

BE 1 : Filtrage Linéaire Optimal, ASI 4A

Préambule

L'objectif de ce BE est d'illustrer les notions vues dans le cours de traitement des signaux concernant le filtrage de Wiener. Plus précisément, on s'intéresse à l'implémentation d'un filtre de Wiener discret à mémoire finie (RIF) pour répondre à un problème de lissage. L'application étudiée est l'estimation et l'annulation de bruits périodiques (pollution électromagnétique) dans des signaux d'Electromyogrammes (EMG).

Après chaque question, les principales fonctions Matlab susceptibles d'être utiles sont rappelées. La syntaxe d'utilisation de ces fonctions s'obtient à l'aide des fonctions `help` (format texte) ou `doc` (format html), e.g. :

```
> help plot;
```

permet d'obtenir les informations relatives au tracé de courbes à 1 dimension.

1 Signaux EMG

Les électromyogrammes consistent à mesurer l'activité électrique d'un muscle ou d'un nerf. Les signaux obtenus sont utiles afin d'étudier le fonctionnement neuromusculaire, d'un point de vue clinique afin de diagnostiquer des pathologies,... A l'heure actuelle, on estime que l'essentiel de l'information utile en EMG de surface se trouve dans la bande spectrale allant de 20 à 400 Hz. En raison principalement du champ 50Hz du réseau électrique, cette bande de fréquence est sujette à d'importantes pollutions électromagnétiques. Les mesures sont, en effet, perturbées par le rayonnement des divers appareils électriques avoisinants (voire de l'électromyographe lui-même). Il en résulte d'importantes interférences périodiques, localisées sur le 50Hz et ses harmoniques, qu'il convient d'éliminer avant tout traitement des signaux.

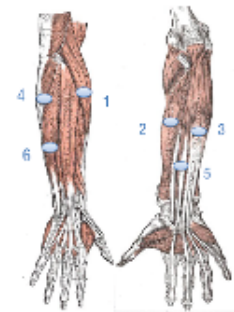


Fig. 1 : disposition des électrodes de surface lors de l'acquisition.

On étudie par la suite un EMG de surface acquis sur un avant bras¹, cf. Fig. 1, lors d'un effort de demi-pronation constant. La fréquence d'échantillonnage est $F_e = 2000\text{Hz}$.

Consignes :

Afin de ne pas perdre de temps sur des points de programmation matlab, un squelette de programme `emg_periodic_canceller.m` vous est déjà fourni. Vous pouvez vous en inspirer et le compléter par la suite.

1. Charger le signal EMG `demipronation_1_lead3.mat` (provenant de l'électrode 3, cf. Fig 1) et le visualiser dans le domaine temporel ; `load`, `figure`, `plot`.
2. Estimer la densité spectrale (par méthode de périodogramme moyenné) et la visualiser. Interpréter les résultats. En déduire l'allure de la fonction de transfert du filtre optimal pour estimer la partie périodique ; `pwelch`

¹. Pour l'anecdote, il s'agit de l'avant bras de l'un de vos prédécesseurs... Cette expérience a été effectuée lors d'un projet intégrateur ASI 5A encadré par Pierre Granjon.

2 Estimation/Suppression de bruit périodique

On considère le modèle suivant :

$$y(t) = x(t) + v_p(t),$$

où

- $y(t)$ est le signal observé,
- $x(t)$ est le signal utile, large bande, centré, stationnaire au second ordre,
- $v_p(t)$ est un bruit périodique, décorrélé de $x(t)$.

On cherche le filtre optimal au sens de Wiener afin d'estimer la partie périodique du signal $s(t) \equiv v_p(t)$, et donc accéder au signal utile large bande $x(t) = y(t) - v_p(t)$ (on parle de débruitage ou encore d'annulation, suppression, de bruit).

