五. 第二类曲线积分

$\Gamma_{AB}\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

$\int_{\Gamma_{AB}}\vec{A}\cdot\vec{\tau}^{\circ}ds=\int_{\Gamma_{AB}}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int_{\Gamma_{AB}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

$=\int_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$

$=\int_{t_A}^{t_B}P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$

$+\int_{t_A}^{t_B}Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$

$+\int_{t_A}^{t_B}R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$

$\int_{P_{AB}}\vec{A}\cdot\vec{\tau}^{\circ}ds \xlongequal{\text{有向线元}} \int_{P_{AB}}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int_{P_{AB}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

$=\int_{P_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$

计算方法：(多种多样)

I. ①求$\vec{\tau}_0$(切矢量) ②化为第一类曲线积分 (非常未知)

II. 基本做法 2014-2015. 7题 $\vec{\tau}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

与参数增加方向相同

$P_{AB}:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$

(1)参数化

(2)全代入(化简形式) (定积分)

(3)起下终上(无论大小)

III. (1)平面上

(a) $\oint_\Gamma \xlongequal{\text{+Green条件}} \iint_D(\cdots)d\sigma$

(b) $\int_\Gamma \xlongequal[\text{Green公式}]{\text{添辅助线}}$ 处理

(c) $\int_{\Gamma_{AB}}=U(B)-U(A)$

(空间中)第二类曲线积分

① $\oint_P Pdx+Qdy+Rdz$ +(Stokes条件)

$\Rightarrow$化第一类曲面积分

② 找U使$dU=Pdx+Qdy+Rdz$,

则$\int_{P_{AB}}=U(B)-U(A)$

③'三个等式成立(换曲线)

① $\int_{P_{AB}}=\int_{P_{AB}}+\int_{\Gamma_{AB}}+\int_{\Gamma'_{AB}}$ 在单连通区域

② $\oint_P=0$ (P可缩成点) $=\oint_{P'}$ (P'与P同向,且P变成P')

设$D\subset R^2$是平面单连通区域,若函数P,Q在区域D上连续,且有一阶连续偏导数,则以下条件等价

① D中任意何闭曲线P, $\oint_P Pdx+Qdy=0$

② $\int_{P_{AB}}Pdx+Qdy$ 与路径无关

③ 存在一个u, $du=Pdx+Qdy$

④ 每一点 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

注意是题目所给的P,Q顺序!

$\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)dy$

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C$

$\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy+C$

定理：设D是区域(多连通), P, Q有连续的一阶偏导数,且$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

则1° $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=0$

Γ不包围洞

2° $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\oint_{\Gamma_1}Pdx+Qdy$ 洞的循环常数

Γ_1与Γ包围同一个洞且同向

七. 第二类曲面积分

计算方法：① $\iint_S\vec{A}\cdot\vec{n}^{\circ}dS$ ①求出$\vec{n}^{\circ}$ ②化为第一类曲面积分

② 基本做法：(按记号提示,顺势而为) $dS=\frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma_{x,y}$

$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS \xlongequal{S:z=z(x,y)} \iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\frac{\cos\gamma}{|\cos\gamma|}d\sigma_{xy}$

(如果无法转换,表明法矢量与z轴正向垂直,积分值为0)

$=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))(\pm d\sigma_{xy})$

步骤：①按符号提示化掉$z=z(x,y)$

②视角度,定符号

③化成相应平面投影区域D_{xy}

③ 闭曲面+GAUSS定理 ⟶ 三重积分

④ S(不封闭)添辅助面(特殊) ⟶ 三重积分 处理辅助面

⑤ $\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy \xlongequal{\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0}$ 换曲面计算 (非奇点)

六. 格林公式

若函数P, Q在有界闭区域$D\subset R^2$上连续且具有一阶连续偏导数

$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Qdy$ (d) $\oint_\Gamma Pdx+Qdy \;\; \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Γ为区域D的边界曲线,并取正向.

①二重积分与平面上第二类曲线积分的关系

②牛顿—莱布尼茨型定理

③(通常)化平面闭曲线P的第二类曲线为二重积分

三个转化：①积分号

②区域

③变量

① $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=0$, 不包围洞

② $\oint_\Gamma Pdx+Qdy \xlongequal{\text{换曲线}} \oint_{\Gamma_1}Pdx+Qdy$

Γ与Γ_1包围同一个洞,同向

③ $\int_{\Gamma_{AB}}Pdx+Qdy=\int_{\Gamma'_{AB}}Pdx+Qdy$

Γ_{AB}与Γ'_{AB}同起点同终点

(e) D是单连通 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则$dU=Pdx+Qdy$

不要洞

若Γ不封闭,不能直接用Green公式

①添辅助线使之封闭 ②用Green公式处理辅助线上的积分

不要忘记代入边界方程!

特殊的第二类积分可用于计算面积

$\frac{1}{2}\oint_P ydx+xdy=D$

八. Gauss定理

V是空间有界的闭区域, S是V的边界, P, Q, R在V上有连续一阶偏导数,则

$\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\oiint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$

其中S上取外侧(肚内往内,提外侧)

十. Stokes公式

S是空间曲面, L是S的边界, P, Q, R在空间S的区域上有连续一阶偏导数

$\oint Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}dS$

$=\iint_S\begin{vmatrix}dydz&dxdz&dxdy\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$

$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$

九. 散度

$\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$是定义在空间的矢值函数,而P, Q, R有一阶偏导数.

称$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \xlongequal{\text{记}} \mathrm{div}\vec{A}$ 为$\vec{A}$的散度

$\mathrm{div}\vec{A}=0$ 为无源场

$\mathrm{div}\vec{A}|_P>0$, 称P为A的源

$\mathrm{div}\vec{A}|_P<0$, 称为P=A的汇

$\mathrm{div}\vec{A}|_P=0$, P是A的无源