AI 기초

2020년

강봉주

행렬

[행렬 표현]

- 행렬(matrix)은 행(row)과 열(column)로 구분된 직사각형 배열

$$A = \begin{bmatrix} -1.09 & 1 & 0.28 & -1.51 \\ -0.58 & 1.65 & -2.43 & -0.43 \\ 1.27 & -0.87 & -0.68 & -0.09 \\ 1.49 & -0.64 & -0.44 & -0.43 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & b & d \end{bmatrix}$$

[행렬 표현]

- 행렬(matrix)은 행(row)과 열(column)로 구분된 직사각형 배열

In
```
# 정의: 2차원 배열
A = np.array([[-1.086,  0.997,  0.283, -1.506],
              [-0.579,  1.651, -2.427, -0.429],
              [ 1.266, -0.867, -0.679, -0.095],
              [ 1.491, -0.639, -0.444, -0.434]])
A
```

Out
```
array([[-1.086,  0.997,  0.283, -1.506],
       [-0.579,  1.651, -2.427, -0.429],
       [ 1.266, -0.867, -0.679, -0.095],
       [ 1.491, -0.639, -0.444, -0.434]])
```

In
```
B = np.array([['a', 'c'],
              ['b', 'd']], dtype='object')
B
```

Out
```
array([['a', 'c'],
       ['b', 'd']], dtype=object)
```

[행렬 표현]

- 행렬의 크기
- $A_{n \times p}$
- $A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

In

```
A = np.array([[ 3,  3,  7,  2],
              [ 4, 11, 10,  7],
              [ 2,  1,  2, 10]])
A.shape
```

Out

```
(3, 4)
```

벡터와 행렬

[행렬 표현]

- $A_{3\times4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

[행렬로부터 구성 벡터 가져오기]

- 행 벡터: $[3 \quad 3 \quad 7 \quad 2]$

- 열 벡터: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

In	# 행 벡터 A[0,:]
Out	array([3, 3, 7, 2])

In	# 열 벡터 A[:,0]
Out	array([3, 4, 2])

[행렬 표현]

- 행렬의 표기법

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

원소(element, entry, coefficient)는 $a_{ij}, a_{i,j}, A[i,j], A_{i,j}, A_{ij}$

[행렬 표현]

- 행렬의 표기법
- $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & \mathbf{7} \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$
- $a_{11} = 3, a_{24} = 7$

In	# 행렬의 표기법 A[0, 0]
Out	3

In	A[1, 3]
Out	7

벡터와 행렬

과제	06
	1) 행렬 A = $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 에서 1번째와 2번째 열벡터의 내적을 구해보자.
	2) 행렬 A = $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 에서 모든 행벡터의 노름을 구해보자.
	3) 행렬 A = $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 에서 a_{22}, a_{24}의 값을 찾기 위한 파이썬 프로그램을 구성해보자.

[행렬 표현]

- 행렬 연산: 덧셈
- $\mathrm{A} = (a_{ij}), \mathrm{B} = (b_{ij})$
- $\mathrm{A} + \mathrm{B} = (a_{ij} + b_{ij}), \forall i, j$
- 대응하는 위치의 원소의 값을 더한 것

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

In	`A + B`
Out	`array([[ 4,  6,  8],` `       [10, 12, 14]])`

[행렬 표현]

- 실수와 행렬 곱
- $\mathrm{A} = (a_{ij}), c \in \mathbb{R}$
- $c\mathrm{A} = (ca_{ij}), \forall i, j$
- $c\mathrm{A} = \mathrm{A}c$

$$0.1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

In	`# 스칼라와 행렬 곱: *`
	`c = 0.1`
	`c*A`

Out	`array([[0.1, 0.2, 0.3],` `       [0.4, 0.5, 0.6]])`

[행렬 표현]

- 실수와 행렬 곱
- $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right), c \in \mathbb{R}, \; c\mathrm{A} = (ca_{ij})$
- $c\mathrm{A} = \mathrm{A}c$

In	`# 스칼라와 행렬 곱 성질` `c*A == A*c`
Out	`array([[ True,  True,  True],` `       [ True,  True,  True]])`

[행렬 표현]

- 행렬의 전치
- $\mathrm{A} = (a_{ij})$
- $\mathrm{A}^T = (A^T_{ij}) = (a_{ji})\ \forall i, j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

In
```
# 행렬의 전치
A.T
```

Out
```
array([[1, 4],
       [2, 5],
       [3, 6]])
```

[행렬 표현]

