# LTTT - Ngân Hàng Lí Thuyết Thông Tin

lý thuyết thôn gtin (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông)

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

Mẫu 2

KHOA KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ 1

**Tên học phần: Lý thuyết thông tin**

**Mã học phần: ELE 1319**

**Ngành đào tạo:** ĐT-VT, Đ-ĐT, CNTT, ATTT

**Trình độ đào tạo:** Đại học

- **Câu hỏi loại 1 điểm**

*Câu hỏi 1.1*

a. Viết biểu thức tính lượng tin chứa trong tin x với xác suất p(x).

b. Cho p(x)=1/16. Tính lượng tin riêng chứa trong sự kiện x.

*Câu hỏi 1.2*

Cho nguồn rời rạc $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Tính entropy của nguồn α.

*Câu hỏi 1.3*

Cho mã khối tuyến tính (5,2) có các từ mã được tạo ra theo quy luật sau: $m_1 m_2 \rightarrow c_1c_2c_3c_4c_5$ với:

$$c_1 = m_1;\ c_2 = m_2;\ c_3 = m_2;\ c_4 = m_1;\ c_5 = m_1 + m_2.$$

Tìm ma trận sinh G và ma trận kiểm tra H cho mã này.

*Câu hỏi 1.4*

Hãy viết các công thức mô tả mối quan hệ giữa các đại lượng H(X), H(Y), H(X/Y), H(Y/X), H(X,Y) và I(X;Y).

*Câu hỏi 1.5*

Cho mã Hamming (7,3). Mã này được sử dụng để phát hiện sai và có thể sửa được 1 lỗi đơn trong một từ mã 7 bit. Hỏi mã này sử dụng bao nhiêu bit để kiểm soát lỗi và bao nhiêu bit để truyền dữ liệu?

*Câu hỏi 1.6*

Chứng minh rằng nếu g(x) là đa thức sinh của một mã cyclic (n,k) bất kỳ thì hệ số tự do $g_0 = 1$.

*Câu hỏi 1.7*

Nêu định nghĩa và tính chất của entropy của nguồn rời rạc A sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_s \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_s) \end{pmatrix}$$

*Câu hỏi 1.8*

Nêu định nghĩa và tính chất của khoảng cách giữa 2 từ mã $\alpha_i^n$ và $\alpha_j^n$ của một mã đều nhị phân $d\left(\alpha_i^n, \alpha_j^n\right)$.

*Câu hỏi 1.9*

Trọng số của một từ mã $\omega(\alpha_i^n)$: Định nghĩa và tính chất.

*Câu hỏi 1.10*

Phát biểu 2 định lý về khả năng phát hiện sai và khả năng sửa sai của một bộ mã đều nhị phân có độ thừa (D>0).

*Câu hỏi 1.11*

Tính entropy của nguồn rời rạc nhị phân sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

*Câu hỏi 1.12*

Nêu định nghĩa và tính chất của Entropy có điều kiện H(A/B).

*Câu hỏi 1.13*

Nêu định nghĩa và tính chất của lượng thông tin chéo.

*Câu hỏi 1.14*

Nêu định nghĩa và tính chất của khả năng thông qua của nguồn rời rạc.

*Câu hỏi 1.15*

Phát biểu định lý mã hóa thứ nhất của Shannon.

*Câu hỏi 1.16*

Nêu 2 yêu cầu của phép mã hóa tối ưu.

*Câu hỏi 1.17*

Định nghĩa mã cyclic

*Câu hỏi 1.18*

Trong phần mã hóa nguồn – Nén dữ liệu, chúng ta nói rằng các bộ mã sử dụng cho nén dữ liệu thường là các bộ mã không đều. Hãy giải thích một cách rõ ràng nhất có thể về kết luận trên.

*Câu hỏi 1.19*

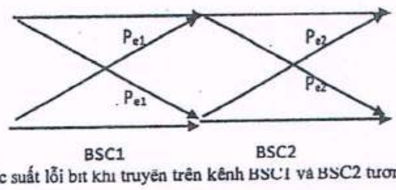
Cho biết mã hóa kênh được sử dụng trong hệ thống truyền tin với mục đích gì? Mã hóa kênh được xây dựng dựa trên nguyên tắc gì? Hãy ví dụ một số loại mã hóa kênh mà em biết.

*Câu hỏi 1.20*

Cho mã tuyến tính (7,4,3). Hãy tính xác suất thu sai 1 từ mã khi truyền tin qua kênh đối xứng nhị phân có xác suất thu sai 1 dấu mã là $p_0$.

*Câu hỏi 1.21*

Cho hai kênh BSC được mắc nối tiếp như hình :




Xác suất lỗi bit khi truyền trên kênh BSC1 và BSC2 tương ứng là $p_{e1}$ và $p_{e2}$. Tính xác suất lỗi bit khi truyền qua hai kênh này.

*Câu hỏi 1.22*

Tính entropy vi phân của biến ngẫu nhiên X có hàm phân bố xác suất:

$$p(x) = \begin{cases} a^{-1} & (0 \le x \le a) \\ 0 & (x \ne) \end{cases}$$ với hai trường hợp:

a. a=1 b. a=4

*Câu hỏi 1.23*

Cho một nguồn rời rạc không nhớ (DMS) như sau.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{2} & p & q \end{pmatrix}$$

a. Tính lượng thông tin trung bình thống kê *H(X)* của nguồn.

b. Tìm giá trị cực đại của *H(X)*, chỉ rõ điều kiện để có cực đại này.

*Câu hỏi 1.24*

Cho kênh nhị phân đối xứng BSC với xác suất lỗi bit $p_e = 0{,}01$.

a. Tính xác suất nhận được m bit sai trong n bit truyền đi (m<n).

b. Tính xác suất nhận được chuỗi 15 bit trong đó có ít hơn 3 bít sai

- **Câu hỏi loại 2 điểm**

*Câu hỏi 2.1*

Cho nguồn rời rạc $\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 0{,}01 & 0{,}24 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}47 & 0{,}01 & 0{,}02 \end{pmatrix}$.

a. Tính entropy của nguồn α

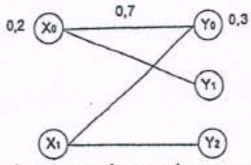
b. Không cần tính, em hãy cho biết tin nào trong nguồn này chứa nhiều thông tin nhất và giải thích tại sao.

*Câu hỏi 2.2*

Tính Entropy vi phân của các quá trình ngẫu nhiên liên tục X có phân bố hàm số mũ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ với hằng số $\lambda > 0$.

*Câu hỏi 2.3*

Cho mô hình kênh rời rạc sau:




Điền các xác suất còn thiếu vào mô hình này.

*Câu hỏi 2.4*

Giả sử rằng X là một biến ngẫu nhiên có entropy H(X)=8 bit. Gia sử rằng Y(X) là một hàm toán học thỏa mãn quan hệ ánh xạ 1-1.

a. Hỏi entropy của Y bằng bao nhiêu?
b. Entropy có điều kiện H(Y/X) và H(X/Y) bằng bao nhiêu?
c. Entropy kết hợp của X và Y, H(X,Y) bằng bao nhiêu?
d. Gia sử rằng hàm xác định Y(X) là không thể biến đổi ngược; nghĩa là các giá trị khác nhau của X có thể tương ứng với cùng một giá trị của Y(X). Trong trường hợp đó, H(Y) và H(X/Y) sẽ thay đổi ra sao?

*Câu hỏi 2.5*

Một nguồn nhị phân độc lập với phân bố xác suất nguồn là 0,25 và 0,75 được truyền trên kênh nhị phân đối xứng với xác suất chuyển sai p = 0,01. Tính các đại lượng H(X/Y) và I(X;Y).

*Câu hỏi 2.6*

Trong một bộ tú lơ khơ 52 quân bài (không kể phăng teo), A rút ra 1 một quân bài bất kỳ. Tính số câu hỏi trung bình tối thiểu mà B cần đặt ra cho A để xác định được quân bài mà A đã rút (câu hỏi có dạng trả lời có – không hoặc đúng – sai). Nêu thuật toán hỏi. Giả sử A đã rút ra 5 cơ, hãy nêu các câu hỏi cần thiết của B, các trả lời tương ứng của A và phán đoán tương ứng của B.

*Câu hỏi 2.7*

Có 2 hộp đựng bút chì, mỗi hộp đựng 20 bút chì. Hộp thứ nhất có 10 bút chì trắng, 5 bút chì đen và 5 bút chì đỏ. Hộp thứ 2 có 8 bút chì trắng, 8 bút chì đen, 4 bút chì đỏ. Thực hiện các 2 phép thử lấy hú hoạ một bút chì từ mỗi hộp. Hỏi rằng phép thử nào trong hai phép thử nói trên có độ bất định lớn hơn.

*Câu hỏi 2.8*

Một thiết bị điện tử gồm 16 khối có giá trị như nhau về độ tin cậy và được mắc nối tiếp. Giả sử có một khối hỏng. Hãy sử dụng một thiết bị đo tín hiệu ra để xác định khối hỏng. Tính số lần đo trung bình tối thiểu cần thực hiện bằng thiết bị đo này để có thể xác định được khối hỏng. Nêu thuật toán đo? Giả sử khối hỏng là khối thứ 12 hãy chỉ ra các lần đo cần thiết và kết quả đo tương ứng, các phán đoán đưa ra sau mỗi lần đo?

*Câu hỏi 2.9*

a. Hãy cho biết nhược điểm của mã Huffman khi sử dụng cho mục đích nén dữ liệu?

b. Cho hai bộ mã khác nhau dùng để mã hóa cho các ký tự a, b, c, d. Trong bảng, $p_i$ là xác suất xuất hiện của mỗi ký tự. Hỏi chiều dài trung bình để mã hóa cho một ký tự trong mỗi bộ mã là bao nhiêu?

| $a_i$ | $c_1(a_i)$ | $c_2(a_i)$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|
| a | 1000 | 0 | ½ |
| b | 0100 | 10 | ¼ |
| c | 0010 | 110 | 1/8 |
| d | 0001 | 111 | 1/8 |

*Câu hỏi 2.10*

Có 8 chai nước mắm được đánh số từ 1 đến 8 trong đó có 1 chai làm từ cá ở gần nhà máy Formosa nên có chứa kim loại nặng. Kết quả phân tích một mẫu nước mắm chỉ cho biết chính xác mẫu đó có chứa kim loại nặng hay không. Giả thiết các chai nước mắm có xác suất chứa kim loại nặng như nhau. Hãy cho biết số lần phân tích mẫu nước mắm tối thiểu cần thực hiện? Hãy nêu thuật toán tổng quát để tạo mẫu nước mắm đem phân tích? Giả sử chai số 7 chứa kim loại nặng, hãy chỉ ra cách tạo mẫu nước mắm trong các lần phân tích, kết quả tương ứng với mỗi lần phân tích và phán đoán đưa ra sau mỗi lần phân tích?

*Câu hỏi 2.11*

Một nguồn rời rạc gồm N tin tức $X = (x_1, x_2, ..., x_{N-2}, x_{N-1}, x_N)$, với $N \geq 3$ và xác suất xuất hiện các tin tức tương ứng là $(2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-(N-2)}, 2^{-(N-1)}, 2^{-(N-1)})$.

a. Hãy xây dựng một mã Huffman nhị phân cho nguồn rời rạc trên.

b. Hãy đánh giá hiệu quả của mã Huffman nhị phân vừa xây dựng được.

*Câu hỏi 2.12*

Cho một nguồn rời rạc với xác suất xuất hiện các sự kiện như sau (1/3, 1/3, 1/4, 1/12).

a. Hãy xây dựng hai mã Huffman nhị phân có độ dài các từ mã tương ứng là (1, 2, 3, 3) và (2, 2, 2, 2).

b. Hãy so sánh hiệu quả của hai mã Huffman nhị phân vừa xây dựng được.

*Câu hỏi 2.13*

Một thành phố nọ có 1% dân số là sinh viên. Trong số sinh viên có 50% là nam thanh niên. Số nam thanh niên trong thành phố là 32% dân số. Giả sử ta gặp một nam thanh niên. Hãy tính lượng thông tin chứa trong tin khi biết rằng đó là một nam sinh viên.

*Câu hỏi 2.14*

Một bình đựng gồm hai viên bi đen và ba viên bi trắng. Thực hiện lấy hai lần liên tiếp một cách ngẫu nhiên ra mỗi lần một viên bi, bi được lấy ra thì không bỏ lại vào bình. Quan sát thứ tự màu các viên bi lấy được. Gọi A là thông điệp (tin) cho chúng ta biết đã lấy được viên bi thứ hai là viên bi đen. Hãy tính lượng tin mang lại của thông điệp A.

*Câu hỏi 2.15*

Trong 27 đồng xu giống nhau có một đồng xu giả nhẹ hơn. Giả sử ta dùng một cân đĩa thăng bằng (có 2 đĩa cân) để xác định đồng xu giả. Hãy tính số lần cân trung bình tối thiểu để có thể xác định được đồng xu giả. Nêu thuật toán cân.

*Câu hỏi 2.16*

Cho mã khối tuyến tính (6,3) với ma trận sinh:

$$G_{3\times6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Tìm ma trận kiểm tra H cho bộ mã.

b. Tìm khoảng cách Hamming của bộ mã.

*Câu hỏi 2.17*

Cho mã cyclic (7,4) với đa thức sinh $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

a. Hỏi mã này có khả năng phát hiện và sửa bao nhiêu sai?

b. Tìm từ mã hệ thống đầu ra với đầu vào m=1111

*Câu hỏi 2.18*

Tính độ rộng giải thông của 1 kênh vô tuyến truyền hình truyền hình ảnh đen trắng với $5.10^5$ điểm ảnh (pixel)/ảnh ; 25 ảnh/s và có 8 mức sáng đồng xác suất, với tỉ số tín/tạp $\frac{S}{N} = \frac{\sigma^2 s}{G_0 F} = 15$. Coi rằng ảnh vô tuyến truyền hình xem như 1 dạng tạp âm trắng.

*Câu hỏi 2.19*

Tín hiệu thoại có băng tần W=3,4kHz.

a. Tính khả năng thông qua của kênh với điều kiện SNR=30dB

b. Tính SNR tối thiểu cần thiết để kênh có thể truyền tín hiệu thoại số có tốc độ 4800bps.

*Câu hỏi 2.20*

Cho một mã khối tuyến tính có ma trận sinh G dưới đây:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Tìm ma trận kiểm tra H. b. Hỏi mã này có khoảng cách Hamming bằng bao nhiêu?

*Câu hỏi 2.21*

Tìm mã cyclic (8,5) trên vành đa thức $Z_2[x]/x^8 + 1$. Tìm khoảng cách Hamming của mã đó.

*Câu hỏi 2.22*

Mã nào dưới đây là mã cyclic? Mã nào dưới đây tương đương với một mã cyclic?

(a) C1= 0000;1110;1011;0111;1101

(b) C2=111; 100; 010; 001

(c) C3 với ma trận sinh G1:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) C4 với ma trận sinh G2:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

***Câu hỏi 2.23***

Cho mã cyclic (7,4) có đa thức sinh $g(x) = 1 + x + x^3$. Hãy xây dựng ma trận G và ma trận H ở dạng hệ thống của mã này.

***Câu hỏi 2.24***

Cho mã cyclic (15,8) có $g(x) = x^7 + x^6 + x^4 + 1$. Hãy xây dựng ma trận sinh $G$ và ma trận kiểm tra $H$ ở dạng hệ thống?

***Câu hỏi 2.25***

Xét mã khối nhị phân tuyến tính dạng hệ thống (5,2) có ma trận sinh có dạng :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Liệt kê tất cả các từ mã của bộ mã. b. Bộ mã này có khả năng phát hiện và sửa bao nhiêu sai?

***Câu hỏi 2.26***

Hãy phân tích nhị thức $x^7 + 1$ thành tích của các đa thức bất khả qui và mô tả tất cả các mã cyclic có độ dài $n = 7$ trên vành đa thức $¢_2[x]/x^7 + 1$

***Câu hỏi 2.27***

Hãy phân tích nhị thức $x^{15} + 1$ thành tích của các đa thức bất khả qui và tính số lượng các mã cyclic có độ dài $n = 15$ trên vành đa thức $¢_2[x]/x^{15} + 1$.

***Câu hỏi 2.28***

Cho mã cyclic (7,4,3) có $g(x) = 1 + x + x^3$. Giả sử từ mã nhận được của bộ mã trên có dạng: $v(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 \leftrightarrow 0001111$. Hãy sử dụng thuật toán chia dịch vòng (bẫy lỗi) để tìm lại từ mã đã phát?

***Câu hỏi 2.29***

Cho $g(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ là đa thức trên trường nhị phân.

a. Tìm mã cyclic có tỉ lệ mã $r_1 = k/n$ nhỏ nhất với đa thức sinh là $g(x)$.

b. Tìm khoảng cách Hamming của bộ mã ở câu a.

***Câu hỏi 2.30***

Xét đa thức $g(x) = x + 1$ trên trường nhị phân.

a. Chứng minh rằng đa thức này có thể tạo ra một mã cyclic với n bất kỳ. Tìm k tương ứng.

b. Chọn một giá trị n bất kỳ. Tìm dạng hệ thống của G và H của mã được tạo nên bởi g(x).

- **Câu hỏi loại 3 điểm**

***Câu hỏi 3.1***

a. Cho mã khối tuyến tính (n,k) có khoảng cách tối thiểu Hamming $d_0 = 8$. Hỏi mã này có khả năng phát hiện bao nhiêu sai và sửa bao nhiêu sai?

b. Một mã khối tuyến tính (n,2) có khoảng cách tối thiểu Hamming $d_0 = 5$. Xác định chiều dài n tối thiểu.

c. Cho biết có tồn tại một mã khối tuyến tính với các tham số $n = 15, k = 7, d_{min} = 5$ hay không?

***Câu hỏi 3.2***

Bộ mã nào dưới đây có thể hoặc không thể là mã Huffman của bất kỳ một nguồn rời rạc nào? Nếu không thể thì giải thích tại sao? Nếu có thể thì hãy cho ví dụ một nguồn tin tương ứng với bộ mã đó. Chú ý, mỗi câu đã liệt kê toàn bộ các từ mã (cách nhau bởi dấu phẩy) trong một bộ mã

a. 0, 10, 111, 101

b. 00, 010, 011, 10, 110

c. 1, 000, 001, 010, 011

***Câu hỏi 3.3***

Cho mã khối tuyến tính (7,3) với ma trận sinh:

$$G_{3\times7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Tìm ma trận kiểm tra H cho bộ mã. b. Tìm khoảng cách Hamming của bộ mã.

c. Cho bản tin đầu vào m=110, tìm từ mã tương ứng.

