පටුන	පිටුව

ත්‍රිකෝණමිතිය

(1) i) $-2\pi \le y \le 2\pi$ පරාසය තුළ $y = \cos^{-1} x$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. $\cos y = \frac{1}{2}$ සමීකරණය විසඳා ඉහත පරාසය තුළ වූ විසඳුම් ප්‍රස්තාරයේ පැහැදිලිව ලකුණු කරන්න.

ii) $-4\pi \le y \le 4\pi$ පරාසය තුළ $y = \tan^{-1} x$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
$\tan 2y = 1$ සමීකරණය විසඳා $-2\pi \le y \le 2\pi$ පරාසය තුළ වූ විසඳුම් සටහනෙහි පැහැදිලිව ලකුණු කරන්න. (1975)

(2) i) θ හි අගය කුමක් වුවත්, $\cos\phi = -\frac{1}{2}$ වන විට, $\cos\theta - \cos(\theta-\phi) + \cos(\theta-2\phi)$ හි අගය ශුන්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

ii) $\cot\theta - (7+4\sqrt{3})\cot(\theta+\alpha) = 0$ නම් $\sqrt{3}\sin(2\theta+\alpha) = 2\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න. θ සඳහා විසඳුමක් තිබීම පිණිස සයින් α හි අගය පරාසය සඳහන් කරන්න. ඒනයින්, $\cot\theta - (7+4\sqrt{3})$ කොට $\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන θ හි අගයන් සොයන්න. (1975)

(3) i) $\sec\theta + \tan\theta = u$ නම් $\sin\theta$ වලට ගත හැක්කේ එක් අගයක් පමණක් බව පෙන්වන්න. එම අගය සොයන්න.

ii) $\cos x + \cos y + \cos z = \frac{3}{2}$ හා $\tan x = \tan y = \tan z$ නම් 0 හා 2π අතර x, y, z සඳහා අගයන් කුලක් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා පොදු විසඳුම සොයන්න. (1976)

(4) $c^2 \le a^2 + b^2$ වන විට $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ සමීකරණය විසඳන්න. θ_1 හා θ_2 යනු 0 හා 2π අතර විසඳුම් දෙකක් වේ නම් $\tan\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$ හා $\cos(\theta_1-\theta_2)$ සොයන්න. (1976)

(5) ABC ත්‍රිකෝණයේ A, B, C හි සිට සම්මුඛ පාදවලට ඇඳි ලම්බයන්ගේ දිග පිළිවෙලින් ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 වන අතර r හා R යනු පිළිවෙලින් අන්තර්වෘත්තයේ හා පරිවෘත්තයේ අරයයන් වේ නම්,

i) $\rho_1 \sin A = \rho_2 B = \rho_3 \sin C$

ii) $\frac{2}{r} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}$

iii) $R = \frac{1}{4}\ \frac{a^2+b^2+c^2}{\rho_1\cos A + \rho_2\cos B + \rho_3\cos C}$ බව පෙන්වන්න . (1976)

(6) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ද $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ද විට $\sqrt{6}\ \cos(x-\alpha) - \tan x = \sqrt{2}$ සමීකරණ සපුරාලන රේඩියන් 0 හා 2π අතර x හි අගයයන් සොයන්න. රේඩියන් 0 සිට 2π තෙක් x හි අගය සඳහා $\sqrt{6}\cos(x-\alpha)$ යන්නෙහි ද $\sqrt{2} + \tan x$ යන්නෙහි ද ප්‍රස්තාරයන්ගේ දළ රූප සටහන් එකම රූප සටහනේ අඳින්න. ඒ නයින්, රේඩියන් 0 සිට 2π වසම තුළ, $\tan x - \sqrt{6}\cos(x-\alpha) + \sqrt{2} \ge 0$ වන ප්‍රාන්තර සොයන්න. (1978)

(7) i) $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii) $\sin\theta + \sin 3\theta = \sin 2\theta$ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න.

iii) $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$ නම්, $3\sin 2\theta + 2\sin^2\theta = 2$ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයේ ඇතැම් විසඳුම් α කෙරෙහි පරායත්ත නමුත් ඇතැම් විසඳුම් α කෙරෙහි ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. (1979)

