微积分III

一.三重积分

(1) 直角坐标系

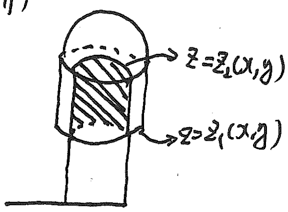
A.投影法（化三重积分为累次积分）

① 画出V（假定满足要求）

② 先穿线（x,y固定的线）

③ 次截面（x固定）

④ 后立体



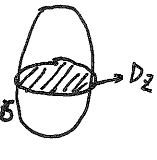
x-型

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$$

y-型

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$$

B.平面截割法



选择原因：

①被积函数是一元函数

②截口为规则

③要在正确的方向上截割

注意:D的变动

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\int_c^d dz\iint_{D_z}f(x,y,z)\,dxdy$$

在 $\iint_{D_z}f(x,y,z)\,d\sigma$ 中，将z视为常数.

有 原式 $=\int_c^d dz\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}dx\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}f(x,y,z)\,dy$

$f(x,y,z)$ 仅是z表达式时

原式 $=\int_c^d g(z)\,S_{D_z}\,dz$

(2) 柱坐标

①边界上出现了柱面

②被积函数出现 x^2+y^2 的形式

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

①画出V，边界面用 r,θ,z 表示

②先穿线 ③次截面

④后立体

一般情用先z，次r，后θ的积分次序

(3) 球坐标

①边界上出现了球面

②式中有 $x^2+y^2+z^2$ 的式子

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

(4) 一般坐标变换

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \qquad \begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$$

$$J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w}&\frac{\partial y}{\partial w}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$\iiint_{V(u,v,w)}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

旋度 $\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$ 定义为旋度

① 判定是何种积分

I.第一类曲线 ⟶ 基本做法

II.第一类曲面 ⟶ ①先检查能否用对称性消去多余项 ②后用基本做法

III.第二类曲线 ⟶ ①最基本？ ②是否能格林？ ③换曲线？

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx$$

二.第一类曲线积分

①将一般式化为参数式.

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

② $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$（弧长转化）

③ 代入

④ 从小到大

① 考虑轮换性

② 消 偶倍奇零

三.第一类曲面积分

① $z=z(x,y)$（S在xOy平面投影 D_{xy}）

② $ds\xrightarrow{转化}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma_{xy}=\frac{d\sigma_{xy}}{|\cos\gamma|}$

③ 代入

④ D_{xy} 上二重积分（D_{xy} 是S的投影）

看到特别难特别怪的考虑应用轮换性

$z=z(x,y)$ 在 $(x,y,z(x,y))$ 处法矢量

$z(x,y)-z=0.$ $z'_x(x,y)\vec i+z'_y(x,y)\vec j-\vec k=\vec n$ 与z轴正向夹角γ

$$\cos\gamma=\frac{\vec n\cdot\vec k}{|\vec n|\cdot|\vec k|}=\frac{-1}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}}\qquad |\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$$

四.点函数积分及其应用

计算前看是否存在可消去的奇函数

应用：物理上：

I.重心

$$\bar x=\frac{\int_\Omega\mu(P)x\,d\Omega}{M}\quad \bar y=\frac{\int_\Omega\mu(P)y\,d\Omega}{M}\quad \bar z=\frac{\int_\Omega\mu(P)z\,d\Omega}{M}$$

$\mu(p)$ 常数

$$\bar x=\frac{\int_\Omega x\,d\Omega}{\Omega}\quad \bar y=\frac{\int_\Omega y\,d\Omega}{\Omega}\quad \bar z=\frac{\int_\Omega z\,d\Omega}{\Omega}$$

II.转动惯量

z轴 $I_z=\int_\Omega(x^2+y^2)\mu(p)\,d\Omega=\int_\Omega(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,d\Omega$

III.引力

$$\vec F=F_x\vec i+F_y\vec j+F_z\vec k$$

$$F_x=km\int_\Omega\frac{\mu(P)(x-x_0)}{r^3}\,d\Omega\qquad F_y=km\int_\Omega\frac{\mu(P)(y-y_0)}{r^3}\,d\Omega$$

$$F_z=km\int_\Omega\frac{\mu(P)(z-z_0)}{r^3}\,d\Omega$$

$$km\int_\Omega\frac{\mu(x,y,z)(x-x_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

空间曲线积分与路径无关性.

③推论：设V是空间区域，P、Q、R在V上连续，

则 I. $\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=0$（Γ是V中的闭曲线）

II. $\int_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关

III. 存在可微u，使 $du=Pdx+Qdy+Rdz$.

如何求？ (1)观察法

(2)公式法

$$U=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y_0,z_0)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x,\eta,z_0)\,d\eta+\int_{z_0}^{z}R(x,y,\zeta)\,d\zeta$$