- 행렬의 전치 성질

1) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \leftarrow \left(a_{ij}+b_{ij}\right)^{T}=\left(a_{ji}+b_{ji}\right)=\left(a_{ji}\right)+\left(b_{ji}\right)$

2) $(\mathrm{cA})^{\mathrm{T}}=\mathrm{cA}^{\mathrm{T}}$

In
```
# 행렬 전치의 성질
A = np.arange(1, 7).reshape(2, 3)
B = np.arange(3, 9).reshape(2, 3)

A.T + B.T == (A + B).T
```
Out
```
array([[ True,  True],
       [ True,  True],
       [ True,  True]])
```

[행렬 표현]

- 행렬의 전치 성질

1) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \leftarrow \left(a_{ij} + b_{ij}\right)^{T} = \left(a_{ji} + b_{ji}\right) = \left(a_{ji}\right) + \left(b_{ji}\right)$

2) $(\mathrm{cA})^{\mathrm{T}} = \mathrm{cA}^{\mathrm{T}}$

In	`c = 0.1` `(c*A).T == c*A.T`

Out	`array([[ True,  True],`
	`       [ True,  True],`
	`       [ True,  True]])`

벡터와 행렬

과제	07
	1) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $A + 0.1B$를 구해보자.
	2) 행렬 $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $(0.1B)^T = 0.1B^T$ 임을 알아보자.

벡터와 행렬

[행렬 표현]

- 행렬 곱
- $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p,\ \ \mathrm{B} = (b_{kl}), k = 1, \ldots, p, l = 1, \ldots, m$
- $\mathrm{A}_{n\times p}, \mathrm{B}_{p\times m}$: 앞 행렬의 컬럼 개수와 뒷 행렬의 행의 개수는 반드시 일치
- $\mathrm{AB} = (c_{il}) = \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rl}\right) = (A_{i,:}^{T} B_{:,l})$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix}22 & 28\\ \mathbf{49} & 64\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$c_{2,1} = A_{2,:}^{T} B_{:,1} = 4\times1 + 5\times3 + 6\times5 = 49$$

[행렬 표현]

- 행렬 곱
- $\mathrm{AB} = (c_{il}) = \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rl}\right)$

In	`# 행렬곱 연산자: @` `A @ B`
Out	`array([[22, 28],` `       [49, 64]])`

In	`# 행렬곱 함수` `np.matmul(A, B)`
Out	`array([[22, 28],` `       [49, 64]])`

[행렬 표현]

- 행렬 곱의 성질
- $AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}23 & 34\\31 & 46\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

In	`A @ B`
Out	`array([[19, 22],` `       [43, 50]])`

In	`B @ A`
Out	`array([[23, 34],` `       [31, 46]])`

[행렬 표현]

- 행렬 곱의 전치
- $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

$$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}, \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

In
```
# 행렬 곱의 전치
(A @ B).T
```
Out
```
array([[19, 43],
       [22, 50]])
```

In
```
B.T @ A.T
```
Out
```
array([[19, 43],
       [22, 50]])
```

과제	08
	1) 행렬 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $\mathrm{A^T B}$를 구해보자.
	2) $\left(\mathrm{A^T B}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{B^T A}$ 임을 확인해보자.

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \cdots & A_{p,s} \\ . & \cdots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$

$$A_{1:2,2:3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In	`# 유형 1` `A[0:2, 1:3]`
Out	`array([[2, 3],` `       [5, 6]])`

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $$A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \cdots & A_{p,s} \\ . & \cdots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$$

$$A_{:,2:3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In
```
# 유형 2
A[:, 1:3]
```

Out
```
array([[ 2,  3],
       [ 5,  6],
       [ 8,  9],
       [11, 12]])
```

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \cdots & A_{p,s} \\ . & \cdots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$

$$A_{(1,3),(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In
```
# 유형 3
A[[0, 2], :][:, [1, 2]]
```

Out
```
array([[2, 3],
       [8, 9]])
```

벡터와 행렬

과제	**09**
	1) 행렬 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$에 대하여 5, 9 값을 가져오는 파이썬 코드를 생성해보자.
	2) 행렬 A에서 $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ 값을 가져오는 파이썬 코드를 생성해보자.

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 영 행렬

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

In
```
# 영 행렬
size = 3
np.zeros(shape=(size, size))
```

Out
```
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])
```

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 항등 행렬

- $\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

In	# 항등 행렬
	np.identity(n=size)

Out	array([[1., 0., 0.],
	       [0., 1., 0.],
	       [0., 0., 1.]])

