第一章

6.[三]　设 A，B 是两事件且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$. 问(1)在什么条件下 $P(AB)$取到最大值，最大值是多少？（2）在什么条件下 $P(AB)$取到最小值，最小值是多少？

解：由 $P(A) = 0.6$，$P(B) = 0.7$ 即知 $AB\neq\phi$，（否则 $AB=\phi$ 依互斥事件加法定理，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.6+0.7=1.3>1$ 与 $P(A\cup B)\leqslant 1$ 矛盾）.

从而由加法定理得

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$　　　　　　　　(*)

（1）从 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)$知，当 $AB=A$，即 $A\cap B$ 时 $P(AB)$取到最大值，最大值为

$P(AB)=P(A)=0.6$，

（2）从(*)式知，当 $A\cup B=S$ 时，$P(AB)$取最小值，最小值为

$P(AB)=0.6+0.7-1=0.3$　。

7.[四] 设 A，B，C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 A，B，C 至少有一个发生的概率。

解：P (A，B，C 至少有一个发生)$=P(A+B+C)= P(A)+ P(B)+ P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+ P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}$

9.　在电话号码薄中任取一个电话号码，求后面四个数全不相同的概率。(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0，1，2……9)

记 A 表“后四个数全不同”

∵　后四个数的排法有 10^4 种，每种排法等可能。

后四个数全不同的排法有 A_{10}^4

∴　　　　$P(A)=\frac{A_{10}^4}{10^4}=0.504$

11.[七]　某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶，红漆 3 桶。在搬运中所标笺脱落，交货人随意将这些标笺重新贴，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2

桶红漆顾客，按所定的颜色如数得到定货的概率是多少？

记所求事件为 A。

在 17 桶中任取 9 桶的取法有 C_{17}^{9} 种，且每种取法等可能。

取得 4 白 3 黑 2 红的取法有 $C_{10}^{4}\times C_{4}^{3}\times C_{3}^{2}$

故 $$P(A)=\frac{C_{10}^{4}\times C_{4}^{3}\times C_{3}^{2}}{C_{17}^{6}}=\frac{252}{2431}$$

17.[十三]　已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5, 求P(B\mid A\cup\overline{B})$。

解一：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7,\ P(\overline{B})=1-P(B)=0.6,\ A=AS=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$$
注意 $(AB)(A\overline{B})=\phi$. 故有

$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$。

再由加法定理，

$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$

于是 $P(B\mid A\cup\overline{B})=\dfrac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\dfrac{0.2}{0.8}=0.25$

解二：$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}\mid A)\xrightarrow{\text{由已知}}05=07\cdot P(\overline{B}\mid A)$

$\therefore\quad P(\overline{B}\mid A)=\dfrac{0.5}{0.7}=\dfrac{5}{7}\Rightarrow P(B\mid A)=\dfrac{2}{7}$　故　$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{5}$

$$P(B\mid A\cup\overline{B})\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{\frac{1}{5}}{0.7+0.6-0.5}=0.25$$

18.[十四]　$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，求$P(A\cup B)$。

解：由 $P(A\mid B)\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}\xrightarrow{\text{由已知条件}}$有 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{6}$

由乘法公式，得 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12}$

由加法公式，得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

19.[十五]　掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率（用两种方法）。

解：（方法一）（在缩小的样本空间 SB 中求 P(A|B)，即将事件 B 作为样本空间，求事件 A 发生的概率）。

掷两颗骰子的试验结果为一有序数组（x, y）（x, y=1,2,3,4,5,6）并且满足 x,+y=7，则样本空间为

S={(x, y)| (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}

每种结果（x, y）等可能。

A={掷二骰子，点数和为 7 时，其中有一颗为 1 点。故 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ }

方法二：（用公式 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

S={(x, y)| x =1,2,3,4,5,6; y = 1,2,3,4,5,6}}每种结果均可能

A=“掷两颗骰子，x, y 中有一个为“1”点”，B=“掷两颗骰子，x,+y=7”。则 $P(B)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$, $P(AB)=\frac{2}{6^2}$，

故 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

20.[十六]　据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：$P(A)$=P{孩子得病}=0.6，$P(B|A)$=P{母亲得病|孩子得病}=0.5，$P(C|AB)$=P{父亲得病|母亲及孩子得病}=0.4。求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解：所求概率为 $P(AB\overline{C})$（注意：由于“母病”，“孩病”，“父病”都是随机事件，这里不是求 $P(\overline{C}|AB)$

$P(AB)$= $P(A)$=$P(B|A)$=0.6×0.5=0.3, $P(\overline{C}|AB)$=1－$P(C|AB)$=1－0.4=0.6.

