

## **VERSUCH 23**

# **Quantenanalogen**

Gordon Scholz  
gordon.scholz@tu-dortmund.de

Tom Rosenstein  
tom.rosenstein@tu-dortmund.de

Durchführung: 5.12.2018

Abgabe: 13.12.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Resonanz . . . . .	3
2.2 Gemeinsamkeiten von akustischen und quantenmechanischen Systemen . .	3
2.3 Unterschiede von akustischen und quantenmechanischen Systemen . . . .	4
2.4 Analogien zur Festkörperphysik . . . . .	4
<b>3 Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1 Partikel im periodischen Potenzial . . . . .	6
4.2 Atom-Molekül-Ketten Ansatz . . . . .	14
<b>5 Diskussion</b>	<b>22</b>
<b>Literatur</b>	<b>22</b>

# 1 Zielsetzung

Der Versuch beschäftigt sich mit der Analogie zwischen der Quantenmechanik und der Akustik. Im Hinblick auf die mathematische Beschreibung, lassen sich verschiedene Analogien zwischen diesen Bereichen der Physik finden. Speziell werden akustische Spektren von Röhrenresonatoren als Modell für das Kastenpotential und Spektren von periodischen Resonatorketten als Modell eines 1-dimensionalen Festkörpers untersucht.

## 2 Theorie

### 2.1 Resonanz

Wenn in einem geschlossenen Rohr ein Schall erzeugt wird und dieser von der gegenüberliegenden Wand reflektiert wird, entsteht eine stehende Welle im Rohr. Die hin- und zurücklaufende Wellen interferieren miteinander. Resonanz entsteht an den Stellen, wo die Wellen konstruktiv interferieren und die Resonanzbedingung

$$2L = \frac{nc}{f} \quad (1)$$

erfüllt ist. Dabei ist  $L$  die Länge des Rohrs,  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $f$  die Frequenz und  $n$  eine natürliche Zahl.

### 2.2 Gemeinsamkeiten von akustischen und quantenmechanischen Systemen

Aus der linearen Euler Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p,$$

mit der Geschwindigkeit  $v$  und der Dichte  $\rho$ , und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

folgt, dass sich eine eindimensionale Welle mit

$$p(x) = p_0 \cos(kx - \omega t)$$

beschreiben lässt. In einer Röhre mit der Länge  $L$  lässt sich mit den Randbedingungen  $\frac{\partial p}{\partial x}(0) = 0$  und  $\frac{\partial p}{\partial x}(L) = 0$  herleiten, dass  $k = \frac{n\pi}{L}$  ist. Dabei ist  $n$  eine ganzzahliger positive Zahl.

Analog kann ein Teilchen in einem Potentialtopf mit der Schrödingergleichung beschrieben werden:

$$E\psi(r) = -\frac{\hbar}{2m} \Delta\psi(r) + V(r)\psi(r).$$

In einem unendlich hohen Potentialtopf dessen Zwischenraum ein Potential von  $V(r) = 0$  besitzt, vereinfacht sich die Schrödingergleichung zu

$$E\psi(r) = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi(r).$$

Diese Gleichung kann für bestimmte Eigenwerte der Energie  $E$  mit dem Ansatz

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$$

gelöst werden. Aus den Randbedingungen folgt  $\alpha = 0$  und  $k = \frac{n\pi}{L}$ . In der Quantenmechanik ist die Energie immer mit der Frequenz verbunden:

$$E = hf = \hbar\omega.$$

Damit folgt für die Eigenwerte der Energie

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

Die Schallwelle und die Wellenfunktion lösen in beiden Fällen die Wellengleichung, welche ein delokalisiertes Objekt beschreibt. In beiden Fällen gibt es Eigenzustände und der Wellenvektor  $k$  ist ebenfalls gleich.

## 2.3 Unterschiede von akustischen und quantenmechanischen Systemen

Als erstes wird im klassischen Fall die Amplitude von einem Mikrofon gemessen. Im quantenmechanischen Fall lässt sich jedoch aus dem Betragsquadrat nur die Wahrscheinlichkeit berechnen, ein Teilchen an einer bestimmten Position zu messen.

Desweiteren unterscheiden sich die Wellengleichungen in der zeitlichen Ableitung. Während die klassische Wellengleichung wegen der zweiten zeitlichen Ableitung periodische Lösungen besitzt, folgt dies im quantenmechanischen Fall aus der ersten Zeitableitung in Verbindung mit einem komplexen Phasenfaktor. Diese komplexwertige Funktionen können nicht direkt beobachtet oder gemessen werden, sondern nur das Betragsquadrat. Die Dispersionsrelationen unterscheiden sich ebenfalls. Im klassischen Fall ist diese linear, wobei sie in der Quantenmechanik einen parabolischen Verlauf folgt. Die Folge daraus sind unterschiedliche Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten.

Zuletzt fordert die Quantenmechanik dass die Wellenfunktion an den Rändern des unendlichen Potentialtopfs verschwindet, wobei im klassischen Fall der Druck dort einen Schwingungsbauch vorweist.

## 2.4 Analogien zur Festkörperphysik

Mittels dem einsetzen von Blenden zwischen den einzelnen Röhrenbauteile, welche den Schall streuen, kann eine am Atom gestreute Elektronenwelle simuliert werden. Dies führt zu neuen Resonanzfrequenzen, welche zur Bandstrukturen führen, wobei die Blendgröße ein Maß für den Wirkungsquerschnitt ist. Die Bragg Bedingung erfüllt wird, also

$$n\lambda = 2a$$

gilt. Dabei ist  $n$  wieder eine natürliche Zahl und  $a$  ist der Abstand der reflektierenden Ebenen. In diesem Versuch stellen die Blenden die reflektierenden Ebenen dar und der Abstand ist die Röhrenlänge.

### 3 Durchführung

Der allgemeine Versuchsaufbau besteht aus einer Röhre, welche aus Rohrstücken mit unterschiedlichen Längen zusammengesetzt wird. Am einem Ende der Röhre ist ein Mikrofon und am anderen Ende ein Lautsprecher eingebaut. Zum erzeugen und empfangen des Tonsignals, wird ein Computer verwendet, welcher über einen Controller mit der Röhre verbunden ist. Das gemessene Signal wird mit dem Programm "SpectrumSLC.exe" aufgenommen und von diesem als Plot dargestellt, welcher mit den Messwerten abgespeichert wird. Für die einzelnen Versuchsteile wird die Röhre aus unterschiedlichen Stücken zusammengesetzt. Zur Verfügung stehen Rohrstücke mit der Länge von 12,5 mm, 50 mm und 75 mm. Desweiteren werden drei unterschiedliche Blenden verwendet, welche Durchmesser von 10 mm, 13 mm und 16 mm haben.

