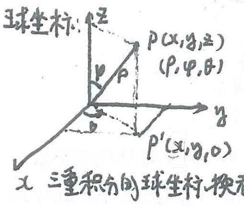
三重积分的柱坐标换元公式：$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_V f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$

球坐标：



$0\le\rho<+\infty$　$0\le\varphi\le\pi$　$0\le\theta<2\pi$

$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$　$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w}&\frac{\partial y}{\partial w}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$

三重积分的球坐标换元公式：$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_V f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

重积分在一般曲线坐标系中的计算法

$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_\sigma f[x(u,v),y(u,v)]\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$　定积分：$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv=\iiint\limits_V f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\cdot\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$

1° 三重积分计算法：(1) 直角坐标系

A. 投影法（化三重积分为累次积分）

①画出V（假定满足要求）

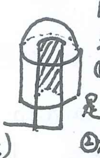
②先穿线（x、y都固定，与z平行的线）

③次截面（x固定）　x-型：$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$

④后立体

y-型：$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$

B. 平面截割法

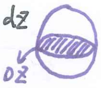


选择原因：①被积函数是一元函数　$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int_c^d dz\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)d\sigma$

在 $\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)d\sigma$ 中，将z视为常数

②截口为规则　有原式 $=\int_c^d dz\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}dx\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}f(x,y,z)dy$

③要在正确方向上截割，注意D(z)变动　$f(x,y,z)$ 仅为z表达式时　原式 $=\int_c^d g(z)\,S_{D_z}\,dz$



(2) 柱坐标

选择理由：①边界上出现了柱面　②被积函数出现 x^2+y^2 的形式　$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$

方法：1° 画出V，边界面用r, θ, z表示　2° 先穿线　3° 次截面　4° 后立体

一般采用先z后r最后θ的积分顺序

(3) 球坐标

选择理由：(1) 边界上出现了球面　(2) 式中出现了 $x^2+y^2+z^2$ 的形式　$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$

S.2 曲面积分

1° 第一类曲面积分：曲面S的方程 $F(x,y,z)=0$ 可改写为 $z=z(x,y)$，面积元素 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,d\sigma$

$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\sigma_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,d\sigma$　$z=z(x,y)$ 在 $(x,y,z(x,y))$ 处法矢量计算：$z(x,y)-z=0$

方法：① $z=z(x,y)$（S在xoy平面投影 D_{xy}）③代入　于是有 $\vec n=z_x'(x,y)\vec i+z_y'(x,y)\vec j-\vec k$

② $dS\xlongequal{\text{转化}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,d\sigma_{xy}=\dfrac{d\sigma_{xy}}{|\cos\gamma|}$　④ D_{xy} 上二重积分（D_{xy} 是S的投影）　而 $\vec n$ 与z轴正向夹角为γ

$\cos\gamma=\dfrac{\vec n\cdot\vec k}{|\vec n||\vec k|}=\dfrac{-1}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}}$

2° 第一类曲面积分计算法

① 用 $z=z(x,y)$ 将z替换为x, y表达式

② $dS\xlongequal{\text{转化}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,d\sigma_{xy}=\dfrac{d\sigma_{xy}}{|\cos\gamma|}$

③ 进行 D_{xy} 上的二重积分

2° 第二类曲面积分：单位时间从曲面S指定侧流过该曲面的流量

① $\vec n_0$ 为S上指向流动方向那一侧的单位法线矢量 $\vec n_0=\vec n_0(x,y,z)=\cos\alpha\,\vec i+\cos\beta\,\vec j+\cos\gamma\,\vec k$（α, β, γ是 $\vec n$ 的方向角）

② 矢量函数 $\vec A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q(x,y,z)\vec j+R(x,y,z)\vec k$

$\vec A\cdot\vec n^0=\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 为P、Q、R沿曲面S指定侧的第二类曲面积分

3° 第二类曲面积分计算法

①常规法：

I. 用 $z=z(x,y)$ 将式中的z换成x, y

$\iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\,dS\Rightarrow\iint\limits_S R(x,y,z(x,y))\cos\gamma\,dS$

II. 视角度，定符号

$\iint\limits_S R(x,y,z(x,y))\cos\gamma\,dS\Rightarrow\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\dfrac{\cos\gamma}{|\cos\gamma|}d\sigma_{xy}=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))(\pm d\sigma_{x,y})$