从而 $P(AB\overline{C})=P(AB)\cdot P(\overline{C}\,|AB)=0.3\times0.6=0.18$.

21.[十七]　已知 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取二次，每次随机地取一只，作不放回抽样，求下列事件的概率。

（1）二只都是正品（记为事件 A）

法一：用组合做 在 10 只中任取两只来组合，每一个组合看作一个基本结果，每种取法等可能。

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}=0.62$$

法二：用排列做 在 10 只中任取两个来排列，每一个排列看作一个基本结果，每个排列等可能。

$$P(A)=\frac{A_8^2}{A_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

法三：用事件的运算和概率计算法则来作。

记 A_1，A_2 分别表第一、二次取得正品。

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$$

（2）二只都是次品（记为事件 B）

法一：$$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

法二：$$P(B)=\frac{A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

法三：$$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

（3）一只是正品，一只是次品（记为事件 C）

法一：$$P(C)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

法二：　　$P(C)=\frac{(C_8^1\times C_2^1)\times A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{16}{45}$

法三：　　$P(C)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)$且$A_1\overline{A}_2$与$\overline{A}_1A_2$互斥

$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$

（4）第二次取出的是次品（记为事件 D）

法一：因为要注意第一、第二次的顺序。不能用组合作，

法二：　　$P(D)=\frac{A_9^1\times A_2^1}{A_{10}^2}=\frac{1}{5}$

法三：　　$P(D)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2)$且$A_1\overline{A}_2$与$\overline{A}_1A_2$互斥

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$$

22.[十八]　某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需的电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

记 H 表拨号不超过三次而能接通。

A_{i} 表第 i 次拨号能接通。

注意：第一次拨号不通，第二拨号就不再拨这个号码。

∵　　$H=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$　三种情况互斥

∴　　$P(H)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

如果已知最后一个数字是奇数（记为事件 B）问题变为在 B 已发生的条件下，求 H 再发生的概率。

$P(H\mid B)=PA_1\mid B+\overline{A}_1A_2\mid B+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\mid B)$

$$=P(A_1\mid B)+P(\overline{A}_1\mid B)P(A_2\mid B\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1\mid B)P(\overline{A}_2\mid B\overline{A}_1)P(A_3\mid B\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

24.[十九]　设有甲、乙二袋，甲袋中装有 n 只白球 m 只红球，乙袋中装有 N 只白球 M 只红球，今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到（即从乙袋中取到）白球的概率是多少？

记 A_1，A_2 分别表“从甲袋中取得白球，红球放入乙袋”

再记 B 表“再从乙袋中取得白球”。

∵　　$B=A_1B+A_2B$ 且 A_1，A_2 互斥

∴　　$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$$=\frac{n}{n+m}\times\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{n+m}\times\frac{N}{N+M+1}$$

[十九](2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球。先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球，求取到白球的概率。

记 C_1 为“从第一盒子中取得 2 只红球”。

C_2 为“从第一盒子中取得 2 只白球”。

C_3 为“从第一盒子中取得 1 只红球，1 只白球”，

D 为“从第二盒子中取得白球”，显然 C_1，C_2，C_3 两两互斥，$C_1\cup C_2\cup C_3=S$，由全概率公式，有

$P(D)=P(C_1)P(D|C_1)+P(C_2)P(D|C_2)+P(C_3)P(D|C_3)$

$$=\frac{C_5^2}{C_9^2}\cdot\frac{5}{11}+\frac{C_4^2}{C_9^2}\cdot\frac{7}{11}+\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{6}{11}=\frac{53}{99}$$

[二十二]　一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $P/2$（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解：A_i={他第 i 次及格}，i=1,2

已知 $P(A_1)=P(A_2|A_1)=P$，$P(A_2\mid\overline{A}_1)=P/2$

（1）B={至少有一次及格}

所以 $\overline{B}=\{两次均不及格\}=\overline{A}_1\overline{A}_2$

$$\therefore P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2\mid\overline{A}_1)]$$

$$=1-(1-P)(1-\frac{P}{2})=\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}P^2$$

（2）$P(A_1A_2)\overset{定义}{=\!=\!=}\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}$　　　　（*）

由乘法公式，有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P^2$

由全概率公式，有 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)$

$$=P\cdot P+(1-P)\cdot\frac{P}{2}$$

$$=\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2}$$

将以上两个结果代入（*）得 $P(A_1\mid A_2)=\dfrac{P^2}{\dfrac{P^2}{2}+\dfrac{P}{2}}=\dfrac{2P}{P+1}$