Als erstes wird der Lautsprecher und das Mikrofon des Computers so eingestellt, dass es ein maximales Signal gibt, aber das Mikrofon nicht übersättigt. Dies lässt sich zum einem mit den Computereinstellung regeln und ebenfalls mit dem Abschwächer des Controllers. Wenn zwischen Mikrofon und Lautsprecher ein 75 mm langes Rohrstück eingebaut wird und ein Signal von 100 Hz bis 10 000 Hz gesendet wird, zeigt das benutzte Computerprogramm selbst an wenn das das Mikrofon übersättigt ist. Durch ändern der oben genannten Einstellung, wird die Messung wiederholt bis das Mikrofon nicht mehr übersättigt ist. Anschließend können die Messungen für das Experiment beginnen.

Als erstes wird im Frequenzbereich von 10 Hz bis 10 000 Hz in 10 Hz Schritten das Spektrum von einem 75 mm Rohrstück aufgenommen. Dies wird wiederholt und jedes mal ein Rohrstück der selben Länge hinzugefügt, bis insgesamt acht 75 mm Rohrstücke verbaut sind.

Für die nächsten vier Versuchsabschnitte wird der Frequenzbereich von 0,4 kHz bis 12 kHz eingestellt. In diesem Bereich wird zuerst das Spektrum für zwölf 50 mm Rohrstücke aufgenommen. Für acht Rohrstücke dieser Länge wird das Spektrum als nächstes mit den Blenden gemessen. Eine Blendengröße wird jeweils zwischen die einzelnen Rohrstücke eingebaut. Dies wird für alle drei Blendengrößen durchgeführt. Als nächstes wird das Spektrum von zwölf und zehn 50 mm Rohrstücken aufgenommen, mit den 16 mm Blenden zwischen den Bauteilen. Als letztes in diesem Versuchsteil wird das Spektrum von acht 75 mm Stücken mit den 16 mm Blenden gemessen.

Für die ersten beiden Messungen im zweiten Versuchsteil, wird ein Frequenzbereich von 0,4 kHz bis 22 kHz eingestellt. Als erstes wird das Spektrum eines einzelnen 50 mm Stückes aufgenommen. Dies wird für ein 75 mm Stück wiederholt. Für die nächsten vier Messungen wird der Maximalwert des Frequenzbereiches wieder auf 12 kHz gestellt. Es wird für zwei 50 mm Stücke, mit einer Blende dazwischen, das Spektrum aufgenommen. Dies wird für alle drei Blendengrößen durchgeführt. In der nächsten Messung wird jeweils für drei, vier und sechs Einheitszellen die Spektren drei mal gemessen, jeweils mit einer an-

deren Blendengröße zwischen den einzelnen Rohrstücken. Als nächstes wird das Spektrum für zwölf 50 mm Stücke gemessen, welche abwechselnd mit 13 mm und 16 mm Blenden getrennt sind. Für letzte Messung in diesem Frequenzbereich, werden fünf Einheitszellen aufgebaut, welche jeweils aus einem 50 mm Stück, einer 16 mm Blende, einem 75 mm Rohrstück und noch einer 16 mm Blende bestehen.

Die letzte Messung wird in einem Frequenzbereich von 0,4 kHz bis 6 kHz durchgeführt. Es werden zwölf 50 mm Rohrstücke aufgebaut, jeweils mit einer 16 mm Blende dazwischen. Nun wird das zweite Rohrstück von der Lautsprecherseite aus durch ein 75 mm Rohrstück ersetzt und das Spektrum gemessen. Danach werden die Rohrstücke wieder ausgetauscht und das siebte Rohrstück von der Lautsprecherseite aus durch ein 75 mm Stück ersetzt. Dies wird nochmal für das dritte Rohrstück von der Mikrofonseite aus wiederholt. An dieser Stelle werden ebenfalls die Spektren für andere Rohrlängen als Defekt gemessen. Die Rohrlängen betragen 25 mm, 37,5 mm und 62,5 mm.

## 4 Auswertung

### 4.1 Partikel im periodischen Potenzial

Die Spektren für die in 1 zu sehenden Rohrlängen sind in Abbildung 1 dargestellt. Es ist zu beobachten, dass, bei gleicher Breite des Spektrums, mit steigender Rohrlänge die Anzahl an Resonanzen zunimmt, und der Abstand zwischen den Resonanzen abnimmt. Aus den einzelnen Spektren wurden die Abstände der Resonanzen bestimmt. Diese werden gegen die inverse Rohrlänge aufgetragen und linear mit SciPy [1] gefittet. Dies ist in Abbildung 2 zu sehen. Die bestimmten Parameter sind:

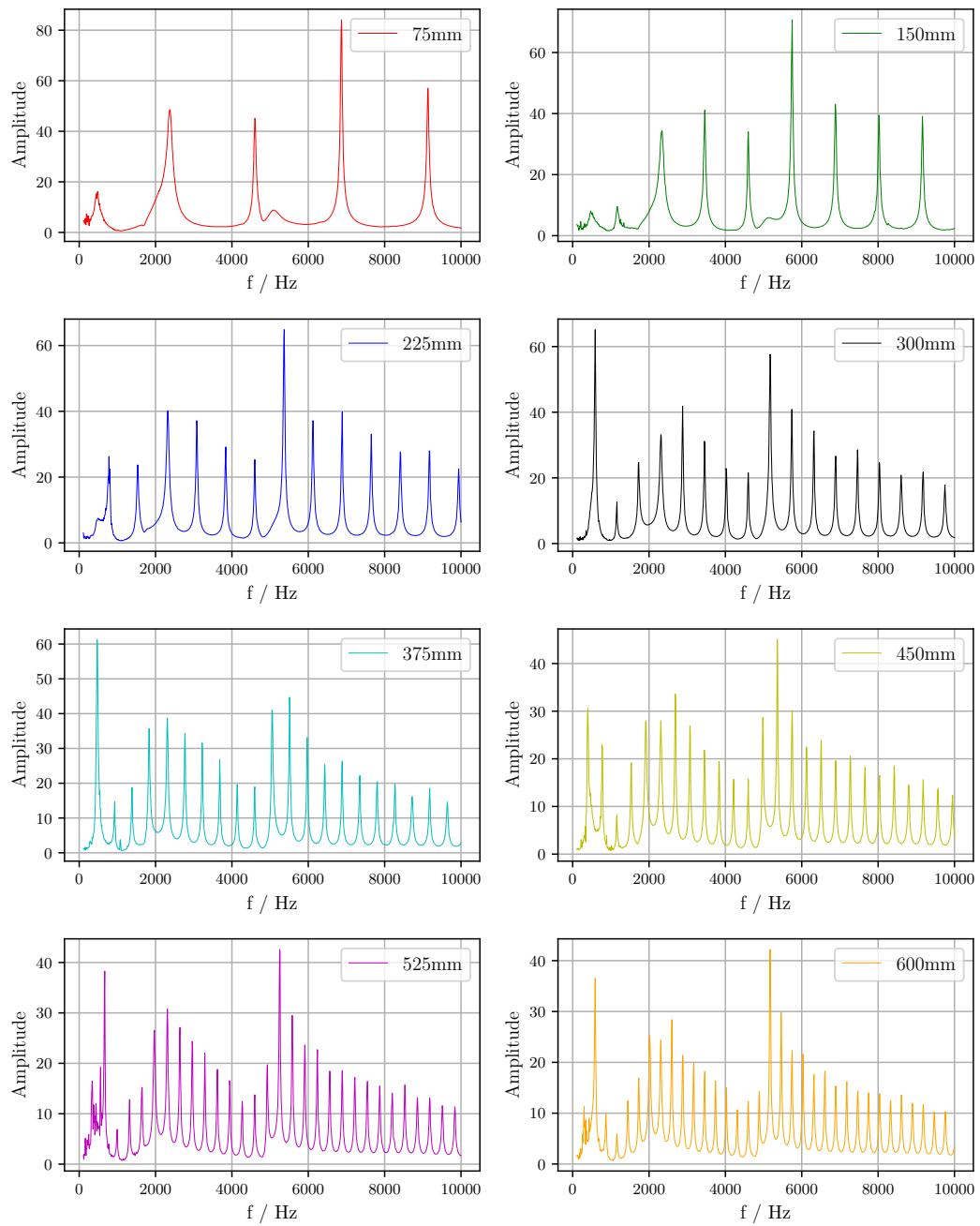
$$a = (168,47 \pm 0,59) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$b = (8,76 \pm 3,42) \text{ Hz}.$$

