⑤部分空間

K上の線形空間Vの空集合でない部分集合Wが，次の条件を満足するとき，WをVの線形部分空間または部分空間という

(i) $x, y \in W \Rightarrow x+y \in W$　$x \in W,\ \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in W$　$=\{k_1\alpha_1 + \cdots k_t\alpha_t \mid k_1 \cdots k_t \in P\}$

设V是数域P上的线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$是V中的一组向量，记$L(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_t)$

$V = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$．由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t$生成的子空间

(1) $L(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_t) = L(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s) \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t$与$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s$等价

(2) $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_t) = \mathrm{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t)$

$AX=b$有解，向量b可经A的列向量线性表示．

解惟一$\Leftrightarrow$线性表示式惟一

$\Leftrightarrow$列向量组线性无关

$\Leftrightarrow$列秩为n

$\Leftrightarrow r(A)=n$

⑥矩阵的秩

$\beta_1 \cdots \beta_m$与$\alpha_1 \cdots \alpha_j$的极大线性无关组所含向量的个数．

$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \end{bmatrix} = [\alpha_1 \cdots \alpha_j]$　A的行秩与列秩　行秩$=r(A)=$列秩

A为可逆矩阵$\Leftrightarrow$A的行向量/列向量组线性无关

设A为数域P上$m \times n$矩阵，$r(A)=r$．$AX=0$全体解W是P^n的一个子空间．$\dim W = n-r$．

$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n-r}$是W的一组基．一个基础解系．

$$\underset{\xi}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = t_1 \underset{\xi_1}{\begin{bmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + t_2 \underset{\xi_2}{\begin{bmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \cdots + t_{n-r} \underset{\xi_{n-r}}{\begin{bmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

(I) $AX=b$　① 若ξ_1, ξ_2均为(I)的解

(II) $AX=0$　$\xi_1 - \xi_2$为(II)的解

② 若ξ_0为(I)的解，ξ为(II)的解．

$\xi_0 + \xi$为(I)的解

ξ_0是(I)的特解，ξ为(II)的通解

(I)的通解为$\xi_0 + \xi$

$A: m \times n$　$B: n \times t$　$AB=0$

$r(A)+r(B) \le n$

$\dim W = n-r$

⑦線形写像

K上の線形空間VからV'への写像Tが次の2条件を満足するとき，TをVからV'への線形写像または1次写像という

(1) $T(x+y) = Tx + Ty$ $(x, y \in V)$　(2) $T(aX) = aTx$ $(a \in K)$

特に，VからV自身への線形写像TをVの線形変換という

⑧欧氏空间

$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$　$(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$　$(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$　$(\alpha, \alpha) \ge 0$且$(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

具有内积的空间称为欧氏空间．　标准内积 $(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

$(0, \alpha) = 0$　$(\alpha, k\beta) = k(\alpha, \beta)$　$(\alpha, \beta+\gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$　$\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} t_j\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_i t_j (\alpha_i, \beta_j)$

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2)$　Cauchy不等式

$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}$　Schwarz不等式

$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$，$0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi$　$A^TA = E$ 直交行列

由n个向量组成的正交向量组称为正交基．单位长度时称为单位正交基．

$(\alpha, \beta) = 0$，α与β正交

グラム・シュミットの直交化法

$x_1, x_2, \cdots, x_n$を1次独立なベクトルとすると

$y_1 = x_1$

$y_2 = x_2 - \frac{(y_1, x_2)}{(y_1, y_1)} y_1$

$y_3 = x_3 - \frac{(y_2, x_3)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(y_1, x_3)}{(y_1, y_1)} y_1$

$\vdots$

$y_n = x_n - \frac{(y_{n-1}, x_n)}{(y_{n-1}, y_{n-1})} y_{n-1} - \cdots - \frac{(y_1, x_n)}{(y_1, y_1)} y_1$

$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$　$e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$　$\cdots$　$e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$

V, V'同构：$V \overset{\sigma}{\cong} V'$　当且仅当$\dim V = \dim V'$

(1) $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$　$\forall \alpha, \beta \in V$

(2) $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$　$\forall k \in R, \forall \alpha \in V$

(3) $(\alpha, \beta) = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$　$\forall \alpha, \beta \in V$

平面围绕坐标原点按逆时针旋转φ角的变换　$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

存在可逆矩阵$P^{-1}AP = B$ (A与B相似)

几个等价式：

(1) β能(否)经$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$线性表示．

$\Leftrightarrow$非齐次线性方程组$[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s]X = \beta$有(没有)解

$\Leftrightarrow r([\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s])$是(否)等于$r([\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s \vdots \beta])$

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$线性无关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s]X = 0$只有零解

$\Leftrightarrow r([\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s]) = s$

(3) $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s$线性相关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$[\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s]X = 0$有非零解

$\Leftrightarrow r([\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s]) < s$

(4) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$是(否)能作为$P^n$的一组基

$\Leftrightarrow$行列式$|[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n]|$是(否)不为零．