第二章　　随机变量及其分布

1.[一]　一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5，在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律

解：X 可以取值 3，4，5，分布律为

$$P(X=3)=P(\text{一球为3号, 两球为1,2号})=\frac{1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=4)=P(\text{一球为4号, 再在1,2,3中任取两球})=\frac{1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=5)=P(\text{一球为5号, 再在1,2,3,4中任取两球})=\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

也可列为下表

X：　3，　4，5

P：$\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{6}{10}$

6.[六]　一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 t 每个设备使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X=2)=C_5^2p^2q^{5-2}=C_5^2\times(0.1)^2\times(0.9)^3=0.0729$$

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\geq 3)=C_5^3\times(0.1)^3\times(0.9)^2+C_5^4\times(0.1)^4\times(0.9)+C_5^5\times(0.1)^5=0.00856$$

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\leq 3)=C_5^0(0.9)^5+C_5^1\times 0.1\times(0.9)^4+C_5^2\times(0.1)^2\times(0.9)^3$$
$$+C_5^3\times(0.1)^3\times(0.9)^2=0.99954$$

（4）至少有一个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.59049=0.40951$$

9.[十]　有甲、乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 4 杯。如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次。

（1）某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

（2）某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次，成功 3 次。试问他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验是相互独立的。）

解：（1）P (一次成功)=$\dfrac{1}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$

（2）P (连续试验 10 次，成功 3 次)= $C_{10}^3(\dfrac{1}{70})^3(\dfrac{69}{70})^7=\dfrac{3}{10000}$。此概率太小，按实际推断原理，就认为他确有区分能力。

[十六]　以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一顾客到达的等待时间（以分计），X 的分布函数是

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.4x}, & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

求下述概率：

（1）P{至多 3 分钟}；（2）P {至少 4 分钟}；（3）P{3 分钟至 4 分钟之间}；

（4）P{至多 3 分钟或至少 4 分钟}；（5）P{恰好 2.5 分钟}

解：（1）P{至多 3 分钟}= P {X≤3} $=F_X(3)=1-e^{-1.2}$

（2）P {至少 4 分钟} P (X ≥4) $=1-F_X(4)=e^{-1.6}$

（3）P{3 分钟至 4 分钟之间}= P {3<X≤4}= $F_X(4)-F_X(3)=e^{-1.2}-e^{-1.6}$

（4）P{至多 3 分钟或至少 4 分钟}= P{至多 3 分钟}+P{至少 4 分钟}

$$=1-e^{-1.2}+e^{-1.6}$$

（5）P{恰好 2.5 分钟}= P (X=2.5)=0

18.[十七]　设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ \ln x, 1\leq x<e,\\ 1, x\geq e.\end{cases}$，

求（1）P (X<2), P {0<X≤3}, P (2<X< 5/2)；（2）求概率密度 $f_X(x)$.

解：（1）P (X≤2)=F_X (2)= ln2，　P (0<X≤3)= F_X (3)－F_X (0)=1，

$$P(2<X<\frac{5}{2}=F_X(\frac{5}{2})-F_X(2)=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$$

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, 1<x<e,\\ 0, 其它\end{cases}$

22.[二十]　某种型号的电子的寿命 X（以小时计）具有以下的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2} & x>1000\\ 0 & 其它\end{cases}$$

现有一大批此种管子（设各电子管损坏与否相互独立）。任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少？

解：一个电子管寿命大于 1500 小时的概率为

$$P(X>1500)=1-P(X\le 1500)=1-\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=1-\left\{1000(-\frac{1}{x})\Big|_{1000}^{1500}\right\}$$

$$=1-(1-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$$

令 Y 表示“任取 5 只此种电子管中寿命大于 1500 小时的个数”。则 $Y\sim B(5,\frac{2}{3})$，

$$P(Y\ge 2)=1-P(Y<2)=1-\{P(Y=0)+P(Y=1)\}=1-\left\{(\frac{1}{3})^5+C_5^1\cdot(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3})^4\right\}$$

$$=1-\frac{1+5\times 2}{3^5}=1-\frac{11}{243}=\frac{232}{243}$$

23.[二十一]　设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分计）服从指数分布，其概率密度为：

$$F_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}},x>0\\ 0,其它\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。他一个月要到银行 5 次。以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的分布律。并求 P（Y≥1）。

解：该顾客“一次等待服务未成而离去”的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}f_X(x)dx=\frac{1}{5}\int_{10}^{+\infty}e^{-\frac{x}{5}}dx=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}$$

