微分・積分学

1 微分

1.1 関数の極限と連続性

① $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \Leftrightarrow$ 任意の正数εに対して適当な正数δをとれば，$0<|x-a|<\delta$ を満足するすべてのxに対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$

② $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$　$\lim_{x\to a} g(x)=\beta \Longrightarrow \lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$，$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (ただし$\beta\neq0$)

重要な極限値: ☆

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$　$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，$\lim_{x\to0}\frac{x^\alpha}{e^x}=0\ (\alpha>0)$　$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\log x}=+\infty\ (\alpha>0)$

$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$，$\lim_{x\to+0}x^x=1$　调和平均　几何平均　算术平均

半阶乘: $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)=(2n-1)!!$

不等式 $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

Dirichlet 関数: $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{は有理数}\\ 0 & x\text{は無理数}\end{cases}$

设数列$\{u_n\}$定义为: $u_0>0$，$u_n=\frac{1}{2}(u_{n-1}+\frac{a}{u_{n-1}})$ $(a>0, n=1,2,3,\cdots)$

$\because u_n=\frac{a+u_{n-1}^2}{2u_{n-1}}\ge\frac{2\sqrt{a}u_{n-1}}{2u_{n-1}}=\sqrt{a}$，单调减 $\therefore \lim_{n\to\infty}u_n=l$　$l=\frac{1}{2}(l+\frac{a}{l})$　$\therefore \lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{a}$

③ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在 $f(x_0)$不存在 称为第一类间断点，反之为第二类间断点。

④ 無限小　$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta(x)=0$ $(\beta(x)\neq0)$

I. $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$比$\beta(x)$是高阶无穷小，记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$　ランダウの記号

II. $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$ (非零)，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为同阶无穷小，$A=1$ 时为等阶无穷小. $\alpha(x)=O(\beta(x))$

III. $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=A$ (0でない有限の値)であるとき，$\alpha(x)$は$\beta(x)$に対してk位の無限小であるという。

重要な無限小値:

$x\to0$のとき: I. $x\sim\sin x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$　II. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$　III. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

特に $\alpha=\frac{1}{n}$であるとき　$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$

☆ **等价无穷小替代法则** 设当 $x\to x_0$ (或$x\to\infty$)时，有 $a(x)\sim b(x)$　$c(x)\sim d(x)$ 且 $\lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{c(x)}$ 存在

则 $\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{a(x)}{c(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{b(x)}{d(x)}$

函数如果在閉区間$[a,b]$連続的话，在此区間$f(x)$必有最大/小值

$y=f(x)$と$y=f^{-1}(x)$のグラフは$y=x$に関して対称である

・ニュートン法による非線形または高次方程式の解法

$y=f(x)$のグラフ上的点$(x_k,f(x_k))$において接線を引き，x軸との交点をx_{k+1}とすると

$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $(k=1,2,\cdots)$

第1近似をx_1とし，この反復公式によりx_2 x_3を計算する

1.2 微分法

導関数: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A\ (A\neq\pm\infty)$

$y=f(x)$の$x=a$における **接線: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$** (切线)

法線: $y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

求导性质表:

① $(cf)'=cf'$　$(f\pm g)'=f'\pm g'$　$(fg)'=f'g+fg'$　$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ $(g\neq0)$

② $y=f(t)$　$t=\phi(x)$とすると $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$

③ $x=\phi(t)$　$y=\psi(t)$　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$

④ $y=f(x)$，$x=f^{-1}(y)$とすると $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}$

⑤ ライプニッツの公式

$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$　$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\sin\theta=\frac{a}{h}$　$\cot\theta=\frac{b}{a}$

$\cos\theta=\frac{b}{h}$　$\sec\theta=\frac{h}{b}$

$\tan\theta=\frac{a}{b}$　$\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{h}{a}$

基本的な関数の導関数

① $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$　② $(e^x)'=e^x$　③ $(\alpha^x)'=\alpha^x\log\alpha$　④ $(\log|x|)'=\frac{1}{x}$　⑤ $(\log_\alpha|x|)'=\frac{1}{x\log\alpha}$

⑥ $(\sin x)'=\cos x$　⑦ $(\cos x)'=-\sin x$　⑧ $(\tan x)'=\sec^2x$　⑨ $(\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2x$

⑩ $(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　⑪ $(\cos^{-1}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　⑫ $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$　⑬ $(\cot^{-1}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)'=\cosh x$　$(\cosh x)'=\sinh x$　$(\tanh x)'=\mathrm{sech}^2x$　$(\coth x)'=-\mathrm{cosech}^2x$

$(\sinh^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　$(\cosh^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

