Aufgabe 2: Spießgesellen

Teilnahme-ID: 56146

Thomas Pfaller

Inhaltsverzeichnis

1 Analyse

Ein Spieß S ist mit einer Menge von Obstsorten S_o ={x | x ist eine Obstsorte} und einer Menge von Schüsseln S_b ={x | x ist eine Schüssel} definiert. Diese beiden Mengen sind immer gleich groß, da in einer Schüssel nicht mehrere Sorten sind und eine Person, die zu einer Schüssel geht, auch aus dieser Obst entnimmt. Die gewünschten Obstsorten werden mit der Menge W notiert.

2 Lösungsidee

Der Algorithmus basiert darauf, durch die Bildung von Schnittmengen neue Spieße zu erstellen, bis W in den gefundenen Obstsorten enthalten ist oder keine neuen Schnittmengen gebildet werden können.

$$S_1 \cap S_2$$

Es müssen also die Mengen beider Spieße kombiniert werden. Zum Beispiel:

$$\{3,5,6\} \cap \{1,4,5\} = \{5\}$$

$$\{Banane, Pflaume, Feige\} \cap \{Apfel, Dattel, Feige\} = \{Feige\}$$

Es wird jeder Spieß einmal mit jedem anderen Spieß kombiniert. Sei n die Anzahl an Spießen, so ergeben sich $(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+(n-(n-1))$ Kombinationen. Wenn die Größe einer Menge von S gleich eins ist, dann lässt sich die Obstsorte der Schüssel zuordnen. Außerdem kann man die Schüssel und die Obstsorte aus allen Spießen entfernen und so das Problem vereinfachen. Wenn es eine Schnittmenge gibt und diese kleiner als die Größe der Menge der kombinierten Spieße ist, wird ein neuer Spieß aus der Schnittmenge erstellt und die Obstsorten und Schüsseln aus den beiden anderen Spießen entfernt.

$$\{3,5,6\} \cap \{1,6,5\} = \{5,6\}$$

$$\{Apfel, Pflaume, Feige\} \cap \{Apfel, Dattel, Feige\} = \{Feige, Apfel\}$$

Durch das Entfernen aus den anderen Spießen ergibt sich eine Lösung für die übriggebliebenen Obstsorten:

$$S = \{3\}, \{Pflaume\}$$

$$S = \{1\}, \{Dattel\}$$

Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis sich keine neuen Spieße oder Lösungen ergeben oder wenn die gewünschten Obstsorten gefunden wurden. Da für Donald nur seine Wunschsorten von Relevanz sind werden nur diese ausgegeben. Es werden zuerst die Obstsorten ausgegeben, von denen bekannt ist, in welcher Schüssel sie sind. Anschließend werden die Obstsorten ausgegeben, die sich in einer von mehreren Schüsseln befinden können. Dabei kann man zwei Fälle unterscheiden:

- Wenn $| S_o | = | S_b |$, dann kann Donald seinen Spieß trotzdem mit den richtigen Früchten zusammenstellen.
- Wenn $| S_o | < | S_b |$, dann muss Donald aus B eine oder mehrere Schüsseln zufällig auswählen. Dieser Fall entsteht, wenn nicht alle Obstsorten aus S_o in W enthalten sind (z.B. $S = \{Ugli, Apfel\}, \{25, 18\}$; Wenn $Apfel$ nicht in W enthalten ist, ist die Schüssel nicht eindeutig bestimmbar und es wird $S = \{Ugli\}, \{25, 18\}$ ausgegeben).

Bei Beispiel 1 (spiesse1.txt) tritt ein Sonderfall auf, da dort die Grapefruit nicht in den Spießen vorkommt, aber auf der Wunschliste. Aus diesem Grund wird am Anfang ein Spieß mit allen Früchten, die in Wunschlisten oder Spießen vorkommen erstellt. Die Anzahl der Früchte dieses Spießes entspricht somit der Anzahl an Schüsseln. Zum Beispiel:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}, \{Ingwer, Grapefruit, Himbeere, Apfel, Pflaume, Dattel\}$$

Da gefundene Obstsorten aus allen Spießen samt ihren Schüsseln entfernt werden, bleiben am Ende die Obstsorten übrig, die nicht in den Spießen vorkommen. Dadurch, dass auch deren zugehörigen Schüsseln übrig bleiben, lassen sie sich zuordnen.