III. 化成相应平面投影区域 $D_{x,y}$ 上的二重积分。

看到特别难/怪的形式，应考虑应用轮换性

② 如果该曲面为闭曲面，则使用GAUSS定理将其转化为三重积分。

③ 如果该曲面不封闭，则添加易于计算的辅助面 → 计算三重积分后扣去辅助面积分。（第二类曲面积分）

④ 当 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$ 时，GAUSS定理无法直接使用，使用一般法解决。

3° Gauss定理　满足一定条件，由第二类曲面积分化为三重积分

V是空间有界的闭区域，S是V的边界，P、Q、R在V上有连续一阶偏导数，则

$\iiint\limits_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\oiint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$ 其中S上取外侧（从内向外为外侧）$=\iiint_V \mathrm{div}\,A\,dV$

S.3 曲线积分

1° 第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）　$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$

① 将一般式化为参数式 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$　③ $\int_L f(x,y,z)dl=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt$

② $dl=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt$

4° 第一类曲线积分计算法

按定义计算即可，注意考虑轮换性与三角代换公式。

2° 第二类曲线积分　变力沿光滑曲线从A移动到B所做的功

定义：L上任取一点 $M(x,y,z)$ 作曲线L的单位切线 $\vec\tau^0=\vec\tau^0(x,y,z)=\cos\alpha\,\vec i+\cos\beta\,\vec j+\cos\gamma\,\vec k$

矢量：$\vec A=\vec A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q(x,y,z)\vec j+R(x,y,z)\vec k$

$\int\limits_{\Gamma_{AB}}\vec A\cdot\vec\tau\,dl=\int\limits_{\Gamma_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_{t_A}^{t_B}P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt+\int_{t_A}^{t_B}Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt+\int_{t_A}^{t_B}R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$

$\vec\tau dl=dx\vec i+dy\vec j+dz\vec k\triangleq d\vec l$　有向弧长元素

5° 第二类曲线积分计算法

I. 非常规法：

①求 $\vec\tau_0$（切矢量）②化为第一类曲线积分

II. 常规解法：

①参数化：$P_{AB}:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

②代入原式中：$\int_{\Gamma_{AB}}P(x(t),y(t),z(t))dx(t)+Q(x(t),y(t),z(t))dy(t)+R(x(t),y(t),z(t))dz(t)$ 然后化简

③ 起点在下，终点在上，无论其数值大小

III. 当曲线位于平面上时

①符合曲线封闭条件时　使用格林公式：$\oint_L=\iint_D d\sigma$ 将第二类曲线积分化为二重积分

②不封闭时，添加辅助线使之封闭，再使用格林公式转化，结果需减去辅助线的第二类曲线积分

③寻找单值函数 $dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 则 $\oint_L Pdx+Qdy=U(B)-U(A)$（$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 成立）

④当 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 时，分情况讨论：

1 $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=0$，当曲线不包围洞时。

2 $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\oint_{\Gamma'}Pdx+Qdy$ 当Γ与Γ'两曲线同向并包围同洞时

3 $\oint_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy=\oint_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy$ 两曲线同起点同终点，并且不夹洞　可用此法替换积分曲线

IV. 当曲线在空间中时

①符合曲线封闭条件时　使用斯托克斯公式化第二类曲线积分为第二类曲面积分，再寻找一个易于计算的面即可

②当 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$ 时

1 找到U满足 $du=Pdx+Qdy+Rdz$，则 $\int=\int_A^B U$

2 找到同起点同终点易于计算曲线即可

3° 格林公式　满足一定条件，由第二类曲线积分化为二重积分

设σ是平面有界闭区域，它的边界由有限多条分段光滑曲线所围成，函数在σ上有连续的一阶偏导数。

则有 $\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_\sigma(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$　$\oint_L$ 表示闭路积分，封闭曲线正向：行进方向上所围区域总在左侧

注意！对调了！

环绕这个洞的循环常数

在复连通域σ（内部有洞）上，对任一包围同一个洞的正向光滑曲线，有 $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\omega$（常数）

4° 曲线积分与路径无关的四个等价条件

① $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}\ (x,y)\in\sigma$　② $\oint_L Pdx+Qdy=0$，L是σ内任一条光滑曲线　③ $\int_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy$ 在σ内与路径L无关，只与起终点有关

