# 常微分方程

## 一、可分离变量方程·齐次方程

① $\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$ 可分离变量方程

$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx$ （$\psi(y)\neq 0$时）

$\int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx+C$

或 $y=y^*$ $\psi(y)=0$

② $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(x,y)\equiv g(\frac{y}{x})$ 即

$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$ 零齐次微分方程

令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$

于是 $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

$x\frac{du}{dx}+u=g(u)$

$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$

I. $g(u)-u\neq 0$

$\int\frac{du}{g(u)-u}=\ln|cx|$

II. $g(u)-u=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ 变量替换法

$y=cx$

## 二、一阶线性微分方程 伯努利方程

形式 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$

公式：$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

伯努利方程

形式 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n$

$\frac{dy}{dx}y^{-n}+p(x)y^{1-n}=f(x)$

令 $z=y^{1-n}$

$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)f(x)$

## 三、全微分方程

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)$ 时

称 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 为全微分方程

则此时 $du(x,y(x))\equiv 0$

$u(x,y(x))=C_0=u(x_0,y_0)$

方法1 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$

$=\int_{x_0}^{x}M(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(x,\eta)d\eta$

方法2

$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y)$

$\therefore \varphi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

方法三：凑

积分因子 $\mu(x,y)$

将非全微分方程化为全微分方程

$\mu(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})=M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}$

只有$\mu(x)$或$\mu(y)$才方程

$\varphi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ $\varphi(y)=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$

$\mu=e^{\int\varphi(x)dx}$

## 四、可降阶的二阶微分方程

(I) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$

$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1$

$y=\int\left[\int f(x)dx+C_1\right]dx+C_2$

(II) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx})$

令 $\frac{dy}{dx}=p$

$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

$p=\varphi(x,C_1)$

$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

(III) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y,\frac{dy}{dx})$

$\frac{dy}{dx}=p$

$\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy}=f(y,\frac{dy}{dx})$

## 五、线性微分方程

$L[y]\equiv\frac{d^ny}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n(x)y$

$L[cy]=cL[y]$

$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$

$L[\sum_{i=1}^{m}c_iy_i]=\sum_{i=1}^{m}c_iL[y_i]$

$y_1(x),y_2(x)\cdots y_n(x)$ 是齐次线性方程的一个基本解组

常系数线性微分方程

$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$

有不相等的实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$

有相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$

有共轭复数根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ $\lambda_2=\alpha-i\beta$

通解

$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2xe^{\lambda_2x}$

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$