

## BE 2 : Filtrage Linéaire Optimal, ASI 4A

---

### Préambule

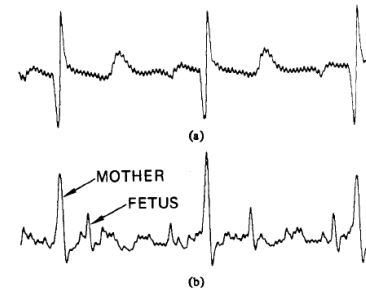
L'objectif de ce BE est d'illustrer les notions vues dans le cours de traitement des signaux concernant le filtrage adaptatif. Plus précisément, on s'intéresse à l'implémentation de l'algorithme de Widrow (filtre LMS) pour répondre à un problème de débruitage.

L'application étudiée est une expérience célèbre, effectuée dès 1964 par Widrow, qui a permis de mettre au point et de populariser cet algorithme : il s'agit d'estimer l'électrocardiogramme (ECG) d'un fœtus chez une femme enceinte.

### 1 L'expérience de Widrow

Les ECG abdominaux enregistrés sur une femme enceinte donnent accès aux rythmes cardiaques de la mère (ECG maternel) mais également du, ou des, fœtus (ECG fœtal). Cet ECG fœtal est utile dans un contexte médical afin de surveiller le travail et l'accouchement de la femme enceinte et/ou de diagnostiquer de manière précoce des anomalies cardiaques<sup>1</sup>.

La difficulté majeure lors de l'estimation de l'ECG fœtal réside dans le fait que son amplitude est de l'ordre de 2 à 1000 fois inférieure à celle de l'ECG maternel (en raison des différents tissus/milieux à traverser, et tout simplement car le cœur est plus petit). L'exploitation directe des enregistrements est donc difficile ; il s'avère nécessaire d'éliminer préalablement les interférences dues à l'ECG maternel. L'algorithme de Widrow (filtre LMS), qui s'adapte au caractère non-stationnaire des signaux (ici les variations des rythmes cardiaques, du médium de propagation,...), rend possible ce débruitage.



Exemples de signaux sur la bande 3-35Hz : (a) ECG maternel (électrode thoracique) et (b) ECG fœtal + maternel (électrode abdominale).  
Source Widrow 1975

L'expérience est conduite de la manière suivante. La *voie signal*, ou *voie primaire*, est le signal observé sur une électrode abdominale. Ce signal correspond à la superposition de l'ECG fœtal - le signal utile - et de l'ECG maternel - le bruit que l'on cherche à éliminer. Afin de supprimer ce bruit, il est nécessaire de disposer d'une *référence* "bruit seul" : des électrodes sont placées sur le thorax de la femme enceinte, cf Fig. 1(a). Cette référence est filtrée de manière adaptative et soustraite du signal observé sur l'électrode abdominale afin d'obtenir une estimée du signal utile, l'ECG fœtal. Ceci conduit au filtre adaptatif annulateur de bruit schématisé sur la Fig. 1(b).

On étudie par la suite un ensemble de 8 signaux ECG enregistrés sur une femme enceinte. Ces 8 signaux correspondent aux enregistrements effectués sur 5 électrodes abdominales (voies signal) et

---

1. Actuellement, seule la fréquence des pulsations cardiaques du fœtus est surveillée lors d'un accouchement. Cette fréquence est mesurée par échographie, plus simple à mettre en œuvre. Cependant, l'ECG permet d'accéder aux formes d'onde du signal, délivrant ainsi bien plus d'information. Cette information est, par exemple, nécessaire afin de diagnostiquer de manière précoce des anomalies cardiaques dans des cas à risques.

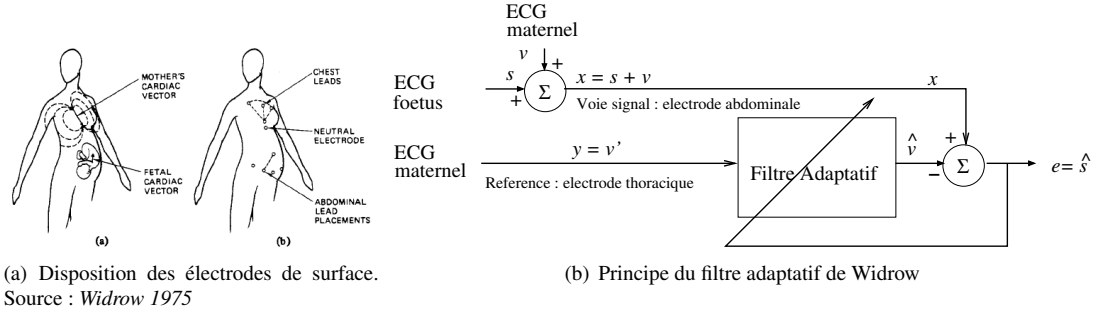


FIGURE 1 – Expérience de Widrow afin d’estimer l’ECG foetal

3 électrodes thoraciques (références). La fréquence d’échantillonnage est  $F_e = 250\text{Hz}$ , et la durée d’acquisition est de 10 secondes (ce qui correspond à  $N = 2500$  échantillons).

