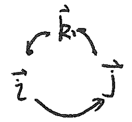
第八章

§4. 矢量的乘法　直角坐标系



按箭头方向得正　$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

按反向得负.　$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

混合积：先叉乘后点乘．绝对值在几何上表示以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为相邻三棱的平行六面体体积.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

轮换性　$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

实质：行列式行互换

应用：四点是否共面

A B CD

$(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}=0$ 即共面

另：求平面ABC，代入D点.

§5.空间直线与平面的方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$ 点向式

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \quad (t为参数) \\ z=z_0+nt \end{cases}$$ 参数式

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ 两点式

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \end{cases}$$ 一般式

平面：点法式　一般式　截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

☆ 平面束方程

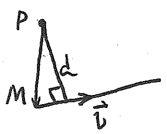
直线L的平面束方程　（先判断两平面 π_1,π_2 是否是满足要求的平面）

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

L_1L_2 异面　$(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\vec{P_1P_2}\neq0$

点到面　$$\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

点到直线　$$d=\frac{|\vec{PM}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$



§6 曲面方程与空间曲线方程

① 柱面

准线 $\Gamma\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow F(x-\frac{a}{c}z,\ y-\frac{b}{c}z)=0$

母线L方向矢量 $\{a,b,c\}$

② 锥面

准线 $\Gamma\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=h \end{cases}\Rightarrow F(\frac{h}{z}x,\frac{h}{z}y)=0$

顶点原点

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=h \end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}z^2$$ 圆锥面

③ 旋转曲面.

曲线Γ绕一定直线L旋转而形成的曲面

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}\quad x^2+y^2=[x(z^{-1}(z_1))]^2+[y(z^{-1}(z_1))]^2$$

特殊：~~绕~~过两点直线旋转（绕z轴）

① 任取一点 $M(x,y,z)$ 曲面上 → 准线上 $M_0(x_0,y_0,z_0)$

② M_0 在直线AB上

③ $$\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

AB　$$\frac{x_0-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y_0-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z_0-z_A}{z_B-z_A}$$

$$x_0=x_A+(x_B-x_A)\frac{z_0-z_A}{z_B-z_A}$$

$$y_0=y_A+(y_B-y_A)\frac{z_0-z_A}{z_B-z_A}$$

$$x^2+y^2=\left(x_A+(x_B-x_A)\frac{z_0-z_A}{z_B-z_A}\right)^2+\left(y_A+(y_B-y_A)\frac{z_0-z_A}{z_B-z_A}\right)^2$$

$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕y轴　$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴　$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

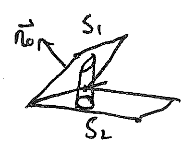
$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕x轴　$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

☆④ 投影柱面

$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$　联立，消去变量z.

$G(x,y)=0$　投影柱面方程　$z_0=0$ 投影曲线方程

$\begin{cases} G(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$　投影曲线方程



$\cos\alpha=|\vec{n_0}|$

$$S_1=\frac{S_2}{\cos\alpha}$$