因此 $Y\sim B(5,e^{-2})$.即 $P(Y=k)=\begin{pmatrix}5\\k\end{pmatrix}e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k},(k=1,2,3,4,5$

$$P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5=1-(1-\frac{1}{7.389})^5=1-(1-0.1353363)^5$$

$$=1-0.8677^5=1-0.4833=0.5167.$$

24.[二十二]　设 K 在（0，5）上服从均匀分布，求方程 $4x^2+4xK+K+2=0$ 有实根的概率

∵ K 的分布密度为： $f(K)=\begin{cases}\dfrac{1}{5-0} & 0<K<5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

要方程有根，就是要 K 满足 $(4K)^2-4\times4\times(K+2)\geqslant0$。

解不等式，得 $K\geqslant2$ 时，方程有实根。

∴ $$P(K\geq2)=\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^5\frac{1}{5}dx+\int_5^{+\infty}0\,dx=\frac{3}{5}$$

31.[二十八] 设随机变量 X 在（0，1）上服从均匀分布

（1）求 $Y=e^X$ 的分布密度

∵ X 的分布密度为： $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x\text{为其他}\end{cases}$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又 $X=h(Y)=lnY$，反函数存在

且 $\alpha=min[g(0), g(1)]=min(1, e)=1$

$\beta=max[g(0), g(1)]=max(1, e)=e$

∴ Y 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases}f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & y\text{为其他}\end{cases}$

（2）求 $Y=-2lnX$ 的概率密度。

∵ $Y=g(X)=-2lnX$ 是单调减函数

又 $X=h(Y)=e^{-\frac{Y}{2}}$ 反函数存在。

且 $\alpha=min[g(0), g(1)]=min(+\infty, 0)=0$

$\beta=max[g(0), g(1)]=max(+\infty, 0)=+\infty$

∴ Y 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases}f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right|=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<y<+\infty\\ 0 & y\text{为其他}\end{cases}$

32.[二十九] 设 $X\sim N$（0，1）

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度

∵ X 的概率密度是 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又　　$X=h(Y)=\ln Y$　反函数存在

且　　$\alpha=\min[g(-\infty),g(+\infty)]=\min(0,+\infty)=0$

$\beta=\max[g(-\infty),g(+\infty)]=\max(0,+\infty)=+\infty$

∴　Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{y} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他}\end{cases}$$

（2）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。

在这里，$Y=2X^2+1$ 在$(+\infty,\ -\infty)$不是单调函数，没有一般的结论可用。

设 Y 的分布函数是 $F_Y(y)$，

则　　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2+1\leqslant y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $y<1$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant1$ 时：$F_y(y)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

故 Y 的分布密度 $\psi(y)$是：

当 $y\leqslant1$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>1$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

（3）求 $Y=|X|$的概率密度。

∵　Y 的分布函数为　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(|X|\leqslant y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant0$ 时，$F_Y(y)=P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

∴　Y 的概率密度为：

当 $y\leqslant0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

33.[三十]（1）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，求 $Y=X^3$ 的概率密度。

∵ $Y=g(X)=X^3$ 是 X 单调增函数，

又 $X=h(Y)=Y^{\frac{1}{3}}$，反函数存在，

且 $\alpha=min[g(-\infty), g(+\infty)]=min(0, +\infty)=-\infty$

$\beta=max[g(-\infty), g(+\infty)]=max(0, +\infty)=+\infty$

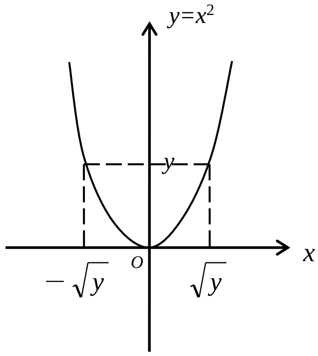
∴ Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=f[h(h)]\cdot|h'(y)|=f(y^{\frac{1}{3}})\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}, -\infty<y<+\infty, 但 y\neq 0$$

$$\psi(0)=0$$

（2）设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

法一：∵ X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$



$Y=x^2$ 是非单调函数

当 $x<0$ 时 $y=x^2$ ↙ 反函数是 $x=-\sqrt{y}$

当 $x<0$ 时 $y=x^2$ ↗ $x=\sqrt{y}$

∴ $Y\sim f_Y(y)=f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'+f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'$

$$=\begin{cases}0+\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

法二：$Y\sim F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(-\sqrt{y}<X\leq\sqrt{y})=P(X\leq\sqrt{y})-P(X\leq-\sqrt{y})$

$$\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-x}dx+0=1-e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

$$∴ Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0.\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$$

