskopiske niveau.

Figur 7



Vores første erkendelse er altså, at lysets *partikelnatur* ikke kan forklare fænomenet – dertil ligger lyspletterne på skærmen alt for spredt. På mikroskopisk niveau kan vi studere lyset som bølger. Strålen kan beskrives som en *plan bølge*, som rammer gitteret. Ifølge *Huygens Princip* vil der i spalterne dannes cirkulære *elementarbølger*, og de vil interferere på den anden side af gitteret. Det er oplagt, at de steder, hvor der er en lysplet, interfererer ringbølgerne konstruktivt. I tilfældet med to ringbølger, fandt vi på side 4 frem til, at hvis bølgerne fra de to centre er *i fase* – altså svinger i takt – i et punkt P, så er der konstruktiv interferens i dette punkt. Og om bølgerne svinger i fase i et givet punkt P kan afgøres ved at sammenligne afstandene fra P til hvert af de to centre. Situationen er naturligvis mere kompliceret i tilfældet med et gitter, men det er de samme argumenter, som vi vil fremføre. Derfor er det hensigtsmæssigt at kigge på en lidt anden figur, hvor der er tegnet linjer fra punktet P til hver eneste af de spalter, som lyset rammer. Således er den øverste del af figur 8 i stil med figur 6 på side 4.

Figur 8



Hvis punktet P ligger meget langt fra de spalter, som rammes af lyset, sammenlignet med de indbyrdes afstande mellem spalterne, så er linjerne stort set *parallelle*. Dette vil i praksis så godt som altid være tilfældet, endda endnu mere overbevisende end det er muligt at vise på figur 8. Tilbage til mikro-niveau: På figur 8 kan vi derfor med uhyre god tilnærmelse regne linjerne mod P som værende parallelle. Ifølge side 4 vil ringbølgerne fra de to øverste spalter A og B forstærke hinanden, hvis forskellen på længderne af AP og BP er et helt antal bølgelængder. Forskellen i længde er (stort set) lig med længden af BC. Så kravet for konstruktiv interferens er altså at $|BC| = n \cdot \lambda$ for et eller andet helt tal n. Når bølgerne fra de to øverste spalter er i fase, så vil ringbølgerne fra alle de omtalte spalter automatisk også (stort set) være i fase (Overvej hvorfor!).

Vi har dermed fundet et kriterium for, om der er konstruktiv interferens i et punkt P eller ej. Tilbage til makro-niveauet i figur 7: På skærmen er der en række lyspletter. Den plet som ligger lige ud for den indgående stråle kaldes *0. ordenspletten*. De to punkter, som ligger nærmest 0. ordenspletten, og som ligger symmetrisk omkring denne, kaldes 1. ordenspletter. Herefter kommer to symmetrisk beliggende 2. ordenspletter, etc. En linje fra gitteret ud til en n. ordens plet betegnes en *n. ordensstråle*. Vinklen som en n. ordensstråle danner med 0. ordensstrålen betegnes med θ_n. Trekanten i den nederste del af figur 8 giver nu en betingelse for hvilke retninger der kan forekomme pletter. De er formuleret i den såkaldte *gitterformel*. Afstanden mellem spalterne i gitteret kaldes for *gitterkonstanten* og betegnes med bogstavet d.

Gitterformlen

Lys med bølgelængden λ sendes vinkelret ind imod et gitter med gitter konstanten d. Den vinkel θ_n, som n. ordenstrålen danner med 0. ordenstrålen kan bestemmes af

$$\sin(\theta_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d}$$

Bevis: En regning i den retvinklede ΔABC i figur 8 giver umiddelbart gitterformlen:

$$\sin(\theta_n) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{n \cdot \lambda}{d}$$

□

Eksempel 1

Lyset fra en He-Ne laser med bølgelængden 632,8 nm sendes vinkelret ind mod et gitter med 600 linjer pr. millimeter.

a) Bestem vinklerne for 1. og 2. ordensstrålerne.
b) Hvad er det højeste orden, der kan forekomme?
c) Bag gitteret befinder der sig en skærm. Den er parallel med gitteret og befinder sig i afstanden 1,80 m fra denne. Hvor langt fra 0. ordenspletten vil 1. ordenspletterne og 2. ordenspletterne befinde sig?

