第六章 机械波

§6.2 平面简谐波的描述

一. 一维波的一般表达式

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ t' = t \end{cases}$$

$$y(x,t) = y'(x',t') = f(x') = f(x-ut)$$

二. 波动方程

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

$\Downarrow$

$\lambda\nu = u$

$\lambda = Tu$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$x \pm ut$ 称为行波特征因子，向右负，向左正

$$\phi_{P(x,t)} = \left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right] = \phi_{Q(x',t')} = \left[\omega\left(t'-\frac{x'}{u}\right)+\varphi\right]$$

解出 $u = \frac{x'-x}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 相位传播速度

三. 平面简谐波波动方程的其他形式

$$y(x,t) = A\cos\left[(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)+\varphi\right] = A\cos\left[\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{\lambda}x\right]$$

$$= A\cos[\omega t+\varphi-kx]$$

角波数 $\left(k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}2\pi,\ \frac{1}{\lambda}\text{:单位长度所包含完整波的个数}\right)$

对于纵波：y：离开自己的平衡位置

疏密部为位移最大处

小结：(1) 波形图可获得信息：$\begin{cases}\text{振幅}\\\text{波长}\end{cases}$

(2) 振动图可获得信息：$\begin{cases}\text{振幅}\\\text{周期}\end{cases}$

§6.3 一维波的波动微分方程

一. 一维波的波动微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ 可求波速

二. 波速的求法

(1) 张紧的绳上的横波

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

(2) 棒中的纵波

$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ $\quad Y = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l_0}}$ $\quad$ Y 杨氏模量

F 为拉力或压力

$\frac{F}{S}$ 为应力（单位面积的拉力或压力）

§6.4 波的能量 能流密度

一. 波的能量，能量密度

1. 波的能量

(1) 张紧绳能量

总能量：$dE = dE_k + dE_p = \frac{1}{2}dm\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}dm\,u^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

(2) 简谐波

$$E = dm A^2\omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

I. 由横波导出的能量也适用于纵波

II. 任意时刻 t，质元中的动能和势能总是相等

III. 总能量不是常数，而随着时间 t 变化，并含行波的特征部 $\left(t-\frac{x}{u}\right) \Rightarrow x \pm ut$

IV. 波传递能量

2. 波的能量密度

(1) 一维波的线能量密度

一维波单位长度具有的能量 $\frac{dE}{dx} = \mu A^2\omega^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$

在一周期内的平均值 $\overline{\frac{dE}{dx}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE}{dx}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mu A^2\omega^2\frac{1-\cos\left[2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+2\varphi\right]}{2}dt$

$= \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2$

(2) 三维波的能量密度

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

二. 波的能流密度

I. 一维简谐波

瞬时传播功率 $P = \frac{dE}{dt} = u\mu A^2\omega^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$

平均传播功率 $\bar{P} = \frac{1}{2}u\mu A^2\omega^2$

II. 三维简谐波

平均能流密度 $I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$（波的强度）

III. 平面简谐波 $\quad I = \frac{P_0}{4\pi r^2}$

$\bar{P} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u S$ $\quad$ 振幅不变

IV. 球面简谐波的振幅

$$y(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos\omega\left[\left(t-\frac{r}{u}\right)+\varphi\right]$$

非常好的例题：

质量 m，长度 L，从天花板挂下一根绳；求证：(1) 绳上横波的 u 是 y 的函数，且为 $u=\sqrt{yg}$（y 是下端起的距离）(2) 从下端行进到上端所需时间 $t=2\sqrt{\frac{L}{g}}$

(1) 证明：$F = \frac{m}{L}yg$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{myg}{L}}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{yg}$$

(2) 证明：$u = \frac{dy}{dt} = \sqrt{yg}$

$$\frac{dy}{\sqrt{yg}} = dt$$

$$\int_0^L \frac{dy}{\sqrt{yg}} = \int_0^t dt$$

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$