常微分方程

第一章 初等积分法

1.2 可分离(变量)方程 · 齐次方程

形式I：$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y)$ 可分离变量的微分方程

(1) 设 $\psi(y)\neq 0$，则有 $\int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx+C$

(2) 若有 y^* 使得 $\psi(y)=0$，则 $y=y^*$ 也为一个解

形式II：$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 零齐次微分方程（齐次方程）

变量变换法

令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$，$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

代入原方程 $x\frac{du}{dx}+u=g(u) \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{g(u)-u}=\ln|cx|$（$g(u)-u\neq 0$）

(1) 当 $g(u)-u\neq 0$ 时

$$\int\frac{du}{g(u)-u}=\ln|cx|$$ 积分完毕后再将 $u=\frac{y}{x}$ 代回

(2) 当 $g(u)-u=0$ 时

原方程变为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$，通解为 $y=cx$

1.3 一阶线性微分方程 · 伯努利方程

一阶线性微分方程一般形式 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$

(1) $f(x)=0$，即 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 时，称为一阶齐次线性方程

$\frac{dy}{y}=-p(x)dx \Rightarrow \ln|y|=\int p(x)dx+\ln|c|$

$\Rightarrow y=ce^{-\int p(x)dx}$（$c$为任意常数）

(2) $f(x)\neq 0$ 时，称为一阶非齐次线性方程

变动任意常数

设想其具有 $y=ue^{-\int p(x)dx}$ 的形式（$u=u(x)$为待定函数）

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}-ue^{-\int p(x)dx}p(x)\\ y=ue^{-\int p(x)dx}\end{cases}$$ 两式代入 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$

得到 $\left[e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}-ue^{-\int p(x)dx}p(x)\right]+p(x)ue^{-\int p(x)dx}=f(x)$

即 $e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}=f(x)$

改写 $du=f(x)e^{\int p(x)dx}dx$

$u=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$

将对应的齐次方程通解C换成待定函数$u(x)$

在区间(a,b)内的通解公式：$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n$，$n\neq 0,1$

(1) $y=0$ 有一解

(2) $y\neq 0$ 时 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=f(x)$

令 $z=y^{1-n}$，$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)f(x)$ 这是未知函数z的一阶微分方程。求出解后代回原值即可

1.4 全微分方程

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 为全微分方程 ··· ①

则 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)$ 称为原函数

$\Rightarrow du(x,y(x))\equiv 0$

$\Rightarrow u(x,y(x))\equiv C_0=u(x_0,y_0)$

问题1：$M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 如何判别①为全微分方程

定理：$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow$ ①为全微分方程

问题2：当①为全微分方程时，如何求解原函数

方法1 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$

$=\int_{x_0}^{x}M(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(x,\eta)d\eta$

方法2 $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$　$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y)$

方法3 $ydx+xdy=d(xy)$

$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{-ydx+xdy}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$

$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$

积分因子 $\mu(x,y)$，可将非全微分方程化为全微分方程

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Leftarrow$ 非全微分方程

$\mu(x,y)M(x,y)dx+N(x,y)\mu(x,y)dy=0 \Leftarrow$ 全微分方程

1.5 可降阶的二阶微分方程

(I) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ 型　积分两次即可

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1 \Rightarrow y=\int\left[\int f(x)dx+C_1\right]dx+C_2$

(II) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)$ 型　将$\frac{dy}{dx}$作为新未知函数

令 $\frac{dy}{dx}=p$，原式 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

$\Rightarrow$ 解 $p=\varphi(x,C_1) \Rightarrow$ 原方程通解 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

(III) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$ 型

令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$

此时化为p关于y的一阶微分方程

第二章 线性微分方程

2.1 线性微分方程解的一般理论

$L[y]=\frac{d^ny}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=f(x)$

记号

$f(x)\neq 0$ 时，称为非齐次线性微分方程

$f(x)$为自由项

$f(x)\equiv 0$ 时，称为齐次线性微分方程

(I) 齐次线性微分方程通解的结构

引理2.1 c为常数，$y(x)$是一个有直到n阶导数的函数

则 $L[cy]=cL[y]$

引理2.2 $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$

线性微分算子，

引理2.3 $L\left[\sum_{i=1}^{m}c_iy_i\right]=\sum_{i=1}^{m}c_iL[y_i]$

定理2.2 设 $y_1(x),\cdots y_m(x)$ 是齐次线性方程的m个解，$c_1,\cdots c_m$是m个常数

则 $y=c_1y_1(x)+\cdots+c_my_m(x)$ 也是 $L[y]=0$ 的解

定义2.1 $a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\cdots+a_my_m(x)\equiv 0$

有$a_1\cdots a_m$不全为0的组合成立时，线性相关

当且仅当$a_1\cdots a_m$全为0时成立，线性无关

定义2.2 朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x)\end{vmatrix}$$

定理2.3 $L[y]=0$ 的解 $y_1(x),\cdots y_n(x)$ 线性相关（无关）

$\Updownarrow$

朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0$（$W(x)\neq 0$）

定理2.4 $L[y]=0$ 的通解：$y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)$

$L[y]=0$ 必有n个线性无关的解存在

$y_1(x),\cdots y_n(x)$ 组成一基本解组

(II) 非齐次线性微分方程的通解结构

① y_1^*与y_2^*是 $L[y]=f(x)$ 的两个解，则 $y_1^*-y_2^*$ 是对应的 $L[y]=0$ 的一个解

② y^*是 $L[y]=f(x)$ 的解，y是 $L[y]=0$ 的解 $\Rightarrow y^*+y$ 也是 $L[y]=f(x)$ 的解

③ y^*是 $L[y]=f(x)$ 的一个解，Y是 $L[y]=0$ 的通解 $\Rightarrow y=Y+y^*$ 是 $L[y]=f(x)$ 的通解

④ y_1是 $L[y]=f_1(x)$ 的解，y_2是 $L[y]=f_2(x)$ 的解 $\Rightarrow y_1+y_2$ 是 $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$ 的解

2.2 常系数线性微分方程的解法

(I) 二阶常系数齐次线性微分方程的解法

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$	线性微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+q=0$ 的通解
有不相等的实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
有相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2xe^{\lambda_2x}$
有共轭复数根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$，$\lambda_2=\alpha-i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 或 $y=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)$

(II) n阶常系数齐次线性微分方程的解法

$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$ 对应特征方程 $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

特征根$\lambda_1\cdots\lambda_s$，重数$n_1\cdots n_s$．$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$　$y=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}C_{ij}x^{j-1}e^{\lambda_ix}$

特征方程的根	微分方程通解中对应的项
①单重实根λ	对应一项 $Ce^{\lambda x}$
②k重实根λ	对应k项 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$
③单重复数根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$\beta>0$	对应两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
④k重复数根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$\beta>0$	对应$2k$项 $e^{\alpha x}[(a_1+a_2x+\cdots+a_kx^{k-1})\cos\beta x+(b_1+b_2x+\cdots+b_kx^{k-1})\sin\beta x]$