Løsning: Først skal oplysningen om antallet af linjer pr. mm omregnes til en værdi for gitterkonstanten. De 600 linjer pr. mm er det samme som 600.000 linjer pr. m. Dermed er gitterkonstanten $1/(600000\,\text{m}^{-1}) = 1{,}667\cdot 10^{-6}\,\text{m}$.

a) Gitterformlen giver de to vinkler:

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n\cdot\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1\cdot 632{,}8\cdot 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}667\cdot 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 22{,}3°$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n\cdot\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\cdot 632{,}8\cdot 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}667\cdot 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 49{,}4°$$

b) Sinus kan kun give værdier mellem –1 og 1. For at en n. ordensstråle skal eksistere er det derfor en betingelse at $n\cdot\lambda/d \le 1 \;\Leftrightarrow\; n \le d/\lambda$. I vores tilfælde betyder det at $n \le d/\lambda = 1{,}667\cdot 10^{-6}\,\text{m}/632{,}8\cdot 10^{-9}\,\text{m} = 2{,}63$. Derfor findes der ikke stråler med orden større end 2 i denne situation.

c) Nu hvor vi kender vinklerne for strålerne, kan simpel trigonometri benyttes til at bestemme de ønskede afstande. Afstanden fra 0. ordenspletten til n. ordenspletten på skærmen betegnes med x_n og afstanden mellem gitteret og skærmen betegnes med bogstavet a. Vi kan nu regne i den orange trekant:

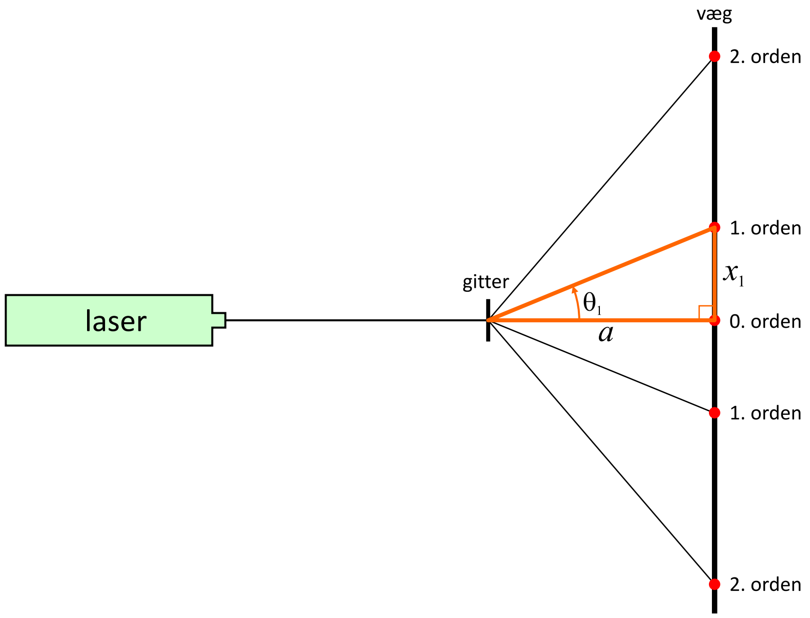
$$\tan(\theta_1) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} = \frac{x_1}{a} \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = a\cdot\tan(\theta_1)$$

$$x_1 = a\cdot\tan(\theta_1) = 1{,}8\text{ m}\cdot\tan(22{,}3°) = 0{,}74\,\text{m}$$