Gemäß der Resonanzbedingung (1) lässt sich  $a$  folgendermaßen identifizieren:

$$a = \frac{c}{2}$$

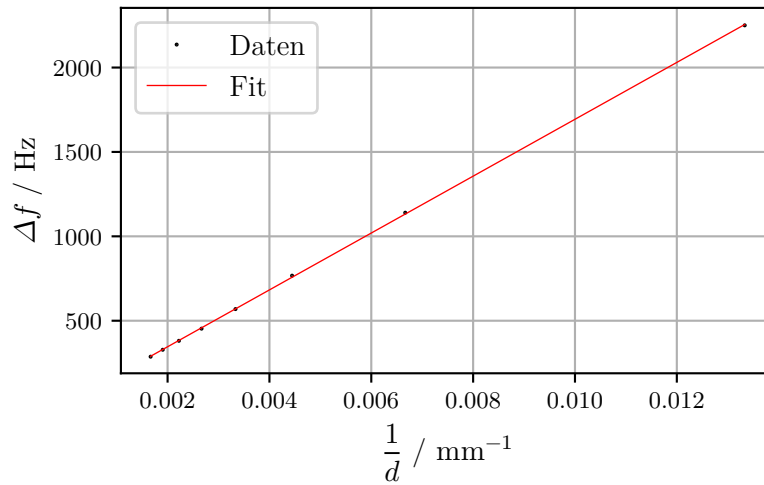
Somit beträgt die gemessene Schallgeschwindigkeit  $c_{\text{gemessen}} = (336,94 \pm 1,18) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Dies entspricht einer Abweichung von 1,8 % vom Literaturwert, welcher  $343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bei  $T = 20^\circ\text{C}$  beträgt [2].



**Abbildung 1:** Es wurde für die angegebenen Rohrlängen jeweils ein Spektrum im Bereich von 100 Hz bis 10 kHz gemessen und geplottet. Es ist zu sehen, dass die Anzahl der Resonanzstellen zunimmt.

**Tabelle 1:** Rohrlänge, inverse Rohrlänge und Abstände der Resonanzen

$d / \text{mm}$	$\frac{1}{d} / \frac{1}{\text{mm}}$	$\Delta f / \text{Hz}$
75	0,013	2250
150	0,007	1140
225	0,004	767
300	0,003	569
375	0,003	453
450	0,002	381
525	0,002	328
600	0,002	287



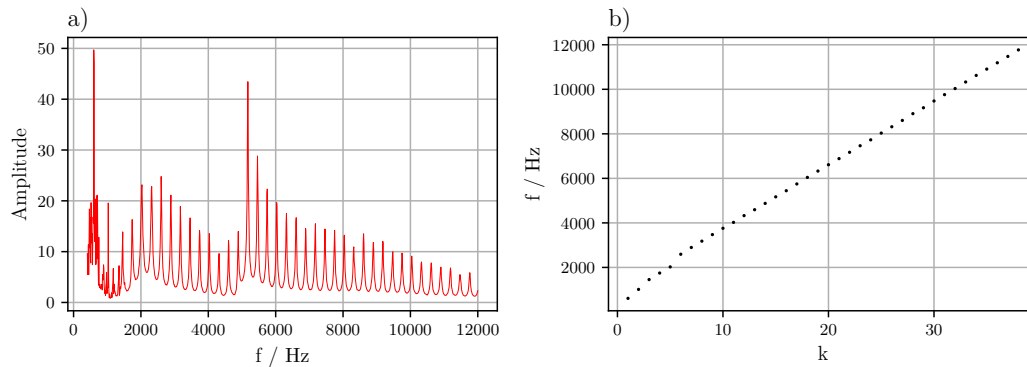
**Abbildung 2:** Die Abstände der Resonanzstellen  $\Delta f$  wurde gegen die inverse Rohrlänge  $1/d$  aufgetragen und linear gefittet. Aus der Steigung der Gerade lässt sich so die Schallgeschwindigkeit bestimmen.



In Abbildung 3 ist ein 0,4 kHz bis 12 kHz Spektrum für eine Rohrlänge von 600 mm dargestellt. Daraus wurden die Nummer der Resonanzstelle, sowie die dazugehörige Resonanzfrequenz bestimmt. Diese werden nun gegeneinander aufgetragen. So ergibt sich die ebenfalls in 3 zu sehende Dispersionsrelation. Diese ist, da keine Störungen oder Unregelmäßigkeiten im Rohr vorliegen, linear. Die bestimmten Wertepaare befinden sich in Tabelle 2.

**Tabelle 2:** Nummer der Resonanzstelle  $k$  und dazugehörige Frequenzen

$k$	$f / \text{Hz}$	$k$	$f / \text{Hz}$
1	611	20	6612
2	1013	21	6886
3	1454	22	7171
4	1748	23	7465
5	2023	24	7730
6	2592	25	8034
7	2896	26	8318
8	3180	27	8602
9	3474	28	8906
10	3758	29	9171
11	4023	30	9475
12	4327	31	9760
13	4592	32	10 034
14	4876	33	10 328
15	5170	34	10 623
16	5445	35	10 907
17	5749	36	11 191
18	6043	37	11 476
19	6328	38	11 770



**Abbildung 3:** In a) ist das Spektrum von 0,4 kHz bis 12 kHz bei einer Rohrlänge von 600 mm zu sehen. In b) ist die dazugehörige lineare Dispersionsrelation dargestellt.