第三章　多维随机变量及其分布

5.[三]　设随机变量（X，Y）概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4 \\ 0,\ 其它 \end{cases}$

（1）确定常数 k。　　（2）求 $P\{X<1, Y<3\}$

（3）求 $P(X<1.5\}$　　（4）求 $P(X+Y\leqslant 4\}$

分析：利用 $P\{(X, Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{G\cap D_o} f(x,y)dx\,dy$ 再化为累次积分，其中

$$D_o=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}0<x<2, \\ 2<y<4\end{array}\right.\right\}$$

解：（1）$\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy=\int_0^2\int_2^1 k(6-x-y)dydx$，$\therefore k=\dfrac{1}{8}$

（2）$P(X<1, Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3 \dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{3}{8}$

（3）$P(X\le 1.5)=P(X\le 1.5, Y<\infty)=\int_0^{1.5} dx\int_2^4 \dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{27}{32}$

（4）$P(X+Y\le 4)=\int_0^2 dx\int_0^{4-x}\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{2}{3}$

7..　设二维随机变量（X，Y ）的概率密度为

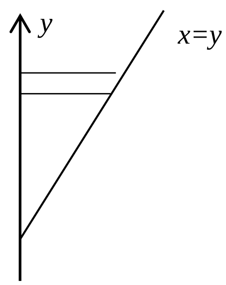
$$f(x,y)=\begin{cases} 4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & 其它 \end{cases}$$　求边缘概率密度.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4x^2(2-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & 其它\end{cases}$

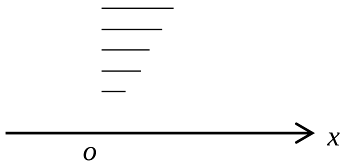
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4y(3-4y+y^2) & 0\le y\le 1 \\ 0 & 其它\end{cases}$$

8.[六]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y \\ 0,\ 其它. \end{cases}$ 求边缘概率密度。



解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$



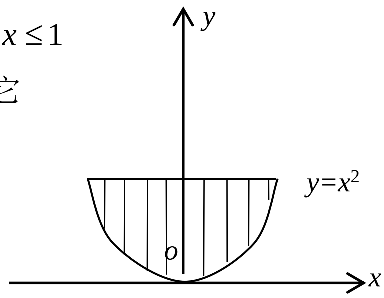
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$

10．[七]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

（1）试确定常数 c。（2）求边缘概率密度。

解: $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} cx^2ydx=c\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{21}c\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$



$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}\frac{21}{4}d^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

15. 第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立。

解：放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{36}$$

在放回抽样的情况下，X 和 Y 是独立的

不放回抽样的情况：

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

$$P\{X=0\}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{Y=0, X=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}+\frac{2}{11}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

∴ X 和 Y 不独立

[二十一]　设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<+\infty \\ 0 & , \text{其它} \end{cases}$$

（1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$

（3）求函数 $U=\max(X, Y)$的分布函数。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$$\therefore \quad b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases} 0 & x\le 0 \text{或} x\ge 1 \\ \int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} 0 & , \quad y\le 0 \\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y} & \quad y>0 \end{cases}$$

（3）$F_u(\omega)=P\{U\le u\}=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u, Y\le u\}$

$$=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u} f(x,y)dx\,dy$$

$u<0$, $F_U(u)=0$

$$0\le u<1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u\ge 1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$$

第四章

2.[二]　某产品的次品率为0.1，检验员每天检验4次。每次随机地抽取10件产品进行检验，如果发现其中的次品数多于1，就去调整设备，以X表示一天中调整设备的次数，试求E (X)。（设诸产品是否是次品是相互独立的。）

解：设表示一次抽检的10件产品的次品数为 ξ

P=P（调整设备）=$P(\xi>1)=1-P(\xi\le 1)=1-[P(\xi=0)+P(\xi=1)] \overset{\text{查二项分布表}}{=\!=}$ $1-0.7361=0.2639$.

因此 X 表示一天调整设备的次数时 $X\sim B(4,\ 0.2639)$. $P(X=0)=\binom{4}{0}\times0.2639^0\times0.7361^4=0.2936$.

$P(X=1)=\binom{4}{1}\times0.2639^1\times0.7361^3=0.4210$, $P(X=2)=\binom{4}{2}\times0.2639^2\times0.7361^2=0.2264$.

