(III) 常系数非齐次线性微分方程的解法

先讨论二阶的情况：

① $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=P_m(x)e^{\alpha x}$

特解：$y^*=x^kR_m(x)e^{\alpha x}$ （$R_m(x)$ 为待定系数m次多项式）

$k=\begin{cases}0, & \text{当}\alpha\text{不为特征根时;}\\ 1, & \text{当}\alpha\text{为单重特征根时;}\\ 2, & \text{当}\alpha\text{为二重特征根时;}\end{cases}$ 然后将 y^* 代入上述非齐次线性微分方程中，求出系数即可

$R_m(x)=A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}\cdots+A_1x+A_0$

② $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}\cos bx$ 或 $f(x)=Q_l(x)e^{\alpha x}\sin bx$

或 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}\cos bx+Q_l(x)e^{\alpha x}\sin bx$

特解：$y^*=x^k(R_h(x)e^{\alpha x}\cos bx+S_h(x)e^{\alpha}\sin bx)$

$h=\max\{m,l\}$，$k=\begin{cases}0, & \text{当}a\pm bi\text{不是特征根时}\\ 1, & \text{当}a\pm bi\text{是单重特征根时}\end{cases}$

2.4 一般线性微分方程的一些解法

一.变量变换法

适用对象：① 将某些特殊类型的变系数线性方程化成常系数线性方程

② 微分方程降阶

(一) 欧拉(Euler)方程

$a_0x^n\frac{d^n n}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$

命 $x=e^t$，即 $t=\ln x$ 以二阶欧拉方程为例，代入后

$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-a_0)\frac{dy}{dt}+a_2y=f(e^t)$ ⇒ 常系数线性方程

(二) 降阶

二阶齐次线性微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$

已知一个非零解 y_1，令 $y=y_1u$

$y'=y_1u'+y_1'u$

$y''=y_1u''+2y_1'u'+y_1''u$

代入 $y_1u''+[2y_1'+p(x)y_1]u'+[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]u=0$

再令 $u'=z$

$y_1\frac{dz}{dx}+[2y_1'+p(x)y_1]z=0$

$y=y_1[C_1+C_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx]$ Liouville 公式

使用前置要求：要有一个已知非零解

(三) 某些特殊的二阶变系数线性方程化成常系数线性方程求解

满足 $2p'(x)+p^2(x)-4q(x)=a$

例：适当选取函数 $v(x)$，作变换 $y=v(x)u$，将y关于x的微分方程

$4\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+(x^2+1)y=0$ 化为u关于x的二阶常系数线性微分方程 $\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0$，然后求原方程的通解

解：$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}(x^2+1)y=0$

$p(x)=x$，$q(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)$　　$y=ue^{-\int\frac{p}{2}dx}=ue^{-\frac{x^2}{4}}$　（取 $v=e^{-\int\frac{p}{2}dx}$）※技巧

$2p'(x)+p^2(x)-4q(x)=1$　　$u''-\frac{1}{4}u=0$

解得 $u=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}$　原方程通解 $y=e^{-\frac{x^2}{4}}(C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}})$

二.变动任意常数法

方程 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$ ①

设对应齐次方程的通解为：

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

再设非齐次方程具有形式为

$y=u_1y_1(x)+u_2y_2(x)$ ②

$y'=[u_1y_1'(x)+u_2y_2'(x)]+[u_1'y_1(x)+u_2'y_2(x)]$ 令第二个方括号为零

$\begin{cases}y'=u_1y_1'(x)+u_2y_2'(x) & ③\\ y''=[u_1y_1''(x)+u_2y_2''(x)]+[u_1'y_1'(x)+u_2'y_2'(x)] & ④\end{cases}$

③④代入① $\begin{cases}u_1'y_1'(x)+u_2'y_2'(x)=f(x)\\ u_1'y_1(x)+u_2'y_2(x)=0\end{cases}$ ⇒ $u_1'=-\frac{y_2(x)}{W(x)}f(x)$　$u_2'=\frac{y_1(x)}{W(x)}f(x)$　$W(x)$ 为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式

$u_1=-\int\frac{y_2(x)}{W(x)}f(x)dx$　$u_2=\int\frac{y_1(x)}{W(x)}f(x)dx$

$y=y_1(x)(C_1-\int\frac{y_2(x)}{W(x)}f(x)dx)+y_2(x)(C_2+\int\frac{y_1(x)}{W(x)}f(x)dx)$

三.幂级数解法

例：解微分方程 $y''+y=0$

解：设方程有幂级数解.