På lignende vis findes afstanden ud til 2. ordenspletten:

$$x_2 = a\cdot\tan(\theta_2) = 1{,}8\text{ m}\cdot\tan(49{,}4°) = 2{,}10\,\text{m}$$

Figur 9

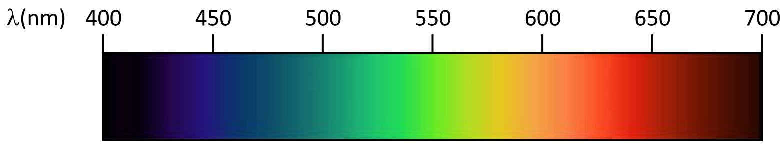


□

Anvendelser af et optisk gitter

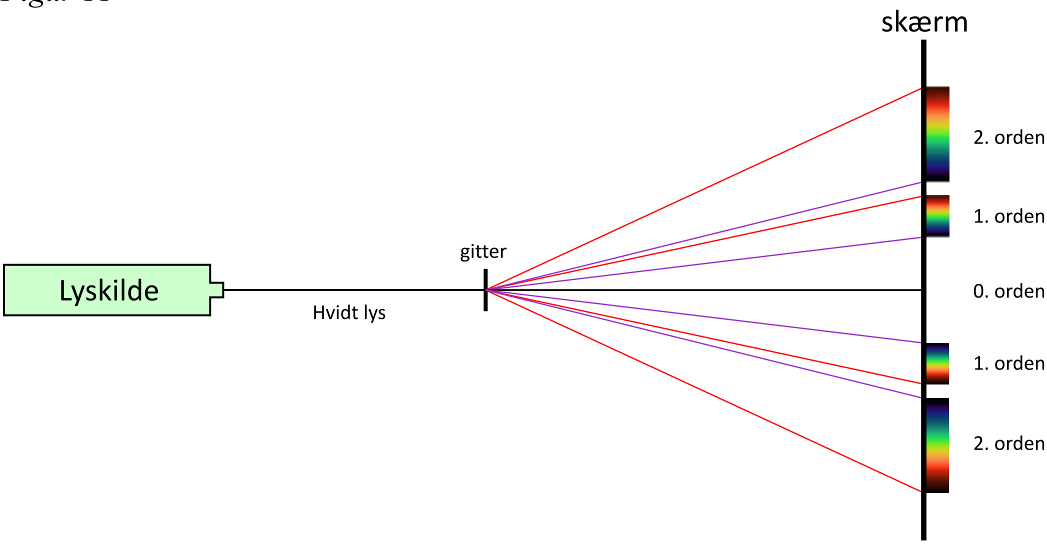
Vi har ovenfor kigget på lys med en bestemt bølgelængde, der bliver sendt igennem et gitter. Hvis man i stedet sender en tynd stråle med hvidt lys igennem gitteret, så vil man kunne iagttage, at der dannes farvemønstre på skærmen. Forklaringen er, at hvidt lys er en blanding af alle regnbuens farver, og hver farve har sin bølgelængde. Brydningsvinklen afhænger nemlig af bølgelængden, ifølge gitterformlen.

Figur 10



Det synlige spektrum går fra ca. 400-700 nm. Det skal nævnes, at grænserne her er lidt flydende, da man kan diskutere hvad der kan ses. Nogle angiver det synlige spektrum helt fra 390 nm til 780 nm.