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 대각 행렬(diagonal matrix)
- 대각선 값을 제외한 모든 원소의 값이 0인 행렬
- $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

In
```
# 대각 행렬
np.diag([1, 2, 3])
```

Out
```
array([[1, 0, 0],
       [0, 2, 0],
       [0, 0, 3]])
```

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 삼각 행렬(triangular matrix)
- 대각선을 기준으로 하여 한 쪽이 모든 0인 행렬

- 상삼각행렬: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

In	`# 상삼각 행렬` `np.triu([[1,2,3],[1, 2, 7],[7,8,5]], k=0)`

Out	`array([[1, 2, 3],`
	`       [0, 2, 7],`
	`       [0, 0, 5]])`

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 직교 행렬(orthogonal matrix)
- $A^TA = AA^T = I$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

In	`A.T @ A`
Out	`array([[1, 0],` `       [0, 1]])`

In	`A @ A.T`
Out	`array([[1, 0],` `       [0, 1]])`

과제	10
	1) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대하여 A의 대각원소로 구성된 대각행렬을 구해보자.
	2) 행렬 A에 대하여 $B = A^T A$ 행렬을 생성하고 B 행렬이 $(b_{ij}) = (b_{ji})\ \forall i, j$ 즉, 대칭행렬(symmetric matrix)임을 확인해보자.
	3) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 행렬이 직교행렬 임을 확인해보자.

[선형 방정식과 QR 분해]

- 선형 방정식
- $a_1x_1 + \cdots + a_px_p + b = 0$, x_i: 변수, a_i, b: 계수(coefficient)
- $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_p \end{bmatrix} = a^T x$
- $a^T x + b = 0$
- $2x + 5 = 0$
- $2x + 3y + 7 = 0$
- 해(solution): 주어진 방정식을 만족하는 변수값

[선형 방정식과 QR 분해]

- 선형 방정식
- $a_1x_1 + \cdots + a_px_p + b = 0$, x_i: 변수, a_i, b: 계수(coefficient)
- $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pp}x_p = b_p \end{cases}$
- $x_1 + x_2 = 5$
  $\frac{1}{2}x_1 - x_2 = 2$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\mathrm{A}x = b$

[선형 방정식과 QR 분해]

- $\mathrm{A}x = b$
- QR 분해
- $\mathrm{A}_{\mathrm{n \times p}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{n \times n}}\mathrm{R}_{\mathrm{n \times p}}$
- Q는 직교행렬, R은 상삼각행렬

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & -0.45 \\ -0.45 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.12 & -0.45 \\ 0 & -1.34 \end{bmatrix} = \mathrm{QR}$$

$$\mathrm{A}x = b$$

$$\Rightarrow \mathrm{QR}x = b$$

$$\Rightarrow \mathrm{Q^T QR}x = \mathrm{Q^T}b$$

$$\Rightarrow \mathrm{R}x = \mathrm{Q^T}b$$

$\mathrm{Q^T Q} = \mathrm{I}$
$\mathrm{IR} = \mathrm{R}$

[선형 방정식과 QR 분해]

- $\mathrm{A}x = b$
- QR 분해
- $\mathrm{A}_{\mathrm{n}\times\mathrm{p}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}\mathrm{R}_{\mathrm{n}\times\mathrm{p}}$
- Q는 직교행렬, R은 상삼각행렬

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & -0.45 \\ -0.45 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.12 & -0.45 \\ 0 & -1.34 \end{bmatrix} = \mathrm{QR}$$

$$\mathrm{A}x = b$$

$$\Rightarrow \mathrm{QR}x = b$$

$$\Rightarrow \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{QR}x = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}b$$

$$\Rightarrow \mathrm{R}x = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}b$$

$$\begin{bmatrix} -1.12 & -0.45 \\ 0 & -1.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & -0.45 \\ -0.45 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.37 \\ -0.45 \end{bmatrix}$$

[선형 방정식과 QR 분해]

- 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 에 대하여 QR 분해를 실시해보자.

[선형 방정식과 QR 분해]

- 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$에 대하여 QR 분해를 실시해보자.

In

```
# QR 분해 확인
A = np.array([[5, 1, 5],
        [3, 9 , 8],
        [2, 1, 4]])
A
```

Out

```
array([[5, 1, 5],
       [3, 9, 8],
       [2, 1, 4]])
```

[선형 방정식과 QR 분해]

- 행렬 A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 에 대하여 QR 분해를 실시해보자.

