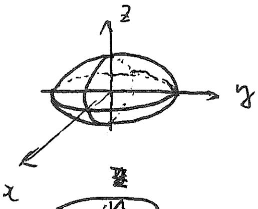
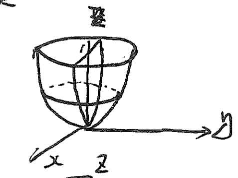
§7 二次曲面

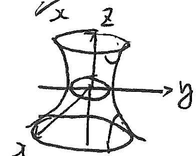
(一) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



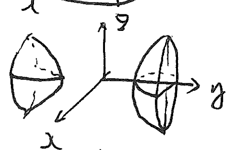
(二) 椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



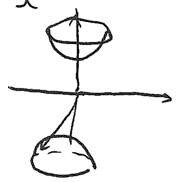
(三) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



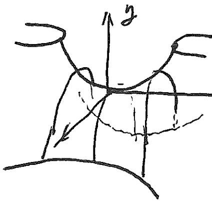
(四) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



符号相同的令其中任意一个为0 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



(五) 马鞍面 $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



第九章

§1 多元函数基本概念

内点：设E是R^n的一个子集，$E\subset R^n$.

$M\in E$, $U(M,\delta)\subset E$ 称M是E的一个内点.

区域与边界的并集称为闭区域

二重极限不存在，累次极限存在 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$x\to 0$
$y\to 0$

二重极限存在，不存在累次 $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

§2 偏导数

混合偏导数在某点存在且连续时，混合偏导数与求导顺序无关。（常微分类的题此种解法是突破口之一）

§3 多元复合函数的偏导数

$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$ 全增量公式

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$ 全导数

绘图法

§4 隐函数的偏导数

存在定理 具有3个连续的偏导数

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ $-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$ $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$

§5 全微分

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

☆ 一阶全微分形式不变性

$d(u\pm v)=du\pm dv$

$d(uv)=vdu+udv$

$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

☆ 求复合偏导之一思路

若函数$z=f(x,y)$的偏导数$f'_x(x,y)$ $f'_y(x,y)$在(x_0,y_0)处连续，则函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微

§6 矢值函数与偏导数在几何上的应用

$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ 矢端曲线

$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$

切线 $\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dt}|_{t=t_0}}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dt}|_{t=t_0}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{dt}|_{t=t_0}}$

法平面 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}(x-x_0)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}(y-y_0)+\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=t_0}(z-z_0)=0$

$F(x,y,z)=0$
$G(x,y,z)=0$ $\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_P}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_P}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_P}$

切平面

$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法线

$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$

§7 多元函数的极值与条件极值问题

驻点 $\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0\\ f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$

充分条件 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$ $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$ $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

① $B^2-AC<0$时 A或C<0 极大值；A或C>0 极小值

② $B^2-AC>0$时 无极值

③ $B^2-AC=0$时 未定