線形代数

1編 行列式

Q 有理数　R 実数　C 複素数

日本式：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$

中式：$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$

奇置換：逆序总数为奇数　偶置換：逆序总数为偶数

$|x_{11}| = x_{11}$

$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}$

推广：对n个数组成的所有排列取和

$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} x_{1i_1} x_{2i_2} \cdots x_{ni_n}$　$(1 \le i, j \le n)$

偶置換：1　奇置換：-1

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$　$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$　$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

$x_1 = \frac{|D_1|}{|D|}$　$x_2 = \frac{|D_2|}{|D|}$　$x_3 = \frac{|D_3|}{|D|}$

行列式の性質と展開

$|E| = 1$

两行(列)互换，只改变符号　有一行(列)全为零，两行(列)全相等，行列式为零　行列式为零

两行(列)对应成比例，行列式为零。

① 三角行列式　$|{}^tA|$ or $|A^T| = |A|$

$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ & a_{22} & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$\begin{vmatrix} O & & a_{1n} \\ & a_{n-12} & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & a_{n-12} & \\ a_{n1} & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$

② $\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j}' + b_{1j}' \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj}' + b_{nj}' \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j}' \cdots a_{1n} \\ a_{n1} \cdots a_{nj}' \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \cdots b_{1j}' \cdots a_{1n} \\ a_{n1} \cdots b_{nj}' \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} a_{11} \cdots ca_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{n1} \cdots ca_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

③ 行列式的某一行列加上另一行列对应元素k倍，行列式不变

M_{ij}

④ 行列 $A = (a_{ij})$ から i 行 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の行列式を a_{ij} の小行列式という。

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \Delta_{ij}$ を a_{ij} の余因子という　行列式=任一行(列)元素与其对应的代数余子式乘积之和。

⑤ $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$　行列式某一行(列)各元素与另一(行)列的对应元素的代数余子式乘积之和为0

⑥ Vandermonde 行列式：

$|AB| = |A||B| = |B||A|$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)(a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})$

$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ B & D \end{vmatrix} = |A||D|$

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

⑦ クラーメルの公式

$m = n$, $|A| \ne 0$ のとき，一意的な解 $x = A^{-1}b$ をもつ。

$x_j = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$　$(1 \le j \le n)$

j列,常数项

若线性方程组的系数行列式 $D \ne 0$

$x_j = \frac{|D_j|}{|D|}$

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$

$D \ne 0 \Leftrightarrow$ 该线性方程只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = r = n$

$D = 0 \Leftrightarrow$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) = r < n$，解中有 $n-r$ 个未知量

2編 連立1次方程式

① ガウスの消去法による連立1次方程式の解法。

将多项式的系数与常数项提取后重组为矩阵。

$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$　化为 行階段形　行の最も左にあるゼロであい成分：主成分。

增广矩阵。

扩大系数行列

设增广矩阵 $\bar{A}$，系数矩阵 A。

有解必要十分条件：

$r(\bar{A}) = r = r(A) = n$　唯一

$r(\bar{A}) = r(A) = r < n$　infinite

主成分均为1，所在行只有主成分非0的行列称为行簡約階段形。

$Ax = b$ (非齐次)が解をもつ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

② 行列の階段(ランク)　$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$　变形不改变rank

(i) 变为行階段形后，对角线上1的个数　(ii) A中非0行列式最大阶数

(iii) A中线性独立的行/列的 vector 最多个数。

n次の正方行列 A について次の3条件は同値である

(i) A は正則。(ii) $|A| \ne 0$ (iii) $\operatorname{rank} A = n$

$\operatorname{rank} = n$ 的 $n \times n$ 矩阵为满秩矩阵

法1 将增广矩阵(非齐次线性方程组)或系数矩阵(齐次线性方程组)只用初等行变换化为阶梯形矩阵。

法2 当方程数与未知量相同时，クラーメル公式。

$[\varepsilon_1' \varepsilon_2' \cdots \varepsilon_n'] = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n] M$　基变换公式

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots \varepsilon_n'$ 为 n 维线性空间 V 的两组基

$X = MX'$　$X' = M^{-1}X$　坐标变换公式

$\varepsilon_1' = m_{11}\varepsilon_1 + \cdots + m_{n1}\varepsilon_n$

$\varepsilon_2' = m_{12}\varepsilon_1 + \cdots + m_{n2}\varepsilon_n$

$\varepsilon_n' = m_{1n}\varepsilon_1 + \cdots + m_{nn}\varepsilon_n$

$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$ ←过渡矩阵

3編 行列

迹：$\operatorname{tr} A = \operatorname{sp} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

① スカラー乗法 (scalar, 标量) $cA = (ca_{ij}) = Ac$　② $AB = BA$ のとき，可換であるという。

③ 単位行列　$E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})$　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \ne j) \end{cases}$ (クロネッカーのデルタ)

$AE = EA = A$

④ $|kA| = k^n|A|$　⑤ $|AB| = |A||B|$

③ 対角行列 $\begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & a_2 & \\ O & & a_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a_1, a_2 \cdots a_n)$　$-|A| \ne |-A|$