$P(X=3)=\binom{4}{3}\times0.2639^3\times0.7361=0.0541$, $P(X=4)=\binom{4}{4}\times0.2639\times0.7361^0=0.0049$.从而

$E(X)=np=4\times0.2639=1.0556$

3.[三]　有3只球，4只盒子，盒子的编号为1，2，3，4，将球逐个独立地，随机地放入4只盒子中去。设 X 为在其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 X=3表示第1号，第2号盒子是空的，第3号盒子至少有一只球），求 $E(X)$。

∵　事件 $\{X=1\}$={一只球装入一号盒，两只球装入非一号盒}+{两只球装入一号盒，一只球装入非一号盒}+{三只球均装入一号盒}（右边三个事件两两互斥）

∴　$$P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$$

∵事件“X=2”=“一只球装入二号盒，两只球装入三号或四号盒”+“两只球装二号盒，一只球装入三或四号盒”+“三只球装入二号盒”

∴　$$P(X=2)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{19}{64}$$

同理：　$$P(X=3)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

故 $$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$$

5.[五] 设在某一规定的时间间段里，其电气设备用于最大负荷的时间 X（以分计）是一个连续型随机变量。其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1500)^2}x, & 0\le x\le 1500\\ \dfrac{-1}{(1500)^2}(x-3000), & 1500<x\le 1500\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_0^{1500}x\cdot\frac{x}{(1500)^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\cdot\frac{(3000-x)}{(1500)^2}dx$$

$$=\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{1500}+\frac{1}{(1500)^2}\left[1500x^2-\frac{x^3}{3}\right]\bigg|_{1500}^{3000}$$

$$=1500(\text{分})$$

6.[六] 设随机变量 X 的分布为

X	-2	0	2
P_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$， $E(3X^2+5)$

解： $E(X)=(-2)\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$

$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+E(5)=8.4+5=13.4$

7.[七] 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

求（1）$Y=2X$ （2）$Y=e^{-2x}$ 的数学期望。

解：（1）$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$$=\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_{0}^{+\infty}=2$$

（2）$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}ex$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{3}$$

8.[八]　设（*X*，*Y*）的分布律为

Y \ X	1	2	3
－1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$，$E(Y)$。
(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$。
(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$。

解：（1）由 *X*，*Y* 的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
－1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

E(X)=1×0.4+2×0.2+3×0.4
=0.4+0.4+1.2=2.
E(Y)= (－1)×0.3+0×0.4
+1×0.3=0.

（2）

$Z=Y/X$	－1	－1/2	－1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(Z)$= (－1)×0.2+(－0.5)×0.1+(－1/3)×0+0×0.4+1/3×0.1+0.5×0.1+1×0.1
= (－1/4)+1/30+1/20+1/10=(－15/60)+11/60=－1/15.

（3）

$Z(X-Y)^2$	0 $(1-1)^2$	1 $(1-0)^2$ 或 $(2-1)^2$	4 $(2-0)^2$ 或 $(1-(-1))^2$ 或 $(3-1)^2$	9 $(3-0)^2$ 或 $(2-(-1))^2$	16 $(3-(-1))^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$E(Z)$=0×0.1+1×0.2+4×0.3+9×0.4+16×0=0.2+1.2+3.6=5

10.[十]　一工厂生产的某种设备的寿命 *X*（以年计）服从指数分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 工厂规定出售的设备若在一年内损坏，可予以调换。若工厂出售一台设备可赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元。试求厂方出售一台设备净赢

利的数学期望。

解：一台设备在一年内损坏的概率为$P(X<1)=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{4}}$

故$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}$. 设 Y 表示出售一台设备的净赢利

则 $$Y=f(X)=\begin{cases}(-300+100)=-200, (X<1)\\ 100, (X\geq 1).\end{cases}$$

故 $E(Y)=(-200)\cdot P(X<1)+100\cdot P(X\geq 1)=-200+200e^{-\frac{1}{4}}+100e^{-\frac{1}{4}}$

$$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$$

11.[十一]　某车间生产的圆盘直径在区间（a, b）服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解：设 X 为圆盘的直径，则其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in(a,b)\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

用 Y 表示圆盘的面积，则$Y=\frac{1}{4}\pi X^2$, 从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 f(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2dx=\frac{\pi}{4(b-a)}\cdot\frac{(b^3-a^3)}{3}=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2).$$

12.[十三]　设随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0 & , x\leq 0\end{cases}$$

求（1）$E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1，X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$

解：（1）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\int_0^\infty x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^\infty x\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=\left[-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty+\left[-xe^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

（2）$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\int_0^\infty x^2\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=1-3\left[-x^2e^{-4x}-\frac{x}{2}e^{-4x}-\frac{1}{8}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

（3） $E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

14.[十五]　共有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁。设抽取钥匙是相互独立的，等可能性的。若每把钥匙经试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望。