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$

$y''=2\cdot1a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4+\cdots+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+\cdots$

代入 $(2\cdot1a_2+a_0)+(3\cdot2a_3+a_1)x+(4\cdot3a_4+a_2)x^2+\cdots$
$+[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n]x^n+\cdots=0$

$$\begin{array}{c|l}x^0 & 2\cdot1\,a_2+a_0=0\\ x^1 & 3\cdot2\,a_3+a_1=0\\ x^2 & 4\cdot3\,a_4+a_2=0\\ \cdots & \cdots\\ x^n & (n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}a_2=-\frac{1}{2!}a_0\\ a_3=-\frac{1}{3!}a_1\\ a_4=-\frac{1}{4!}a_0\\ \vdots\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}y=a_0(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots)\\ +a_1(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7\cdots)\end{array}$$

第三章 线性微分方程组

记号：$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$　$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix}$　$f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$　$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{pmatrix}$

$\frac{dx}{dt}=A(x)x+f(t)$ （$f(t)\neq0$）非齐次线性方程组 ①

$\frac{dx}{dt}=A(t)x$ 齐次线性方程组 ②

3.2 线性微分方程组解的一般理论

一.齐次线性微分方程组的通解结构

定理3.2 $x_1(t)\cdots x_m(t)$ 是②的m个解，$C_1\cdots C_m$ 是m个常数，则 $x=C_1x_1(t)+\cdots+C_mx_m(t)$ 也是②的解.

$X(t)=(x_1(t),\cdots x_n(t))$　n个向量函数，它们线性相关 ⇔ $W(t)=0$

$W(t)=\det X(t)=\begin{vmatrix}x_{11}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ x_{n1}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}$　线性无关 ⇔ $W(t)\neq0$ ⇔ 一个基本解组

二.非齐次线性微分方程的通解结构

$x=X(t)c+x^*(t)$

3.3 常系数微分方程组的解法

一.常系数齐次线性方程组的解法

设解形式为 $x=ve^{\lambda t}$　其中 $v=Ev$，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

代入化简 $(A-\lambda E)v=0$

有非零解充要条件为 $\det(A-\lambda E)=0$ 或 $D(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}-\lambda&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$ 矩阵A的特征方程，其根为特征根

$x(t)=v_ke^{\lambda_kt}$ 为②的一个解

(I) 特征根都是单根

$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=-3x_1+4x_2-2x_3\\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+x_3\\ \frac{dx_3}{dt}=6x_1-6x_2+5x_3\end{cases}$

① 解特征方程

$\lambda_1=2$　$\lambda_2=1$　$\lambda_3=-1$

② 求特征向量

属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量

$v_1=(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)^T$

满足 $\begin{pmatrix}-3-\lambda_1&4&-2\\ 1&-\lambda_1&1\\ 6&-6&5-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=0$

技巧：$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=\begin{vmatrix}4&-2\\-2&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-2&-5\\1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-5&4\\1&-2\end{vmatrix}$

$=0:3:6$　　$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{t}+C_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$

(II) 特征根有重根

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$　$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{pmatrix}$　$\frac{dx}{dt}=Ax$

① 解特征方程

$\lambda_1=0$（单根），$\lambda_2=-3$（二重根）

② 求特征向量

属于 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $v_0=(4\ 4\ 1)^T$

属于二重根 $\lambda_2=-3$ 的特征向量

$(A+3E)^2v_0=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0$

得 $\alpha+\beta+\gamma=0$，求得两线性无关向量

$V_0^{(1)}=(1\ 0\ -1)^T$　$V_0^{(2)}=(0\ 1\ -1)^T$

① $v_1^{(1)}=(A+3E)v_0^{(1)}=(2\ -4\ 2)^T$

② $v_1^{(2)}=(A+3E)v_0^{(2)}=(1\ -2\ 1)^T$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_2=(V_0^{(1)}+tv_1^{(1)})e^{-3t}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]e^{-3t}$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_3=(V_0^{(2)}+tv_1^{(2)})e^{-3t}=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right]e^{-3t}$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}+C_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]e^{-3t}+C_3\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\right]e^{-3t}$

二.常系数非齐次线性方程组的解法

$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$ 对应齐次线性方程组 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$

基本解矩阵 $X(t)$

通解 $x(t)=X(t)c+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$

初值问题 $x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$　$t_0\in(a,b)$

已知 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$ 三个解 y_1,y_2,y_3，

则通解为 $y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)+y_1$