In Abbildung 4 sind die 0,4 kHz bis 12 kHz Spektren und Dispersionsrelationen für ein Rohr welches aus acht 50 mm Röhren, zwischen welchen sich Blenden befinden, besteht. Die Messung wurde einmal mit 10 mm, einmal mit 13 mm und einmal mit 16 mm Blendendurchmesser durchgeführt. Aus den resultierenden Spektren wurden wieder die Nummern der Resonanzstellen und die Resonanzfrequenzen bestimmt und geplottet. Die Messdaten befinden sich in Table 3.

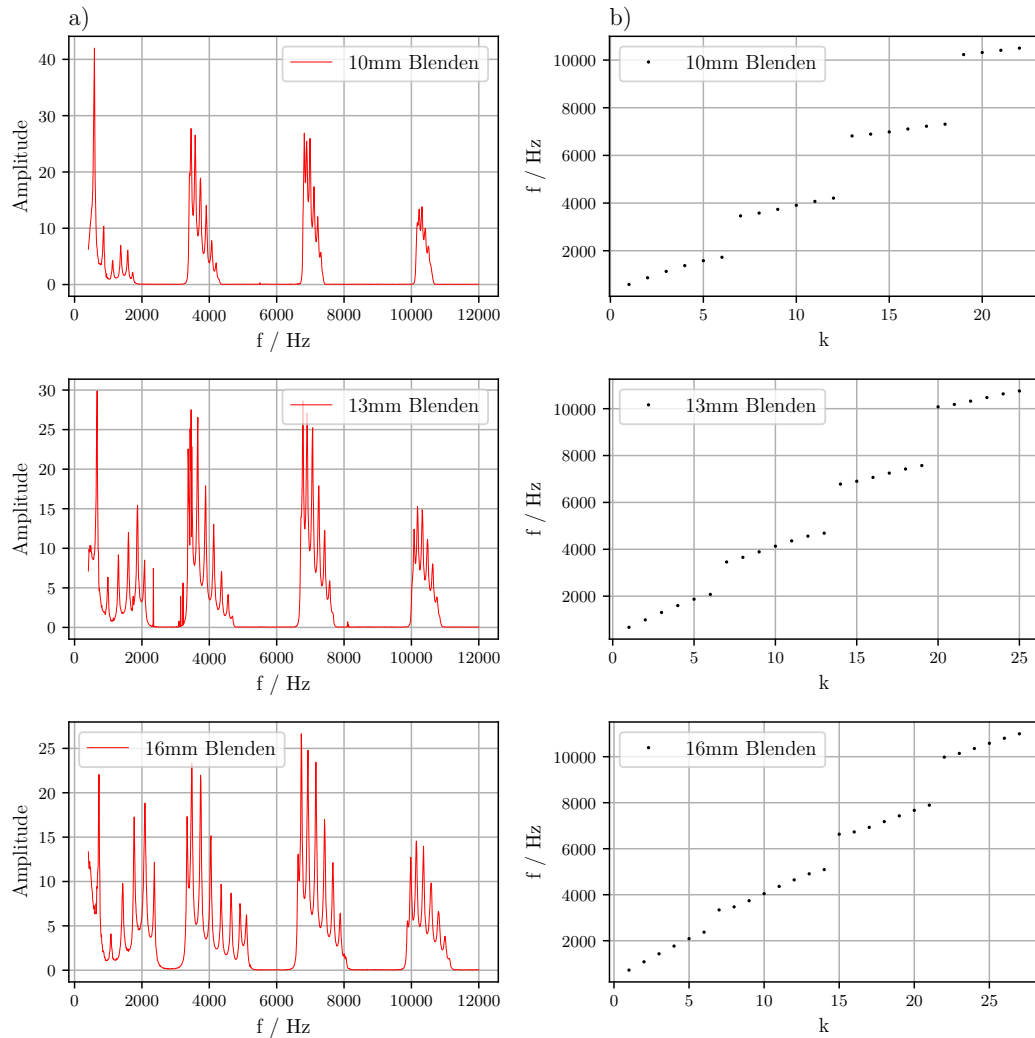
In den Spektren und Dispersionsrelationen sind Bandstrukturen zu erkennen, welche auf die eingebauten Blenden zurück zu führen sind. Es ist dabei zu beobachten, dass bei zunehmenden Blendendurchmesser die Bandlücken kleiner und die Bänder größer werden. Des weiteren ist eine Verschiebung der Bänder zu niedrigeren Frequenzen zu beobachten. Außerdem sind bei größeren Blenden mehr Resonanzen pro Band aufgetreten. Unabhängig vom Blendendurchmesser ist zu beobachten, dass bei steigender Frequenz die Bandlücken größer und die Bandbreiten kleiner werden. Aus den in 4 dargestellten Dispersionsrelationen wurden die spektralen Breiten der Bandlücken  $\Delta f_{\text{Lücke}}$  und Bänder  $\Delta f_{\text{Band}}$  bestimmt. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 4. Bei den Messdaten fällt auf, dass bei der 16 mm Blende das zweite Band breiter als das erste ist, was nicht zu den zuvor beobachteten Gesetzmäßigkeiten passt. Dies geht wahrscheinlich darauf zurück, dass Teile des ersten Bandes nicht mehr im Messbereich liegen.

**Tabelle 3:** Nummer der Resonanzstelle  $k$  und dazugehörige Frequenzen für verschiedene Blendendurchmesser

10 mm		13 mm		16 mm	
k	$f$ / Hz	k	$f$ / Hz	k	$f$ / Hz
1	586	1	672	1	723
2	866	2	989	2	1084
3	1134	3	1303	3	1432
4	1376	4	1598	4	1767
5	1581	5	1870	5	2090
6	1726	6	2075	6	2372
7	3462	7	3459	7	3340
8	3579	8	3656	8	3473
9	3736	9	3891	9	3739
10	3906	10	4132	10	4046
11	4070	11	4359	11	4362
12	4207	12	4561	12	4645
13	6817	13	4687	13	4910
14	6892	14	6781	14	5093
15	6986	15	6903	15	6630
16	7108	16	7068	16	6730
17	7223	17	7251	17	6929
18	7309	18	7426	18	7179
19	10 230	19	7574	19	7428
20	10 317	20	10 079	20	7669
21	10 409	21	10 182	21	7893
22	10 500	22	10 322	22	9982
		23	10 476	23	10 143
		24	10 632	24	10 358
		25	10 756	25	10 583
				26	10 803
				27	10 996