Déterminer un tel filtre nécessite de connaître les moments au second ordre, i.e. les fonctions de corrélations $\Gamma_y(\cdot)$ et $\Gamma_{sy}(\cdot)$:

- la fonction d'autocorrélation Γ_y peut être directement estimée à partir des données $y(t)$,
- afin d'estimer $\Gamma_{sy} \equiv \Gamma_{v_p y}$ il serait nécessaire de disposer d'une référence "bruit seul"...

Il est néanmoins possible de contourner cette dernière contrainte en exploitant ici les propriétés de périodicité du bruit. En effet, la fonction d'autocorrélation d'un signal v_p T -périodique est elle-même T -périodique :

$$\Gamma_{v_p}(\tau + kT) = \Gamma_{v_p}(\tau), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

A l'inverse, puisque $x(t)$ est large bande, son autocorrélation converge rapidement vers 0 :

$$\Gamma_x(\tau) \approx 0, \quad \text{lorsque } |\tau| \gg 0.$$

On peut introduire un retard τ' sur le signal observé $y_r(t) = y(t - \tau')$, et on obtient pour tout $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{yy_r}(\tau) &= E[y(t)y_r(t - \tau)] = E[y(t)y(t - \tau - \tau')], \\ &= E[x(t)x(t - \tau - \tau')] + E[v_p(t)v_p(t - \tau - \tau')] + E[x(t)v_p(t - \tau - \tau')] + E[v_p(t)x(t - \tau - \tau')], \\ &= \Gamma_x(\tau + \tau') + \Gamma_{v_p}(\tau + \tau'), \quad \leftarrow x \text{ et } v_p \text{ sont décorrélés.} \end{aligned}$$

Finalement, si le retard est choisi tel que $\tau' = kT$, avec k tel que τ' soit suffisamment grand devant l'échelle de temps caractéristique de Γ_x , on a alors $\Gamma_x(\tau + \tau') \approx 0$ et on obtient donc

$$\begin{aligned} \Gamma_{sy}(\tau) &\equiv \Gamma_{v_p y}(\tau) = \Gamma_{v_p}(\tau), \quad \text{car } x \text{ et } v_p \text{ sont décorrélés,} \\ &\approx \Gamma_{yy_r}(\tau) \end{aligned} \tag{1}$$

pour tout $\tau > 0$. L'équation (1) montre donc qu'il est possible d'utiliser le signal observé retardé y_r comme signal de référence afin d'estimer Γ_{sy} . Ceci conduit à synthétiser le filtre *auto-ajusté* schématisé Fig. 1 afin d'estimer et/ou supprimer la partie périodique du signal.

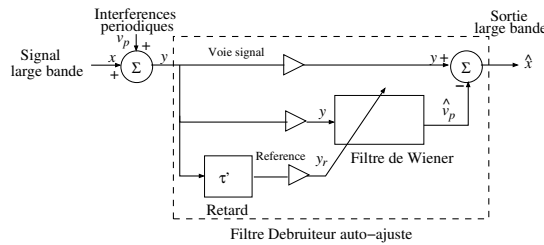


FIGURE 1 – Schéma du filtre optimal annulateur d'interférences périodiques

Filtrage de Wiener RIF

Les observations partielles correspondent au signal numérique $y[n]$, observé à différentes dates. On rappelle que, dans ce cas, la réponse w du filtre de Wiener à mémoire finie ($N+1$) est caractérisée par l'équation de Wiener-Hopf :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_{sy}[0] \\ \Gamma_{sy}[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_{sy}[N] \end{pmatrix}}_{\Gamma_{sy}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_y[0] & \Gamma_y[1] & \dots & \Gamma_y[N] \\ \Gamma_y[1] & \Gamma_y[0] & \dots & \Gamma_y[N-1] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_y[N] & \Gamma_y[N-1] & \dots & \Gamma_y[0] \end{pmatrix}}_{\Gamma_y} \underbrace{\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}}_{w}, \quad (2)$$

la matrice Γ_y étant Toeplitz (diagonale et sous-diagonales constantes) symétrique.