(8) පහත සඳහන් ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

i) $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$ ii) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

iii) $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$ (1979 අතුරු)

(9) i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{3}$ නම්, $x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}2$ සමීකරණය විසඳන්න. ප්‍රතිලෝම ටැංජන ශ්‍රිතවලට ප්‍රධාන අගය පමණක් දෙනු ලැබෙයි නම් ඇත්තේ එක් විසඳුමක් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.

iii) $f(x) \equiv \cos^2 x - 2\sin x\cos x - \sin^2 x,\ 0 \leq x < 2\pi$ නම්, a යනු නියතයක් ද θ යනු නියත සුළු කෝණයක් ද වන a කොස් $(2x + \theta)$ ආකාරයෙන් $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින්,

i) $f(x) = 0$ ද ii) $f(x) = 1$ ද වන x හි අගයයන් සොයන්න. (1979 අතුරු)

(10) i) $\sec\theta - \tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ නම් $\sin\theta$ හිත් $\cos\theta$ හිත් අගය සොයන්න. ඒ නයින්, සමීකරණය සපුරාලන 0ත් 2π අතර වූ θ හි අගය සොයන්න.

ii) පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ දෙකෙහි සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

අ) $\cot\theta = \frac{\sin 2\theta}{1 - 3\cos 2\theta}$

ආ) $\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}\cos\theta$ (1980)

(11) i) α, β යනු $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ද $\beta = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ද $\alpha - \beta = \sin^{-1}\frac{x(1+x)}{1+x^2}$ ද වන ද පරිදි වූ සුළු කෝණ දෙකක් නම්, x ට තිබිය හැකි අගය සොයන්න.

ii) $p = a\cot\theta$ ද $q = a\cot\theta\cot 2\theta$ ද නම් $p^2 = a(2q + a)$ බව පෙන්වන්න.

iii) වර්ගඵලය වර්ග ඒකක A වූ වෘත්තයෙක පාදයක් තුළ අන්තර්ගත කළ වෘත්තයක වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $(3 - 2\sqrt{2})$ A බව පෙන්වන්න. (1980)

(12) $f(x) = 5\cos^2 x - 24\sin x\cos x - 5\sin^2 x$ ප්‍රකාශනය $a\cos(2x + p) + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a, p, b එක එකක් x කෙරෙන් ස්වායත්තය. ඒ නයින්, x හි සියළුම තාත්ත්වික අගය සඳහා $|f(x)| \leq 13$ බව පෙන්වන්න. $0 \leq x \leq 180^\circ$ පරාසය තුළ $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. තවද $0 \leq x \leq 180^\circ$ පරාසය තුළ දී $f(x) = 0$ සමීකරණයට

i) විසඳුමක් නොතිබෙන්නේ, ii) එක විසඳුමක් තිබෙන්නේ,

iii) විසඳුම් දෙකක් තිබෙන්නේ, iv) විසඳුම් තුනක් තිබෙන්නේ

කවර අගය ගන්නා විට දැයි සොයන්න. (1977)

(13) i) $\tan(A - 2B) = \cot(2A - B)$ ද, $\tan(A + 2B) = \cot(2A + B)$ ද, නම් Aත් B ත් දෙකම රේඩියන් $\frac{\pi}{6}$ හි ගුණාකාර බව ද A ඔත්තේ ගුණාකාරයක් නම්, B ඉරට්ටේ ගුණාකාරයක් බව ද පෙන්වන්න.

ii) u, v යනු $12\cos x + 5\sin x = 1$ සමීකරණයෙහි විසඳුම් දෙකකි. u ත් v ත් අතර රේඩියන් 2π හි ගුණාකාරයකින් වෙනස් නොවෙයි නම්, $\cos u + \cos v = \frac{24}{169}$ බව පෙන්වන්න. (1977)

(14) i) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වූ සාමාන්‍ය අංකනය අනුව $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ cos කොස් A බව පෙන්වන්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{s^2}{abc}$ බව පෙන්වන්න.

ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් කේන්ද්‍රයත් පරිකේන්ද්‍රයත් BC පාදයේ සිට එකම දුරින් වෙයි. $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos A$ බව පෙන්වන්න.

$\cos B + \cos C = 1$ බව අපෝහනය කරන්න. (1978)

(15) i) $2\cos x = \sqrt{3}\cot x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම රේඩියන් වලින් සොයන්න.

ii) α යනු සුළු කෝණයක් වන a කොස් $(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් $4\cos x - 3\sin x$ ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරෙකින් හෝ,

අ) රේඩියන් 0 ත් 2πත් අතර වූ සියලු විසඳුම් දෙමින් $4\cos x - 3\sin x = 3$ සමීකරණය විසඳන්න.

ආ) $\frac{1}{4\sin x - 3\cos x + 6}$ යන්නෙහි විශාලතම අගයත් අඩුතම අගයත් සොයන්න.

(1978)

(16) i) a, b, c තාත්ත්වික විට $c^2 \leq a^2 + b^2$ නම්, $a\sin x + b\cos x = c$ සමීකරණයට තාත්වික විසඳුම් තිබෙන බව සාධනය කරන්න. පහත සඳහන් සමීකරණ වලින් එක එකෙහි සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න.

අ) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ ආ) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

ii) $\cos 7x - \sqrt{3}\cos 3x + \cos x = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

iii) $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{3}$, $\theta_2 = \tan^{-1}\frac{1}{4}$, $\theta_3 = \tan^{-1}\frac{2}{9}$ නම්, $0 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \frac{8\pi}{4}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න. (1981)

(17) සාමාන්‍ය අංකනය අනුව ABC ත්‍රිකෝණයක $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ බව සාධනය කරන්න. පිළිවෙලින් PQ කේන්ද්‍රත් p, q $(\neq p)$ අරත් ඇති ඒක තල වෘත්ත දෙකක් X හී දිත් Y හී දිත් ඡේදනය වෙයි. PXQ කෝණය = α ද වෘත්තවලට ඇඳි පොදු ස්පර්ශක එකක් අනෙක සමඟ θකෝණයක් සාදයි ද නම්, $(p - q)^2$ කොට් $\frac{\theta}{2} = 4pq \sin\frac{\alpha}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වන විට දී කොස් θ හි අගය p ත් q ත් ඇසුරෙන් සොයන්න. (1981)

(18) i) $\tan 3\theta = 1$ නම්, $\tan\theta$ යන්න $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. මේ සමීකරණය විසඳා මූල තුනට අනුරූප θ හි අගයයන් සොයන්න.

ii) $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$, $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ ද නම් $\tan\frac{1}{2}(x+y) = \frac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න. මේ සමීකරණ සපුරාලන සේ x වත් y වත් තිබිය හැකි සියලුම අගයයන් සොයන්න. (1982)

(19) ABC යනු සුළු කෝණික ත්‍රිකෝණයකි. A, B, C ශීර්ෂවලට සම්මුඛ පාද පිළිවෙළින් D, E, F ලක්ෂ්‍යවල දී හමු වන සේ A, B, C ශීර්ෂවල සිට ලම්බ අඳිනු ලැබේ.

i) r යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහි අන්තර් වෘත්තයේ අරය විට $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{r}$ බව ද

ii) R යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහි පරිවෘත්තයේ අරය විට $\frac{\cos A}{AD} + \frac{\cos B}{BE} + \frac{\cos C}{CF} = \frac{1}{R}$ බවද

iii) DEF ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$ බව ද පෙන්වන්න. (1982)

(20) i) $6\tan 2\theta - 3\tan\theta - 5\cot\theta = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

ii) $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $t = \tan x$ වේ. $\sin\theta + \sin\phi = a$ හා $\cos\theta + \cos\phi = b$ නම් $\cos(\theta+\varphi)$ හා $\cos(\theta-\varphi)$ හි අගයන් හා a හා b ඇසුරෙන් සොයන්න. $\tan\theta + \tan\varphi = \frac{8ab}{(a^2+b^2)^2 - 4a^2}$ බව පෙන්වන්න. (1983)