⑥ ${}^t({}^tA) = A$　$(A+B)^T = A^T + B^T$　$(kA)^T = kA^T$　$|A| = |A^T|$　$(AB)^T = B^T A^T$

⑦ 対称行列：$A^T = A$　交代行列：$A^T = -A$　A は交代行列のとき：$A^k = \begin{cases} \text{対称行列} & k = \text{偶} \\ \text{交代行列} & k = \text{奇} \end{cases}$

逆行列：$AX = E$ かつ $XA = E$ を満足する X を A の逆行列といい

A^{-1} で表わす。$A^{-1}A = AA^{-1} = E$。A^{-1} が存在 $\Leftrightarrow$ A は正則 ($\det A \ne 0$)

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$　$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$　$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$AB = O$，$B = O$　$AB = AC$，$B = C$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{|A|} & \frac{\Delta_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{|A|} \\ \frac{\Delta_{12}}{|A|} & \frac{\Delta_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{|A|} \\ \cdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{|A|} & \frac{\Delta_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$ →余因子行列

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{p1}^T \\ A_{1q}^T & A_{2q}^T & \cdots & A_{pq}^T \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ O & & A_N \end{bmatrix}$ 准对角矩阵。

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pt} \end{bmatrix}$　$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tq} \end{bmatrix}$

$AB = \operatorname{diag}[A_1B_1, A_2B_2 \cdots A_nB_n]$

$BA = \operatorname{diag}[B_1A_1, B_2A_2 \cdots B_nA_n]$

$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1q} \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pq} \end{bmatrix}$

$r(AC) = r(C)$　$r(CB) = r(C)$　$r(AB) = r(C)$

$r(AB) \le r(A)$

$r(AB) \le r(B)$

秩为r的矩阵 $A_{m \times n}$ 可通过初等行变换，变为 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$

对单位矩阵 E_n 施行一次初等变换后所得到的矩阵称为初等矩阵。

存在以下初等矩阵：$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$

存在可逆矩阵：$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$　$(A|E) \to (E|A^{-1})$　$\left(\frac{A}{E}\right) \to \left(\frac{E}{A^{-1}}\right)$

$AX = B$

快速解法　A可化为B，称A与B等价

$[A|B] \to [E|A^{-1}B]$　$\operatorname{rank}(A) = r$　A与 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 等价　等价标准形

矩阵等价：(1) 存在可逆矩阵P与Q使 $PAQ = B$

(2) $r(A) = r(B)$　(3) A, B有相同等价标准型

$r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right)$

$= r(A) + r(B)$

A列满秩　$r(AB) = r(B)$

B行满秩　$r(AB) = r(A)$

$r(A+B) \le r(A) + r(B)$

$r(A) + r(B) - n \le r(AB)$

同阶ABC　$r(AB) + r(BC) \le r(B) + r(ABC)$

$\le \min[r(A), r(B)]$

n是矩阵A列数。$AB = O$　$r(A) + r(B) \le n$

4編 線形空間

① 集合Vが次の(I),(II)を満足するとき，Vを体K(数域K)上の線形空間といい。

(I) 对V中任意两向量 α 与 β，均有V中唯一某一个确定向量与之相对应 ($\alpha + \beta$)

$(x+y)+z = x+(y+z)$　$x+y = y+x$　$0+x = x$　$x+x' = 0$

(II) 对于P中每一个数k和V中每一个向量 α，有V中唯一确定向量 δ 与它们对应 $\delta = k \cdot \alpha$

$(a+b)x = ax + bx$　$a(x+y) = ax + ay$　$(ab)x = a(bx)$　$1x = x$

n元向量空间 P^n

② 線形結合

x を $x_1, x_2, \cdots x_n$ の線形結合という：$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$ において，$c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$ のみが成立するとき，

$x_1, x_2 \cdots x_n$ を線形独立という。otherwise 線形従属という。

③ 向量的最大線形无关组　等价向量组　向量个数相同。

若 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 線形独立，$\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta$ 線形従属，$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ 存在且唯一

若 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 中每个向量都可用 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 线性表示，$r > s$ 线性相关

向量 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的极大线性无关组　线性无关 $r \le s$

(1) $\alpha_{i1} \cdots \alpha_{in}$ 线性无关 (2) 再添加原向量组内任一向量，导致其线性相关

④ 基底と次元

次の2条件を満足するとき，$e_1, \cdots e_n$ は V の基底であるという。ベクトルの個数を V の次元といい，dimV で表わす。

(1) $e_1 \cdots e_n$ は1次独立である (2) V の任意のベクトルは $e_1, \cdots e_n$ の1次結合で表わされる。

P^n 的一组基与维数：$e_i = [0, \cdots \overset{i}{1}, 0 \cdots 0]^T$ $i = 1, 2 \cdots n$　$\operatorname{Dim} P^n = n$

$P^{m \times n}$ 的一组基与维数：E_{ij} 第 i, j 为1 其余为0　$\operatorname{Dim} P^{m \times n} = mn$

$P[x]$ 有无穷多线性无关向量。$1, x, x^2, \cdots x^k$ 均线性无关。