n阶常系数齐次线性微分方程

特征根 $\lambda_1 \cdots \lambda_s$，重数 $n_1, \cdots n_s$

$$n_1 + \cdots + n_s = n$$

$$y = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x^{j-1} e^{\lambda_i x}$$

特征方程 (2.21) 的根　　微分方程 (2.20) 通解中对应的项

① 单重实根 λ　　对应一项 $Ce^{\lambda x}$

② k重实根 λ　　对应 k 项 $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$

③ 单重复数根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \beta > 0$　对应两项 $e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

④ k重复数根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \beta > 0$　对应 $2k$ 项 $e^{\alpha x}[(a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1})\cos\beta x + (b_1 + b_2 x + \cdots + b_k x^{k-1})\sin\beta x]$

常系数非齐次线系微分方程

(I) $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = P_m(x) e^{\alpha x}$

特解 $y^* = x^k R_m(x) e^{ax}$

$$k = \begin{cases} 0, \text{当}\alpha\text{不为特征根时}; \\ 1, \text{当}\alpha\text{为单重特征根时} \\ 2, \text{当}\alpha\text{为二重特征根时} \end{cases}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + m\frac{dy}{dx} + ny = f(x)$

二重根 λ

$y = (\int\int e^{-\lambda x} f(x) dx) dx + C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$

(II) $f(x) = P_m(x) e^{ax} \cos bx$

或 $f(x) = Q_l(x) e^{ax} \sin bx$

或 $f(x) = P_m(x) e^{ax} \cos bx + Q_l(x) e^{ax} \sin bx$

特解 $y^* = x^k (R_h(x) e^{ax} \cos bx + S_h(x) e^{ax} \sin bx)$

$h = \max\{m, l\}$，$k = \begin{cases} 0, \text{当} a\pm bi \text{不是特征根} \\ 1, \text{当} a\pm bi \text{是单重特征根} \end{cases}$

六. 一般线性微分方程的一些解法

I 变量变换法 (一) 欧拉 (Euler) 方程

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

称为欧拉方程

二阶情况：$a_0 x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x)$

令 $x = e^t$，即 $t = \ln x$，

(当 $x<0$ 时，令 $x = -e^t$)，于是有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\right)$$

另：$y = y_1(x)$ 为方程另一解

代

$x>0$ 时

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = f(e^t)$$

$x<0$ 时

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = f(-e^t)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i \end{pmatrix} e^{(\alpha+\beta i)t}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1\cos\beta t - b_1\sin\beta t \\ a_2\cos\beta t - b_2\sin\beta t \\ a_3\cos\beta t - b_3\sin\beta t \end{pmatrix} e^{\alpha t} + \cancel{\begin{pmatrix} a_1\cos\beta t + b_1\sin\beta t \\ a_2\cos\beta t + b_2\sin\beta t \\ a_3\cos\beta t + b_3\sin\beta t \end{pmatrix} e^{\alpha t}}$$

$$i\begin{pmatrix} a_1\sin\beta t + b_1\cos\beta t \\ a_2\sin\beta t + b_2\cos\beta t \\ a_3\sin\beta t + b_3\cos\beta t \end{pmatrix} e^{\alpha t}$$

(II) 降阶 $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$，已知有一个非零解 y_1

令 $y = y_1 u$.

$$y = y_1 \left[C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx\right]$$ 刘维尔公式

(III) 某些特殊的二阶变系数线性方程化成常系数线性方程求解

若 $2p'(x) + p^2(x) - 4q(x) = a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

可经变量变换 $y = uv$　　取 $v = e^{-\int \frac{p}{2}}$

$$u'' + pv' + qv = -\frac{1}{4}(2p' + p^2 - 4q) e^{-\int\frac{p}{2}dx} = -\frac{a}{4} e^{-\int\frac{p}{2}dx}$$

$$u'' - \frac{a}{4}u = 0$$

刘维尔公式

$$y = y_1\left(C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx\right)$$

II. 变动任意常数法

$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x)$

对应通解 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

令 $y = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x)$

$$\begin{cases} u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \\ u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

$u_1' = -\frac{y_2(x)}{W(x)} f(x)$　$u_2' = \frac{y_1(x)}{W(x)} f(x)$

$u_1 = \int \frac{y_2(x)}{W(x)} f(x) dx$　$u_2 = \int \frac{y_1(x)}{W(x)} f(x) dx$

一阶线性方程：（尽力凑出伯努利方程

(I) 可考虑凑 主变元．　$2ydy \Rightarrow dy^2$

$\frac{dy}{2\sqrt{y}} \Rightarrow d\sqrt{y}$

$$y = y_1(x)\left(C_1 - \int \frac{y_2(x)}{W(x)} f(x) dx\right) + y_2(x)\left(C_2 + \int \frac{y_1(x)}{W(x)} f(x) dx\right)$$

常用猜解：x，e^x　式中某奇怪项的完全平方项

存在变上项积分 先代入0 求 $f(0)$

已知 $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$ 三个解．

通解：$y = C_1(y_2 - y_1) + C_2(y_3 - y_1) + y_1$

分母同除平方消平方项？伯努利方程

解：一阶线性微分方程组时建议写成 x' y' 的形式

$u = xy$

$u = \frac{y}{x}$

$u = \frac{x}{y}$

$u =$ 一个奇怪的项

向伯努利方程方向化归

$x = e^t$

代替平方项

字母 $u = y^2$

$V = x^2$

$(x+1)^2 + (4y+1)^2 + 8xy + 1$

$u = x+1$

$v = 4y+1$