***Câu hỏi 3.4***

Cho mã cyclic (7,3) với đa thức sinh $g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

a. Xây dựng sơ đồ mã hóa theo phương pháp nhân. b. Tìm từ mã đầu ra với bản tin đầu vào m=111.

c. Kiểm tra lại kết quả ở câu b) bằng thuật toán mã hóa theo phương pháp nhân.

***Câu hỏi 3.5***

a. Tính entropy của một nguồn rời rạc không nhớ gồm 5 ký tự {A,B,C,D,E} với các xác suất tương ứng {1/2, 1/4, 1/8, 1/16 , 1/16}.

b. Xác định lượng thông tin chứa trong chuỗi phát đi DADED.

c. Xây dựng cây mã hóa Huffman cho nguồn 5 ký tự này.

***Câu hỏi 3.6***

Xét một mã cyclic nhị phân tuyến tính hệ thống (9,3) có đa thức sinh $g(x) = 1 + x^3 + x^6$.

a. Xây dựng mạch lập mã hệ thống cho mã theo thuật toán chia.

b. Mô tả hoạt động của mạch, tìm từ mã đầu ra tương ứng với khối tin vào a = 101.

c. Kiểm tra kết quả câu b) bằng thuật toán tương ứng.

***Câu hỏi 3.7***

Xét một bộ mã khối nhị phân tuyến tính hệ thống (8,4). Từ mã của bộ mã có dạng $c = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ trong đó các dấu mang tin là $a_1 \div a_4$, các dấu kiểm tra là $a_5 \div a_8$. Biết các dấu kiểm tra được xác lập theo các mối quan hệ:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + a_2 + a_3 \\ a_6 = a_2 + a_3 + a_4 \\ a_7 = a_1 + a_2 + a_4 \\ a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{cases}$$

a. Xây dựng ma trận sinh, ma trận kiểm tra cho mã này

b. Chứng minh rằng khoảng cách mã cực tiểu (khoảng cách mã tối thiểu, khoảng cách mã Hamming tối thiểu) của mã $d_{min} = 3$.

***Câu hỏi 3.8***

Cho mã cyclic (7,4) có đa thức sinh $g(x) = 1 + x + x^3$. Hãy mô tả sơ đồ chức năng của thiết bị mã hoá hệ thống cho bộ mã này theo phương pháp chia. Giả sử đa thức thông tin $a(x) = 1 + x^2 + x^3$. Hãy tìm từ mã ở đầu ra của thiết bị và kiểm tra lại bằng thuật toán 4 bước tạo từ mã hệ thống.

***Câu hỏi 3.9***

Cho mã cyclic (7,3) có đa thức sinh $g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$. Hãy mô tả sơ đồ chức năng của thiết bị mã hoá hệ thống cho bộ mã này theo phương pháp nhân. Giả sử đa thức thông tin $a(x) = 1 + x^2$. Hãy tìm từ mã ở đầu ra của thiết bị và kiểm tra lại bằng thuật toán tạo từ mã hệ thống theo phương pháp nhân.

***Câu hỏi 3.10***

a. Xây dựng một mã cyclic (6,2) trên trường $Z_2[x]/x^6 + 1$.

b. Tìm ma trận G dạng hệ thống của mã này và tìm tất cả các từ mã của bộ mã. c. Mã này có thể sửa bao nhiêu lỗi ?

***Câu hỏi 3.11***

Hãy thực hiện mã hoá Huffman cho nguồn rời rạc A sau:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{128} & \frac{1}{128} \end{pmatrix}$$

Đánh giá hiệu quả của phép mã hoá

Hãy thực hiện giải mã cho dãy bit nhận được có dạng:

1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1....

**Câu hỏi 3.12**

Hãy thực hiện mã hóa Huffman cho nguồn rời rạc sau :

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}05 \end{pmatrix}$$

Đánh giá hiệu quả của phép mã hóa

Hãy thực hiện giải mã cho dãy bit nhận được có dạng : 1100111010100011l...

**Câu hỏi 3.13**

Cho sơ đồ một kênh rời rạc không nhớ (DMC) trong đó nguồn phát X gồm hai tin $x_1$ và $x_2$; nguồn Y gồm hai tin $y_1$ và $y_2$. Biết $p(x_1)=1/2$, $p(y_1/x_1)=1$, $p(y_1/x_2)=\alpha$, $p(y_2/x_1)=0$, $p(y_2/x_2)=1-\alpha$.

a. Hãy tính H(X), H(Y), H(X,Y).

b. Tìm điều kiện của α để H(Y) đạt giá trị cực đại. Khi đó, giá trị của I(X,Y) bằng bao nhiêu (dẫn giải một cách chi tiết nhất có thể để có được kết quả đó).

**Câu hỏi 3.14**

Xét một kênh rời rạc nhị phân đối xứng không nhớ có ma trận kênh cho như sau: $\begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$. Biết đầu vào kênh là một nguồn rời rạc nhị phân không nhớ $X=\{0,1\}$ với $p(0)=1/2$, đầu ra kênh là một nguồn nhị phân không nhớ $Y=\{0,1\}$.

a. Hãy tính H(X), H(Y), H(X,Y) và I(X,Y). b. Xác định các giá trị của ε để dung lượng của kênh đạt cực đại, và cực tiểu.

**Câu hỏi 3.15**

Cho kênh nhiễu Gaussian trắng cộng có đầu ra Y = X +N ở đó X là đầu vào kênh và N là nhiễu với hàm phân bố xác suất Gauss $f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}.e^{-n^2/2\sigma_n^2}$. Giả sử X cũng có phân bố Gauss giống như N với $E(X)=0; E(X^2)=\sigma_x^2$.

a. Tính entropy vi phân của nhiễu N b. Tính lượng thông tin chéo I(X,Y)

**Câu hỏi 3.16**

Cho các nguồn rời rạc với bảng phân bố xác suất hợp $p(x_k,y_l)$ như bảng dưới đây. Hãy tính H(X), H(Y), H(X,Y), H(X/Y), H(Y/X), I(X,Y).

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1/8 | 1/16 | 1/32 | 1/32 |
| $y_2$ | 1/16 | 1/8 | 1/32 | 1/32 |
| $y_3$ | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 |
| $y_4$ | 1/4 | 0 | 0 | 0 |

**Câu hỏi 3.17**

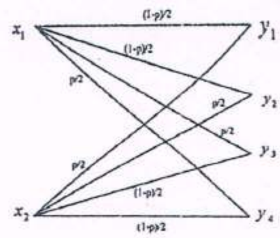
Các tín hiệu $x_1$ và $x_2$ có xác suất xuất hiện tiên nghiệm tương ứng là $p(x_1)=3/4$ và $p(x_2)=1/4$ được truyền theo kênh nhị phân rời rạc đối xứng không nhớ có nhiễu có xác suất chuyển sai $p_e=1/8$. Tính:

a. Lượng tin tức riêng có điều kiện $I(x_2/y_2)$ b. Lượng tin tức chéo $I(x_2;y_2)$

c. Các đại lượng $H(X/y_1)$, $H(X), H(X,Y), H(X/Y), I(X;Y)$

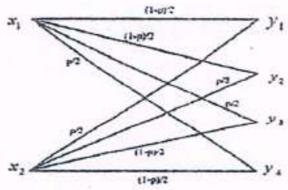
***Câu hỏi 3.18***

Cho sơ đồ kênh như hình vẽ. Biết $p(x_1) = 2/3$, hãy tính các đại lượng H(X), H(Y), H(X,Y), H(X/Y), H(Y/X), I(X,Y).



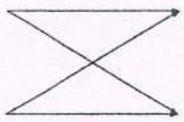

***Câu hỏi 3.19***

Cho sơ đồ kênh rời rạc không nhớ như hình vẽ, tính dung lượng của kênh :




***Câu hỏi 3.20***

Tính khả năng thông qua $C_1$ của kênh $X \to Y$ và khả năng thông qua $C_2$ của kênh $Y \to Z$, khả năng thông qua $C_3$ của kênh $X \to Z$.

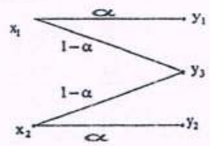


***Câu hỏi 3.21***

Cho sơ đồ kênh rời rạc không nhớ (DMC) như hình vẽ. Biết thời hạn các ký hiệu phát $x_1$ và $x_2$ đều là $T_p$.

a. Hãy tính dung lượng của kênh. b. Khảo sát sơ bộ (phác họa biến thiên) dung lượng kênh theo giá trị của α.

c. Giải thích rõ ý nghĩa của các cực đại, cực tiểu (nếu có).

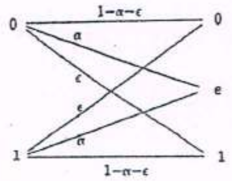



***Câu hỏi 3.22***

Cho sơ đồ kênh rời rạc không nhớ (DMC) như hình vẽ. Biết thời hạn các ký hiệu phát 0 và 1 đều là $T_p$.

a. Hãy tính dung lượng của kênh.

b. Trong trường hợp kênh nhị phân đối xứng $(\alpha = 0)$ dung lượng kênh bằng bao nhiêu?




- **Câu hỏi loại 4 điểm**

***Câu hỏi 4.1***

Cho mã cyclic (7,3) có đa thức sinh $g(x) = 1 + x + x^2 + x^4$.

a. Vẽ sơ đồ mã hóa cho bộ mã theo phương pháp nhân. b. Hỏi mã này có khả năng sửa được bao nhiêu sai?

c. Giả sử phía phát phát đi từ mã 0011101. Do có lỗi nên phía thu nhận được từ mã bị sai ở vị trí $x^5$. Hãy sử dụng thuật toán chia dịch vòng để tìm lại từ mã đã phát.

***Câu hỏi 4.2***

Cho mã cyclic (7,3) với đa thức sinh $g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

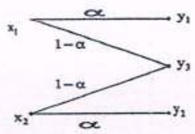
a. Vẽ sơ đồ mã hóa theo phương pháp chia. b. Khoảng cách Hamming của bộ mã bằng bao nhiêu?

c. Vẽ sơ đồ giải mã cho mã này theo phương pháp tổng kiểm tra trực giao.

d. Giả sử phía thu nhận được từ mã c=$x^2 + x^4 + x^6$ =0010101. Thực hiện giải mã để tìm ra từ mã đã phát.

***Câu hỏi 4.3***

Cho sơ đồ kênh trong đó nguồn tín hiệu phát gồm X = (x1, x2). Biết xác suất phát các tín hiệu $p(x_1) = p(x_1) = 0{,}5$.




a. Hãy tính $H(X)$.

b. Hãy tính $p(X = x_n, Y = y_m)$, với $n$=1,2 và $m$=1,2,3 để từ đó tính $H(X,Y)$ dưới dạng hàm số của $\alpha$.

c. Hãy tính $p(Y = y_m)$, với $m$=1,2,3 để từ đó tính $H(Y)$ dưới dạng hàm số của $\alpha$.

d. Hãy tính $I(X,Y)$ dưới dạng hàm số của $\alpha$? Hãy xác định giá trị của α khi I(X,Y) đạt giá trị cực đại và khi I(X,Y) đạt giá trị cực tiểu? Hãy cho biết ý nghĩa trực quan của các kênh ứng với các giá trị cực trị của I(X,Y)?

***Câu hỏi 4.4***

Gọi C là một mã cyclic nhị phân có độ dài từ mã là 15 bit và được tạo ra bởi đa thức sinh $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

a. Hãy chứng tỏ rằng g(x) là một đa thức sinh hợp lệ của một mã cyclic có độ dài từ mã là 15 bit. Tìm đa thức kiểm tra của mã C.

b. Tính số bit thông tin của mã C và số từ mã trong mã C.

c. Tạo ma trận sinh và ma trận kiểm tra cho mã C.

d. Vẽ sơ đồ hệ thống thiết bị thực hiện mã C theo phương pháp chia có dư. Hãy lập bảng phân tích hoạt động của hệ thống thiết bị để tính từ mã ứng với đa thức bản tin $x^9 + x^4 + x^2 + 1$.

***Câu hỏi 4.5***

Một văn bản được viết từ các ký tự từ $x_1 \div x_{14}$, biết tần suất xuất hiện của các ký tự trong văn bản lần lượt là: 1200; 2400; 9600; 2400; 9600; 2400; 1200; 9600; 9600; 38400; 9600; 9600; 9600; 38400 (lần).

a. Hãy thực hiện mã hóa Huffman cho văn bản.

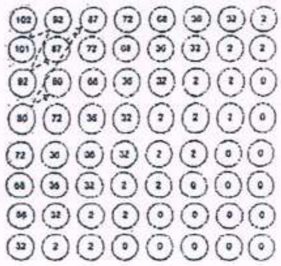
b. Đánh giá hiệu quả của phép mã hóa xây dựng trong câu a.

c. Kiểm tra bất đẳng thức kẹp về độ dài trung bình từ mã. Có nhận xét gì?

d. Hãy tính tỷ số nén thu được khi sử dụng bộ mã xây dựng ở phần a so với khi sử dụng mã ASCII với độ rộng 1 Byte.

***Câu hỏi 4.6***

Giá trị mức xám của một khối (block) ảnh 8 × 8 như trong ma trận sau.




Người ta cần thực hiện nén ảnh này. Một cách đơn giản nhất là áp dụng cách mã hóa các mức xám theo phương pháp mã hóa Huffman

a. Hãy xây dựng bộ mã biểu diễn các giá trị mức xám của ảnh theo phương pháp mã hóa Huffman

b. Đánh giá tính hiệu quả của bộ mã thu được.

c. Giả sử ảnh được quét zig-zag theo đường đứt nét, với dãy bít nhận được như sau 0100110100111010101 … hãy khôi phục lại các giá trị mức xám của góc ảnh ứng với dãy bít đã cho.

d. So với việc mã hóa trực tiếp các giá trị mức xám bằng mã ASCII (độ rộng 1Byte), phương pháp mã hóa Huffman tiết kiệm được bao nhiêu phần trăm dung lượng.

***Câu hỏi 4.7***

Cho mã cyclic (15,7) và đa thức $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$

a. Chứng minh rằng g(x) có thể là đa thức sinh của mã cyclic (15,7).

b. Vẽ sơ đồ tạo mã theo phương pháp chia và giải thích ngắn gọn nguyên lý hoạt động của mạch.

c. Xác định từ mã dạng hệ thống tương ứng với bản tin $m(x) = x^3 + x$ (theo thuật toán)

d. Đa thức $d(x) = x^{14} + x^{12} + x^8 + x + 1$ có phải là một từ mã của bộ mã không? Vì sao?

***Câu hỏi 4.8***

Cho mã cyclic (15,8) và đa thức $g(x) = x^7 + x^6 + x^4 + 1$

a. Chứng minh rằng g(x) có thể là đa thức sinh của mã cyclic (15,8)

b. Vẽ sơ đồ tạo mã theo phương pháp chia và giải thích ngắn gọn nguyên lý hoạt động của mạch.

c. Xác định từ mã dạng hệ thống tương ứng với bản tin $m(x) = x^2 + x$ (theo thuật toán).

d. Đa thức $d(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x + 1$ có phải là một từ mã của bộ mã không? Vì sao?

***Câu hỏi 4.9***

Cho $x^{15} + 1 = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^4)(1+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

a. Tìm mã cyclic (15,3) trên vành $Z_2[x]/x^{15}+1$.

b. Liệt kê 4 từ mã bất kỳ của bộ mã (15,3) trên vành này.

c. Vẽ sơ đồ tạo mã cyclic (15,3) bằng phương pháp chia.

d. Sử dụng thuật toán tìm từ mã đầu ra biết bản tin đầu vào m = 1+x

**1.1** a) lượng tin chứa trong tin $x$ với xác suất $p(x)$ $I = -\log p(x)$
b) $p(x) = \frac{1}{16}$ => lượng tin riêng chứa trong $x$: ~~$I(x) = -\log p(x)$~~ $= 4$ (bit)

**1.2** $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Entropy của nguồn $\alpha$: $H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{6} p(\alpha_i)\log p(\alpha_i)$

$= \frac{1}{16}\log 16 + \frac{1}{8}\log 8 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{4}\log 4$

$= 2,375$ (bit).

**1.3** $(5,2)$ $m_1 m_2 \to c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$.

$c_1 = m_1$ ; $c_2 = m_2$ ; $c_3 = m_2$ ; $c_4 = m_1$ ; $c_5 = m_1 + m_2$

Ta có: $c_{1\times n} = m_{1\times k} G_{k\times n}$ => $c_{1\times 5} = m_{1\times 2}\, G_{2\times 5}$.

$(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5) = (m_1 m_2) . \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} \end{bmatrix}$

=> $c_1 = m_1 g_{11} + m_2 g_{21} = m_1$ => $g_{11} = 1 ; g_{21} = 0$.

$c_2 = m_1 g_{12} + m_2 g_{22} = m_2$ => $g_{12} = 0 ; g_{22} = 1$.

$c_3 = m_1 g_{13} + m_2 g_{23} = m_2$ => $g_{13} = 0 ; g_{23} = 1$

$c_4 = m_1 g_{14} + m_2 g_{24} = m_1$ => $g_{14} = 1 ; g_{24} = 0$.

$c_5 = m_1 g_{15} + m_2 g_{25} = m_1 + m_2$ => $g_{15} = g_{25} = 1$.

=> Ma trận sinh $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có $G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_2 | P]$.

=> Ma trận kiểm tra $H_{3\times 5} = [P^T | I_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**1.4** Ta có: $I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X$

$0 \leq H(X|Y) \leq H(X)$ ; $0 \leq H(Y|X) \leq H(Y)$

$H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X)$

$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$.

$I(X,Y) = I(Y,X)$

$I(X,X) = H(X)$

$0 \leq I(X,Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$.

**1.5** Mã Hamming (7,3). sửa đc 1 lỗi đơn.

Số bit kiểm soát lỗi: $n - k = 7 - 3 = 4$ (bit)

Số bit truyền dữ liệu: $k = 3$ (bit)

1.6 C/m r nếu $g(x)$ là đa thức sinh của 1 mã cyclic $(n, k)$ thì $g_0 =$

Giả sử $g_0 = 0$.