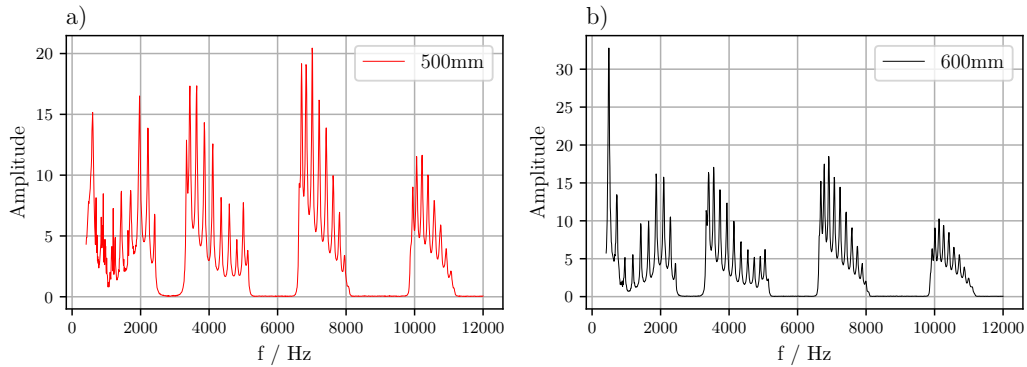
**Tabelle 4:** Spektrale Breiten der Bänder und Bandlücken

Band	10 mm		13 mm		16 mm	
	$\Delta f_{\text{Band}}$ / Hz	$\Delta f_{\text{Lücke}}$ / Hz	$\Delta f_{\text{Band}}$ / Hz	$\Delta f_{\text{Lücke}}$ / Hz	$\Delta f_{\text{Band}}$ / Hz	$\Delta f_{\text{Lücke}}$ / Hz
1	1140	1736	1403	1384	1649	986
2	745	2610	1228	2094	1753	1537
3	492	2921	793	2505	1263	2089
4	270		677		1014	



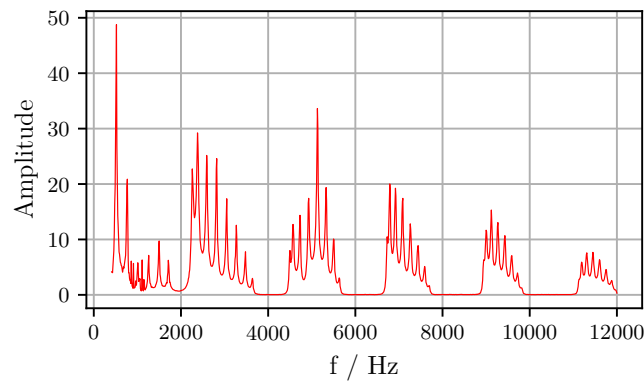
**Abbildung 4:** In a) sind die Spektren und in b) die Dispersionsrelationen für die angegebenen Blendendurchmesser für einen Frequenzbereich von 0,4 kHz bis 12 kHz dargestellt. Dabei sind vom Blendendurchmesser abhängige Bandstrukturen zu erkennen.

In Abbildung 5 sind wieder 0,4 kHz bis 12 kHz Spektren zu sehen. Diesmal für 10 und 12 50 mm Röhren mit 16 mm Blenden in den Zwischenräumen. Durch Vergleich der beiden Spektren untereinander und mit dem Spektrum aus 4 bei welchem ebenfalls 16 mm Blenden genutzt wurden, wird deutlich, dass die Bandstruktur nur von der genutzten Blende und nicht von der Rohrlänge abhängig ist, da sich die spektrale Breite der Bänder und Bandlücken, sowie deren Position bei Verlängerung des Rohres nicht ändert. Es wird jedoch eine Abnahme der Amplitude, sowie ein Anstieg der Resonanzen pro Band bei steigender Rohrlänge beobachtet.



**Abbildung 5:** In a) ist das Spektrum für 10 und in b) für 12 50 mm Röhren für einen Frequenzbereich von 0,4 kHz bis 12 kHz dargestellt. Die Bandstruktur ist dabei bei beiden Spektren gleich.

In Abbildung 6 ist ein Spektrum im selben Frequenzbereich zu sehen, nur wurden diesmal acht 75 mm Röhren mit 16 mm Blenden verwendet. Wird dies mit dem Spektrum aus 4 verglichen, in welchem der selbe Blendendurchmesser und die selbe Anzahl an Röhren, jedoch mit einer Länge von 50 mm, benutzt wurden, so fällt auf, dass sich nun mehr Bänder und Bandlücken im Frequenzbereich befinden, welche dementsprechend auch geringere Breiten haben. Die Anzahl der Resonanzen pro Band bleibt dabei jedoch gleich.



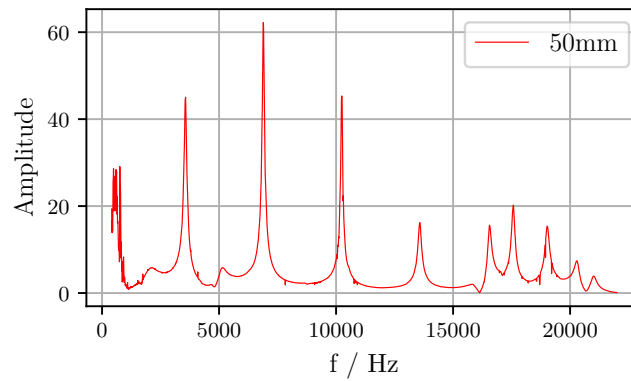
**Abbildung 6:** Spektrum für acht 75 mm Röhren in einem Frequenzbereich von 0,4 kHz bis 12 kHz.

## 4.2 Atom-Molekül-Ketten Ansatz

In Abbildung 7 ist ein 0,4 kHz bis 22 kHz Spektrum für ein 50 mm Rohr dargestellt. Dabei lassen sich die vier Resonanzen unterhalb von 15 kHz aufgrund ihres konstantes Abstandes als longitudinale Moden identifizieren, weshalb die restlichen Resonanzen radialen Moden entsprechen müssen. Aus dem Spektrum wurde der Abstand der Resonanzen zu  $\Delta f = 3342 \text{ Hz}$  bestimmt. Aus der Resonanzbedingung folgt folgende Gleichung für den theoretischen Abstand zwischen den Resonanzen

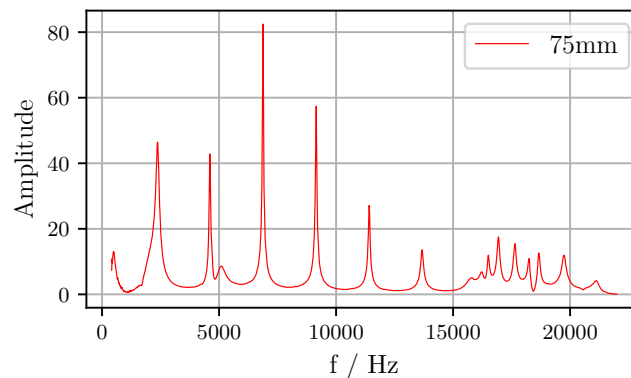
$$\Delta f = \frac{c}{2d}. \quad (2)$$

Mit der zuvor bestimmten Schallgeschwindigkeit und der Rohrlänge  $d = 50 \text{ mm}$  berechnet sich der Theoriewert zu  $\Delta f = (3369,4 \pm 11,8) \text{ Hz}$ . Somit weicht der bestimmte Wert um 0,8 % vom theoretisch errechneten Wert ab.



