8.5 正态总体均值与方差的区间估计

(I) 正态总体的样本均值与样本方差的分布

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 样本均值，S^2 样本方差。

定理一: $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

定理二: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立

定理三: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

定理四: 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$　$\overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$

样本方差 $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$　$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_i-\overline{X})^2$

$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时

$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$　$S_w = \sqrt{S_w^2}$

(II) 正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限（置信水平为 $1-\alpha$）

待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\overline{\mu}=\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$, $\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
μ	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$, $\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$　$\underline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$, $\underline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$t=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$, $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$, $\underline{\mu_1-\mu_2}=\overline{X}-\overline{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$, $\underline{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

§9 假设检验

显著性水平 α　检验统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

检验统计量取 C 中的值时，拒绝原假设 H_0

在显著性水平 α 下，检验假设

区域 C 为拒绝域，边界点为临界点。

显著性检验 原假设/零假设 $H_0: \mu=\mu_0$

备择假设 $H_1: \mu\neq\mu_0$

$|z| \geq z_{\alpha/2}$　$z=-z_{\alpha/2}$, $z=z_{\alpha/2}$

右边检验 $H_0: \mu\leq\mu_0$, $H_1: \mu>\mu_0$

左边检验 $H_0: \mu\geq\mu_0$, $H_1: \mu<\mu_0$

通过显著性水平 α 计算拒绝域。

对比检验统计量是否落在拒绝域内。

原假设 H_0	检验统计量	备择假设	拒绝域	
$\mu\leq\mu_0$ $\mu\geq\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$z\geq z_\alpha$ $z\leq -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geq z_{\alpha/2}$	Z 检验法
$\mu\leq\mu_0$ $\mu\geq\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geq t_\alpha(n-1)$ $t\leq -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$	t 检验法
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$ $\mu_1-\mu_2\geq\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2, σ_2^2 已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$z\geq z_\alpha$ $z\leq -z_\alpha$ $\lvert z\rvert\geq z_{\alpha/2}$	
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$ $\mu_1-\mu_2\geq\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$ $\sigma^2\geq\sigma_0^2$ $\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	χ 检验法
$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$　$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 未知)	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geq F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$	F 检验法
$\mu_D\leq 0$ $\mu_D\geq 0$　$\mu_D=0$ (成对数据)	$t=\dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D>0$ $\mu_D<0$ $\mu_D\neq 0$	$t\geq t_\alpha(n-1)$ $t\leq -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$	

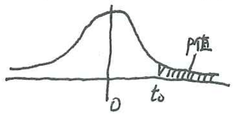
9.8 假设检验问题的 p 值法

定义: 假设检验问题的 p 值 (probability value) 是由检验统计量的样本观察值得出的原假设可被拒绝的最小显著水平

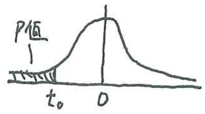
例：正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$　σ 未知时

检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

$H_0: \mu\leq\mu_0$, $H_1: \mu>\mu_0$ 中



$H_0: \mu\geq\mu_0$, $H_1: \mu<\mu_0$ 中



① 通过检验统计量的样本观察值计算 p 值

② p 与 α 比对

$p>\alpha$ 接受

$p<\alpha$ 拒绝