Ta có: $g(x) = g_1 x^1 + g_2 x^2 + \dots + g_{r-1} x^{r-1} + x^r$ ($g_r = 1$ vì $\deg g(x) =$

$= x \cdot (g_1 + g_2 x + \dots + g_{r-1} x^{r-2} + x^{r-1})$.

Đặt $f(x) = g_1 + g_2 x + \dots + g_{r-1} x^{r-2} + x^{r-1} = \frac{g(x)}{x}$.

từ mã tương ứng của $f(x)$ là kết quả của từ mã tương ứng $g(x)$ dịch trái 1 bit. $g(x)$ là đa thức sinh.

=) $f(x)$ là đa thức mã.

Có $f(x)$: $\begin{cases} \deg f(x) = r-1 < \deg g(x) \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$ =) Giả sử sai =) $g_0 = 1$.

Mâu thuẫn với đ/n $g(x)$

C/m $g(x)$ ĐTS =) $g(x)$ deg = 1

$x^n + 1 \vdots g(x)$

$g(x)$ là tích CĐTBKQ =) $g_0 =$

ĐTBKQ $g_0 = 1$ mà $1^n = 1$ =) $g(x) =$

1.7 Nguồn rời rạc A: $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_s \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_s) \end{pmatrix}$

Entropy của nguồn A là lượng thông tin TB chứa trong 1 tin của nguồn A.

$H(A) = M[I(p(a_i))] = -\sum_i p(a_i) \log p(a_i)$.

- $0 \leq H(A) \leq \log s$.

$H(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(a_i) = 1. \\ p(a_j) = 0 \quad \forall j \neq i \end{cases}$

$H(A) = \log s \Leftrightarrow p(a_i) = p(a_j) = \frac{1}{s} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, s\}$.

1.8 Khoảng cách mã: khoảng cách giữa 2 từ mã bất kì $\alpha_i^n$ và $\alpha_j^n$ của 1 mã đều NP là số các dấu mã ≠ nhau tính theo cùng 1 từ mã giữa 2 từ mã.

KH: $d(\alpha_i^n; \alpha_j^n)$

- $0 \leq d(\alpha_i^n; \alpha_j^n) \leq n$
- $d(\alpha_i^n; \alpha_j^n) = 0 \Rightarrow \alpha_i^n = \alpha_j^n$
- $d(\alpha_i^n; \alpha_j^n) + d(\alpha_j^n; \alpha_k^n) \geq d(\alpha_i^n; \alpha_k^n)$.
- Khoảng cách Hamming: $d_0 = \min d(\alpha_i^n; \alpha_j^n) \quad \forall i, j$.

1.9 Trọng số của 1 từ mã: $W(\alpha_i^n)$ là số các dấu mã ≠ 0 (.) từ mã

- $0 \leq W(\alpha_i^n) \leq n$.
- $W(\alpha_i^n + \alpha_j^n) = d(\alpha_i^n; \alpha_j^n)$.

1.10 – Khả năng phát hiện sai: 1 bộ mã đều NP có độ thừa $D > 0$ và khoảng cách Hamming $d_0 \geq 2$ có khả năng phát hiện $t$ lỗi sai.

$t = d_0 - 1$

– Khả năng sửa sai: 1 bộ mã đều NP có độ thừa $D > 0$ và khoảng cách Hamming $d_0 \geq 3$ có khả năng sửa được $t$ lỗi sai với

$t \leq \left[\frac{d_0 - 1}{2}\right]$ ($[x]$: phần nguyên của số $x$)

**1.11** $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ Entropy của nguồn rời rạc nhị phân A

$H(A) = -p(a_1)\log p(a_1) - p(a_2)\log p(a_2)$.

$= -p\log p - (1-p)\log(1-p)$ (bit).

**1.12** $H(A|B)$ : lượng thông tin tổn hao TB của 1 tin của nguồn A khi bên thu nhận được 1 tin của nguồn B.

$H(A|B) = -\sum_i \sum_j \log p(a_i|b_j)\, p(a_i, b_j)$

• T/c: $0 \le H(A|B) \le H(A)$ : $H(A|B) = 0$ Kênh không nhiễu

$H(A|B) = H(A)$ A, B độc lập. Kênh bị đứt.

$H(A|B) \ne H(B|A)$.

**1.13** Lượng thông tin chéo TB là lượng thông tin TB truyền được qua kênh khi thực hiện phát và thu một tin bất kỳ.

$$I(A,B) = \sum_i \sum_j p(a_i, b_j) \log \frac{p(a_i|b_j)}{p(a_i)}.$$

• T/c: $I(A,B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A) = H(A) + H(B) - H(A,B)$

$I(A,B) = I(B,A)$

$I(X,X) = H(X)$.

$0 \le I(A,B) \le \min\{H(A), H(B)\}$.

**1.14** Khả năng thông qua của kênh rời rạc: là lượng thông tin trung bình max truyền qua kênh trong một đơn vị thời gian phụ thuộc vào phân bố của nguồn phát. $C' = v_k \cdot \max_A I(A,B)$. (bit/s).

• $0 \le C' \le v_k \cdot \min\{H(A); H(B)\}$.

$C' = 0 \Leftrightarrow I(A,B) = 0$ : A, B độc lập.

$C'$ max $\Leftrightarrow$ Kênh không nhiễu.

**1.15** Định lý mã hóa thứ nhất của Shannon.

Luôn luôn có thể xây dựng được một phép mã hóa các tin rời rạc có hiệu quả mà $\bar{n}$ có thể nhỏ tuỳ ý nhưng không được nhỏ hơn entropy của nguồn A được xác định bởi đặc tính thống kê của nguồn:

$$\bar{n} \ge H(A).$$

**1.16** Phép mã hóa tối ưu:

– Nó làm cực tiểu giá trị $\bar{n}$ (độ dài TB của từ mã).

– Có khả năng giải mã tức thì: không 1 dãy bit nào trong biểu diễn của 1 tin (ký tự) nào đó lại là phần đầu (prefix) của 1 dãy bit dài hơn biểu diễn cho 1 tin (ký tự khác)

**1.17** Mã cyclic tuyến tính: là một bộ mã tuyến tính có tính chất sau: Nếu $a(x)$ là một từ mã thì dịch vòng của $a(x)$ cũng là một từ mã thuộc bộ mã này.

**1.18** Để tối ưu, $\bar{n}$ min.

$$\left.\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{i=1}^{s} n_i\, p(a_i). \\ \text{mà } n_i &\geq -\log p(a_i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{n} \geq \sum_{i=1}^{s} p(a_i) \cdot \log \frac{1}{p(a_i)} = H(A).$$

$\bar{n}$ min $\Leftrightarrow$ $H(A)$ min.

Các từ mã có độ dài càng nhỏ sẽ đc dùng cho các tin có xác suất xuất hiện càng lớn và ng lại.

$\bar{n}$ nhỏ khi $H(A)$ nhỏ, cần sd các bộ mã không đều.

**1.19** - Mã hóa kênh được sử dụng trong hệ thống truyền tin với mục đích tăng cường tính tin cậy cho việc truyền tin.

- Xd theo nguyên tắc mã hóa kiểm soát lỗi để phía thu có thể sử dụng quy luật để phát hiện và sửa lỗi.
- 1 số loại mã hóa kênh: + Block codes + Hamming codes + Channel coding + Cyclic codes.

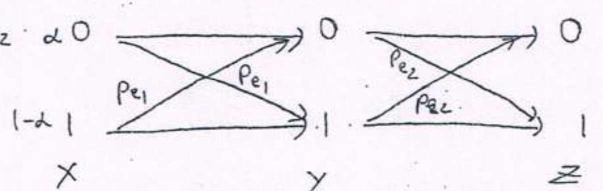
**1.20** (7, 4, 3). Xs thu sai 1 từ mã? $d_0 = 3 \Rightarrow$ Có khả năng sửa 1 lỗi sai.

Xs thu sai 1 dấu mã là $p_0 \Rightarrow$ Xs thu đúng 1 dấu mã là $1 - p_0$.

$\Rightarrow$ Xs thu đúng 1 từ mã là $(1-p_0)^7 + (1-p_0)^6 \cdot p_0 \cdot C_7^1 = (1+6p_0)\cdot(1-p_0)^6$.

$\Rightarrow$ Xs thu sai 1 từ mã: $1 - (1-p_0)^6 \cdot (1+6p_0)$.

**1.21** $p_{e_1}$ ; $p_{e_2}$




Lỗi bit khi truyền qua 2 kênh: X phát 0, Z thu 1.
X phát 1, Z thu 0.

Có các TH: X phát 0, Y nhận 0, Z thu 1. = P(A)
X phát 0, Y nhận 1, Z thu 1. = P(B)
X phát 1, Y nhận 0, Z thu 0 = P(C)
X phát 1, Y nhận 1, Z thu 0. = P(D)

$$\begin{aligned} P(\text{sai}) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D). \\ &= \alpha(1-p_{e_1})\cdot p_{e_2} + \alpha \cdot p_{e_1}(1-p_{e_2}) \\ &\quad + (1-\alpha)\, p_{e_1}(1-p_{e_2}) + (1-\alpha)(1-p_{e_1})p_{e_2} \\ &= (1-p_{e_1})p_{e_2} + p_{e_1}(1-p_{e_2}) = p_{e_1} + p_{e_2} - 2p_{e_1}p_{e_2} \end{aligned}$$

**1.22** $F(x) = \begin{cases} a^{-1} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$

Entropy của bnn X:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \log F(x) dx = \Big[\int_{-\infty}^{0} 0 \log 0 \, dx + \int_{0}^{a} a^{-1} \log a^{-1} dx$$

$$+ \int_{a}^{\infty} 0 \log 0 \, dx\Big] = a^{-1} \log a^{-1} . x \Big|_{a}^{0} = -a . a^{-1} \log a^{-1} = \log a .$$

a) $a = 1 \Rightarrow h(X) = 0$.

b) $a = 4 \Rightarrow h(X) = 2$ (bit)

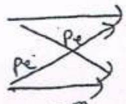
**1.23** $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{2} & p & q \end{pmatrix}$

a) $H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) \log p(x_i) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - p \log p - q \log q .$

b) $H(X) = \frac{1}{2} - p \log p - \left(\frac{1}{2} - p\right) \log \left(\frac{1}{2} - p\right)$

$H(X)$ max $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2} - p \Leftrightarrow p = q = \frac{1}{4}$ .

$\Rightarrow H(X)$ max $= 1,5$ (bit)

**1.24** 

$p_e = 0,01$ .

a) $P_{sai} = C_n^m \cdot p_e^m (1 - p_e)^{n-m}$ .

b) $P = P_2 + P_1 + P_0 = C_{15}^2 p_e^2 (1 - p_e)^{13} + C_{15}^1 p_e^1 (1 - p_e)^{14} + C_{15}^0 p_e^0 (1 - p_e)^{15}$

$= 0,988$.

---

**2.1** $\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 0,01 & 0,24 & 0,05 & 0,2 & 0,47 & 0,01 & 0,02 \end{pmatrix}$

a) $H(\alpha) = -p(a) \log p(a) - p(b) \log p(b) - \dots - p(g) \log p(g)$

$\approx 1,932$ (bit).

b) $I(x_i) = -\log p(x_i)$

$\Rightarrow$ p càng nhỏ, I càng lớn .

Có $p(a) = p(f) = 0,01$ là min $\Rightarrow I(a) = I(f)$ là max $= -\log 0,01$ .

$\approx 6,64$ (bit).

**2.2** $h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx = -\int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} . \log(\lambda e^{-\lambda x}) dx .$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} (\log \lambda + \log e^{-\lambda x}) dx = -\int_{0}^{+\infty} \lambda \log \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log e^{-\lambda x}$$

Ta có: $A = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log \lambda \, dx$

$= \log \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x).$

$= \log \lambda . \lim_{a \to -\infty} \int_0^a e^t dt = \log \lambda . \lim_{a \to -\infty} (e^a - 1) = -\log \lambda .$

$B = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} . \lambda^2 x \log e \, dx.$

$= \lambda^2 \log e \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$

$C = \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-\lambda x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{cases}$

$\Rightarrow C = \left( \frac{-x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx.$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right) \Big|_0^{+\infty}$

$= 0 + \frac{-1}{\lambda^2} \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{e^0} \right) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\Rightarrow B = \lambda^2 \log e . C = \lambda^2 . \log e . \frac{1}{\lambda^2} = \log e.$

$\Rightarrow h(X) = A + B = -\log \lambda + \log e = \log (e/\lambda).$

2.3 $p(X_1) = 1 - p(X_0) = 0,8.$

$P(Y_1 | X_0) = 1 - P(Y_0 | X_0) = 0,3.$

Có $P(Y_0) = P(Y_0 X_1) + P(Y_0 X_0).$

$\Leftrightarrow 0,3 = 0,8 . P(Y_0 | X_1) + 0,2 . 0,7 \Rightarrow P(Y_0 | X_1) = 0,2.$

$\Rightarrow P(Y_2 | X_1) = 1 - P(Y_0 | X_1) = 0,8.$

2.4 $H(X) = 8$ bit.

a) Ánh xạ 1-1 $\Rightarrow H(Y) = H(X) = 8$ bit.

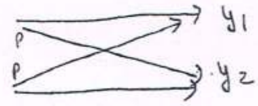
b) $H(Y|X) = H(X|Y) = 0.$

c) $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = 8$ (bit).

d) $H(Y) \downarrow$, $H(X|Y) \uparrow$.

$\Rightarrow H(Y) < 8$ bit ; $H(X|Y) > 0.$

**2.5** $\quad 0{,}25\ x_1 \quad 0{,}75\ x_2 \qquad p = 0{,}01.$




Có $p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = 0{,}99.$

$p(y_1|x_2) = p(y_2|x_1) = 0{,}01.$

$p(x_1y_1) = p(x_1)p(y_1|x_1) = 0{,}25.0{,}99 \ \ldots$

Ta có: $H(X|Y) = -[p(x_1y_1)\log p(x_1|y_1) + p(x_1y_2)\log p(x_1|y_2)$

$+ p(x_2y_1)\log p(x_2|y_1) + p(x_2y_2)\log p(x_2|y_2)]$

$p(x_1y_1) = p(x_1)p(y_1|x_1) = 0{,}25.0{,}99 = p(y_1)p(x_1|y_1).$

mà $p(y_1) = p(x_1y_1) + p(x_2y_1)$

$= 0{,}25.0{,}99 + 0{,}75.0{,}01 = 0{,}255. \Rightarrow p(y_2) = 0{,}745.$

$\Rightarrow p(x_1|y_1) = \frac{33}{34} \Rightarrow p(x_2|y_1) = \frac{1}{34}$

$p(x_1y_2) = p(x_1).p(y_2|x_1) = 0{,}25.0{,}01 = p(y_2).p(x_1|y_2).$

$\Rightarrow p(x_1|y_2) = \frac{0{,}25.0{,}01}{0{,}745} = \frac{1}{298} \Rightarrow p(x_2|y_2) = \frac{297}{298}.$

$\Rightarrow H(X|Y) = -[0{,}2475\log\frac{33}{34} + 0{,}0025\log\frac{1}{298} + 0{,}0075\log\frac{1}{34}$

$+ 0{,}7425\log\frac{297}{298}] \approx 0{,}073$ (bit).

$H(X) = -p(x_1)\log p(x_1) - p(x_2)\log p(x_2)$

$= -0{,}25\log 0{,}25 - 0{,}75\log 0{,}75 = 0{,}811$ (bit)

$\Rightarrow I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 0{,}811 - 0{,}073 \approx 0{,}738$ (bit).

**2.6** Xsuất rút 1 quân bài bất kỳ: $p(x_i) = \frac{1}{52}.$

$\Rightarrow$ Độ bất định của quân bài: $I(x_i) = -\log p(x_i) = \log 52.$

Mỗi lần hỏi kết quả nằm (.) nguồn $A = \begin{pmatrix} \text{đúng} & \text{sai} \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ lgt² TB nhận được mỗi lần hỏi $H(A) = -p\log p - (1-p)\log(1-p).$

$\Rightarrow$ Số lần đo TB $\quad n = \frac{\log 52}{H(A)} \Rightarrow n$ min $\Leftrightarrow H(A)$ max $= \log 2 = 1$ (bit)

$\Rightarrow n_{min} = \left\lceil \frac{\log 52}{1} \right\rceil = 6$ lần.

- Hỏi: 1. Màu đỏ đúng k? Đúng $\Rightarrow$ B đoán đc là rô hoặc cơ.
  2. Rô đúng k? Sai $\Rightarrow$ B đoán đc nằm trong A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K cơ.
  3. Nằm (.) A, 2, 3, 4, 5, 6, 7 cơ đúng không? Đúng $\Rightarrow$ B biết nằm (.) 7 quân bài

4. lẻ đúng 0 ; ? Đúng => B được là 1 trong các quân A, 3, 5, 7 cơ
5. 0 phải quân A hoặc 3 cơ phải k? Đ => B đoán đc là 5 hoặc 7 cơ.
6. 5 cơ đúng 0 ? Đúng => Biết đc quân bài là 5 cơ.

2.7 $A = \begin{pmatrix} \text{trắng} & \text{đen} & \text{đỏ} \\ \frac{10}{20} & \frac{5}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \text{trắng} & \text{đen} & \text{đỏ} \\ \frac{8}{20} & \frac{8}{20} & \frac{4}{20} \end{pmatrix}$

$H(A) = 0,5 \log 2 + 0,25 \log 4 + 0,25 \log 4 = 1,5$ (bit)
$H(B) = 0,4 \log 2,5 + 0,4 \log 2,5 + 0,2 \log 5 \approx 1,52$ (bit)
=> Độ bất định của phép thử lấy ở hộp 2 lớn hơn.

2.8 Xs hỏng 1 khối bất kỳ $p(x_i) = \frac{1}{16}$.
=> Độ bất định về khối hỏng là $I(x_i) = -\log p(x_i) = 4$ (bit).
Sau mỗi lần đo kquả nằm (.) nguồn $A = \begin{pmatrix} \text{có tín hiệu} & \text{0 tín hiệu} \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

=> lg $t^2$ TB nhận đc sau mỗi lần đo: $H(A) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$.
=> Số lần đo TB: $n = \frac{4}{H(A)}$. $n_{min} \Leftrightarrow H(A)_{max} = \log 2$.
=> $n_{min} = 4$ (lần).
• Thử: - Đo khối 1 → 8. Có tín hiệu => Khối hỏng ∈ khối 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
- Đo khối 9 → 12. 0 có tín hiệu => Khối hỏng là 1 (.) 4 khối.
- Đo khối 9, 10. Có tín hiệu => Khối hỏng là khối 11 hoặc 12.
- Đo khối 11. Có tín hiệu => Khối hỏng là khối 12.