$$S = \{5\}, \{Grapefruit\}$$

3 Zeitkomplexität

Wie oben schon beschrieben gibt es $(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+(n-(n-1))$ Kombinationen.

$$\sum_{i=1}^{n-1} = n-i$$

Durch Aufstellen eines Gleichungssystems, lässt sich die Funktion bestimmen (siehe Abbildung 1).

$$f(x) = 0.531x^2 - 0.875x + 1$$

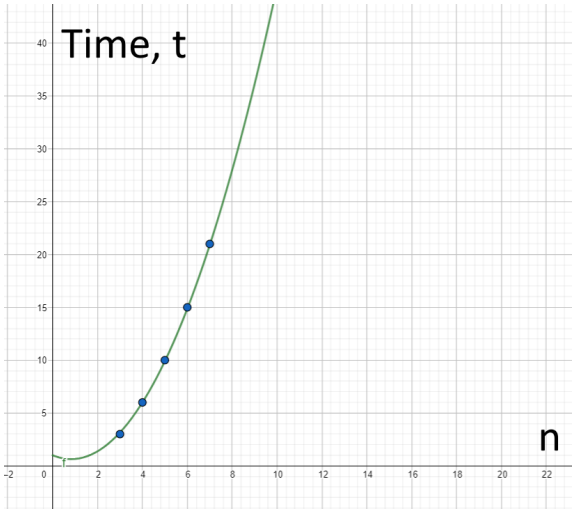

Abbildung 1: Quadratische Zeitkomplexität

Also können wir annäherungsweise in Landau-Notation schreiben:

$$O(n) = n^2$$

Da diese Kombinationen aber innerhalb eines while-loops ausgeführt werden, muss ein Faktor (x) hinzugefügt werden, um die Laufzeit zu bestimmen.

$$O(n) = x * n^2$$

Dieser while-loop aber endet, wenn die gewünschten Obstsorten gefunden wurden oder keine neuen Kombinationen möglich sind. Da dies aber nicht nur von einer Anzahl sondern auch von der Konstellation der Spieße abhängt, lässt sich die Zeitkomplexität nicht genau bestimmen. Für die gegebenen Beispiele wird er maximal dreimal durchlaufen und kann deswegen vernachlässigt werden.

4 Umsetzung

Nachdem in der Methode *read()* die Beispieldatei eingelesen wurde, wird ein Spieß bestehend aus allen Obstsorten (*fruits*) erstellt.

```
skewers.append([[i for i in range(1, amount+1)], list(fruits)])
```

Anschließend wird die Methode *solve()* aufgerufen, in der der Algorithmus ausgeführt wird. Dieser endet entweder, wenn alle gewünschten Obstsorten bestimmt wurden oder wenn die Spieße des letzten Durchlaufs gleich der des aktuellen Durchlaufs sind, da dann keine weiteren Kombinationsmöglichkeiten möglich sind.

```
while wishes not in solved_fruits:
    print(skewers)
    if last_skewers == skewers:
        break
    last_skewers = skewers.copy()
```

Sollte dies jedoch nicht der Fall sein wird durch die Spieße iteriert. Falls ein Spieß nur aus einer Schüssel kommt, kann man diesen der Obstsorte genau zuordnen.

```
for i in range(len(skewers)):
    # Spiesse mit nur einer Schüssel sind genau zuordenbar
    if len(skewers[i][0]) == 1:
        if skewers[i][1][0] in wishes:
            positions.append(skewers[i][0][0])
            solved_fruits.append(skewers[i][1][0])
        skewers = remove_fruit(skewers, skewers[i][0][0],
            skewers[i][1][0])
```

Um den ersten Spieß *skewers[i]* mit einem zweiten Spieß zu kombinieren, wird nochmal durch die Liste *skewers* iteriert. Es wird jedoch als Startpunkt der Index *i+1* des ersten Spießes ausgewählt, sodass keine doppelten Kombinationen entstehen.

```
for j in range(i+1, len(skewers)):
```

Aus diesen beiden Spießen wird dann die Schnittmenge aus sowohl den Schüsseln (*skewers[i/j][0]*), als auch den Obstsorten (*skewers[i/j][1]*), gebildet.

```
intersection = [list(set(skewers[i][0]) & set(skewers[j][0])),
    list(set(skewers[i][1]) & set(skewers[j][1]))]
```