（1）写出 X 的分布律，（2）不写出 X 的分布律。

解：（1）

X	1	2	3	$\cdots\cdots n$
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$	$\cdots\cdots\frac{1}{n}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}\cdots\cdots+n\times\frac{1}{n}=\frac{1+2\cdots\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

（2）设一把一把钥匙的试开，直到把钥匙用完。

设　$X_i=\begin{cases} i & \text{第}i\text{次试开能开门} \\ 0 & \text{第}i\text{次试开不能开门} \end{cases}$　　$i=1, 2\ \cdots\cdots\ n$

则试开到能开门所须试开次数为 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

∵

X_i	i	0
P	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)=i\cdot\frac{1}{n}$

$i=1, 2\cdots\cdots n$

∴　$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}=\frac{n+1}{2}$

17. 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0 \\ 0, x\le 0\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是常数，求 $E(X)$，$D(X)$。

解：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-\frac{x}{\theta}})=-xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=0+(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}})\Big|_0^{+\infty}=\theta$$

又 $E(X^2)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx \overset{令 t=\frac{x}{\theta}}{=\!=\!=\!=} \theta^2\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt=2\theta^2$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$

23．[二十五]　设随机变量 X 和 Y 的联合分布为：

Y \ X	−1	0	1
−1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证：X 和 Y 不相关，但 X 和 Y 不是相互独立的。

证：∵　$P[X=1\quad Y=1]=\frac{1}{8}$　　$P[X=1]=\frac{3}{8}$　　$P[Y=1]=\frac{3}{8}$

$P[X=1\quad Y=1]\neq P[X=1]\,P[Y=1]$

∴　X，Y 不是独立的

又　$E(X)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$E(Y)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$COV(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-EX\cdot EY$

$=(-1)(-1)\ \frac{1}{8}+(-1)1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0$

∴　X，Y 是不相关的

26.[二十八]　设随机变量（X_1，X_2）具有概率密度。

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(x+y),\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant y\leqslant 2$$

求　$E(X_1)$，$E(X_2)$，COV（X_1，X_2），$\rho_{X_1X_2}$　$D(X_1+X_2)$

解：　$E(X_2)=\int_0^2dx\int_0^2x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$COV(X_1X_2)=E\{(X_1-\frac{7}{6})(X_2-\frac{7}{6})\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 (x-\frac{7}{6})(y-\frac{7}{6})\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=-\frac{1}{36}$$

$$D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2COV(X_1,X_2)$

$$=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$$

第七章　参数估计

1．[一]　随机地取 8 只活塞环，测得它们的直径为（以 mm 计）

74.001　74.005　74.003　74.001　74.000　73.998　74.006　74.002

求总体均值 μ 及方差 σ² 的矩估计，并求样本方差 S^2。

解：μ，σ² 的矩估计是　$\hat{\mu}=\overline{X}=74.002$　$,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2=6\times 10^{-6}$

$S^2=6.86\times 10^{-6}$。

2．[二]设 X_1，X_1，…，X_n 为准总体的一个样本。求下列各总体的密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量。

（1）$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, x>c\\ 0, 其它\end{cases}$　其中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$，θ 为未知参数。

（2） $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}\,x^{\sqrt{\theta}-1},0\le x\le 1\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$ 其中 $\theta>0$，θ 为未知参数。

（5） $P(X=x)=\binom{m}{x}p^x(1-p)^{m-x},x=0,1,2,\cdots,m,0<p<1,p$ 为未知参数。

解：（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{c}^{+\infty}\theta\,c^{\theta}x^{-\theta}dx=\frac{\theta\,c^{\theta}}{\theta-1}c^{-\theta+1}=\frac{\theta\,c}{\theta-1}$，令 $\frac{\theta\,c}{\theta-1}=\overline{X}$，得 $\theta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$

（2） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}\sqrt{\theta}\,x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，令 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$，得 $\theta=(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}})^2$

（5）$E(X)=mp$ 令 $mp=\overline{X}$， 解得 $\hat{p}=\frac{\overline{X}}{m}$

3．[三]求上题中各未知参数的极大似然估计值和估计量。

解：（1）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\theta^n c^{n\theta}(x_1x_2\cdots x_n)^{-\theta+1}$

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta)+n\theta\ln c+(1-\theta)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\ \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{\theta}{n}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln c}$$ （解唯一故为极大似然估计量）

（2） $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\theta^{-\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1},\ln L(\theta)=\frac{-n}{2}\ln(\theta)+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{-n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,\quad \hat{\theta}=(n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2$ 。(解唯一)故为极大似然估计量。