2.9 a) Nhược điểm của mã Huffman khi sd để nén dữ liệu.
- Tập các từ mã tối ưu không là duy nhất.
- Bên nhận muốn giải mã thì phải có bảng mã giống bên gửi
=> Khi nén các tập tin bé hệ số nén 0 cao.
b) $\bar{n}_{c_1} = n_{c_1}(a).p(a) + n_{c_1}(b)p(b) + n_{c_1}(c)p(c) + n_{c_1}(d)p(d)$
$= 4.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + 4.\frac{1}{8} = 4$ (dấu).
$\bar{n}_{c_2} = n_{c_2}(a)p(a) + n_{c_2}(b)p(b) + n_{c_2}(c)p(c) + n_{c_2}(d)p(d)$
$= 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{8} + 3.\frac{1}{8} = 1,75$ (dấu).

2.10 Xs chai nc mắm nhiễm KL là $p(x_i) = 1/8$.
=> Độ bất định về chai nc mắm là: $I(x_i) = -\log p(x_i) = 3$ (bit).
Sau mỗi lần ptích kquả nằm (.) nguồn $A = \begin{pmatrix} \text{chứa} & \text{0 chứa} \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

=> lg $t^2$ TB nhận đc sau mỗi lần ptích $H(A) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$
=> Số lần đo TB: $n = \frac{3}{H(A)}$ $n_{min} \Leftrightarrow H(A)_{max} = \log 2 \Rightarrow n_{min} = 3$

Lần 1: Ptích nc mắm trộn 4 chai 1,2,3,4.

0 chứa ⇒ Chai 5,6,7,8 có 1 chai chứa.

Lần 2: Ptích nc mắm trộn 2 chai 5,6.

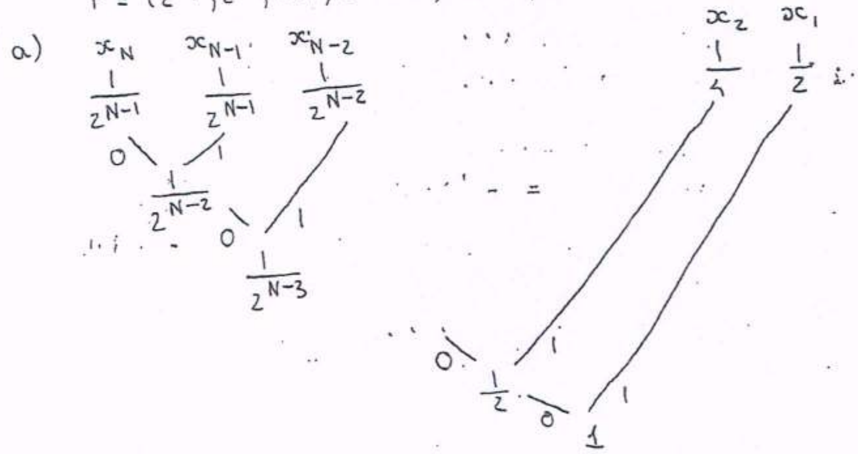
0 chứa ⇒ Chai 7 hoặc 8 chứa.

Lần 3: Ptích nc mắm chai 7. Chứa. Vậy chai 7 chứa KL nặng.

2.11. $X = (x_1; x_2; \dots; x_{N-2}; x_{N-1}; x_N)$ $N \geq 3$.

$P = (2^{-1}; 2^{-2}; \dots; 2^{-(N-2)}; 2^{-(N-1)}; 2^{-(N-1)})$.

a)




⇒ Mã hóa Huffman:

| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{N-2}$ | $x_{N-1}$ | $x_N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 01 | | $\underbrace{00\dots01}_{n=N-2}$ | $\underbrace{00\dots01}_{n=N-1}$ | $\underbrace{00\dots0}_{n=N}$ |

Đánh giá hiệu quả:

$\bar{n} = \sum_{i=1}^{N} p(x_i)\, x_N = \frac{1}{2^1}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \dots \frac{N-2}{2^{N-2}} + \frac{N-1}{2^{N-1}} + \frac{N-1}{2^{N-1}}$.

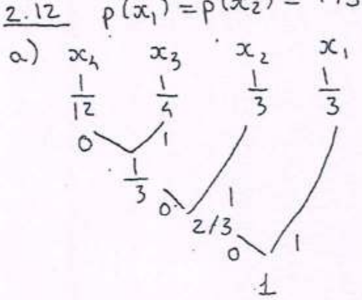
$H(A) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log p(x_i) = \frac{1}{2^1}\log 2^1 + \frac{1}{2^2}\log 2^2 + \dots + \frac{1}{2^{N-2}}\log 2^{N-2}$

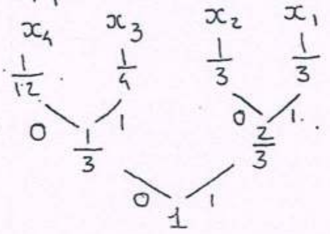
$+ \frac{1}{2^{N-1}}\log 2^{N-1} + \frac{1}{2^{N-1}}\log 2^{N-1} = \frac{1}{2^1}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \dots + \frac{N-2}{2^{N-2}} + \frac{N-1}{2^{N-1}} + \frac{N-1}{2^{N-1}}$.

⇒ $H(A) = \bar{n}$ ⇒ Phép mã hóa trên tối ưu.

2.12 $p(x_1) = p(x_2) = 1/3$; $p(x_3) = 1/4$; $p(x_4) = 1/12$.

a)



b) $\bar{n}_1 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{12}\cdot 3 = 2$ (dấu)

$H_1 = \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{12}\log 12 = 1{,}855$ (bit).

$\Rightarrow \eta_1 = \frac{H_1}{\bar{n}_1} \approx 0{,}9275$.

$\bar{n}_2 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 2 = 2$ (dấu).

$H_2 = H_1 \Rightarrow \eta_2 = \frac{H_2}{\bar{n}_2} = \eta_1 \Rightarrow$ 2 mã Huffman hiệu quả như nhau.

2.13 Gọi sự kiện xuất hiện sinh viên là X : $P(X) = 0{,}01$.
sự kiện xuất hiện nam thanh niên là Y $P(Y) = 0{,}32$.

Có $P(Y|X) = 0{,}5$.

Lg t² chứa trong tin khi biết đó là nam sinh viên:

$$I(X|Y) = -\log p(X|Y) = -\log \frac{P(Y|X).P(X)}{P(Y)}$$

$$= -\log \frac{0{,}5.0{,}01}{0{,}32} = \log 64 = 6 \text{ (bit)}.$$

2.14 Bình gồm 2 bi đen, 3 bi trắng.

$A = \begin{pmatrix} \text{Lần 1 tr} & \text{Lần 2 đen} \\ \frac{3}{5} & \cdot \frac{2}{4} \end{pmatrix}$ HOẶC $\begin{pmatrix} \text{Lần 1 đen} & \text{Lần 2 đen} \\ \frac{2}{5} & \cdot \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

$P(A) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = 0{,}4 \Rightarrow I(A) = -\log p(A) = \log 2{,}5 \approx 1{,}322$ (bit).

2.15 Xs 1 đồng xu bất kỳ nhẹ hơn $p(x_i) = \frac{1}{27}$.

$\Rightarrow$ Độ bất định về đồng xu nhẹ hơn $I(x_i) = -\log p(x_i) = \log 27$.

Mỗi lần đo kquả nằm ở nguồn $A = \begin{pmatrix} \text{2 đĩa cân =} & \text{Đĩa phải nặng} & \text{Trái nặng} \\ p & q & 1-p-q \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Lg t² TB nhận đc sau mỗi lần cân:

$H(A) = -p\log p - q\log q - (1-p-q)\log(1-p-q)$.

$\Rightarrow$ Số lần cân TB: $n = \frac{\log 27}{H(A)}$ $n_{min} \Leftrightarrow H(A)_{max} = \log 3$.

$\Rightarrow n_{min} = 3$.

. Thuật toán:

Lần 1: Chia 27 thành 3 phần. Cân 2 phần. Đĩa cân = nhau thì lấy phần còn lại đi cân lần 2. Đĩa cân lệch thì lấy 9 đồng nhẹ đi cân lần 2.

Lần 2: Chia 9 đồng thành 3 phần. Tương tự lần 1.

Lần 3: Còn 3 đồng. Cân 2 đồng. Cân = nhau vậy đồng xu nhẹ hơn là đồng xu còn lại. 2 đĩa cân lệch vậy bên đĩa nhẹ hơn là đồng xu nhẹ hơn.

**2.16** $G_{3\times6} = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1 \end{bmatrix} = [I_3 \mid P]$.

$\Rightarrow H_{3\times6} = [P^T \mid I_3] = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&0&0&1 \end{bmatrix}$.

b) Khoảng cách Hamming cho bộ mã:

Cột 1, 2, 4 là tổ hợp phụ thuộc tuyến tính.

$\Rightarrow d_0 = 3$.

**2.17** (7,4) $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

a) $h(x) = \dfrac{x^7+1}{x^3+x^2+1} = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

$\Rightarrow h^*(x) = 1 + x + x^2 + x^4$.

$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} h^*(x) \\ x.h^*(x) \\ x^2.h^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x+x^2+x^4 \\ x+x^2+x^3+x^5 \\ x^2+x^3+x^4+x^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix}$

Có cột 1, 3, 4 phụ $\in$ tuyến tính.
cột 2, 5, 6, 7 phụ $\in$ tuyến tính. $\Rightarrow d_0 = 3$.

$\Rightarrow$ Khả năng phát hiện $t = d_0 - 1 = 2$ lỗi sai.

Khả năng sửa: $\left[\dfrac{d_0-1}{2}\right] = 1$ lỗi sai.

b) Đầu vào $m = 1111$. Ta có: $m(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

Nâng bậc $m(x)$: $m(x).x^3 = x^6 + x^5 + x^4 + x^3$.

Ta lại có:

$$\begin{array}{l|l} x^6 + x^5 + x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + 1 \\ \underline{x^6 + x^5 + x^3} & \overline{x^3 + x + 1} \\ \quad x^4 & \\ \quad \underline{x^4 + x^3 + x} & \\ \quad\quad x^3 + x & \\ \quad\quad \underline{x^3 + x^2 + 1} & \\ \quad\quad x^2 + x + 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow r(x) = 1 + x + x^2$

$\Rightarrow c(x) = m(x).x^3 + r(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

$\leftrightarrow 1111111$.

**2.18** 8 mức sáng $\Rightarrow$ 1 điểm ảnh cần 3 bit.

$\Rightarrow$ 1 ảnh cần $3.5.10^5$ bit.

$\Rightarrow C' = 3.5.10^5.v = 3.5.25.10^5$ bit/s.

Ta lại có $\dfrac{tin}{tạp} = \dfrac{P}{P_n} = 15$

mà $C' = F\log\left(1 + \dfrac{P}{P_n}\right) \Rightarrow F = \dfrac{3.5.25.10^5}{\log 16} = 9375000$ (Hz).

**2.19** $W = 3400\,Hz = F$.

a) $SNR = 10\log_{10}(S/N) = 30\,dB$.

$\Rightarrow S/N = 10^3$.

$\Rightarrow C' = F\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right) = 33888{,}6$ (bit/s).

b) SNR min?

Ta có: $C' = F\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right) \geqslant 4800$ bps.

$\Rightarrow \log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right) \geqslant \dfrac{4800}{3400} = \dfrac{24}{17}$.

$\Rightarrow 1+\dfrac{S}{N} \geqslant 2^{24/17} \Rightarrow \dfrac{S}{N} \geqslant 2^{24/17}-1$.

$\Rightarrow SNR \geqslant 10\log_{10}(2^{24/17}-1) \approx 2{,}203\,dB$.

**2.20**
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$G_{3\times 13} \Rightarrow n = 13;\ k = 3 \Rightarrow n-k = 10. \Rightarrow H_{10\times 13}$.

Ta có $G = [\,P \mid I_3\,] \Rightarrow H = [\,I_{10} \mid P^T\,]$.

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Có cột 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11 phụ $\in$ tuyến tính. $\Rightarrow d_0 = 7$.

**2.21** $(8,5)$ $\mathbb{Z}_2[x]/x^8+1$.

$n = 8;\ k = 5 \Rightarrow n-k = 3 = r \Rightarrow r-1 = 2$

Chọn $g(x)$ có $\deg g(x) = 3$ và là đa thức đối ngẫu, $(x^8+1) \vdots g(x)$

$\Rightarrow g(x) = x^3+x^2+x+1$.

$\Rightarrow h(x) = x^5+x^4+x+1 \Rightarrow h^*(x) = 1+x+x^4+x^5$.

$$H = \begin{bmatrix} h^*(x) \\ x\,h^*(x) \\ x^2 h^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x+x^4+x^5 \\ x+x^2+x^5+x^6 \\ x^2+x^3+x^6+x^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cột 2 và cột 5 phụ $\in$ tuyến tính $\Rightarrow d_0 = 2$.

**2.22.** a) Là mã cyclic.

b) 0 Là mã cyclic.

c) $\emptyset$/($\emptyset$ TM / ~~g(x), x g(x), x^3 g(x)~~) Là

d) 0 Là. Đa thức sinh $g(x) = (x+1)^2$.

**2.23** $(7,4)$ $g(x) = 1 + x + x^3$.

Ta có: $G = \begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ x^2 g(x) \\ x^3 g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x + x^3 \\ x + x^2 + x^4 \\ x^2 + x^3 + x^5 \\ x^3 + x^4 + x^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1 \end{bmatrix}$

Đa thức ktra: $h(x) = \dfrac{x^7+1}{x^3+x+1} = x^4 + x^2 + x + 1$.

$\Rightarrow h^*(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

$H = \begin{bmatrix} h^*(x) \\ x.h^*(x) \\ x^2 h^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x^2 + x^3 + x^4 \\ x + x^3 + x^4 + x^5 \\ x^2 + x^4 + x^5 + x^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1&1 \end{bmatrix}$

---

$(7,4)$ $g(x) = 1 + x + x^3$.

Ta có: $\ell = 1,2,3,4 \Rightarrow x^{n-\ell} = x^6, x^5, x^4, x^3$.

Có: $x^6 \bmod g(x) = x^2 + 1$

$x^5 \bmod g(x) = x^2 + x + 1$

$x^4 \bmod g(x) = x^2 + x$.

$x^3 \bmod g(x) = x + 1$

$\Rightarrow G_{ht} = \begin{bmatrix} x^6 + R_1(x) \\ x^5 + R_2(x) \\ x^4 + R_3(x) \\ x^3 + R_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow H_{ht} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$

**2.24** $(15,8)$ $g(x) = x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

Có $\ell = 1,2,3,4,5,6,7,8 \Rightarrow x^{n-\ell} = x^{14}; x^{13}; x^{12}; \ldots; x^7$.

Có: $x^{14} \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^6 + x^5 + x^3$.

$x^{13} \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^5 + x^4 + x^2$.

$x^{12} \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^4 + x^3 + x$.

$x^{11} \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^3 + x^2 + 1$

$x^{10} \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x$.

$x^9 \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$.

$x^8 \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x + 1$.

$x^7 \bmod (x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^6 + x^4 + 1$.

$$\Rightarrow G_{ht} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_{ht} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

**2.25** $(5,2)$ $\quad G = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&1 \end{bmatrix}$

a) Ta có: $c = aG$.

$a_1 = 00 \Rightarrow c_1 = 00000$

$a_2 = 01 \Rightarrow c_2 = 01011$.

$a_3 = 10 \Rightarrow c_3 = 10101$

$a_4 = 11 \Rightarrow c_4 = 11110$.

b) Có $d(c_1,c_2) = 3$. $\quad d(c_2,c_3) = 4$.

$d(c_1,c_3) = 3 \quad d(c_2,c_4) = 3$

$d(c_1,c_4) = 4 \quad d(c_3,c_4) = 3$

$\Rightarrow d_0 = \min = 3$.

$\Rightarrow$ Khả năng phát hiện $t = d_0 - 1 = 2$ lỗi.

Khả năng sửa $\left[\frac{d_0 - 1}{2}\right] = 1$ lỗi.

**2.26** $x^7 + 1 = (x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$.

| STT | $g(x)$ | Mã $(n,k)$ | $d_0$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $1+x$ | $(7,6)$ | 2 |
| 2 | $1+x+x^3$ | $(7,4)$ | 3 |
| 3 | $1+x^2+x^3$ | $(7,4)$ | 3 |
| 4 | $(1+x)(1+x+x^3)$ | $(7,3)$ | 4 |
| 5 | $(1+x)(1+x^2+x^3)$ | $(7,3)$ | 4 |
| 6 | $(1+x+x^3)(1+x^2+x^3)$ | $(7,1)$ | 7 |
| 7 | 1 | $(7,7)$ | 1 |

**2.27** $x^{15}+1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$

Số các đa thức bất khả quy là $5 = I$.

$\Rightarrow$ Số các mã cyclic $|I| = 2^I - 1 = 31$.

$n = 15 = 2^m - 1 \Rightarrow m = 4$. Trong 16 đa thức bậc 4 chỉ có 3 đa thức bất khả quy.

**2.28** $(7,4,3)$ $g(x) = 1+x+x^3$.

$v(x) = x^6+x^5+x^4+x^3 \leftrightarrow 0001111$.

Ta có:

$$x^6+x^5+x^4+x^3 : (x^3+x+1) = x^3+x^2+1$$

$$\begin{array}{l} x^6+x^5+x^4+x^3 \\ \underline{x^6+x^4+x^3} \\ x^5 \\ \underline{x^5+x^3+x^2} \\ x^3+x^2 \\ \underline{x^3+x+1} \\ x^2+x+1 \end{array}$$

$\Rightarrow r_0(x) = x^2+x+1 \Rightarrow w(r_0(x)) = 3 > t = 1$

- $i=1$ : $v(x).x = x^7+x^6+x^5+x^4$.

$$x^7+x^6+x^5+x^4 : (x^3+x+1) = x^4+x^3+x+1$$

$$\begin{array}{l} x^7+x^6+x^5+x^4 \\ \underline{x^7+x^5+x^4} \\ x^6 \\ \underline{x^6+x^4+x^3} \\ x^4+x^3 \\ \underline{x^4+x^2+x} \\ x^3+x^2+x \\ \underline{x^3+x+1} \\ x^2+1 \end{array}$$

$\Rightarrow r_1(x) = x^2+1 \Rightarrow w(r_1(x)) = 2 > t$.