**Abbildung 7:** 0,4 kHz bis 22 kHz Spektrum für ein 50 mm Rohr. Die ersten vier Resonanzen entsprechen longitudinalen Moden, die folgenden entsprechen radialen Moden.

In Abbildung 8 ist ein Spektrum im selben Frequenzbereich zu sehen, jedoch wurde diesmal ein 75 mm Rohr verwendet. Die Resonanzen unterhalb von 15 kHz lassen sich abermals als longitudinale und die folgenden als radiale Moden identifizieren. Diesmal beträgt der aus dem Graphen ermittelte Abstand zwischen den Moden  $\Delta f = 2270$  Hz. Der theoretische Wert wird wieder mit (2) bestimmt und beträgt  $\Delta f = (2246,3 \pm 7,9)$  Hz. Die relative Abweichung beträgt dann 1,04 %.

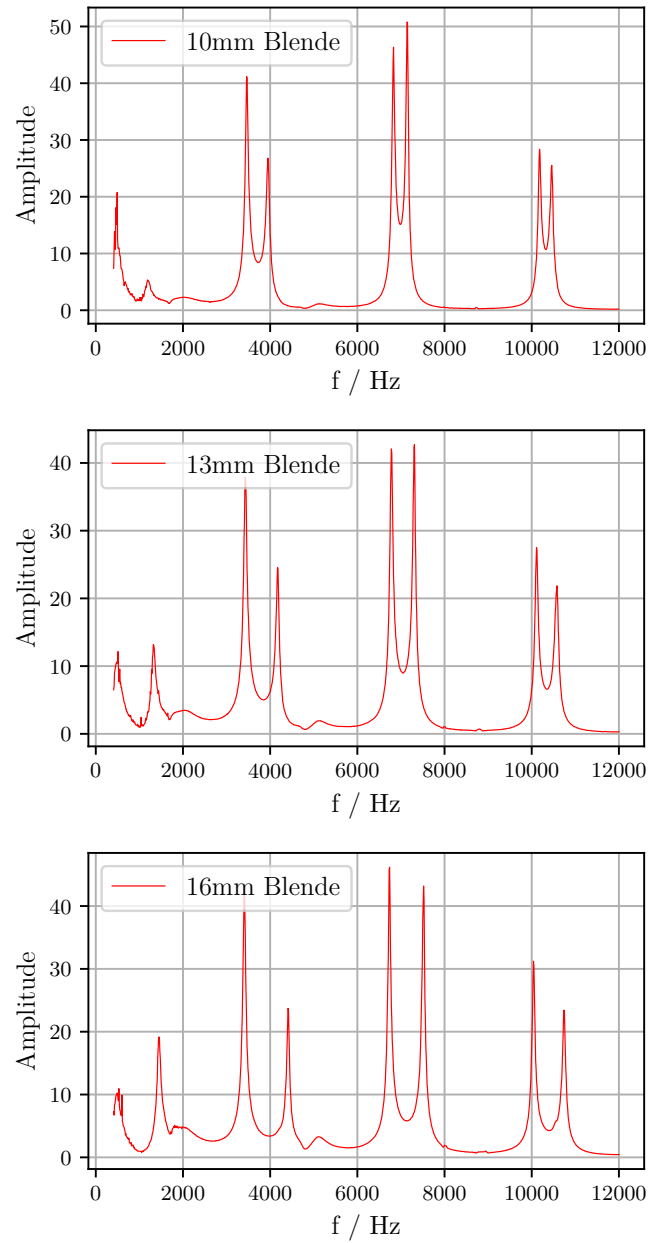


**Abbildung 8:** 0,4 kHz bis 22 kHz Spektrum für ein 75 mm Rohr. Die ersten sechs Resonanzen entsprechen longitudinalen Moden, die folgenden entsprechen radialen Moden.

In Abbildung 9 sind die Spektren für zwei 50 mm Röhren mit einer Blende dazwischen dargestellt. Dabei wurden Blenden mit verschiedenen Durchmessern benutzt. Einmal 10 mm, einmal 13 mm und einmal 16 mm. Dabei sind gepaarte Peaks zu beobachten. Der Peak mit der niedrigeren Frequenz entspricht einem bindenden Zustand, und der Peak mit

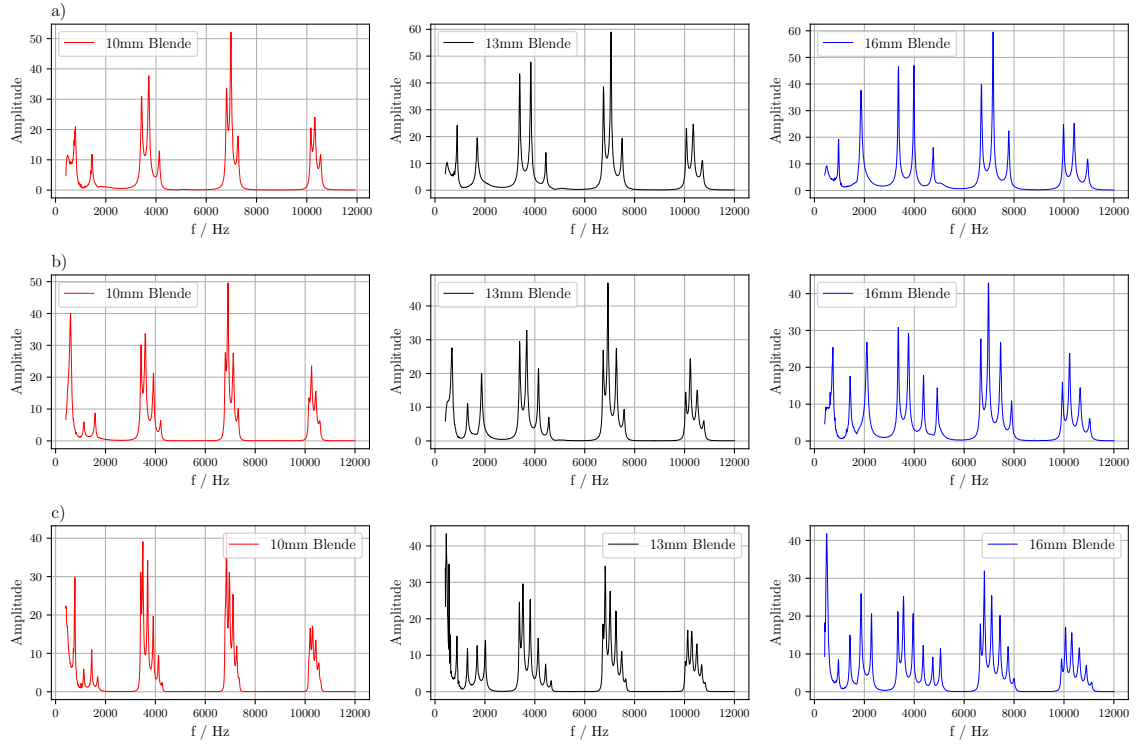
der höheren Frequenz entspricht einem antibindenden Zustand, da diese mehr Energie, welche in der Quantenmechanik proportional zur Frequenz ist, besitzen. Weiterhin ist zu beobachten, dass der Abstand zwischen bindenden und antibindenden Zuständen bei größer werdendem Blendendurchmesser größer wird, und dass sich die gepaarten Zustände in Richtung höherer Frequenzen beziehungsweise Energien verschieben.





