⑤ 初等関数の積分方法

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$　$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$

$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$　$m\geq n$ 有理假分式　$m<n$ 有理真分式

1° 有理假分式总可以通过多项式除法变成多项式加有理真分式

2° 有理真分式可分解为 第I类最简分式 $\frac{A_1}{x-\alpha},\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}\cdots\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$

第II类最简分式 $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q},\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2},\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$

举例：$\frac{x^2-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$

$x^2-5=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$

然后再使用待定系数法或赋值法求出 A、B、C

I. $\int\frac{1}{(x-\alpha)^n}dx=\begin{cases}\log|x-\alpha| & (n=1)\\ \frac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} & (n>1)\end{cases}$　$\int\frac{x}{(x^2+a^2)^m}dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\log(x^2+a^2) & (m=1)\\ \frac{-1}{2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}} & (m>1)\end{cases}$

II. $\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C & (n=1)\quad \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C\\ \int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}du,\ u=x+\frac{p}{2},\ a^2=q-\frac{p^2}{4} & (n>1)\end{cases}$

三角函数有理式的积分　$=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

1° 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ 于是 $\int R(\sin x,\cos x)dx$

2° 形如 $\int\sin^n x\cos^m x$，其中 m, n 至少有一个是奇数．从指数为奇数的那个因子中分离出一个三角函数与dx凑成另一个三角函数的微分，那么就化为以 sinx 或 cosx 为变元的幂函数积分．

3° 形如 $\int\sin^n x\cos^m x\,dx$，其中 m, n 是偶数或零．利用倍角公式降低次数．

$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$　$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$　$\sin x\cos x=\frac{\sin2x}{2}$

4° 形如 $\int\sin nx\cos mx\,dx$，$\int\sin nx\sin mx$，$\int\cos nx\cos mx\,dx$ 其中 $n\neq\pm m$

$\sin nx\cos mx=\frac{1}{2}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]$

$\sin nx\sin mx=-\frac{1}{2}[\cos(n+m)x-\cos(n-m)x]$

$\cos nx\cos mx=\frac{1}{2}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]$

$\int e^{-x^2}dx$　$\int\frac{\sin x}{x}dx$　$\int\sin^2x\,dx$　$\int\sqrt{1+x^3}\,dx$　$\int\sqrt{1-k^2\sin^2x}\,dx$

原函数为非初等函数

$\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$　$b(a\cos x+b\sin x)-a(a\cos x+b\sin x)'=(b^2+a^2)\sin x$

$=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{b(a\cos x+b\sin x)-a(a\cos x+b\sin x)'}{a\cos x+b\sin x}dx=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\int b\,dx-a\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}\right)$

$=\frac{1}{a^2+b^2}(bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|)+C$

2.2 定積分

① 性質：1° $\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$　2° $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$

3° $(b<a)$ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$　4° $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$　5° $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

6° 常に，$f(x)\geq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$　7° $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

8° $\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leq\int_a^b\{f(x)\}^2dx\int_a^b\{g(x)\}^2dx$

② 積分に関する平均値定理 (积分中值定理)

f(x) が [a, b] で連続ならば，$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ $(a\leq\xi\leq b)$ を満足する ξ が存在する．

③ 微积分学基本定理、牛顿一莱布尼兹公式

定理一（变上限积分的求导定理）$\frac{d}{d(x)}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

定理二（牛顿一莱布尼兹N-L公式）$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$

④ 定积分的计算方法：I. 換元法

$x=\phi(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta;\ a=\phi(\alpha),\ b=\phi(\beta))$ のとき　$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$

例：$\sqrt{x}=t^1\Rightarrow x=t^2$　$\int_1^4\sqrt{x}dx=\int_1^2 t\,dt^2$

II. 部分積分

$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$

III. 広義の積分

(i) $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$　$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

(ii) $\lim_{x\to c\in(a,b)}f(x)=\infty$ のとき　瑕点..

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$

IV ガンマ関数

(1) $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ $(x>0)$　(2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，$\Gamma(n+1)=n!$ $(n=0,1,2\cdots)$

(3) $\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}-\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\cdots\right)$　(4) $n!\sim\sqrt{2\pi}n^ne^{-n}$ $(n\to\infty)$ スターリングの公式

V. ベータ関数

(1) $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ $(x,y>0)$　(2) $B(x,y)=B(y,x)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

VI. 奇偶函数在关于原点对称区间上的积分

f(x)在[-a,a]上可积，$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$

特に，$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}0 & f(-x)=-f(x)\\ 2\int_0^a f(x)dx & f(-x)=f(x)\end{cases}$