- $i=2$ : $v(x).x^2 = x^8+x^7+x^6+x^5$.

$$x^8+x^7+x^6+x^5 : (x^3+x+1) = x^5+x^4+x^2+x+1$$

$$\begin{array}{l} x^8+x^7+x^6+x^5 \\ \underline{x^8+x^6+x^5} \\ x^7 \\ \underline{x^7+x^5+x^4} \\ x^5+x^4 \\ \underline{x^5+x^3+x^2} \\ x^4+x^3+x^2 \\ \underline{x^4+x^2+x} \\ x^3+x \\ \underline{x^3+x+1} \\ 1 \end{array}$$

$\Rightarrow r_2(x) = 1 \Rightarrow w(r_2(x)) = 1 = t$

Từ mã ước lg $v'(x) = \dfrac{c(x).x^2+1}{x^2} = x^6+x^5+x^4+x^3+x^5$
$= x^6+x^4+x^3.$

Vậy sai ở vị trí $x^5$ đã đc sửa.

Ktra

$$\begin{array}{r|l} x^6+x^4+x^3 & x^3+x+1 \\ \cline{2-2} x^6+x^4+x^3 & x^3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2.29 a) Ta có: $\deg(g) = r = n-k = 8 \Rightarrow k+8 = n > 8.$

$r_i = \dfrac{k}{n} = \dfrac{n-8}{n} = 1 - \dfrac{8}{n}$   $r_i$ min $\Leftrightarrow$ $n$ min.

• $n = 9$

Ta có $(x^9+1) \bmod (x^8+x^6+x^4+x^2+1) = x^7+x^5+x^3+x+1.$

$\Rightarrow (x^9+1) \not\vdots\, g(x) \Rightarrow n = 9$ ⁰ TM.

• $n = 10$

Ta có $(x^{10}+1) \bmod (x^8+x^6+x^4+x^2+1) = 0$

$\Rightarrow (x^{10}+1) \vdots\, g(x)$ TM.

Vậy $n = 10$, $k = 2$.

Mã cyclic cần tìm là $(10,2)$ vs $g(x) = x^8+x^6+x^4+x^2+1.$

b) $G = \begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1010101010 \\ 0101010101 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$

Cột 1, 3, 5, 7, 9 phụ $\in$ tuyến tính $\Rightarrow d_0 = 5.$

2.30 a) C/m r $g(x) = x+1$ là đa thức c sinh của mã cyclic bất kỳ vs $n$

Ta có: $x^n+1 = (x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots x+1)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (x^n+1) \vdots (x+1),\ \deg g(x) = 1 < n \\ (x+1) \text{ là 1 đa thức monic} \end{array}\right\} \Rightarrow$ đpcm.

Có: $\deg g(x) = n-k \Rightarrow k = n - \deg g(x) = n-1.$

b) $n = 3 \Rightarrow k = 2.$   $l = 1, 2$ khi đó $x^{n-l} = x^2, x$.   $x^2 \bmod (g(x)) = 1$
$x \bmod (g(x)) = 1$

$G_{ht} = \begin{bmatrix} x^2+1 \\ x+1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow H_{ht} = [1\ 1\ 1].$

3.1 a) $d_0 = 8$.

=) Khả năng phát hiện $t = d_0 - 1 = 7$ lỗi sai.

Khả năng sửa $t \leq \left[\frac{d_0 - 1}{2}\right] = 3$ lỗi sai.

b) $d_0 = 5$ ; $k = 2$ =) Giới hạn Griesmer: $n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d_0}{2^i} \right\rceil = \left\lceil \frac{d_0}{2^0} \right\rceil + \left\lceil \frac{d_0}{2} \right\rceil$.

=) $n_{min} = \left\lceil \frac{5}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 8$ (dấu).

c) ∃ mã khối tuyến tính $n = 15$; $k = 7$; $d_{min} = 5$ ⊘?

Giới hạn Griesmer: $n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d_0}{2^i} \right\rceil$.

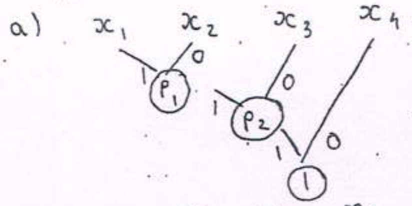
=) $15 \geq \left\lceil \frac{5}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{16} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{32} \right\rceil + \left\lceil \frac{5}{64} \right\rceil$.

$= 5 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$. (TM)

=) Vậy có ∃ mã tuyến tính (15; 7; 5).

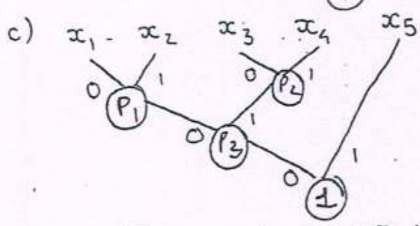
3.2 b) 2 từ mã có độ dài ngắn nhất = 2 là 00 và 10.
Khác nhau ở dấu mã đầu tiên =) Vô lý =) ⊘ phải bộ mã Huffman.

a)



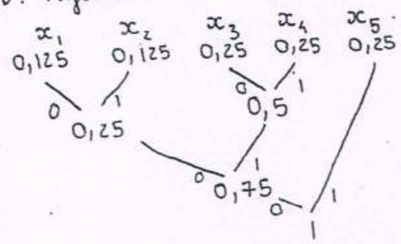

Bộ mã
0, 10, 111, 110.
⊘ phải: 0, 10, 111, 101.
=) ⊘ phải mã Huffman.

c)




=) Bộ mã
1, 000, 001, 010, 011
là mã Huffman.

VD: Nguồn tin $A = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ và xs ℓ³ 0,125; 0,125; 0,25; 0,25; 0,




=) Mã hóa Huffman

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 000 | 001 | 010 | 011 | 1 |

b) Có lẽ từ mã dài nhất
=) Vô lý.

3.3 $G_{3\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= [I_3 \mid P]$

$\Rightarrow H_{4\times 7} = [P^T \mid I_4]$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Có cột 1, 4, 5, 6 phụ thuộc tuyến tính. $\Rightarrow d_0 = 4$.

c) $m = 110$.

Ta có: $c = mG$.

$\Rightarrow (c_1; c_2; c_3; c_4; c_5; c_6; c_7) = (1; 1; 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c_1 = 1.1 + 1.0 + 0.0 = 1.$ $\quad c_4 = 1 \quad c_6 = 0$

$c_2 = 1 \quad c_5 = 0 \quad c_7 = 1.$

$c_3 = 0$

$\Rightarrow (c_1; c_2; c_3; c_4; c_5; c_6; c_7) = (1; 1; 0; 1; 0; 0; 1).$

3.4 $C(7;3)$ $g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

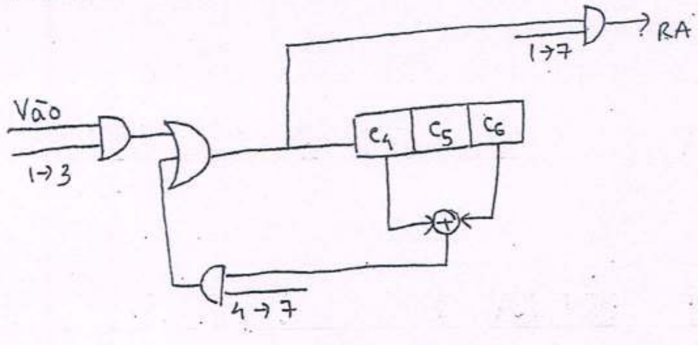
a) Ta có: $h(x) = \dfrac{x^7+1}{x^4+x^3+x^2+1} = x^3 + x^2 + 1.$ $\Rightarrow h_0 = h_3 = 1.$

$h_1 = 0$

$h_2 = 1.$

$\Rightarrow c_{4-i} = c_{7-i} + c_{5-i}$ $(1 \le i \le 4)$.

• Sơ đồ mã hóa $= p^2$ nhân:



b) $m = 111. \Rightarrow m_0 = 1;\ m_1 = 1;\ m_2 = 1.$
Có: $c_6 = m_2 = 1;\ c_5 = m_1 = 1;\ c_4 = m_0 = 1.$
Ta có: $c_{4-i} = c_{7-i} + c_{5-i} \quad (1 \leq i \leq 4).$

$\Rightarrow c_3 = c_6 + c_4 = 0.$

$c_2 = c_5 + c_3 = 1 \qquad \Rightarrow c = (0;0;1;0;1;1;1)$

$c_1 = c_4 + c_2 = 0.$

$c_0 = c_3 + c_1 = 0.$

| Xung nhịp | Vào | Trạng thái ô nhớ | | | Ra |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 ↑ |

$\Rightarrow c = (0,0,1,0,1,1,1).$

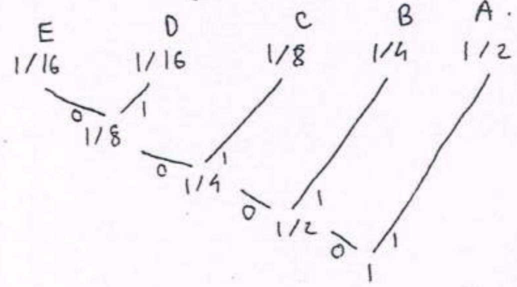
3.5 a) $H(\alpha) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{8}\log 8 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{1}{16}\log 16$

$= 1{,}875$ (bit).

b) $P(DADED) = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{131072}.$

$\Rightarrow I(DADED) = -\log p(DADED) = \log(131072) = 17$ (bit).

c)



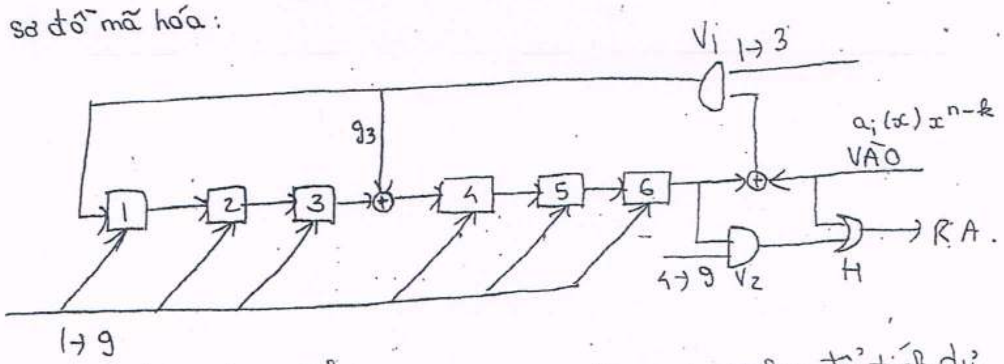

→ Mã hóa Huffman:

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 01 | 001 | 0001 | 0000 |

3.6 (9, 3) $g(x) = 1 + x^3 + x^6$.

$n = 9; k = 3 \Rightarrow r = 6$ ; $g_0 = g_3 = g_6 = 1$.

sơ đồ mã hóa:




b) Mô tả hoạt động của mạch:

- 3 nhịp đầu: Mạch AND $V_1$ mở, $V_2$ đóng, thiết bị ~ 1 bộ chia để tính dư. Kết thúc nhịp thứ 3, toàn bộ phần dư nằm trong 6 ô nhớ. Các dấu $t^2$ $a(x).x^{n-k}$ được đưa qua mạch OR H.
- 6 nhịp sau: Đưa ra các dấu ktra (phần dư). Mạch $V_1$ đóng, tbị ~ 1 thanh ghi dịch nối tiếp, Mạch $V_2$ mở, các dấu ktra lần được đưa ra từ bậc cao → bậc thấp. Kết thúc nhịp thứ 9, toàn bộ từ mã được đưa ra.

• $a = 101$

| Xung nhịp | Vào | Tᶻ ô nhớ 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Ra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$\Rightarrow c(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1 \leftrightarrow 101101101$.

Kiểm tra lại $a(x).x^6 = x^8 + x^6$.

$$\begin{array}{r|l} x^8 + x^6 & x^6 + x^3 + 1 \\ \cline{2-2} x^8 + x^5 + x^2 & x^2 + 1 \\ \hline x^6 + x^5 + x^2 & \\ x^6 + x^3 + 1 & \\ \hline x^5 + x^3 + x^2 + 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow c(x) = a(x).x^6 + r(x)$
$= x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$.
(Đúng)

3.7 (8,4)

$c = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$.

$a_1 \to a_4$ mang $t^2$; dấu ktra $a_5 \to a_8$

$a_5 = a_1 + a_2 + a_3$.

$a_6 = a_2 + a_3 + a_4$.

$a_7 = a_1 + a_2 + a_4$.

$a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Ta có: $a_1 a_2 a_3 a_4 \to a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$.

$$c = (a_1 a_2 a_3 a_4) . G = (a_1 a_2 a_3 a_4) \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{18} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{28} \\ g_{31} & g_{32} & \dots & g_{38} \\ g_{41} & g_{42} & \dots & g_{48} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_1 = a_1 g_{11} + a_2 g_{21} + a_3 g_{31} + a_4 g_{41} = a_1 \Rightarrow g_{11} = 1$.

$g_{21} = g_{31} = g_{41} = 0$.

$\left.\begin{array}{l} a_8 = a_1 g_{18} + a_2 g_{28} + a_3 g_{38} + a_4 g_{48} \\ = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array}\right\} \Rightarrow g_{18} = g_{28} = g_{38} = g_{48} =$

$$\Rightarrow \text{Ma trận sinh: } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I_4 | P].$$

$$\Rightarrow \text{Mtrận ktra } H = [P^T | I_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

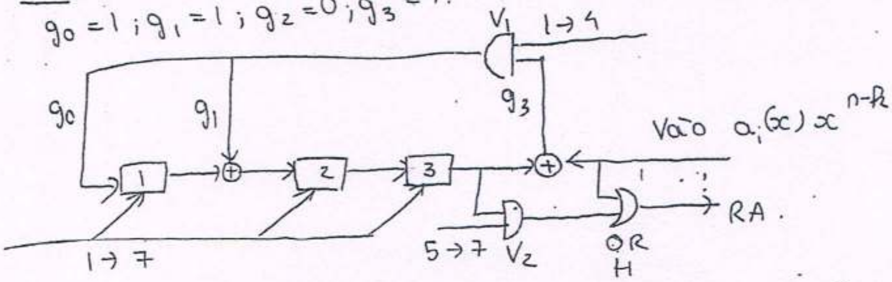
b) C/m $d_0 = 3$.

0 có 1,2 cột nào phụ ∈ tuyến tính $\Rightarrow d_0 > 2$.

Có cột 1,2,6 phụ ∈ tuyến tính $\Rightarrow d_{min} = d_0 = 3$.

3.8 (7,4) $g(x) = 1 + x + x^3$ $p^2$ chia.

$g_0 = 1; g_1 = 1; g_2 = 0; g_3 = 1$.



$a(x) = 1 + x^2 + x^3$.

| Xung nhịp | Vào | 1 | 2 | 3 | Ra |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$\Rightarrow c(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1 \Leftrightarrow 1101001$

Ta có $a(x).x^3 = x^6 + x^5 + x^3$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 + x^5 + x^3 & x^3 + x + 1 \\
\underline{x^6 + x^4 + x^3} & \overline{x^3 + x^2 + x + 1} \\
x^5 + x^4 & \\
\underline{x^5 + x^3 + x^2} & \\
x^4 + x^3 + x^2 & \\
\underline{x^4 + x^2 + x} & \\
x^3 + x & \\
\underline{x^3 + x + 1} & \\
1 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow r(x) = 1 \Rightarrow c(x) = a(x).x^3 + r(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$.

<u>3.9</u> $(7,3)$ $g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

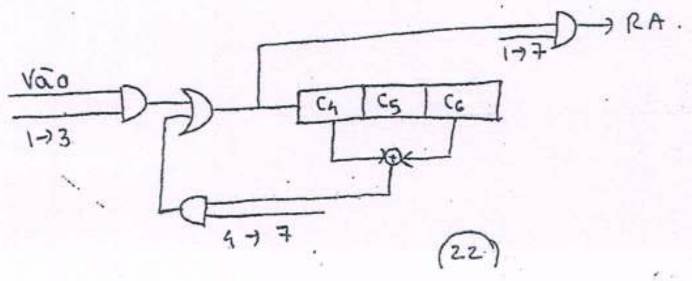
Ta có $h(x) = \dfrac{x^7 + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + 1} = x^3 + x^2 + 1$.

$\Rightarrow h_0 = h_2 = h_3 = 1$ ; $h_1 = 0$.

Ta có: $c_{4-i} = \sum_{j=0}^{2} h_j c_{7-i-j}$

$= h_0 c_{7-i} + h_1 c_{6-i} + h_2 c_{5-i}$

$= c_{7-i} + c_{5-i}$ $(1 \le i \le 4)$.