### Consignes :

Afin de ne pas perdre de temps sur des points de programmation matlab, un squelette de programme `ecg_widrow_exp.m` vous est déjà fourni. Vous pouvez vous en inspirer et le compléter par la suite.

1. Charger l’archive `foetal_ecg.mat` des signaux ECG. Ceci crée la matrice `foetal_ecg` de taille  $8 \times N$  dont chaque ligne correspond à une électrode :
  - lignes 1-5 : électrodes abdominales  $\rightarrow$  voies signal,
  - lignes 6-8 : électrodes thoraciques  $\rightarrow$  références.
Visualiser dans le domaine temporel les signaux associés à la première électrode abdominale et à une des électrode thoraciques. Interpréter ; `load`, `figure`, `subplot`, `plot`.

## 2 Algorithme de Widrow (LMS)

On s’intéresse, dans un premier temps, au signal ECG  $x$  enregistré sur la première électrode abdominale, alors que  $y$  est une des références et

$$\mathbf{y}_k = (y[k], \dots, y[k - L + 1])^T, \quad (1)$$

désigne l’échantillon de mémoire  $L$  à la date  $k$ . Le pseudo-code de l’algorithme de Widrow, qui est un cas particulier d’algorithme de gradient, est appelé Algorithme 1. Cet algorithme calcule pour chaque date  $k$  la réponse impulsionnelle  $\mathbf{w}_k$  du filtre RIF adaptatif de mémoire  $L$ .

---

### Algorithm 1 Filtrage adaptatif de Widrow (LMS)

---

**Require:**  $x$  voie signal,  $y$  voie référence  $\leftarrow$  signaux numériques de  $N$  échantillons

$L$  fixé {Choix de la longueur du filtre RIF adaptatif}

$\mathbf{w}_0$  fixé,  $\mathbf{pex} \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$  {Initialisation}

$\mu$  fixé {Choix du pas d’adaptativité}

**for**  $k = 1 \rightarrow N$  **do**

$e_k \leftarrow x[k] - \mathbf{w}_{k-1}^T \mathbf{y}_k$  {Erreur de prédiction}

$\mathbf{w}_k \leftarrow \mathbf{w}_{k-1} + \mu e_k \mathbf{y}_k$  {Maj du filtre}

$\hat{v}[k] \leftarrow \mathbf{w}_k^T \mathbf{y}_k$  {Calcul de l’estimée à la date  $k$ }

**end for**

**return**  $\hat{v}$  {estimée de l’ECG maternel}

---

Concernant le choix du pas d’adaptativité  $\mu$ , on rappelle qu’une condition suffisante pour assurer la convergence de l’algorithme est

$$\mu < \frac{2}{\lambda_{\max}},$$

où  $\lambda_{\max}$  est la valeur propre maximale de la matrice d'autocorrélation  $\Gamma_y = E[\mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k]$ . Cependant, cette matrice n'est pas initialement connue, et l'estimation numérique de ses valeurs propres n'est pas forcément très stable. Une borne plus conservative, mais plus simple et stable numériquement, peut être obtenue en remarquant que si les  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq L}$  sont les valeurs propres de  $\Gamma_y$ , alors  $\lambda_{\max} \leq \sum_{i=1}^L \lambda_i = \text{trace}(\Gamma_y)$ . Or par construction  $\Gamma_y$  est Toeplitz, avec pour terme diagonal  $\Gamma_y[0] = E[y^2]$ , et donc  $\text{trace}(\Gamma_y) = LE[y^2]$ . On en déduit la borne suivante :

$$\mu < B_\mu = \frac{2}{L\Gamma_y[0]},$$

où  $\Gamma_y[0]$  peut être estimé comme  $\Gamma_y[0] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y[i]^2$ .