**Abbildung 9:** 0,4 kHz bis 22 kHz Spektrum für zwei 50 mm Röhren mit einer Blende zwischen ihnen. Die Abhängigkeit der Zustände vom Blendendurchmesser sind an den Abständen zwischen den Peaks und ihrer Frequenzverschiebung zu erkennen.

Der Aufbau aus 9 entspricht nun einer Einheitszelle. In Abbildung 10 sind nun die Spektren für drei, vier und sechs dieser Einheitszellen mit jeweils allen drei Blendendurchmessern dargestellt. Die Entwicklung der Bandstrukturen aus den Aufspaltungen ist dabei deutlich zu erkennen. Aus 9 wurden nun die spektralen Abstände der bindenden und antibindenden Zustände bestimmt. Aus Abbildung 10 wurden die spektralen Breiten der entsprechenden Bänder bei sechs Einheitszellen bestimmt. Diese Daten sind in Tabelle 5 zu finden.



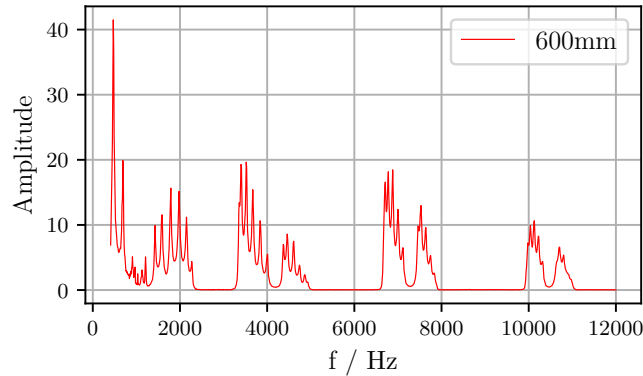
**Abbildung 10:** In a) sind die Spektren für drei, in b) für vier und in c) für sechs Einheitszellen dargestellt. Die Ausbildung der Bandstrukturen in Abhängigkeit der Anzahl an Einheitszellen wird deutlich.

**Tabelle 5:** Spektrale Breiten der bindenden und antibindenden Zustände, sowie der entsprechenden Bänder

$d_{\text{Blende}} / \text{mm}$	Band 1		Band 2		Band 3	
	$\Delta f / \text{Hz}$	$\Delta f_{\text{Band}} / \text{Hz}$	$\Delta f / \text{Hz}$	$\Delta f_{\text{Band}} / \text{Hz}$	$\Delta f / \text{Hz}$	$\Delta f_{\text{Band}} / \text{Hz}$
10	491	859	315	524	268	434
13	747	1273	524	923	457	792
16	1004	1701	791	1358	703	1214

Diese Daten bestätigen zum Einen die Beobachtungen, welche bei Abbildung 9 gemacht wurden, des weiteren wird deutlich, dass die Energieaufspaltung bei Erhöhung der Anzahl an Einheitszellen größer wird, da die Bänder deutlich breiter sind als der Abstand zwischen den bindenden und antibindenden Zuständen.

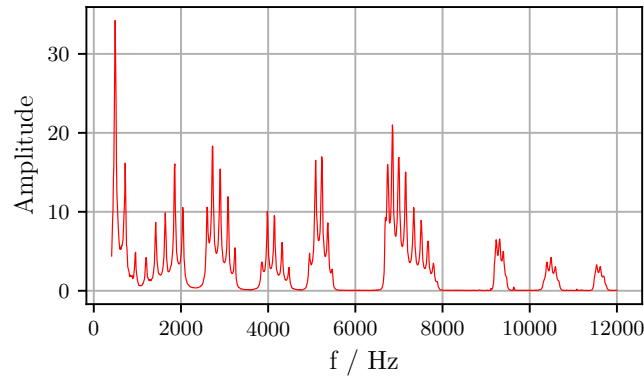
In Abbildung 11 ist ein Spektrum für zwölf 50 mm Röhren zwischen welchen jeweils abwechselnd 13 mm und 16 mm Blenden platziert wurden. Wird dies mit dem Spektrum für den selben Aufbau nur mit 13 mm Blenden aus Abbildung 4 verglichen, so fällt auf, dass die Bandstruktur, bis auf eine Lücke in der Mitte des Bandes, die selbe ist. So lässt sich Schlussfolgern, dass die kleineren Blenden für die "einhüllende" Bandstruktur und die größeren Blenden für die Aufspaltung der Bänder verantwortlich sind.



**Abbildung 11:** Spektrum für zwölf Röhren mit alternierenden Blendendurchmessern. Zusätzlich zur Bandstruktur ist eine Aufspaltung innerhalb der Bänder zu erkennen.