（5） $L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\begin{pmatrix}m\\x_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}m\\x_n\end{pmatrix}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}$，

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p),$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

解得 $p=\frac{\sum_{i=2}^{n}x_i}{mn}=\frac{\overline{X}}{m}$，（解唯一）故为极大似然估计量。

4．[四(2)] 设 X_1，X_1，…，X_n 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本，试求 λ 的极大似然估计量及矩估计量。

解：（1）矩估计 $X\sim\pi(\lambda)$，$E(X)=\lambda$，故$\hat{\lambda}=\overline{X}$ 为矩估计量。

（2）极大似然估计 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i;\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$，

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!-n\lambda$$

$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0$，解得 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 为极大似然估计量。

（其中 $p(x_i;\lambda)=P\{X=x_i\}=\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$，$x_i=0,1,\cdots$)

5．[六] 一地质学家研究密歇根湖湖地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立，并由过去经验知，它们都服从参数为 n=10，P 的二项分布。P 是该地区一块石子是石灰石的概率。求 p 的极大似然估计值，该地质学家所得的数据如下

样品中属石灰石的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

解：λ 的极大似然估计值为$\hat{\lambda}=\overline{X}$=0.499

[四(1)] 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$为未知参数。已知取得了样本值 x_1=1，x_2=2，x_3=1，试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：（1）求 θ 的矩估计值

$$E(X)=1\times\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2$$
$$=[\theta+3(1-\theta)][\theta+(1-\theta)]=3-2\theta$$

令$E(X)=3-2\theta=\overline{X}$

则得到 θ 的矩估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}=\dfrac{3-\dfrac{1+2+1}{3}}{2}=\dfrac{5}{6}$

（2）求 θ 的最大似然估计值

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i=x_i\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2$$
$$=2\theta^5(1-\theta)$$

$\ln L(\theta)$=ln2+5lnθ+ln(1－θ)

求导　$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$

得到唯一解为$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$

[十]　设 X_1，X_2，　X_3，　X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中 θ 未知，设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)$$

$$T_2=(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)/5$$

$$T_3=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4$$

（1）指出 T_1，T_2，　T_3 哪几个是 θ 的无偏估计量；

（2）在上述 θ 的无偏估计中指出哪一个较为有效。

解：（1）由于 X_i 服从均值为 θ 的指数分布，所以

$E(X_i)=\theta$,　　$D(X_i)=\theta^2$,　i=1,2,3,4

由数学期望的性质 2°，3°有

$$E(T_1)=\frac{1}{6}[E(X_1)+E(X_2)]+\frac{1}{3}[E(X_3)+E(X_4)]=\theta$$

$$E(T_2)=\frac{1}{5}[E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4)]=2\theta$$

$$E(T_3)=\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)]=\theta$$

即 T_1，T_2 是 θ 的无偏估计量

（2）由方差的性质 2°，3° 并注意到 X_1，X_2， X_3， X_4 独立，知

$$D(T_1)=\frac{1}{36}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[D(X_3)+D(X_4)]=\frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_2)=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)]=\frac{1}{4}\theta^2$$

$D(T_1)> D(T_2)$

所以 T_2 较为有效。

14.[十四] 设某种清漆的9个样品，其干燥时间（以小时计）分别为6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0。设干燥时间总体服从正态分布 N ~（μ，σ^2），求 μ 的置信度为0.95 的置信区间。（1）若由以往经验知 σ=0.6（小时）（2）若 σ 为未知。

解：（1）μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（$\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$），

计算得 $\overline{X}=6.0$, 查表$z_{0.025}=1.96,\sigma=0.6$, 即为$(6.0\pm\frac{0.6}{\sqrt{9}}\times1.96)=(5.608,6.392)$

（2）μ 的置信度为 0.95 的置信区间为（$\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$），计算得 $\overline{X}=6.0$，查表 $t_{0.025}(8)$=2.3060.

$$S^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{8}\times2.64=0.33.\ \text{故为}(6.0\pm\frac{\sqrt{0.33}}{3}\times2.3060)=(5.558,6.442)$$

16.[十六] 随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮弹口速度的样本标准差为 s=11(m/s)。设炮口速度服从正态分布。求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：σ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=\left(\frac{\sqrt{8}\times11}{\sqrt{17.535}},\frac{\sqrt{8}\times11}{\sqrt{2.18}}\right)=(7.4,\ 21.1)$$

其中 α=0.05, n=9

查表知 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535,\ \chi^2_{0.975}(8)=2.180$