Figur 11



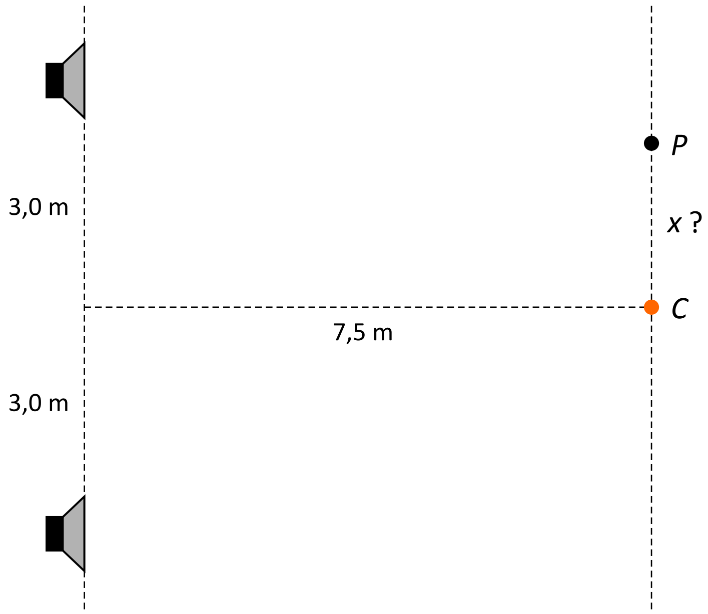
Det er netop gitterets evne til at splitte lys op i dets forskellige bølgelængder, der gør det anvendeligt til mange formål. For eksempel anvender man (høj-dispersions) optiske gitre indenfor astronomi til at studere spektrene fra stjernerne. Emnet er *spektroskopi*.

Opgaver

Opgave 1

To ens højttalere med den indbyrdes afstand 6 m udsender en sinustone med frekvensen 440 Hz. De er justeret, så de svinger i takt fra starten. En person i punktet *P* går langs en linje, der forløber parallelt med linjen gennem de to højttalere, og i afstanden 7,5 m fra denne. Hvor langt skal personen gå væk fra centerlinjen i *C* før denne møder …

a) det første sted med konstruktiv interferens?
b) det andet punkt med konstruktiv interferens?
c) det første punkt med destruktiv interferens?
d) Hvilke problemer kan der være, hvis man afprøver teorierne indenfor i et rum? Hvordan kan man afhjælpe dem?



Opgave 2

Et gitter har 400 linjer pr. mm, og der sendes en tynd laserstråle med bølgelængden 570 nm vinkelret ind mod gitteret.

a) Bestem afbøjningsvinklerne for 1. orden og 2. orden.
b) Hvad er den maksimale orden, som kan forekomme?
c) En skærm stilles op 2,15 m fra gitteret og parallelt dermed. Bestem afstanden fra 0. ordenspletten til såvel 1. ordenspletten som 2. ordenspletten på skærmen.

Opgave 3

Lys fra en laserpen med en bølgelængde på 650 nm sendes vinkelret ind mod et gitter. Herved afbøjes 2. ordensstrålen 7,47°. Bestem gitterkonstanten. Hvor mange linjer pr. mm svarer det til?

Opgave 4

Hvis man har et optisk gitter med kendt gitterkonstant, kan man bruge gitteret til at bestemme bølgelængden af lys. Man sender blot en tynd stråle af lyset vinkelret ind mod gitteret og måler, hvor meget lyset afbøjes. I et konkret eksempel sendes lyset fra en laserpen vinkelret ind mod et gitter med 300 linjer pr. mm, hvilket resulterer i at 2. ordensstrålen afbøjes 19,34°. Bestem bølgelængden af laserlyset.

Opgave 5

Man er interesseret at finde bølgelængderne for det lys, som udsendes fra et udladningsrør med kviksølvsgas. En tynd stråle sendes igennem et gitter med 600 linjer pr. mm. Man registrerer en stærk grøn 1. ordenslinje, som er blevet afbøjet 19,13°.

a) Bestem gitterkonstanten.
b) Bestem bølgelængden af den pågældende linje i spektret fra Hg-røret.

Opgave 6

En laserpen med bølgelængden 405 nm sender en tynd lilla laserstråle vinkelret ind mod et gitter, hvorved der dannes nogle lyspletter på en skærm anbragt parallelt med og i afstanden 1,35 m fra gitteret. 1. ordenspletten måles til at ligge 52,8 cm fra 0. ordenspletten. Bestem gitterkonstanten.