#### Consignes :

1. Initialisation et choix des paramètres du filtre :
  - pour commencer, se fixer une mémoire de longueur donnée, pex  $L = 8$ .
  - expliquer pourquoi les conditions suffisantes de convergence reposent sur des hypothèses peu réalistes en pratique. Choisir alors, pour commencer, une valeur suffisamment faible de  $\mu$ , pex  $\mu = \frac{B_\mu}{1000}$ , afin d'assurer la convergence ; mean
2. Implémenter l'algorithme de Widrow, décrit à l'Alg. 1, afin d'estimer l'ECG maternel, et donc par soustraction l'ECG du fœtus. **Conseils :**
  - puisque l'indexation des tableaux commence à 1 en matlab, on pourra calculer explicitement lors de l'initialisation les expressions dans le cas  $k = 1$ , et ensuite itérer pour  $k = 2 \dots N$ ,
  - lorsque  $k < L$ , on ne dispose pas encore d'assez d'observations afin de construire le vecteur  $\mathbf{y}_k$  de taille  $L$ . Afin de ne pas avoir à particulariser les formules, on peut dans ce cas compléter  $\mathbf{y}_k = (y[k], \dots, y[\max(1, k - L + 1)])^T$  par  $L - k$  zéros ; zeros
3. Visualiser et interpréter les courbes d'adaptativité suivantes :
  - l'erreur de prédiction  $e[k]$  en fonction de la date  $k$  (*courbe d'apprentissage*),
  - le premier coefficient du filtre RIF  $w_k[1]$  en fonction de la date  $k$ .
4. Jouer sur le paramètre  $\mu$  et visualiser/interpréter les résultats. Faut-il privilégier dans cette application l'adaptativité ou la stabilité et pourquoi ? Donner une valeur numérique appropriée.
5. Jouer sur la longueur  $L$  du filtre RIF et visualiser/interpréter les résultats. Donner une valeur appropriée et justifier.
6. Débruiter de manière identique les signaux associés aux autres électrodes abdominales. Interpréter ; load, figure, subplot, hold on, hold off, plot.

### 3 Algorithme de Widrow (LMS) multi-références

Puisque plusieurs signaux de référence (les 3 électrodes thoraciques) sont disponibles, il est intéressant de les prendre conjointement en compte afin d'estimer/débruiter l'ECG maternel. On cherche à estimer l'ECG maternel comme une combinaison linéaire de toutes les références. L'échantillon de mémoire  $L$  associé aux références peut maintenant se mettre sous la forme  $\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^1, \dots, \mathbf{y}_k^p)^T$ , où  $p = 3$  est le nombre de références, et où  $\mathbf{y}_k^i$  désigne l'échantillon de mémoire  $L$  associé à la  $i$ ème référence (1). Le filtre adaptatif a une réponse de longueur  $pL$  de la forme  $\mathbf{w}_k = (\mathbf{w}_k^1 \dots \mathbf{w}_k^p)^T$ , si bien que  $\mathbf{w}_k^T \mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^p \mathbf{w}_k^{iT} \mathbf{y}_k^i$ . Le filtre multi-références ainsi obtenu est schématisé Fig. 2.

#### Consignes :

1. Expliquer l'intérêt du filtre multi-références par rapport au filtre précédent.
2. Modifier votre algorithme afin d'implémenter le filtre multi-références ; débruiter les signaux. Interpréter les résultats obtenus.

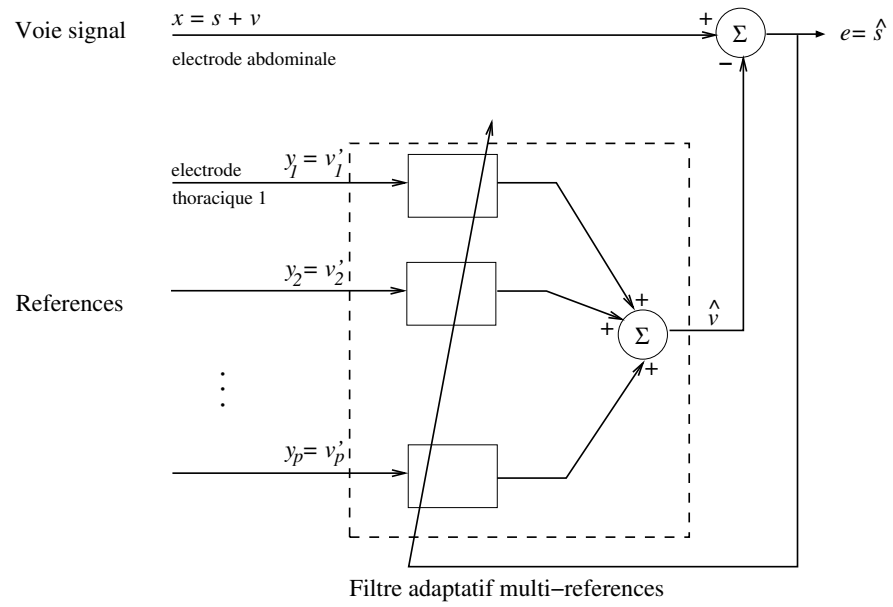


FIGURE 2 – Schéma du filtre adaptatif multi-références afin d'estimer l'ECG fœtal