	定义	标准形	判别法	性质
$A_{m\times n}$与$B_{m\times n}$ 等价	$PAQ=B$	$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $r=r(A)$	$r(A)=r(B)$	$r(A)=r(B)$
$A_{n\times n}$与$B_{n\times n}$ 相似	$P^{-1}AP=B$			$r(A)=r(B)$，$\|A\|=\|B\|$ $\|\lambda E-A\|=\|\lambda E-B\|$ $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$
同阶实对称矩阵A与B 合同	$C^TAC=B$	$\begin{bmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 其中$p+q=r(A)$ p正惯性指数 q负惯性指数	$r(A)=r(B)$ 有相同正惯性指数	$r(A)=r(B)$，且A与B有相同的正(负)惯性指数

设实二次型$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = X^TAX$，下列等价：

(1) $f(x_1 \cdots x_n)$是正定的

(2) $f(x_1 \cdots x_n)$的正惯性指数为n

(3) $f(x_1 \cdots x_n)$的规范形为$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$

(4) A是正定矩阵

(5) A的全部特征值均大于零

(6) $A = B^TB$，其中B为n阶可逆实矩阵

(7) A与n阶单位矩阵E合同

(8) A的所有顺序主子式全大于零．

5編 固有値と行列の対角化

① 線形空间V，線形変換Tに対し：$Tx = \lambda x$ $(x \ne 0)$が成立するとき，xをTの固有値λに対する固有ベクトルという．

$W(\lambda) = \{x \in V;\ Tx = \lambda x\}$をTのλに対する固有空間という．

② Aを正方行列とするとき，$\varphi(\lambda) = |\lambda E - A|$をAの固有多项式，$|\lambda E - A| = 0$をAの固有方程式，その根を固有値という．

求特征值＋全部特征向量办法

I. $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$的全部根求出．

II. 把求出的特征值λ_i逐个代入对应齐次线性方程组

$(\lambda_i E - A)X = 0$，$i = 1, 2, \cdots, s$

求出一组基础解系$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3} \cdots$　$\xi_i = t_1\xi_{i1} + \cdots t_{r_i}\xi_{ir_i}$

③ 判列A能否对角化：

$A_{n\times n}$

↓

A是否为实对称矩阵 —是→ 能对角化

↓否

求$|\lambda E - A|$全部根

↓

A是否有重特征根 —否→ 能对角化

↓是

对所有重特征根

λ_i (重数为n_i)

计算$r_i = n - r(\lambda_i E - A)$

↓

$n_i = r_i$ —是→ 能对角化

↓否

不能对角化

固有值性质

① $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}A$．所有固有值之和等于迹．　$|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

② A^k $(k \ge 1)$の固有值は$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots \lambda_n^k$

③ 设$f(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0$

若λ_0是A的一个特征值，则$f(\lambda_0)$是$f(A)$的特征值．

设A是n阶可逆矩阵，

(1) A的特征值不为零　(2) λ_0为A的特征值，则λ_0^{-1}为A^{-1}的特征值．

(3) 若ξ是A属于λ_0的特征向量，则ξ也是A^{-1}属于λ_0^{-1}的特征向量．

相似的矩阵有相同的特征多项式．

有相同的迹与行列式．

A与B相似，A^2与B^2相似 …… A^k与B^k相似

④ Aが実対称行列$(A^T = A)$のとき，直交行列P $(P^TP = E)$を適当に選んで，次のように対角化可能：

$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{bmatrix}$

Pの作り方：

① $|\lambda E - A| = 0$，求出A全部相异特征值$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s$

② 将λ_i逐个代入$(\lambda_i E - A)X = 0$求得一个基础解系$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots \xi_{ir_i}$

③ 用施密特正交化将上述改造成标准正交向量组．

6編 二次型

① $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$
$+ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$
$+ \cdots$
$+ a_{nn}x_n^2$

数域P上的n元二次型

$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + \cdots c_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + \cdots c_{nn}y_n \end{cases}$　由$x_1 \cdots x_n$到$y_1 \cdots y_n$的一个线性替换

不含混合项称为标准型

系数行列式$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \ne 0$称为非退化的(满秩的)

② $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = [x_1, x_2, \cdots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = X^TAX$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$　$X = CY$

$P^{n\times n}$中任意一个对称矩阵A，存在$P^{n\times n}$可逆矩阵C使C^TAC为对角形

③ 设$A, B \in P^{n\times n}$，若存在可逆矩阵$C \in P^{n\times n}$，使得$C^TAC = B$，则称数域P上A与B合同

$r(A) = r(B)$，A、B均为对称矩阵(如果A是)

任一对称矩阵A均与对角矩阵合同

存在正交矩阵U，使得$U^{-1}AU = U^TAU = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n]$　λ_n为A的全部特征值．

$X = UY$是正交线性替换．

④ 二次型$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$的标准形中，系数不为零的平方项个数等于该二次型矩阵的秩．

$C^{n\times n}$上任意一个秩为r的对称矩阵A，存在$C^{n\times n}$中可逆矩阵C，使得$C^TAC = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R^{n\times n}$上任意一个秩为r的对称矩阵A，存在$R^{n\times n}$上可逆矩阵C，

使$C^TAC = \begin{bmatrix} E_r & \\ & -E_{r-p} \end{bmatrix}$　其中r为二次型的秩，p为正惯性指数．

A与B在实数域上合同$\Leftrightarrow$ A与B $r(A) = r(B)$，相同的正负惯性指数

正则矩阵P $(P^TP) = E$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots\ J_n \end{bmatrix}$　ジョルダンの標準形，