⑧ 交項級数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\ (a_n>0)$ を交項級数という.

ライプニッツの定理 $a_n\ge a_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束

无法使用此法判别时，先变形提取.

例: $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 无法判别(非单调减少)，但

$u_n=\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{(\sqrt{n}+(-1)^n)(\sqrt{n}-(-1)^n)}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$ 第一部分符合判定条件收敛

所以该级数发散 第二部分 $\frac{1}{n-1}$ 发散

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛为绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛为条件收敛.

絶対収束級数は，項の順序を変えても絶対収束し，その和は変わらない.

$\Sigma a_n, \Sigma b_n$ がそれぞれ A, B に絶対収束するとき,

$(\sum_{n=0}^{\infty}u_n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}v_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k})=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\cdots$

$\Sigma c_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$ も C に絶対収束し, $C=AB$

⑩ べき級数(幂级数)/整級数

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 級数を収束させる x の範囲を収束域という.

(阿贝尔Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\ne0$ 处收敛，则它在区间 $(-|x_0|,|x_0|)$ 处绝对收敛，反之，若在点 $x_0\ne0$ 处发散，则它在区间 $[-|x_0|,|x_0|]$ 外也发散.

推论: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\ne0$ 处收敛，又在 $x_1\ne0$ 处发散，则存在唯一正数 R，使幂级数在区间 $(-R,R)$ 内绝对收敛，在区间 $[-R,R]$ 之外发散.

ダランベールの判定法: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ において, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k$ が存在すれば，收束半径 $\rho=\frac{1}{k}$

コーシー・アダマールの判定法: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ において, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k$ が存在すれば，收束半径 $\rho=\frac{1}{k}$ ($k=0$ のとき, $\rho=+\infty$)

アーベルの連続性定理: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$, 和函数为 $S(x)$ 则 $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内連続.

項別積分の公式: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$, 则对任一闭区间 $[a,b]\subset(-R,R)$ 有和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且可逐项积分，即 $\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^ndx$

特别的，对于任意 $x\in(-R,R)$ 有 $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

項別微分の公式: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の收束半径 ρ が正であるとき，区間 $(-\rho,\rho)$ において

$f'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

⑪ 関数の展開

(1) $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots$

(2) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

(3) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

(4) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

(5) $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\ (-1<x\le1)$

(6) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$

(7) $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

(8) $\sin^{-1}x=x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3x^5}{2\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot4\cdots2n(2n+1)}$

求和函数样例: 求べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在收敛区间的和函数

①对幂级数求导 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}\ (x\in(-1,1))$

②两边积分 $\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\quad x\in(-1,1)$

$f(x)-f(0)=\ln(1+t)\big|_0^x=\ln(1+x)\quad f(0)=0\Rightarrow f(x)=\ln(1+x)\quad x\in(-1,1)$

☆ $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\quad x\in(-1,1)$

4. 偏微分

4.1 多変数の関数の極限

有界閉集合 F 上で連続な関数 $f(x,y)$ は F 上で必ず最大値と最小値をとる

$|f(x,y)|\le M$ (M:定数) が成立するとき そこで有界であるという

$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{x\to a,\,y\to b}f(x,y)=\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $f(x,y)$ は極限値 α に収束するという

$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=(a,b)$ が成立するとき, $f(x,y)$ は点 (a,b) で連続であるという

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b)$ $\quad\lim_{h\to0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=f_y(a,b)$ $\quad f(x,y)\Rightarrow f'_x(a,b)$ 把 y 看作常数对 x 求导

$f'_y(a,b)$ 把 x 看作常数对 y 求导

高次偏導関数: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}$ $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2f}{\partial y\partial x}$ $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial^2f}{\partial y^2}$

混合偏导数在某点存在且连续时，则混合偏导数与求导顺序无关. 即 $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}$

全增量公式 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$ 其中 $\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\varepsilon_1=0$ $\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\varepsilon_2=0$

多元复合函数求导法: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow z\begin{cases}u\\v\end{cases}\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$

$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 变换成极坐标下的表达式 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$

4.3 偏導関数とその応用

$f(x,y)$ が点 (a,b) において極値をとる. $\Rightarrow f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$

$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0,\ D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$ のとき

(i) $D(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0\Rightarrow f(a,b)$ は極大値 (iii) $D(a,b)<0\Rightarrow f(a,b)$ は極値でない

(ii) $D(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0\Rightarrow f(a,b)$ は極小値 (iv) $D(a,b)=0\Rightarrow f(a,b)$ が極値かどうか判定できない

陰関数: 由 $F(x,y,z)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 为隐函数

第一存在定理: ①寻找一个点 (x_0,y_0,z_0) 满足方程 ③检证是否满足 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\ne0$