In	`Q, R = la.qr(A)` `np.round(Q, 3)`

Out	`array([[-0.811,  0.479, -0.336],`
	`       [-0.487, -0.871, -0.067],`
	`       [-0.324,  0.109,  0.94 ]])`

In	`np.round(R, 3)`

Out	`array([[-6.164, -5.516, -9.247],`
	`       [ 0.   , -7.251, -4.137],`
	`       [ 0.   ,  0.   ,  1.544]])`

[선형 방정식과 QR 분해]

- $\mathrm{X^T X} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, \mathrm{X^T}y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $(\mathrm{X^T X})\beta = \mathrm{X^T}y$ 인 β=?
- $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{R}\beta = \mathrm{Q^T X^T}y \rightarrow \begin{bmatrix} -1.35 & -1.21 \\ 0 & 1.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.46 \\ 0.37 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\ 1.35 \times \beta_1 - 1.21 \times \beta_2 \\ 0 \times \beta_1 + \ 1.67 \times \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.46 \\ 0.37 \end{bmatrix}$$

[선형 방정식과 QR 분해]

- $X^T X = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $(X^T X)\beta = X^T y$ 인 β=?
- $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

In

```
# 선형 방정식과 후방 대입법
A = np.array([[1, 1], [1/2, -1]])
XTX = A.T@A
XTX
```

Out

```
array([[1.25, 0.5 ],
       [0.5 , 2.  ]])
```

[선형 방정식과 QR 분해]

- $X^T X = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $(X^T X)\beta = X^T y$ 인 β=?
- $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

In

```
# QR 분해
Q, R = la.qr(XTX)
R.round(2)
```

Out

```
array([[-1.35, -1.21],
       [ 0.  ,  1.67]])
```

[선형 방정식과 QR 분해]

- $X^T X = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $(X^T X)\beta = X^T y$ 인 β=?
- $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

In	`b = np.array([4, 2])` `np.round(Q.T @ b, 2)`
Out	`array([-4.46,  0.37])`

과제	11
	1) 행렬 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대하여 A의 첫번째 열 벡터를 $a = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$라고 할 때 $u = a - \lVert a \rVert e_1$ 값을 구해보자. 여기서 e_1는 3차원 단위벡터이다.
	2) $v = \frac{u}{\lVert u \rVert}$ 의 값을 구해보자.
	3) $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{I}_3 - 2vv^{\mathrm{T}}$ 값을 구해보자.
	4) $\mathrm{Q}_1\mathrm{A}$ 의 값을 구해보자.

[역행렬]

- $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} = a^{-1} \times b$: 조건은 $a \neq 0$
- $\mathrm{A}x = b \Rightarrow x = A^{-1}b =?$: 조건은 ?

[역행렬]

- 정방행렬 A에 대하여 A^{-1}
- 정의: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
- 역행렬의 존재하기 위한 조건?

  - A행렬이 가역이다.
  - A의 열들은 서로 독립이다.
  - A의 행들은 서로 독립이다.
  - A는 좌 역행렬을 갖는다.
  - A는 우 역행렬을 갖는다.

[역행렬]

- 독립인 열 또는 행의 개수: 계수(rank)

In	`# 행렬의 계수`
	`A = np.random.RandomState(123).randint(1, 9, 9).reshape(3, 3)`
	`A`

Out	`array([[7, 6, 7],`
	`       [3, 5, 3],`
	`       [7, 2, 4]])`

In	`# 행렬 계수 구하기` `np.linalg.matrix_rank(A)`
Out	`3`

[역행렬]

- $Ax = b$
- A가 완전계수(full rank): $x = A^{-1}b$

In	`# 역행렬 구하기`
	`A_inverse = la.inv(A)`
	`np.round(A_inverse, 2)`

Out	`array([[-0.27,  0.2 ,  0.33],`
	`       [-0.18,  0.41,  0.  ],`
	`       [ 0.57, -0.55, -0.33]])`

[역행렬]

- 역행렬의 성질
- $\mathrm{I}^{-1} = \mathrm{I}$
- 대각행렬 $\mathrm{D} = (d_{ii}), \mathrm{D}^{-1} = \left(\frac{1}{d_{ii}}\right)$
- 직교행렬 $\mathrm{Q}, \mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}$
- $(c\mathrm{A})^{-1} = c^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
- $\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$
- $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$

과제	12
	1) A = $\begin{bmatrix} 14 & 13 & 14 & 2 \\ 12 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & 11 & 9 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$에 대하여 $Ax = b$를 만족하는 x 값을 QR 분해와 R의 역행렬을 통하여 구해보자.