$a(x) = 1 + x^2 \Rightarrow a_0 = a_2 = 1;\ a_1 = 0.$

Có: $c_6 = a_2 = 1$ ; $c_5 = a_1 = 0$ ; $c_4 = a_0 = 1.$

$\Rightarrow c_3 = c_6 + c_4 = 0.$

$c_2 = c_5 + c_3 = 0.$

$c_1 = c_4 + c_2 = 1$

$c_0 = c_3 + c_1 = 1.$

$\Rightarrow c = (1;1;0;0;1;0;1).$

| Xung nhịp | Vào | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | Ra |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | | | | |

$\Rightarrow c = (1;1;0;0;1;0;1).$

3.10 a) $C(6,2)$ $\mathbb{Z}_2[x]/x^6+1.$

$g(x)$ là đa thức sinh của mã cyclic $(6;2)$

$\Rightarrow \deg g(x) = 6 - 2 = 4.$

Ta có: $(x^6+1) = (x+1)^2.(x^2+x+1)^2.$

$\Rightarrow$ Chọn $g(x) = (x^2+x+1)^2 = x^4 + x^2 + 1.$

b) $\ell = 1,2$ với $x^{n-\ell} = x^5; x^4.$

Có $x^5 \bmod (x^4+x^2+1) = x^3 + x.$

$x^4 \bmod (x^4+x^2+1) = x^2+1$

$\Rightarrow G_{ht} = \begin{bmatrix} x^5 + R_1(x) \\ x^4 + R_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{bmatrix}.$

\+ $\overline{a_0 = 00}$. $\Rightarrow a_0(x) = 0 \Rightarrow x^4.a_0(x) = 0.$

$\Rightarrow x^4.a_0(x) \bmod g(x) = 0.$

$\Rightarrow c_0(x) = 0 \Rightarrow c_0 = 000000.$

\+ $a_1 = 01 \Rightarrow a_1(x) = x^4.\ a_1(x) = x^5.$

$\Rightarrow a_1(x)x^4 \bmod g(x) = x^3 + x.$

$\Rightarrow c_1(x) = x^5 + x^3 + x \Rightarrow c_1 = 010101.$

\+ $a_2 = 10 \Rightarrow a_2(x) = 1 \Rightarrow a_2(x).x^4 = x^4.$

$\Rightarrow a_2(x).x^4 \bmod g(x) = x^2+1$

$\Rightarrow c_2(x) = x^4 + x^2 + 1 \Rightarrow c_2 = 101010.$

$+a_3 = 11. \Rightarrow a_3(x) = x+1 \Rightarrow a_3(x).\,x^4 = x^5 + x^4.$

Ta có: $(x^5+x^4) \bmod g(x) = x^3+x^2+x+1$

$\Rightarrow a_3(x)\,x^4 + r(x) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

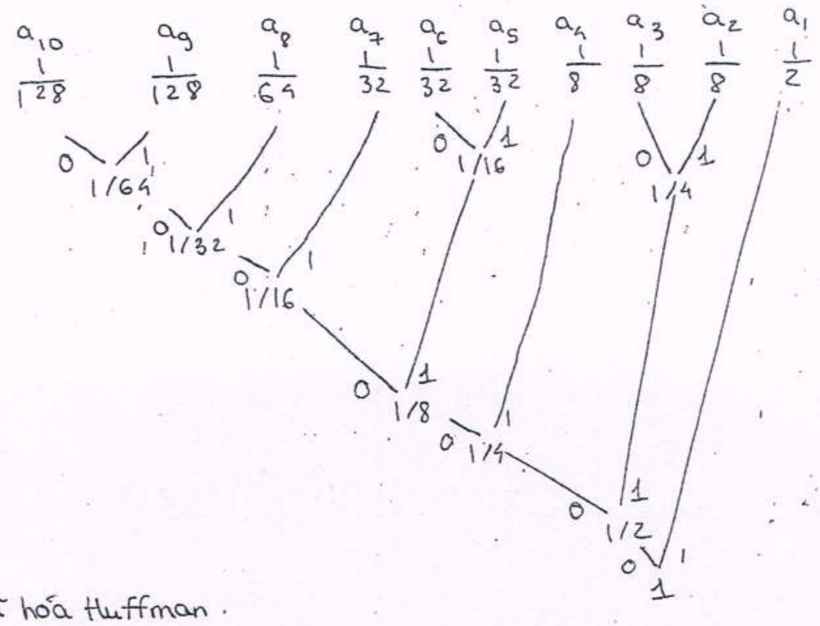
$\Rightarrow c_3 = 111111.$

c) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ cột 1, 3, 5 phụ thuộc tuyến tính.

$\Rightarrow d_0 = 3.$

$\Rightarrow$ có thể sửa $\left[\frac{d_0-1}{2}\right] = 1$ lỗi.

3.11



$\Rightarrow$ Mã hóa Huffman.

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10}.$

1 011 010 001 00010 000001 0000000

00011 00001 0000001

$\Rightarrow \bar{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{128} + \frac{7}{128}.$

$= 147/64 = 2{,}296875$ (dấu).

$H(A) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{8}\log 8 \times 3 + \frac{3}{32}\log 32 + \frac{1}{64}\log 64 + \frac{2}{128}\log 128.$

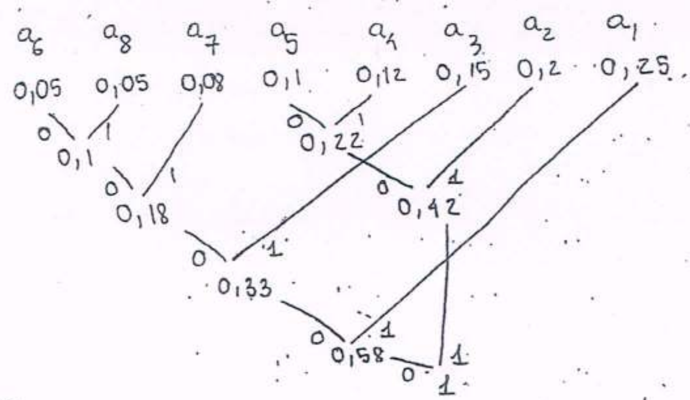
$= 2{,}296875$ (bit)

$\Rightarrow \frac{H(A)}{\bar{n}} = 1 \quad \Rightarrow$ Mã hóa tối ưu.

Giải mã: 1011100111 01.01 ...

$a_1.\ a_2 \quad a_4 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_3 \quad a_1$

**3.12**




Mã hóa Huffman:

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | 11 | 001 | 101 | 100 | 00000 | 0001 | 00001 |

$\Rightarrow \bar{n} = 2.0,25 + 2.0,2 + 3.0,15 + 3.0,12 + 3.0,1 + 5.0,05 + 4.0,08 + 5.0,0$

$= 2,83$ (dấu).

$H(A) = 0,25 \log 4 + 0,2 \log 5 + 0,15 \log \frac{1}{0,15} + 0,12 \log \frac{1}{0,12}$

$+ 0,1 \log 10 + 0,08 \log \frac{1}{0,08} + 0,05 \log \frac{1}{0,05} + 0,05 \log \frac{1}{0,05}$

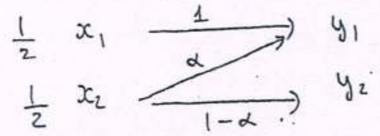
$\approx 2,798$ (bit)

$\Rightarrow \frac{H(A)}{\bar{n}} \approx 0,99.$ $\Rightarrow$ Mã hóa gần tối ưu.

Giải mã: 11 | 001 | 11 | 01 | 01 | 0001 | 11 ...

$a_2$ $a_3$ $a_2$ $a_1$ $a_1$ $a_7$ $a_2$ ...

**3.13**




a) Ta có $H(X) = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = 1$ (bit).

$p(y_1) = p(y_1 x_1) + p(y_1 x_2) = p(x_1) p(y_1|x_1) + p(x_2) p(y_1|x_2)$

$= \frac{1}{2} . 1 + \frac{1}{2} . \alpha = \frac{\alpha+1}{2}.$

$\Rightarrow p(y_2) = \frac{1-\alpha}{2}.$

$\Rightarrow H(Y) = \frac{1+\alpha}{2} \log \frac{2}{1+\alpha} + \frac{1-\alpha}{2} \log \frac{2}{1-\alpha}.$

Ta có: $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$.

mà $H(Y|X) = -[P(x_1 y_1) \log p(y_1|x_1) + p(x_2 y_1) \log p(y_1|x_2)$

$+ p(x_1 y_2) \log p(y_2|x_1) + p(x_2 y_2) \log p(y_2|x_2)]$

$$= -\left[\frac{1}{2}.1\log 1 + \frac{1}{2}\alpha\log\alpha + 0 + \frac{1}{2}(1-\alpha)\log(1-\alpha)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\alpha\log\alpha + \frac{1}{2}(1-\alpha)\log(1-\alpha)\right).$$

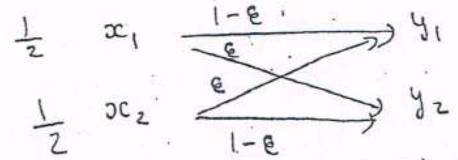
b) $H(Y)\max = \log 2 = 1$ bit

$\Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{2} = \frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 0.$

$\Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = 1$ bit.

$\Rightarrow I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 1.$

3.14.




a) $H(X) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = 1$ (bit).

$p(y_1) = p(y_1 x_1) + p(y_1 x_2) = p(x_1)p(y_1|x_1) + p(x_2)p(y_1|x_2)$

$= \frac{1}{2}(1-\varepsilon) + \frac{1}{2}.\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow p(y_2) = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow H(Y) = 1$ bit.

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X).$

Ta có:

$H(Y|X) = -[p(x_1 y_1)\log p(y_1|x_1) + p(x_1 y_2)\log p(y_2|x_1) + p(x_2 y_1)\log p(y_1|x_2)$

$+ p(x_2 y_2)\log p(y_2|x_2)].$

$= -\left[\frac{1-\varepsilon}{2}\log(1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\log\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\log\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2}\log(1-\varepsilon)\right]$

$= -[(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \varepsilon\log\varepsilon].$

$\Rightarrow H(X,Y) = -[(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \varepsilon\log\varepsilon] + 1.$

$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$= \varepsilon\log\varepsilon + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + 1.$

b) $\varepsilon$ để dung lg kênh max, min?

$C = \max_{X} I(X,Y).$

$C\max \Leftrightarrow I(X,Y)\max \Leftrightarrow H(Y|X)\min = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varepsilon = 1\\ \varepsilon = 0\end{array}\right.$

$C\min \Leftrightarrow I(X,Y)\min \Leftrightarrow H(Y|X)\max \Leftrightarrow \varepsilon = 1/2.$

3.15 $f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-n^2/2\sigma_n^2}$.

a) $h(N) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(n)\log f(n)\,dn = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(n)\left[\log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} + \log e^{-n^2/2\sigma_n^2}\right]dn$

$= \log\sqrt{2\pi\sigma_n^2} + \frac{\log e}{2\sigma_n^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(n)\,n^2\,dn$.

$= \log\sqrt{2\pi\sigma_n^2} + \frac{\log e}{2\sigma_n^2}.\sigma_n^2$ (CT xstk) $= \log\sqrt{2\pi e\sigma_n^2}$.

b) $I(X,Y) = ?$

Có: $I(X,Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(Y) - h(N)$

$= \frac{1}{2}\log\frac{2\pi e\sigma_y^2}{2\pi e\sigma_n^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_n}\right)^2$.

3.16 $p(x_1) = \frac{1}{2}$; $p(x_2) = \frac{1}{4}$; $p(x_3) = p(x_4) = \frac{1}{8}$.

$\Rightarrow H(X) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{2}{8}\log 8 = 1,75$ (bit).

$p(y_1) = \frac{1}{4}$; $p(y_2) = \frac{1}{4} = p(y_3) = p(y_4)$.

$H(Y) = 4.\frac{1}{4}\log 4 = 2$ (bit).

Có $p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i y_j)}{p(y_j)}$

$\Rightarrow H(X|Y) = -\Big[\frac{1}{8}\log\frac{1/8}{1/4} + \frac{1}{16}\log\frac{1/16}{1/4} + \frac{1}{16}\log\frac{1/16}{1/4} + \frac{1}{4}\log\frac{1/4}{1/4}$

$+ \frac{1}{16}\log\frac{1/16}{1/4} + \frac{1}{8}\log\frac{1/8}{1/4} + \frac{1}{16}\log\frac{1/16}{1/4} + 0 + \frac{1}{32}\log\frac{1/32}{1/4} + \frac{1}{32}\log\frac{1/}{1/}$

$+ \frac{1}{16}\log\frac{1/16}{1/4} + 0 + \frac{1}{32}\log\frac{1/32}{1/4} + \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}:\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}\log\frac{1/16}{1/4} + 0\Big]$

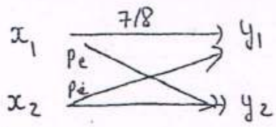
$= \frac{1}{4} + \frac{6}{16}.2 + \frac{4}{32}.3 = 1,375$ (bit).

Ta có: $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) = H(X) + H(Y|X)$

$\Rightarrow H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) - H(X) = 2 + 1,375 - 1,75 = 1,625$ (bit).

$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 0,375$ (bit).

**3.17** 3/4 $x_1$ … $y_1$; 1/4 $x_2$ … $y_2$




a) $I(x_2|y_2) = -\log p(x_2|y_2)$

Ta có: $p(x_2|y_2).p(y_2) = p(x_2).p(y_2|x_2) = p(y_2x_2)$.

mà $p(y_2) = p(y_2x_1) + p(y_2x_2)$

$$= \frac{3}{4}.\frac{1}{8} + \frac{1}{4}.\frac{7}{8} = \frac{10}{32}$$

$\Rightarrow p(x_2|y_2) = \dfrac{7/32}{10/32} = 0{,}7$.

$\Rightarrow I(x_2|y_2) = -\log 0{,}7 \approx 0{,}515$ (bit).

b) $I(x_2;y_2) = I(x_2) - I(x_2|y_2)$

$$= -\log 0{,}25 + \log 0{,}7 \approx 1{,}485 \text{ (bit)}.$$

c) $H(X|y_1) = -p(x_1|y_1)\log p(x_1|y_1) - p(x_2|y_1)\log p(x_2|y_1)$.

Có $p(x_1;y_1) = p(x_1).p(y_1|x_1) = \frac{3}{4}.\frac{7}{8} = 21/32$.

$p(x_2;y_1) = p(x_2)\,p(y_1|x_2) = \frac{1}{4}.\frac{1}{8} = 1/32$.

Ta có: $p(x_1|y_1) = \dfrac{p(x_1;y_1)}{p(y_1)} = \dfrac{21/32}{22/32} = \dfrac{21}{22}$.

$\Rightarrow p(x_2|y_1) = 1/22$.

$\Rightarrow H(X|y_1) = -\frac{21}{22}\log\frac{21}{22} - \frac{1}{22}\log\frac{1}{22} \approx 0{,}267$ (bit).

$H(X) = \frac{3}{4}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\log 4 \approx 0{,}811$ (bit)

$H(X,Y) = -\frac{21}{32}\log\frac{21}{32} - \frac{3}{32}\log\frac{3}{32} - \frac{7}{32}\log\frac{7}{32} - \frac{1}{32}\log\frac{1}{32}$

$\approx 1{,}355$ (bit).

Có $p(x_1;y_2) = p(x_1)\,p(y_2|x_1) = \frac{3}{4}.\frac{1}{8} = \frac{3}{32}$

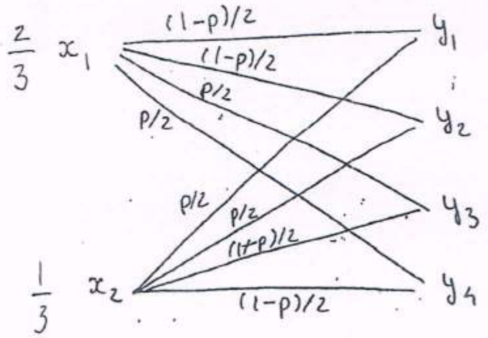
$\Rightarrow p(x_1|y_2) = \dfrac{3/32}{10/32} = 0{,}3$. $\Rightarrow p(x_2|y_2) = 0{,}7$.

$\Rightarrow H(X|Y) = -\frac{21}{32}\log\frac{21}{22} - \frac{1}{32}\log\frac{1}{22} - \frac{3}{32}\log 0{,}3 - \frac{7}{32}\log 0{,}7$.

$\approx 0{,}459$ (bit)

$\Rightarrow I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) \approx 0{,}811 - 0{,}459 \approx 0{,}352$ (bit)

3.18




$H(X) = -\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} \approx 0{,}918$ (bit).

$p(y_1) = p(y_1 x_1) + p(y_1 x_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{(1-p)}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{2} = \frac{2-p}{6}$.

$p(y_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{(1-p)}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{2} = \frac{2-p}{6}$.

$p(y_3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{p}{2} + \frac{1}{3}\frac{(1-p)}{2} = \frac{1+p}{6} \Rightarrow p(y_4) = \frac{1+p}{6}$.

$\Rightarrow H(Y) = -\frac{(2-p)}{3}\log\frac{(2-p)}{6} - \frac{(1+p)}{3}\log\frac{(1+p)}{6}$.

$H(X,Y) = -\frac{(1-p)}{3}\log\frac{(1-p)}{3}\times 2 - \frac{p}{3}\log\frac{p}{3}\times 2 - \frac{p}{6}\log\frac{p}{6}\times 2$

$-\frac{(1-p)}{6}\cdot 2\cdot\log\frac{(1-p)}{6}$.

Có $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$.

$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$

$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$.

3.19 Giống hình 3.18 $p(x_1) = p_0 \Rightarrow p(x_2) = 1 - p_0$.

$p(x_1 y_1) = \frac{p_0(1-p)}{2}$ $\qquad p(x_2 y_1) = p(x_2 y_2) = \frac{(1-p_0)p}{2}$.

$p(x_1 y_2) = \frac{p_0(1-p)}{2}$. $\qquad p(x_2 y_3) = p(x_2 y_4) = \frac{(1-p_0)(1-p)}{2}$

$p(x_1 y_3) = p(x_1 y_4) = \frac{p_0 p}{2}$

Có $H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} p(x_i; y_j)\log p(y_j|x_i)$

$= -\Big[\frac{p_0(1-p)}{2}\log\frac{(1-p)}{2} + \frac{p_0(1-p)}{2}\log\frac{(1-p)}{2} + \frac{p_0 p}{2}\log\frac{p}{2}\times 2$

$+ \frac{(1-p_0)p}{2}\cdot 2\log\frac{p}{2} + \frac{(1-p_0)(1-p)}{2}\times 2\log\frac{1-p}{2}\Big]$

$= -\left[(1-p)\log\frac{(1-p)}{2} + p\log\frac{p}{2}\right]$

$\Rightarrow H(Y|X)$ ⊘ phụ ∈ $X \Rightarrow \max_X I(X,Y) \Leftrightarrow H(Y)$ max

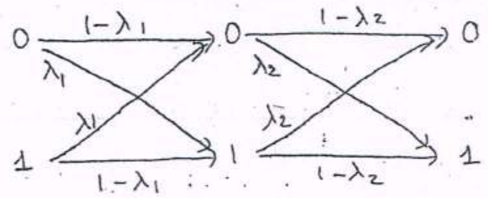
Có: $H(Y)\max = \log 4 = 2$ (bit)

$\Leftrightarrow p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = p(y_4) = \frac{1}{4}$.

Xảy ra khi $p(x_1) = p(x_2) = 1/2$.

$\Rightarrow C = 2 + \left[(1-p)\log\frac{1-p}{2} + (p)\log\frac{p}{2}\right]$.

3.20




a) $X \to Y$ $\quad p(x_1) = p$ ; $p(x_2) = 1-p$.

Có $C' = v_k . C = v_k \max_X I(X,Y) = v_k \max_X (H(Y) - H(Y|X))$.

Có: $p(x_1 y_1) = p(1-\lambda_1)$ $\quad p(x_2 y_1) = (1-p)\lambda_1$

$p(x_1 y_2) = p\lambda_1$ $\quad p(x_2 y_2) = (1-p)(1-\lambda_1)$.