②检证 $F'_x(x,y,z)$ $F'_y(x,y,z)$ $F'_z(x,y,z)$ 是否存在

第二存在定理: ①寻找一个点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 满足 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 与 $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

②点P某邻域内函数 $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 具有连续的偏导数

F'_x,F'_y,F'_u,F'_v 和 G'_x,G'_y,G'_u,G'_v，且行列式 $\begin{vmatrix}F'_u&F'_v\\G'_u&G'_v\end{vmatrix}\ne0$ 雅可比行列式 记作 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

则在 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，满足 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$

且具有连续偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$ $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$ $\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$

$z=f(x,y)$ 全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$u=f(x,y,z)$ 全微分 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

$d(u\pm v)=du\pm dv$ $\quad d(Cu)=Cdu$

$d(uv)=vdu+udv$ $\quad d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}\ (v\ne0)$

$\frac{\partial(f_1\cdots f_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial f_n}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$ ヤコビアン または関数行列式という

f_x, f_y が領域 D 上で存在し，共に連続 $\Rightarrow f(x,y)$ は D の各点で連続.

領域 D で定義された関数 f に対して, f_{xy}, f_{yx} が共に連続 $\Rightarrow f_{xy}=f_{yx}$

矢值函数与偏导数在几何上的应用

矢值函数 $\vec r(t)$ 的矢端曲线 $\vec r=\vec r(t)$ $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 导矢量 $\frac{d\vec r}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec i+\frac{dy}{dt}\vec j+\frac{dz}{dt}\vec k$

导矢量: 矢端曲线 L 在 t 的对应点 P 处的切向矢量 $\quad$ 矢量微分 $d\vec r=\vec r'(t)dt=dx\vec i+dy\vec j+dz\vec k$

在 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程 $\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dt}|_{t=t_0}}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dt}|_{t=t_0}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{dt}|_{t=t_0}}$

当曲线用一般方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 时

可视 x 为自变量, $y=y(x)$, $z=z(x)$ $\Rightarrow\vec\tau=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$

过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程为 $\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_P}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P}$

切平面方程 $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

曲面在点M的法线 $\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$

☆ 条件极值: 求函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值 $\quad$ 補助函数: $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$

ラグランジュの未定乗数法

二元情况: $z=f(x,y)$，在约束条件下 $\varphi(x,y)$ 的极值

$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0\\f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0\\\varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$

相当于三元函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处取得无条件极值的必要条件 $F_x=0\ \ F_y=0\ \ F_z=0\ \ F_\lambda=0$

方向导数与数量场的定义

$u(P)=u(x,y,z)$ 射线的方向矢量为 $\vec l_0=\cos\alpha\vec i+\cos\beta\vec j+\cos\gamma\vec k$

方向导数: $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

以数量场 $u(P)$ 在点 P 处取到最大方向导数的方向为方向，以最大方向导数为模的矢量，称为数量场 $u(P)$ 在 P 处梯度，记作 $\mathrm{grad}\,u|_P$

$\mathrm{grad}\,\varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec j+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec k$ を勾配という $\quad\max(\frac{\partial u}{\partial l})_P=|\mathrm{grad}\,u|_P|$

法线矢量 $\vec n=\pm(\frac{\partial F}{\partial x}\vec i+\frac{\partial F}{\partial y}\vec j+\frac{\partial F}{\partial z}\vec k)$

5 重積分

$\int_\Omega f(P)d\Omega\triangleq\begin{cases}\int_a^b f(x)dx & 定积分\\\iint f(x,y)d\sigma & 二重积分\\\iiint f(x,y,z)dV & 三重积分\end{cases}$ $\quad\int_L f(P)d\Omega\triangleq\int_L f(x,y,z)dl$ 第一类曲线积分 $\quad\iint_S f(x,y,z)dS$ 第一类曲面积分

$\left|\int_\Omega f(P)d\Omega\right|\le\int_\Omega|f(P)|d\Omega$

二重積分の性質: ① $\iint_A c\,dxdy=c|A|$ ② $\iint_A\{\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\}dxdy=\alpha\iint_A f(x,y)dxdy+\beta\iint_A g(x,y)dxdy$

③ $f(x,y)\le g(x,y)\Rightarrow\iint_A f(x,y)dxdy\le\iint_A g(x,y)dxdy$

④ $\left|\iint_A f(x,y)dxdy\right|\le\iint_A|f(x,y)|dxdy$

⑤ $\iint_A f(x,y)dxdy=|A|f(\xi,\eta)$ ((ξ,η) は A 内)

⑥ $\iint_A f(x,y)dxdy=\iint_{A_1}f(x,y)dxdy+\iint_{A_2}f(x,y)dxdy$

二重积分在极坐标中: $\iint_\sigma f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$