④存在单值函数 $u=u(x,y),\ (x,y)\in\sigma$，使其全微分 $du=Pdx+Qdy$

若 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_A^B du(x,y)=u(x,y)|_A^B=u(B)-u(A)$　$\int_A^B Pdx+Qdy$ 曲线积分的牛顿莱布尼兹公式。

若微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的左端为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，即

$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则为全微分方程．通解 $u(x,y)=C$

例：$(2x+\frac1y)dx+(\frac1y-\frac{x}{y^2})dy=0$

$\because\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$　$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+\frac1y$

$\therefore u=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+k(y)=x^2+\frac xy+k(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x}{y^2}+k'(y)=\frac1y-\frac{x}{y^2}\quad\therefore k'(y)=\frac1y$

$\therefore u=x^2+\frac xy+\ln y+C_1$

当 $\frac{\partial P}{\partial y}\ne\frac{\partial Q}{\partial x}$ 时，方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 不是全微分方程．$\mu(x,y)$ 为积分因子

但必存在 $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ 使其变为全微分方程

试存在一个只与x有关的积分因子：$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx},\ \varphi(x)=\frac1Q(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})$

只与y有关的积分因子：$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy},\ \varphi(y)=\frac1P(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$

在有一元分段光滑闭曲线L，存在以L为边界的曲面S⊂V使斯托克斯公式成立的情况下

1° $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$　2° $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$，L是V内任意一条曲线

3° $\int_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$ 在V内与路径无关，只与起点A终点B有关

4° 存在单值函数 $u(x,y,z)$ 使其全微分 $du=Pdx+Qdy+Rdz$

5° 斯托克斯公式　同一空间闭曲线L为边界的两个不同光滑曲面 S_1、S_2 其上斯托克斯公式相同

S是Ω内的光滑曲面，边界线L是分段光滑闭曲线，L行进方向上S总在其左边，则有　化第二类曲线积分为第二类曲面积分

$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz&dzdx&dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}dS=\iint_S(\mathrm{rot}A)_n dS$　此时只需寻找一个合适易计算的面即可

6° 散度、旋度、有势场、无源场、调和场

设有矢量场 $\vec A=\vec A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q(x,y,z)\vec j+R(x,y,z)\vec k$

设矢量场 $\vec A(M)=\vec A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q(x,y,z)\vec j+R(x,y,z)\vec k$

$\mathrm{div}\vec A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

$\mathrm{rot}\vec A=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$　$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k$

如果存在单值的数量函数 $u=u(x,y,z)$，使得该数量场梯度 grad u 满足 $\mathrm{grad}\,u=\vec A$．则称 $\vec A$ 为有势场 ⇔ $Pdx+Qdy+Rdz$ 为全微分

⇔ $\oint_L\vec A\cdot d\vec l=0$，L是V内任意一条分段光滑的封闭曲线

⇔ 积分 $\int_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$ 在V内与路径R无关

$\mathrm{rot}\vec A\equiv\vec 0$ 无旋场　既是有势场又是无源场，则为调和场　拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$

$\mathrm{div}\vec A(M)\equiv0$ 无源场　$\nabla\times\vec A=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$　格林：$\oint_L\vec A\cdot d\vec l=\iint\limits_\sigma(\nabla\times\vec A\cdot\vec k)d\sigma$

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k$　$\nabla\cdot\nabla=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k$　高斯 $\oiint\limits_S\vec A\cdot d\vec S=\iiint\limits_V\nabla\cdot\vec A\,dv$　$\mathrm{div\,grad}\,u=\Delta u$

$\nabla\cdot\vec A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$　斯托克斯 $\oint_L\vec A\cdot d\vec l=\iint\limits_S(\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S$

$\mathrm{grad}(uv)=u\,\mathrm{grad}\,v+v\,\mathrm{grad}\,u$

$\mathrm{div}(u\vec A)=u\,\mathrm{div}\vec A+\vec A\cdot\mathrm{grad}\,u$

$\mathrm{rot}(u\vec A)=u\,\mathrm{rot}\vec A-\vec A\times\mathrm{grad}\,u$

$\nabla(\vec A\cdot\vec B)=\vec B\times(\nabla\times\vec A)+\vec A\times(\nabla\times\vec B)+(\vec B\cdot\nabla)\vec A+(\vec A\cdot\nabla)\vec B$

$\mathrm{rot\,rot}\vec A=\mathrm{grad\,div}\vec A-\Delta\vec A$

$\nabla\times(\nabla u)=\vec 0$　$\nabla\cdot(\nabla\times\vec A)=0$