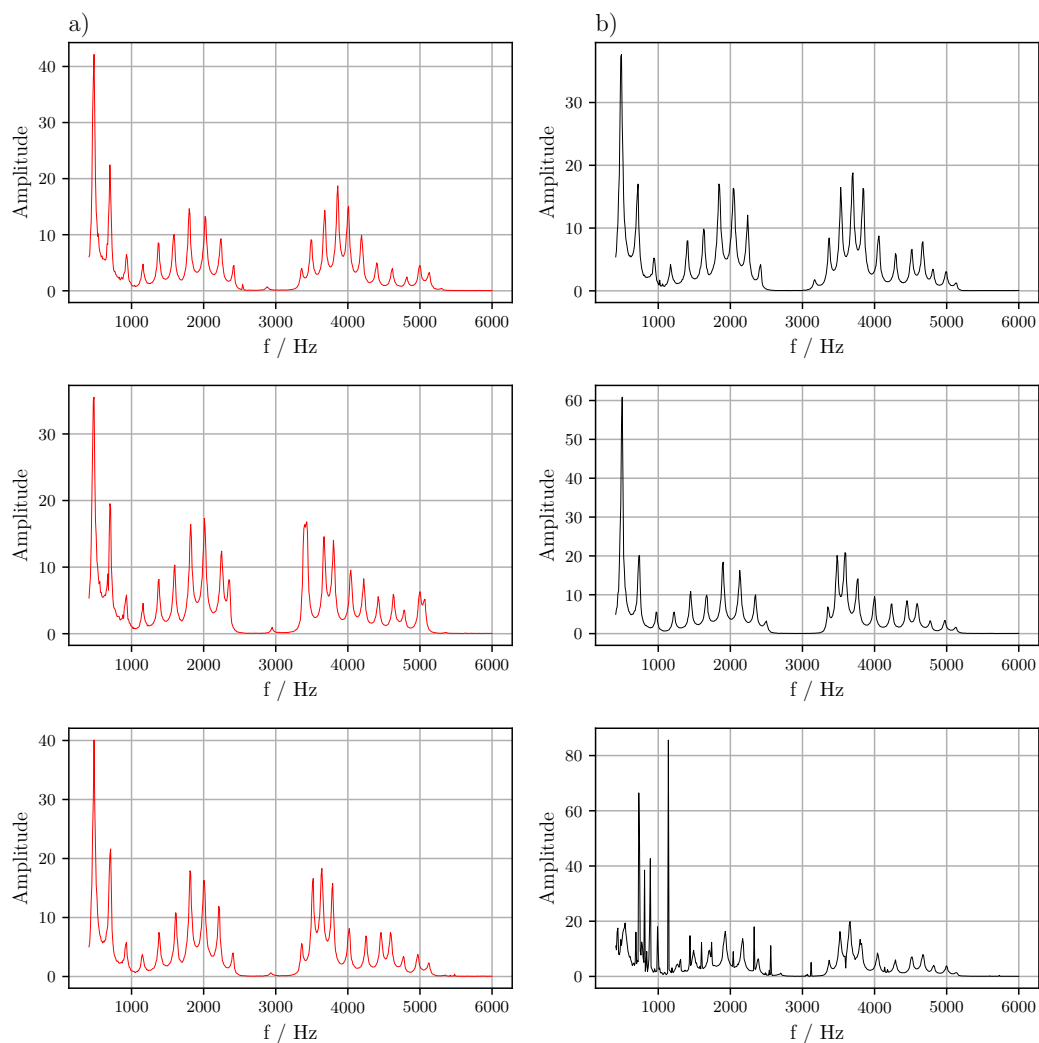
Bei Abbildung 12 ahndelt es sich um ein Spektrum für einen Aufbau bestehend aus fünf Einheitszellen, welche aus einem 50 mm Rohr, einer 16 mm Blende, einem 75 mm Rohr und wieder einer 16 mm Blende bestehen. Wird dieses Spektrum, mit den einzelnen Spektren für die einzelnen Röhren in den Abbildungen 7 und 8 verglichen, lassen sich die einzelnen Bänder den Resonanzen aus den einzelnen Röhren zuordnen. So lassen sich die Bänder ab 2 kHz folgendermaßen zuordnen: Das erste und sechste Band geht

auf Resonanzen in der 50 mm Röhre zurück. Das zweite, dritte, fünfte und siebte Band geht auf die Resonanzen in der 75 mm Röhre zurück. Das vierte Band geht auf beide Röhren zurück, da beide Röhren an dieser Stelle eine Resonanz vorweisen, weshalb es auch deutlich breiter als die anderen Bänder ist.



**Abbildung 12:** Spektrum für alternierende Röhrenlängen bei gleich bleibenden Blendendurchmessern. Verschiedene Bänder gehen dabei auf Resonanzen in den verschiedenen Röhren zurück.

In Abbildung 13 sind verschiedene Defekte bei einem Aufbau von zwölf 50 mm Röhren dargestellt. Einmal ist dies eine 75 mm Röhre an verschiedenen Positionen und einmal ist dies eine varrierende Rohrlänge an einer festen Position. Es ist zu beobachten, dass das verändern der Position des Defektes keine Auswirkungen auf die Frequenz des Defektes im Spektrum hat. Eine Änderung der Größe des Defektes jedoch bewirkt eine Änderung der Frequenz des Defektes.



**Abbildung 13:** Spektren für verschiedene Defekte. In a) sind Spektren für einen Defekt selber Größe an verschiedenen Positionen dargestellt. Dieser ist als kleiner Peak vor 3 kHz in der Bandlücke sichtbar. In b) sind Spektren für verschiedene Defektgrößen dargestellt. Es ist im ersten Spektrum ein kleiner Peak am Ende der Bandlücke erkennbar, welcher auf den Defekt zurückgeht. Im zweiten Spektrum ist kein Defekt erkennbar, weshalb dieser wahrscheinlich innerhalb eines Bandes liegt. Im dritten Spektrum sind viele Irregularitäten zu erkennen, höchstwahrscheinlich nicht auf den Defekt, sondern einen Messfehler zurückzuführen ist.

## 5 Diskussion

Die aus dem Experiment bestimmte Schallgeschwindigkeit von  $c = (336,94 \pm 1,18) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , mit einer Abweichung von 1,8 % vom Literaturwert, lässt auf eine ziemlich präzise Messung schließen.

Die Abbildungen 1, 3, 7 und 8 zeigen gut die Analogie zwischen dem quantenmechanischen Potentialtopf und dem Schall in der Röhre, welcher nur diskrete Werte als Eigenenergie zulässt. Die Resonanzfrequenzen sind ebenfalls diskret und die Anzahl nimmt mit zunehmender Länge der Röhre zu.

Die Abbildungen 4, 9 und 10 zeigen wie sich eine Schallwelle bzw. die Wellenfunktion eines Teilchens verhält, wenn diese an einem Hindernis mit variierenden Wirkungsquerschnitt gestreut wird. Die Bandstrukturen, welche aus der Streuung resultieren, zeigen ganz gut die Energieniveaus des Elektrons.

In Abbildung 5 ist zu sehen, dass die Anzahl an Resonanzen und Amplituden, mit steigender Anzahl von Elementarzellen zunimmt.

Ein Molekül, bestehend aus zwei Atomen, wurde in Abbildung 11 mit alternierenden Blendendurchmessern simuliert. Mit einem Spektrum verglichen, indem der Blendendurchmesser konstant bleibt, zeigt sich die Aufteilung in Zwischenstufen deutlich.

Im Ganzen betrachtet lässt sich sagen, dass die Nutzung von Schallwellen als Analogie zur Quantenmechanik durchaus funktioniert, vor allem um das Verhalten eines Elektrons in einem Gitter oder Potentialtopf zu untersuchen.

## Literatur

- [1] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [2] *Speed of sound in air*. URL: <https://hypertextbook.com/facts/2000/CheukWong.shtml> (besucht am 10.12.2018).