VII. $\sin^n x$，$\cos^n x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的积分

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n为偶数\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot1 & n为奇数\end{cases}$

递推：$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geq2)$　$I_0=\frac{\pi}{2}$　$I_1=1$

VIII. 周期函数积分

T为周期：$f(x+T)=f(x)$

$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

⑤ 定積分の応用

I. 面積：(1) $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$，$x=b$ $(g(x)\leq f(x),\ a<b)$ で囲まれた面積A：

$A=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$

(2) 極座標表示 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ のとき：$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{f(\theta)\}^2d\theta$

II. 曲線の長さ

(1) $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ のときの曲線の長さL：$L=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

(2) 媒介変数表示 $x=x(t)$，$y=y(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ のとき

$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

(3) 極座標表示 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ のとき　$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(rd\theta)^2+(dr)^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}d\theta$

III. 回転体の表面積と体積

(1) $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ のときの表面積S：$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$

(2) $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ のときの体積V：$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$

3. 数列と級数

3.1 数列

コーシーの収束条件定理：数列$\{a_n\}$が収束する⇔任意の正数εに対して適当な自然数Nを選び，任意の自然数m, nに対してm, n≧Nのとき

$|a_m-a_n|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば　(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$　(ii) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$　(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$（ただし，$b_n\neq0$，$\beta\neq0$）

すべてのnについて $|a_n|\leq M$（Mは定数）⇒ 数列$\{a_n\}$は有界

3.2 級数

① 定義と性質：数列$\{a_n\}$に対して $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^\infty a_n=\sum a_n$ を無限級数または級数といい，a_nを第n項または一般項という．$S_n=\sum_{n=1}^n a_n$を第n部分和または部分和という．

$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ $(\neq\pm\infty)$ のとき，$\sum_{n=1}^\infty a_n$ はSに収束するといい，$\sum_{n=1}^\infty a_n=S$と書く．Sを$\sum_{n=1}^\infty a_n$の和という．$\lim_{n\to\infty}S_n$が発散するとき，$\sum_{n=1}^\infty a_n$は発散するといい．

② $\sum_{n=1}^\infty a_n$が収束 ⇒ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$　$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty a_n$は発散する

③ $\sum_{n=1}^\infty(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^\infty a_n+\beta\sum_{n=1}^\infty b_n$ $(\alpha,\beta$：定数$)$

④ 級数$\sum a_n$が収束するならば，この級数に順序を変えずに任意に括弧を入れてつくった級数も収束し，元の級数と同じ和をもつ．

⑤ コーシーの収束条件定理

級数$\sum_{n=1}^\infty a_n$が収束する⇔任意の正数εに対して自然数Nを適当にとるとき，$N<n<n+p$を満足する任意の自然数nとn+pに対して

$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$

⑥ $\sum_{n=1}^\infty ar^{n-1}$は，(i) $r\geq1$のとき$+\infty$，

(ii) $|r|<1$のとき$a/(1-r)$，(iii) $r\leq-1$のとき振動

⑦ 正項級数

$a_n>0$であるとき，$\sum_{n=1}^\infty a_n$を正項級数という　$\sum_{n=1}^\infty a_n$ $(a_n>0)$が収束する⇔部分和 $S_n=\sum_{n=1}^n a_n$が有界

比較判定法

正項級数 $u_n\leq v_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 有 1° 若$\sum_{n=1}^\infty v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^\infty u_n$收敛

極限形式：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ $(0<l<+\infty)$　2° 若$\sum_{n=1}^\infty u_n$发散，则$\sum_{n=1}^\infty v_n$发散

那么u_n, v_n同时收敛或同时发散

欧拉常数 $c=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(1+n)\right]$

ダランベールの判定法　正項級数$\sum a_n$，$a_n>0$，$n=1,2\cdots$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ のとき，$\sum a_n$は

(i) $r<1$のとき収束　(ii) $r>1$のとき発散　(iii) $r=1$ unknown

例：p級数 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}$ 当$p>1$收敛，当$p<1$发散．

コーシーの判定法　正項級数$\sum a_n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$ のとき

(i) $r<1$のとき収束　(ii) $r>1$のとき発散　(iii) $r=1$ unknown

两种判别法均有可能失效！

コーシーの積分判定法

f(x)を$[k,+\infty)$（k：整数）で定義された単調減少な負でない連続関数とするとき，

$\int_k^{+\infty}f(x)dx$と$\sum_{\nu=k}^\infty f(\nu)$は共に収束するかまたは共に発散する．

調和級数 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^k}$（p級数）(i) $k>1$のとき収束 (ii) $k\leq1$のとき発散