$H(Y|X) = -[p(1-\lambda_1)\log(1-\lambda_1) + p\lambda_1\log\lambda_1 + (1-p)\lambda_1\log\lambda_1$

$+ (1-p)(1-\lambda_1)\log(1-\lambda_1)]$.

$= -[(1-\lambda_1)\log(1-\lambda_1) + \lambda_1\log\lambda_1]$.

$\Rightarrow H(Y|X)$ o phụ $\in X$.

$I(X,Y)\max_X \Leftrightarrow H(Y)\max = \log 2 = 1 \Leftrightarrow p = 1/2$.

$\Rightarrow I(X,Y)\max_X = 1 + \lambda_1\log\lambda_1 + (1-\lambda_1)\log(1-\lambda_1)$

$\Rightarrow C'_1 = v_k . C = v_k [1 + \lambda_1\log\lambda_1 + (1-\lambda_1)\log(1-\lambda_1)]$.

b) $Y \to Z$ $\quad p(y_1) = q$ ; $p(y_2) = 1-q$.

Có $C'_2 = v_k . C_2 = v_k \max_Y I(Y,Z) = v_k \max_Y (H(Z) - H(Z|Y))$.

Có $p(y_1 z_1) = q(1-\lambda_2)$ $\quad p(y_2 z_1) = (1-q)\lambda_2$

$p(y_1 z_2) = q\lambda_2$ $\quad p(y_2 z_2) = (1-q)(1-\lambda_2)$.

$\Rightarrow H(Z|Y) = -[q(1-\lambda_2)\log(1-\lambda_2) + q\lambda_2\log\lambda_2 + (1-q)\lambda_2\log\lambda_2$

$+(1-q)(1-\lambda_2)\log(1-\lambda_2)] = -[(1-\lambda_2)\log(1-\lambda_2) + \lambda_2\log\lambda_2]$

$\Rightarrow H(Z|Y)$ o phụ thuộc $Y$.

$I(Y,Z)\max_Y \Leftrightarrow H(Z)\max = \log 2 = 1 \Leftrightarrow q = 1/2$.

$\Rightarrow I(Y,Z)\max_Y = 1 + (1-\lambda_2)\log(1-\lambda_2) + \lambda_2\log\lambda_2$.

$\Rightarrow C'_2 = v_k . C_2 = v_k [1 + (1-\lambda_2)\log(1-\lambda_2) + \lambda_2\log\lambda_2]$

c) $X \to Z$ $\quad p(x_1) = p \; ; \; p(x_2) = 1-p$.

Có $p(z_1|x_1) = p(z_1|y_1)p(y_1|x_1) + p(z_1|y_2)p(y_2|x_1)$.

$$= (1-\lambda_2)(1-\lambda_1) + \lambda_2\lambda_1$$
$$= (1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2.$$

$\Rightarrow p(z_2|x_1) = \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2$.

$$p(z_1|x_2) = p(z_1|y_1)p(y_1|x_2) + p(z_1|y_2)p(y_2|x_2)$$
$$= (1-\lambda_2)\lambda_1 + \lambda_2(1-\lambda_1).$$
$$= \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2.$$

$\Rightarrow p(z_2|x_2) = 1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2$.

$H(Z|X) = -(1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2).p\log(1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2)$
$-(\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2).p\log(\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2) - (\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2)(1-p)$.
$\log(\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2) - (-\lambda_1-\lambda_2+1+2\lambda_1\lambda_2)(1-p)\log(1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2)$

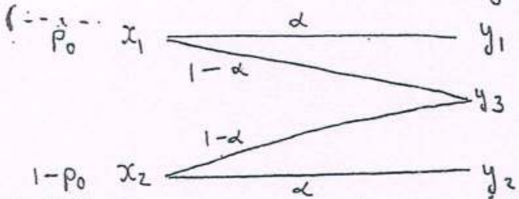
$= -\left[(1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2)\log(1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2) + (\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2)\log(\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2)\right]$

$\Rightarrow H(Z|X)$ ⊘ phụ ∈ $X$.

$I(X,Z)\max_X \Leftrightarrow H(Z)\max_X = \log 2 = 1$

$\Rightarrow C'_3 = v_k.C_3 = v_k.\left[1 + (1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2)\log(1-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2)\right.$
$\left.+ (\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2)\log(\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_1\lambda_2)\right]$.

3.21




a) Đg lg kênh $C = \max_X I(X,Y) = \max_X \{H(Y) - H(Y|X)\}$.

Có $H(Y|X) = -\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i;y_j)\log p(y_j|x_i)\right]$

$= -\left[p_0\alpha\log\alpha + p_0(1-\alpha)\log(1-\alpha) + (1-p_0)(1-\alpha)\log(1-\alpha)\right.$
$\left.+ (1-p_0)\alpha\log\alpha\right] = -\left[\alpha\log\alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)\right]$

$\Rightarrow H(Y|X)$ ⊘ phụ ∈ $X$.

$\Rightarrow I(X,Y)\max_X \Leftrightarrow H(Y)\max_X$.

Có $p(y_1) = p(y_1x_1) = p_0\alpha$.

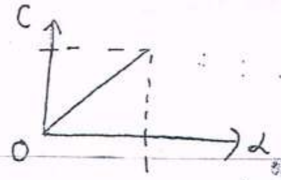
$p(y_3) = p(y_3x_1) + p(y_3x_2) = p_0(1-\alpha) + (1-p_0)(1-\alpha) = 1-\alpha$.

$p(y_2) = (1-p_0)\alpha$.

mà $p(y_3)$ ⊘ phụ ∈ $X \Rightarrow p(y_1) = p(y_2) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow p_0 = 1/2$.

$\Rightarrow H(Y) = -\left[\frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log(1-\alpha) + \frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2}\right]$

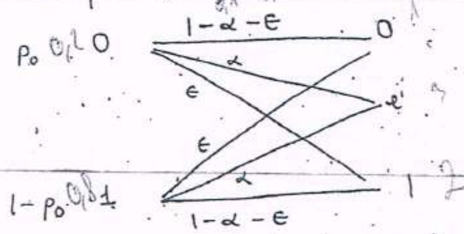
$$\Rightarrow C = \max_X I(X,Y) = -\left[\alpha \log \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log(1-\alpha)\right]$$
$$+ \left[\alpha \log \alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha)\right]$$
$$= \alpha\left(\log \alpha - \log \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha.$$

b) 

$C = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ Kênh hỏng.

$C = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ Kênh không nhiễu.

**3.22**




a) $H(Y|X) = -\left[p_0(1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon) + p_0\alpha\log\alpha + p_0\epsilon\log\epsilon\right.$
$\left. + (1-p_0)\epsilon\log\epsilon + (1-p_0)\alpha\log\alpha + (1-p_0)(1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon)\right]$

$= -\left[(1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon) + \alpha\log\alpha + \epsilon\log\epsilon\right]$

$\Rightarrow H(Y|X)$ o phụ $\in X$.

$\max_X I(X;Y) \Leftrightarrow H(Y)$ max.

Ta có: $p(y_1) = p_0(1-\alpha-\epsilon) + (1-p_0)\epsilon$ ; $p(y_3) = (1-p_0)(1-\alpha-\epsilon) + p_0\epsilon$.

$p(y_2) = \alpha$ o phụ $\in X$.

$\Rightarrow p(y_1) = p(y_3) = \frac{1-\alpha}{2}$.

$\Rightarrow H(Y) = -\left[(1-\alpha)\log\frac{1-\alpha}{2} + \alpha\log\alpha\right]$

$\Rightarrow C = -(1-\alpha)\log\frac{1-\alpha}{2} + (1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon) + \epsilon\log\epsilon$.

b) $\alpha = 0$.

$\Rightarrow C = -\log\frac{1}{2} + (1-\epsilon)\log(1-\epsilon) + \epsilon\log\epsilon$

$= \epsilon\log\epsilon + (1-\epsilon)\log(1-\epsilon) + 1$ (bit/1 lần sd kênh).

4.1 (7, 3) $g(x) = 1 + x + x^2 + x^4$.

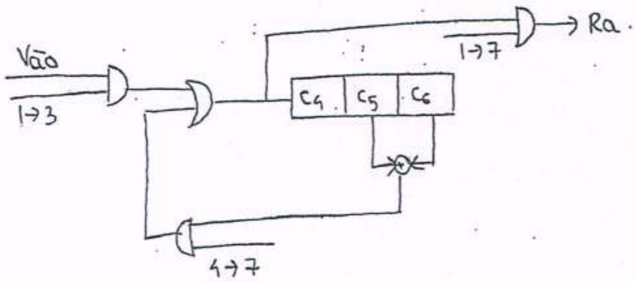
$\Rightarrow h(x) = \dfrac{x^7+1}{x^4+x^2+x+1} = x^3 + x + 1$.

$\Rightarrow h_0 = h_3 = 1$ ; $h_1 = 1$ ; $h_2 = 0$.

Ta có: $c_{4-j} = h_0 c_{7-j} + h_1 c_{6-j} + h_2 c_{5-j}$ $(1 \leq j \leq 4)$.

$= c_{7-j} + c_{6-j}$..

Sơ đồ mã hóa:




b) Sửa đc bao nhiêu sai?

$h(x) = x^3 + x + 1 \Rightarrow h^*(x) = 1 + x^2 + x^3$.

$$H = \begin{bmatrix} h^*(x) \\ x h^*(x) \\ x^2 h^*(x) \\ x^3 h^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cột 1, 2, 4, 7 phụ ∈ tuyến tính

$\Rightarrow d_0 = 4$.

$\Rightarrow$ Sửa đc $\left[\frac{4-1}{2}\right] = 1$ lỗi.

c) Phát đi 0011101 $\Rightarrow$ Thu đc 0011111.

$c(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

Có $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2) \bmod (x^4 + x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x$.

$\Rightarrow w[r_0(x)] = 3 > 1$.

• $i = 1$

Có $c(x).x \bmod g(x) = x^3 + x + 1 \Rightarrow w[r_1(x)] = 3 > 1$

• $i = 2$ : $(c(x).x^2) \bmod g(x) = 1 \Rightarrow w[r_2(x)] = 1 = \left[\frac{4-1}{2}\right]$.

$\Rightarrow$ từ mã ước lg $c'(x) = c(x) + \dfrac{r_2(x)}{x^2} = x^2 + x^3 + x^4 + x^6$.

Vậy sai ở vị trí $x^5$ đã được sửa.

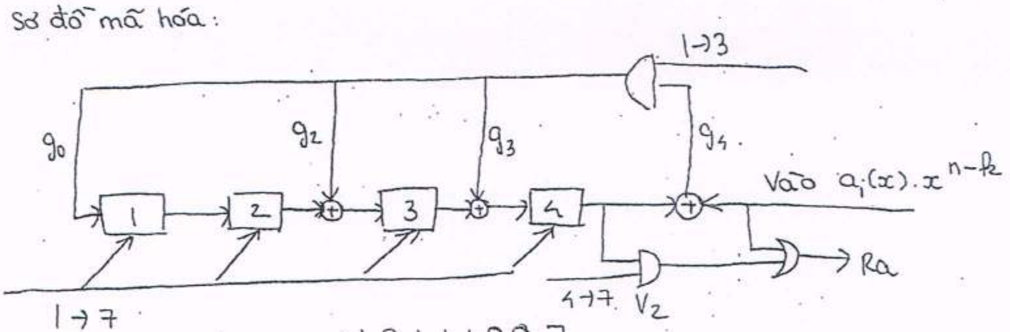
Kiểm tra:

$$\begin{array}{r|l} x^6 + x^4 + x^3 + x^2 & x^4 + x^2 + x + 1 \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3 + x^2} & \overline{x^2} \\ 0 & \end{array}$$

4.2 $(7,3)$ $g(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

$r = 4$; $g_0 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$; $g_1 = 0$.

Sơ đồ mã hóa:




b) $G = \begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ x^2g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1&1 \end{bmatrix}$

$h(x) = \dfrac{x^7+1}{x^4+x^3+x^2+1} = x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow h^*(x) = 1 + x + x^3$.

$H(x) = \begin{bmatrix} h^*(x) \\ xh^*(x) \\ x^2h^*(x) \\ x^3h^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1 \end{bmatrix}$ Cột 1, 4, 6, 7 phụ ∈ tuyến tính $\Rightarrow d_0 = 4$.

c) Gọi dạng của từ mã phía thu nhận được: $c_0\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6$.

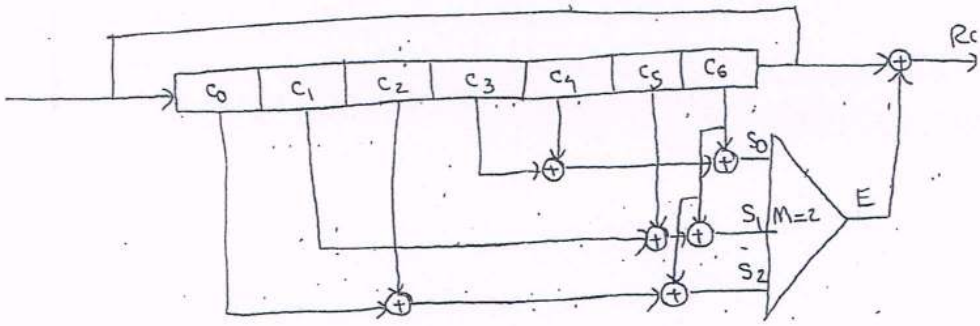
Ta có $c.H^T = (c_0\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6) \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} = S$.

$\Rightarrow S = (c_0 + c_1 + c_3;\ c_1 + c_2 + c_4;\ c_2 + c_3 + c_5;\ c_3 + c_4 + c_6)$.

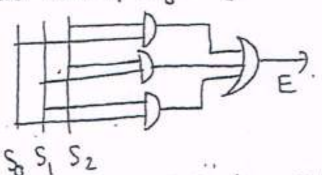
Chọn hệ tổng kt trực giao với $c_3$: $\begin{cases} S_0 = c_0 + c_1 + c_3 \\ S_1 = c_2 + c_3 + c_5 \\ S_2 = c_3 + c_4 + c_6 \end{cases}$

Ta có hệ tkt trực giao với $c_6$: $\begin{cases} S_0 = c_3 + c_4 + c_6 \\ S_1 = c_5 + c_6 + c_1 \\ S_2 = c_6 + c_0 + c_2 \end{cases}$

Sơ đồ thiết bị giải mã:




Sơ đồ thiết bị ngưỡng:




$E = S_0 S_1 + S_1 S_2 + S_2 S_0$

Giải mã từ mã nhận đc: $c(x) = x^2 + x^4 + x^6 \leftrightarrow 0010101$.

| Nhịp | $c_0$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ | E | Ra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | |

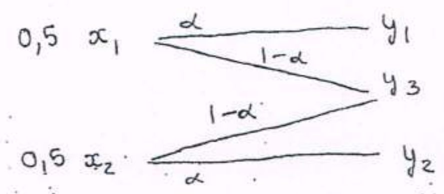
$\Rightarrow c(x) = x^2 + x^4 + x^5 + x^6 \leftrightarrow 0010111$.

Vị trí $x^5$ sai đã đc sửa.

Kiểm tra lại:

$$\begin{array}{r|l} x^6 + x^5 + x^4 + x^2 & x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ \cline{2-2} x^6 + x^5 + x^4 + x^2 & x^2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

4.3




a) $H(X) = 0{,}5 \log 2 + 0{,}5 \log 2 = 1$ (bit).

b) $p(x_1 y_1) = 0{,}5\alpha$. $\quad p(x_2 y_3) = 0{,}5(1-\alpha)$

$p(x_1 y_3) = 0{,}5(1-\alpha) \quad p(x_2 y_2) = 0{,}5\alpha$.

$H(X,Y) = -\left[0{,}5\alpha \log 0{,}5\alpha + [0{,}5(1-\alpha)] \log[0{,}5(1-\alpha)]\right.$

$\left. + 0{,}5(1-\alpha)\log[0{,}5(1-\alpha)] + 0{,}5\alpha \log 0{,}5\alpha\right]$

$= -\left[\alpha \log \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log \frac{1-\alpha}{2}\right]$.

c) $p(y_1) = p(y_1 x_1) = 0{,}5\alpha$.

$p(y_3) = p(y_3 x_1) + p(y_3 x_2) = 0{,}5(1-\alpha) + 0{,}5(1-\alpha) = 1-\alpha$.

$p(y_2) = p(y_2 x_2) = 0{,}5\alpha$.

$\Rightarrow H(Y) = -\left[\frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log(1-\alpha) + \frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2}\right]$

$= -\left[\alpha \log \frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log(1-\alpha)\right]$.

d) $I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$= 1 - \left[\alpha \log\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log(1-\alpha)\right] + \left[\alpha\log\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\log\frac{1-\alpha}{2}\right]$

$= 1 + (1-\alpha)\left[\log\frac{1-\alpha}{2} - \log(1-\alpha)\right] = \alpha$.

$I(X,Y)$ max $\Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$ Kênh không nhiễu.

$I(X,Y)$ min $\Leftrightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ Kênh đứt.

4.4 $n = 15$ $\quad g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

a) Có

$$\begin{array}{l|l}
x^{15}+1 & x^5+x^3+x+1 \\ \hline
x^{15}+x^{13}+x^{11}+x^{10} & x^{10}+x^8+x^5+x^4+x^2+x+1 \\ \cline{1-1}
x^{13}+x^{11}+x^{10}+1 & \\
x^{13}+x^{11}+x^9+x^8 & \\ \cline{1-1}
x^{10}+x^9+x^8+1 & \\
x^{10}+x^8+x^6+x^5 & \\ \cline{1-1}
x^9+x^6+x^5+1 & \\
x^9+x^7+x^5+x^4 & \\ \cline{1-1}
x^7+x^6+x^4+1 & \\
x^7+x^5+x^3+x^2 & \\ \cline{1-1}
x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1 &
\end{array}$$

$\Rightarrow x^{15}+1 \,\vdots\, g(x)$

$\deg g(x) = 5 < 14$.

$\Rightarrow g(x)$ là đa thức sinh.

$h(x) = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$.

b) Số bit t²: $k = 15 - \deg g(x) = 10$.