Nur wenn es eine Schnittmenge gibt und diese auch kleiner ist als die Größe der davor schon dagewesenen Spieße, ist der Spieß eine neue Kombination. Falls dieser Spieß nur eine Schüssel enthält, kann man die Obstsorte der Schüssel genau zuordnen. Ansonsten werden alle Früchte und Schüsseln, die in diesem neuen Spieß enthalten sind aus den anderen Spießen entfernt. Danach wird dieser der Liste *skewers* (Spieße) angehängt.

```
if len(intersection[0]) < len(skewers[i][0]) + len(skewers[j][0])
    and len(intersection[0]) != 0:
    if len(intersection[0]) == 1:   # Schüssel genau zuordenbar
        if intersection[1][0] in wishes:
            positions.append(intersection[0][0])
            solved_fruits.append(intersection[1][0])
        skewers = remove_fruit(skewers, intersection[0][0],
            intersection[1][0])
    else:   # Schnittmenge wird als neuer Spieß der Liste
            # hinzugefügt und aus den beiden anderen gelöscht
        for x in range(len(intersection[0])):
            p, f = intersection[0][x], intersection[1][x]
            skewers[i][0].remove(p)
            skewers[i][1].remove(f)
            skewers[j][0].remove(p)
            skewers[j][1].remove(f)
        skewers.append(intersection)
```

Der restliche Teil des Programms gibt die Ergebnisse in einem leserlichen Format aus.

5 Beispiele

Der Algorithmus benötigt zum Suchen der korrekten Lösung für alle Beispiele weniger als eine Millisekunde. In der Datei *spiesse0.txt* ist das Beispiel aus der Aufgabenstellung gespeichert. Die Ausgabe davon stellt also die Lösung für Aufgabe 2a) dar.

spiesse0.txt

Weintraube ==> 3

Diese Obstsorte(n):	Brombeere Apfel
sind/ist in diesen Schüsseln:	1 4

spiesse1.txt

Clementine ==> 1
Johannisbeere ==> 5
Grapefruit ==> 7

Diese Obstsorte(n):	Erdbeere Himbeere
sind/ist in diesen Schüsseln:	2 4

spiesse2.txt

Kiwi ==> 6
Litschi ==> 7
Apfel ==> 1

Diese Obstsorte(n):	Banane Himbeere Clementine
sind/ist in diesen Schüsseln:	10 11 5

spiesse3.txt

Clementine ==> 5
Erdbeere ==> 8
Kiwi ==> 12
Himbeere ==> 1

Diese Obstsorte(n):	Feige Ingwer
sind/ist in diesen Schüsseln:	7 10

Diese Obstsorte(n):	Litschi
sind/ist in diesen Schüsseln:	2 11

spiesse4.txt

Grapefruit ==> 8
Apfel ==> 9
Pflaume ==> 12
Kiwi ==> 2
Orange ==> 14
Ingwer ==> 6
Feige ==> 13
Nektarine ==> 7

spiesse5.txt

Tamarinde ==> 12
Himbeere ==> 5
Nektarine ==> 14
Clementine ==> 20
Pflaume ==> 10
Dattel ==> 6

Diese Obstsorte(n): Apfel Grapefruit Mango
sind/ist in diesen Schüsseln: 1 19 4

Diese Obstsorte(n): Sauerkirsche Orange
sind/ist in diesen Schüsseln: 16 2

Diese Obstsorte(n): Banane Quitte
sind/ist in diesen Schüsseln: 9 3

spiesse6.txt

Clementine ==> 7
Himbeere ==> 18
Quitte ==> 4
Erdbeere ==> 10
Orange ==> 20
Vogelbeere ==> 6

Diese Obstsorte(n): Ugli Rosine
sind/ist in diesen Schüsseln: 11 15

spiesse7.txt

Clementine ==> 24

Diese Obstsorte(n):	Vogelbeere Mango Dattel
sind/ist in diesen Schüsseln:	6 16 17
Diese Obstsorte(n):	Tamarinde Zitrone
sind/ist in diesen Schüsseln:	5 23
Diese Obstsorte(n):	Sauerkirsche Yuzu
sind/ist in diesen Schüsseln:	8 14
Diese Obstsorte(n):	Ugli
sind/ist in diesen Schüsseln:	25 18
Diese Obstsorte(n):	Xenia Grapefruit Apfel
sind/ist in diesen Schüsseln:	3 26 10 20