条件极值与拉格朗日乘数法

函数 $u=f(x,y,z)$

约束条件 $\varphi_1(x,y,z)=0$
$\varphi_2(x,y,z)=0$

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi_1(x,y,z)+\mu\varphi_2(x,y,z)$$

$$\begin{cases} f'_x+\lambda\varphi'_{1x}+\mu\varphi'_{2x}=0 \\ f'_y+\lambda\varphi'_{1y}+\mu\varphi'_{2y}=0 \\ f'_z+\lambda\varphi'_{1z}+\mu\varphi'_{2z}=0 \\ \text{且 } \varphi_1=0 \\ \varphi_2=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)$$

二元函数中的泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$$
$$+R_n$$
$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\quad 0<\theta<1$$

§8. 方向导数与数量场的梯度

方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

梯度 $\mathrm{grad}\,u|_P=\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k$

点P处的法线矢量的求法: $\vec n=\pm\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k\right)$

比较偏的知识点: $\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}\,u\cdot \vec l_0$

两矢量的角平分线: $\vec{AB}$ $\vec{AC}$ 角平分线: $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$

方向余弦 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

定比分点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{z_1+z_2}$$

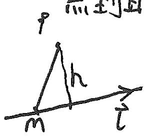
$\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$

应用: 已知 $\vec a+\vec b+\vec c=0$ 求证 $\vec a\times\vec b=\vec b\times\vec c=\vec c\times\vec a$

$$\vec a\times\vec b=\vec a\times(-\vec c-\vec a)$$
$$=-\vec a\times\vec c-\vec a\times\vec a$$
$$=-\vec a\times\vec c=\vec c\times\vec a$$
∴得证

$$\vec a\times\vec b=(-\vec c-\vec b)\times\vec b$$
$$=-\vec c\times\vec b-\vec b\times\vec b$$
$$=\vec b\times\vec c$$

点到直线距离



$$S_{\square}=|\vec{MP}\times\vec l|$$
$$=|\vec l|\cdot h$$

点到平面的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

求二重极限:

(1) 求极限可指定一种逼近方式

(2) 证明极限不存在可指定两种逼近方式进而证明极限不存在

若函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导函数均在点 (x_0,y_0) 处连续则

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

$u=\frac{1}{r}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$

若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续, 反之不成立
则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数都存在, 反之不一定

若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续的偏导数, 则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

隐函数求偏导

$F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

或 抽象函数求偏导

求多元函数极值时, $B^2-AC=0$ 的情况. 可考虑指定 $x=y$, $x=-y$ 看是否同号判别)

疑点: 8-4 11
P123 8-6 6.
P156 9-2 7(3) 8(4)

二重积分做一步查一步!

8-4.11 $\boxed{\text{隐函数}}\boxed{\text{复合}}$求导 先求复合的导

8-6.6 在指定区域求函数最值, 除了计算边界, 还需计算端点

面积元素 $J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

9-2 7(3) 极坐标计算简单 一般坐标变换

注意最终结果是否可用题中所给条件表示

分块积分 常微分证明

投影 对称性