隐函数求导: 例: $F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$，求$y=f(x)$的导数

$(y-x-\frac{1}{2}\sin y)'=0'$

$y'-x'-(\frac{1}{2}\sin y)'=0$

$y'-1-(\frac{1}{2}\cos y)\cdot y'=0$　$\therefore y'=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}$

高次導関数

① $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$　② $\{f(\alpha x+b)\}^{(n)}=\alpha^nf^{(n)}(\alpha x+b)$　③ $(\alpha^x)^{(n)}=\alpha^x(\log\alpha)^n$

④ $(\log|x|)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$　⑤ $(\log_\alpha|x|)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{\log\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$　⑥ $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

⑦ $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$，⑧ $(e^x)^{(n)}=e^x$

1.3 導関数とその応用

① ロルの定理: ① 閉区間$[a,b]$において連続 ② 開区間(a,b)において微分可能 ③ $f(a)=f(b)$ $\Longrightarrow f'(\xi)=0$，$a<\xi<b$を満足する$\xi$が存在する

② ラグランジュの平均値の定理: ① $[a,b]$において連続 ② (a,b)において微分可能 ③ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，$a<\xi<b$を満足する$\xi$が存在する

③ コーシーの平均値の定理: ① $[a,b]$において連続 ② (a,b)において微分可能 ③ $g(a)\neq g(b)$，④ $f'(x)$と$g'(x)$が同時に0とならない

$\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，$a<\xi<b$を満足する$\xi$が存在する

☆ ④ **ロピタルの定理**: $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ or $\pm\infty$ のとき

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

⑤ テイラー級数展開の定理

$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n$

マクローリン級数展開: $a=0$

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$，$R_n=\frac{e^{\theta x}x^n}{n!}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n+1}$　$R_{2n+1}=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n-1)!}x^{2n+1}$　R_n: Peano型余项

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}$　$R_{2n+2}=(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n$　$R_n=\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n}$

$(1+x)^n=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n-1}x^{n-1}+R_n$　$R_n=\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n$

⑥ $f(x)$がaを含む開区間でn回連続微分可能で，$f'(a)=f''(a)=\cdots f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}\neq0$とすると

(i) nが偶数で$f^{(n)}(a)>0$ならば，$f(a)$は極小値

(ii) nが偶数で$f^{(n)}(a)<0$ならば，$f(a)$は極大値

(iii) nが奇数ならば，$f(a)$は極値ではない

⑦ 可能为最大/最小点: I. $f'(x)=0$ 的点 II. 区間端点 III. 不能微分的点.

⑧ 对 x_1,x_2,x_3，$x_1<x_2<x_3$　$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 向下凸　反之向上凸

⑨ $f''(x)>0\Leftrightarrow$向下凸　$f''(x)<0\Leftrightarrow$向上凸

曲率: $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

2 積分

2.1 不定積分

① 性质: $\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$ (c:定数)

$x=\phi(t)$とおくと $\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$

$\int\{f(x)\}^\alpha f'(x)dx=\frac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha\neq-1)$　$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$

② 部分积分: I. 凑微分法 II. 换元法 III. 分部积分

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\Rightarrow\int u\,dv=uv-\int v\,du$

1° $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha\neq-1)$　2° $\int\frac{1}{x}dx=\log|x|$　3° $\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$ $(\alpha\neq0)$

4° $\int\sin\alpha x\,dx=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x$ $(\alpha\neq0)$　5° $\int\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$

6° $\int\tan\alpha x\,dx=-\frac{1}{\alpha}\log|\cos\alpha x|$ $(\alpha\neq0)$　7° $\int\cot\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha}\log|\sin\alpha x|$

8° $\int\sec^2\alpha x\,dx=\frac{1}{\alpha}\tan\alpha x$ $(\alpha\neq0)$　9° $\int\alpha^xdx=\alpha^x/\log\alpha$ $(\alpha>0,\alpha\neq1)$

10° $\int\mathrm{cosec}^2\alpha x\,dx=-\frac{1}{\alpha}\cot\alpha x$ $(\alpha\neq0)$　11° $\int\log|x|dx=x\log|x|-x$

12° $\int\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}(\frac{x}{\alpha})$ $(\alpha\neq0)$　13° $\int\frac{1}{x^2-\alpha^2}dx=\frac{1}{2\alpha}\log\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|$ $(\alpha\neq0)$

14° $\int\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{\alpha}$ または $-\cos^{-1}\frac{x}{\alpha}$ $(\alpha>0)$　15° $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\log|x+\sqrt{x^2+A}|$ $(A\neq0)$

16. $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\alpha^2\sin^{-1}(\frac{x}{\alpha}))$ $(\alpha>0)$　根号内带平方，可尝试三角换元

17. $\int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)$ $(A\neq0)$