Consignes : construction du filtre auto-ajusté optimal

1. Donner un exemple de signal large bande (on pourra préciser la forme de la fonction de corrélation).
2. En s'aidant du spectre du signal et de l'allure attendue du filtre optimal, déterminer l'ordre de grandeur de la longueur N du filtre RIF.
3. Démontrer que la fonction d'autocorrélation d'un signal T -périodique l'est également ; Estimer et visualiser la fonction de corrélation du signal observé ; fonction `xcorr`
4. A partir des informations fournies, des interprétations et des choix précédemment effectués, déterminer une valeur appropriée du retard M (en nb d'échantillons) à appliquer afin de construire le signal de référence y_r .
5. Construire alors les estimées des matrices et vecteurs de corrélations réintroduits en (2) ; fonctions `xcorr`, `toeplitz`.
6. Calculer la réponse du filtre optimal par résolution directe de (2) ; fonction `inv`.

Consignes : Estimation/Suppression de la composante périodique

1. Calculer l'estimée \hat{v}_p du signal périodique et l'estimée $\hat{x} \equiv y - \hat{v}_p$ du signal large bande x ; fonction `filter`,
2. Visualiser sur la même figure le signal observé y , le bruit périodique estimé \hat{v}_p et le signal large bande estimé \hat{x} ; commandes `hold on`, `hold off`, `subplot`
3. Visualiser sur le même graphe les densités spectrales du signal observé y , et du signal débruité \hat{x} . Interpréter.
4. Discuter l'influence des paramètres N et M sur le filtre, et indiquer quelle valeur pour ces paramètres vous semble optimale.

Après suppression des interférences périodiques, on obtient finalement des signaux EMG "nettoyés" des interférences extérieures. Ils peuvent alors être utilisés afin d'étudier, par exemple, les relations de connectivité entre les différentes fibres musculaires lors d'un type d'effort particulier. Ces points font actuellement l'objet de recherche en biomécanique et en traitement du signal.

3 Prédiction/suppression du bruit périodique à partir du signal retardé

Le filtre de Wiener permettant d'estimer (puis de supprimer) un bruit périodique peut être réinterpréter comme un problème de prédiction du bruit périodique à partir du signal retardé. Ceci revient à considérer le modèle suivant :

- $y'(t) \equiv y_r(t) = x(t - \tau') + v_p(t - \tau')$ ← observation partielle à l'instant t
- $s(t) \equiv v_p(t)$,

et donc à synthétiser le filtre schématisé Fig. 2

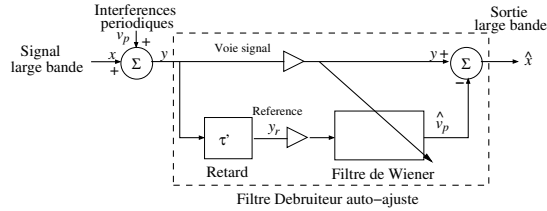


FIGURE 2 – Schéma du filtre optimal prédictif/annulateur d'interférences périodiques

Consignes : Prédiction/Suppression de la composante périodique

1. Montrer que $\Gamma_{y'}(\tau) = \Gamma_y(\tau)$ et que pour $\tau' > 0$ suffisamment grand, $\Gamma_{sy'}(\tau) \approx \Gamma_{yy_r}(\tau)$
2. Quel est alors l'avantage de ce modèle par rapport au filtre précédent afin de choisir τ' et donc le retard équivalent en nombre d'échantillons M ?
3. Implémenter ce filtre (avec la même longueur N que celle déterminée précédemment) : quelle est la seule modification à apporter au filtre implémenté dans la section précédente ?
4. Vérifier les résultats en fonction du choix de M (on pourra comparer avec ceux obtenus avec le filtre implémenté dans la section précédente pour la même valeur M)
5. Lorsque F_e n'est plus un multiple du fondamental du bruit périodique, quel est le filtre qui sera le mieux adapté au problème ?