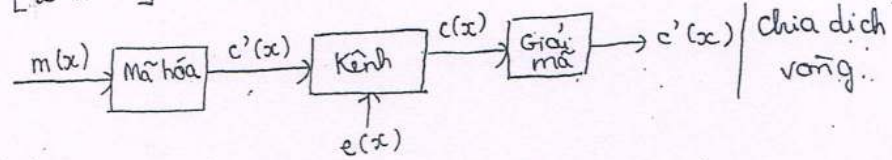
=) Số từ mã trong $C'(15;10)$ là $2^{10}$ từ mã.

c) $$G = \begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ x^2g(x) \\ x^3g(x) \\ x^4g(x) \\ x^5g(x) \\ x^6g(x) \\ x^7g(x) \\ x^8g(x) \\ x^9g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

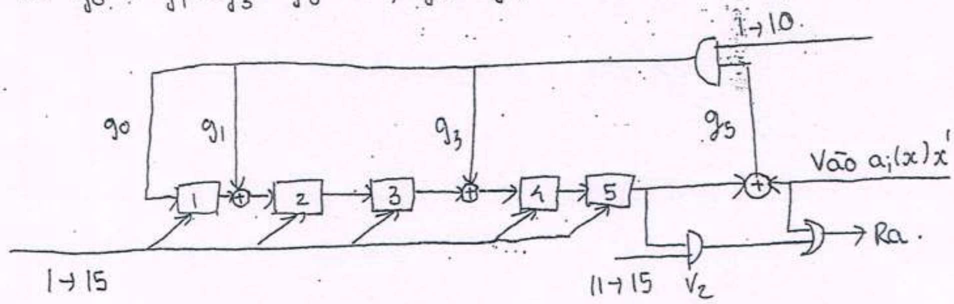
Có $h^*(x) = 1 + x^2 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10}$.

$$H = \begin{bmatrix} h^*(x) \\ xh^*(x) \\ x^2h^*(x) \\ x^3h^*(x) \\ x^4h^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

d)




Có $g_0 = g_1 = g_3 = g_5 = 1$; $g_2 = g_4 = 0$.



$a(x) = x^9 + x^4 + x^2 + 1 \leftrightarrow 1010100001$

| Xung nhịp | Vào | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 9 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$\Rightarrow c(x) = x^{14} + x^9 + x^7 + x^5 + x^2 + 1.$

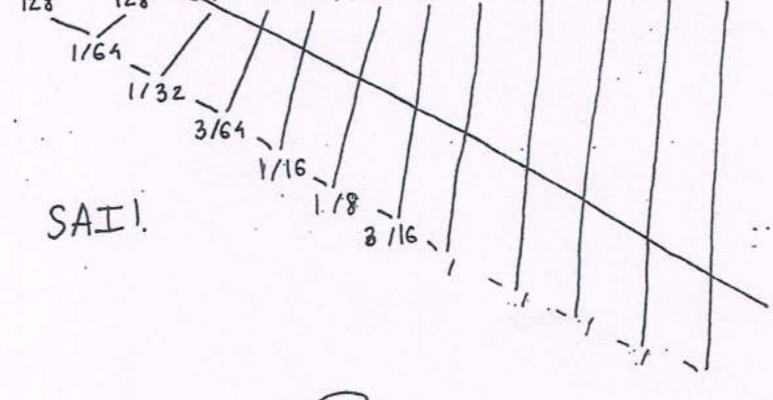
Ta có $a(x).x^5 = x^{14} + x^9 + x^7 + x^5.$

Có $a(x).x^5 \mod g(x) = x^2 + 1.$

$\Rightarrow c(x) = x^{14} + x^9 + x^7 + x^5 + x^2 + 1 \leftrightarrow \overset{x_{14}}{1}000010101001\overset{x_0}{01}.$

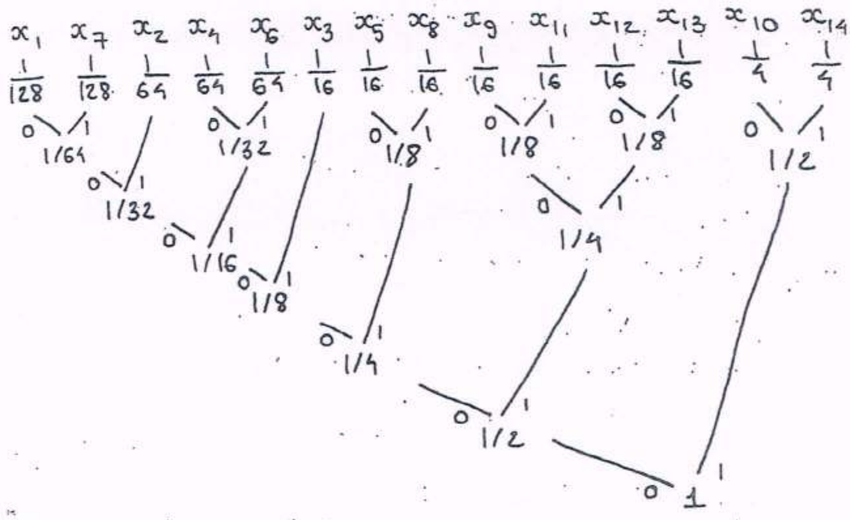
4.5 a)

| $x_1$ | $x_7$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_6$ | $x_3$ | $x_5$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{10}$ | $x_{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |




SAI!

4.5 a)




. Mã hóa Huffman:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000000 | 000001 | 0001 | 000010 | 0010 | 000011 | 0000001 |

| $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0011 | 0100 | 10 | 0101 | 0110 | 0111 | 11 |

b) $\bar{n} = 7\cdot\frac{1}{128} + 6\cdot\frac{1}{64} + 4\cdot\frac{1}{16} + 6\cdot\frac{1}{64} + 4\cdot\frac{1}{16} + 6\cdot\frac{1}{64} + 7\cdot\frac{1}{128}$

$+ 4\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} : 2 = 3{,}14$ (dấu)

$H(A) = \frac{1}{128}\log 128 \times 2 + \frac{3}{64}\log 64 + \frac{7}{16}\log 16 + \frac{2}{4}\log 4 = 3{,}14$ (bit)

$\Rightarrow \frac{H(A)}{\bar{n}} = 1 \Rightarrow$ Mã hóa tối ưu.

c) $H(A) \leq \bar{n} \leq H(A) + \frac{1}{n}$.

Có $n_i = -\log p(x_i)\ \forall i = \overline{1,14} \Rightarrow \bar{n} = H(A) \Rightarrow$ Mã hóa tối ưu.

d) Độ dài văn bản khi dùng Huffman:

$2.2.38400 + 7.4.9600 + 3.6.2400 + 2.7.1200 = 482400$ (bit)

Khi dùng ASCII: $8.(38400\times 2 + 9600\times 7 + 2400\times 3 + 1200\times 2)$

$= 1228800$ (bit)

$\Rightarrow$ Hệ số nén $\approx 2{,}55$ lần

**4.7** (15;7) $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

a) Ta có $\dfrac{x^{15}+1}{x^8+x^7+x^6+x^4+1} = x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

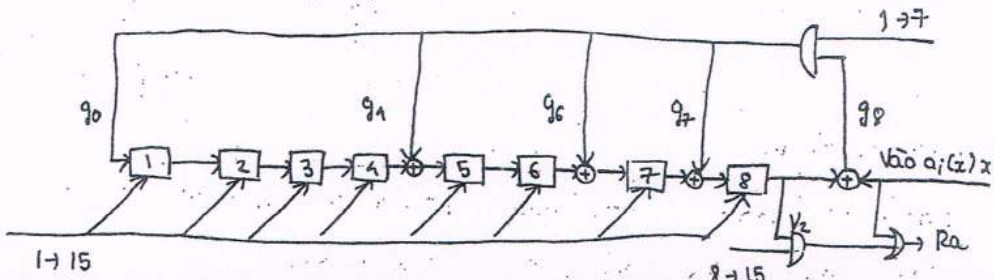
$\Rightarrow (x^{15}+1) \bmod (x^8+x^7+x^6+x^4+1) = 0$.

$\deg g(x) = 8 < 14$.

$\Rightarrow g(x)$ là đa thức sinh của mã cyclic (15;7).

b) $r = 8 \Rightarrow$ 8 thanh ghi 8 ô nhớ.

$g_0 = g_4 = g_6 = g_7 = g_8 = 1$ ; $g_1 = g_2 = g_3 = g_5 = 0$.




- Nguyên lý hđ: + 7 nhịp đầu, mạch $V_1$ mở, $V_2$ đóng, thiết bị ~ 1 bộ chia tính dư. Kết thúc nhịp 7, toàn bộ phần dư nằm ( ) 8 ô nhớ. Trong quá trình này, các dấu $t^2$ được đưa qua mạch OR tt.

+ 8 nhịp sau, mạch $V_1$ đóng, thiết bị ~ 1 thanh ghi dịch nối tiếp. Mạch AND $V_2$ mở, các dấu ktra đc lần lượt đưa ra từ bậc cao → thấp. Kết thúc nhịp thứ 15, toàn bộ từ mã đc đưa ra đầu ra.

c) Có $m(x) = x^3 + x$.

$\Rightarrow m(x).x^8 = x^{11} + x^9$.

Có

$$
\begin{array}{l|l}
x^{11} + x^9 & x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 \\
\underline{x^{11} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^3} & x^3 + x^2 + x \\
x^{10} + x^7 + x^3 & \\
\underline{x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^2} & \\
x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 & \\
\underline{x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x} & \\
x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x &
\end{array}
$$

$\Rightarrow r(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x$.

$\Rightarrow c(x) = m(x)\,x^8 + r(x)$

$= x^{11} + x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x$

$\Leftrightarrow \underset{x^{14}}{0}0010100110111\underset{x^0}{0}$

d) Có $\dfrac{d(x)}{g(x)} = x^6 + x^5 + x^4 + x + 1 \Leftrightarrow 1100111$. Khối tin có $k = 7$ dấu.

$\deg d(x) = 14 = n - 1$. $\Rightarrow d(x)$ là 1 từ mã của bộ mã.

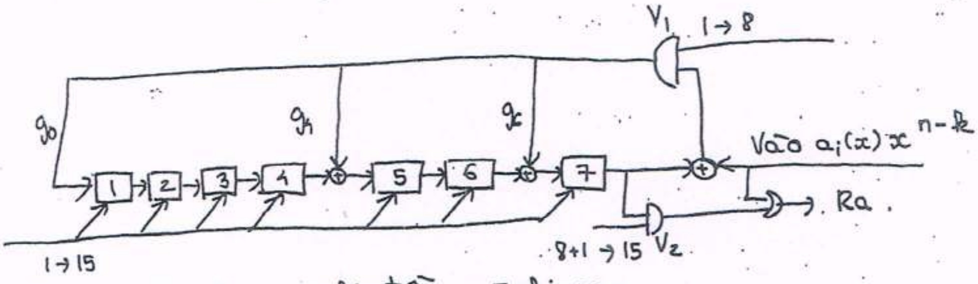
$\underline{4.8}$ $(15,8)$ $g(x) = x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

a) Ta có: $\dfrac{x^{15}+1}{x^7+x^6+x^4+1} = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (x^n+1) \bmod g(x) = 0. \\ \deg g(x) = 7 = n-k \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)$ là đa thức sinh của mã $C(15;8)$

b) $g_0 = g_4 = g_6 = g_7 = 1$ ; $g_1 = g_2 = g_3 = g_5 = 0$.

Có $r = 7 \Rightarrow$ 7 thanh ghi, 7 ô nhớ.




– Ng lý ~ bài 4.7 + 8 nhịp đầu + 7 nhịp sau.

c) $m(x) = x^2 + x$.

$\Rightarrow m(x).x^7 = x^9 + x^7$.

Có

$$\begin{array}{l|l} x^9 + x^7 & x^7 + x^6 + x^4 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^9 + x^8 + x^6 + x^2} & x^2 + x \\ x^8 + x^7 + x^6 + x^2 & \\ \underline{x^8 + x^7 + x^5 + x} & \\ x^6 + x^5 + x^2 + x & \end{array}$$

$\Rightarrow r(x) = x^6 + x^5 + x^2 + x$

$\Rightarrow c(x) = m(x).x^7 + r(x) = x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x$

$\leftrightarrow \underset{x^{14}}{0}0000101110011\underset{x^0}{0}$

d) Có $d(x) \bmod g(x) = x^5 + x^3 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow d(x)$ ø phải là từ mã của bộ mã.

$\underline{4.9}$ $x^{15} + 1 = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^4)(1+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

a) Tìm mã $C(15;3)$ trên vành $Z_2[x]/x^{15}+1$.

Có $\deg g(x) = 12$

$\Rightarrow g(x) = (1+x+x^4)(1+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

$= x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$.

b) Liệt kê 4 từ mã bất kỳ.

$m(x) \to [m(x)\, x^{15-3}] \bmod g(x) + m(x).x^{12} = c(x)$.

$C_2$: $G = \begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ x^2 g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\,100\,100\,100\,100 \\ 010\,010\,010\,010\,010 \\ 001\,001\,001\,001\,001 \end{bmatrix}$

- $m_1 = 001$

$\Rightarrow c_1 = m_1 G = (001\ 001\ 001\ 001\ 001)$.

- $m_2 = 010$.

$\Rightarrow c_2 = m_2 G = (010\ 010\ 010\ 010\ 010)$

- $m_3 = 011$

$\Rightarrow c_3 = m_3 G = (011\ 011\ 011\ 011\ 011)$

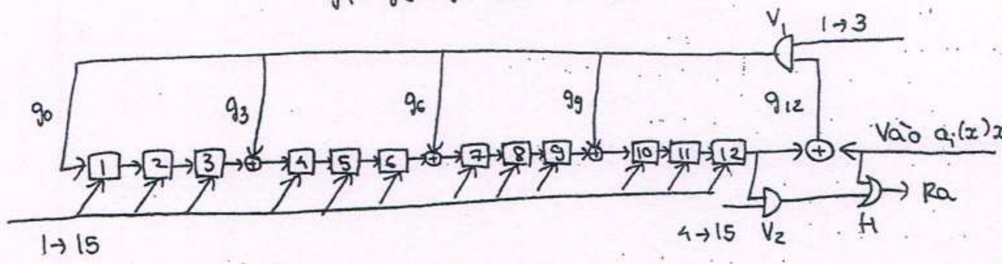
- $m_4 = 000$

$\Rightarrow c_4 = m_4 G = (000\ 000\ 000\ 000\ 000)$.

c) Có $g(x) = x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$.

$r = 12 \Rightarrow$ 12 ô nhớ ; $g_0 = g_3 = g_6 = g_9 = g_{12} = 1$.

$g_1 = g_2 = g_4 = g_5 = g_7 = g_8 = g_{10} = g_{11} = 0$.




d) $m = 1 + x$.

$\Rightarrow m(x).x^{12} = x^{13} + x^{12}$

$$\begin{array}{l|l} x^{13} + x^{12} & x^{12}+x^9+x^6+x^3+1 \\ \hline x^{13}+x^{10}+x^7+x^4+x & x+1 \\ \hline x^{12}+x^{10}+x^7+x^4+x & \\ x^{12}+x^9+x^6+x^3+1 & \\ \hline x^{10}+x^9+x^7+x^6+x^4 & \\ +x^3+x+1 & \end{array}$$

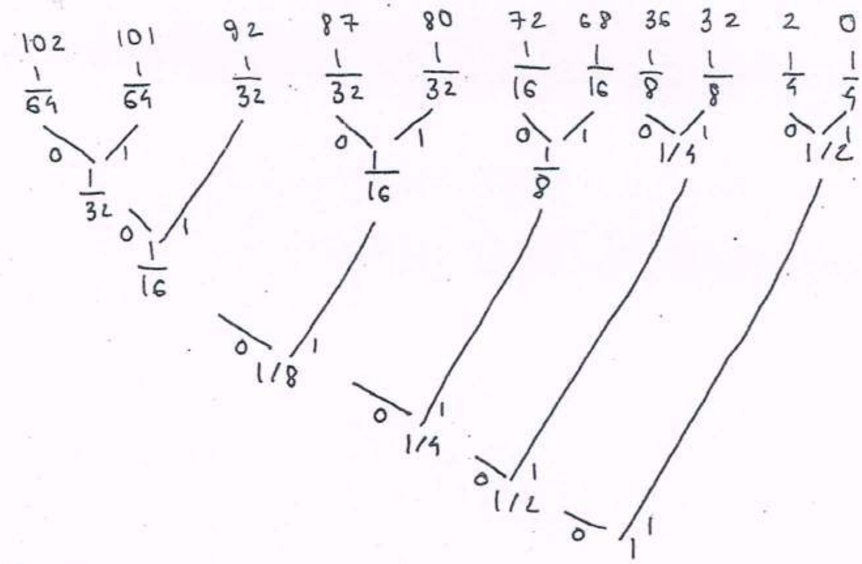
$\Rightarrow r(x) = x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$

$\Rightarrow c(x) = m(x).x^{12} + r(x)$.

$= x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$

$\Leftrightarrow$ 011011011011011.

4.6 a)




Mã hóa Huffman.

| 0 | 2 | 32 | 36 | 68 | 72 | 80 | 87 | 92 | 101 | 102 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 011 | 010 | 0011 | 0010 | 00011 | 00010 | 00001 | 000001 | 000000 |

b) $\bar{n} = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 + 3\cdot\frac{1}{8}\cdot 2 + 4\cdot\frac{1}{16}\cdot 2 + 5\cdot\frac{1}{32}\cdot 3 + 6\cdot\frac{1}{64}\cdot 2 = \frac{93}{32} \approx 2{,}9$ (dấu)

$H(A) = \frac{1}{4}\log 4 \times 2 + \frac{1}{8}\log 8 \times 2 + \frac{1}{16}\log 16 \times 2 + \frac{1}{32}\log 32 \times 3 + \frac{1}{64}\log 64 \times 2$

$= 93/32 = \bar{n}$

=) Phép mã hóa tối ưu.

c) $\underset{36}{0\,1\,0}\,|\,\underset{32}{0\,1\,1}\,|\,\underset{36}{0\,1\,0}\,|\,\underset{32}{0\,1\,1}\,|\,\underset{2}{1\,0}\,|\,\underset{2}{1\,0}\,|\,\underset{2}{1\,0}\,|\,1 \ldots$

d) Độ dài vb khi dùng Huffman: $16\times 2\times 2 + 8\times 3\times 2 + 4\times 4\times 2 + 2\times 3\times 5 + 1\times 6\times 2 = 186$ (bit)

Độ dài khi dùng ASCII: $8.64 = 512$ (bit)

=) Hệ số nén $= \frac{512}{186} = 2{,}75$.