(21) ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න.

i) $a = (b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$

ii) $\cot\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{b-c}\tan\frac{A}{2}$ අපෝහනය කරන්න.

i) හා ii) උපයෝගී කරගෙන $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ලබාගන්න. (1983)

(22) i) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ බව සාධනය කරන්න. $\theta = 18^0$ නම් $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ බව ද $\sin 18^0$ යනු $4x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව ද සාධනය කරන්න. ඒනයින් $\sin 18^0$ සහ $\cos 18^0$ හි අගයයන් සොයන්න.

ii) $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ සහ $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $t = \tan\frac{\theta}{2}$ වේ. ඉහත ආදේශන මඟින් $|c| < \sqrt{a^2+b^2}$ වන $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ සමීකරණය විසඳන්නේ කෙසේ දැයි පෙන්වන්න. $\theta = \alpha$ සහ $\theta = \beta$ මෙම සමීකරණයේ විසඳුම් දෙකක් නම් $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$ බව පෙන්වා $\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{c}{a}$ බව අපෝහනය කරන්න. (1984)

(23) ත්‍රිකෝණයකි.
i) සුළු කෝණී ii) සෘජු කෝණී iii) මහා කෝණී යන ප්‍රභින්න අවස්ථා තුන සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා,

i) $b \sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=(c+a)\sin\frac{B}{2}$,

ii) $\dfrac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}=\dfrac{2b}{(c+a-b)}$

iii) a, b සහ c සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම්, $\cot A/2, \cot B/2$ සහ $\cot C/2$ ද සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1984)

(24) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ නම්, එවිට $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ බව පෙන්වන්න. x, y සහ z සුදුසු පරිදි තෝරා ගනිමින්
$A+B+C=\pi$ නම්, එවිට $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$ බව අපෝහනය කරන්න. $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$ යනු $A_1A_2=A_2A_3=2a$, $A_3A_4=A_4A_5=2b$ සහ $A_5A_6=A_6A_1=2c$ වන සේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටි ෂඩස්‍රයකි. මෙම වෘත්තයේ අරය λ, $\lambda^4-(a^2+b^2+c^2)\lambda^2-2ab\lambda=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. (1985)

(25) x හි සියලු තාත්ත්වික අගයයන් සඳහා $a\cos^2x+2b\sin x\cos x+c\sin^2x$ ප්‍රකාශනය $\frac{a+c}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2+4b^2}$ සහ $\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$ අතර පිහිටන බව සාධනය කරන්න.
$f(x)\equiv 9\cos^2x+24\sin x\cos x+16\sin^2x-k=0$ ට තාත්ත්වික විසඳුම් තිබීම සඳහා k ට තිබිය යුතු අගය පරාසය සොයන්න.
$9\cos^2x+24\sin x\cos x+16\sin^2x$ හි වැඩිතම සහ අඩුතම අගයන් ද සොයන්න.
$9\cos^2x+24\sin x\cos x+16\sin^2x-\frac{25}{4}=0$ සමීකරණය විසඳන්න. (1985)

(26) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ බව පෙන්වන්න.

i) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

ii) $a^2+c^2=2b^2$ නම්, එවිට $\cot A+\cot C=2\cot B$ බව පෙන්වන්න. (1986)

(27) i) $\sin x+\cos y=1\ \cos 2x-\cos 2y=1$ සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

ii) $\cot^{-1}\frac{xy+1}{x-y}+\cot^{-1}\frac{yz+1}{y-z}+\cot^{-1}\frac{zx+1}{z-x}=n\pi$ බව පෙන්වන්න. මෙහි n නිඛිලයකි.

(1986)

(28) i) $(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2$ ප්‍රසාරණය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\cos^6\theta+\sin^6\theta$ යන්න $\cos 4\theta$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර ඒනයින්, $\cos^6\theta+\sin^6\theta=\frac{1}{2}\sin 4\theta+\frac{5}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

ii) $\tan 2\theta+\tan 2\phi=0$ නම්, $\theta+\phi$ යන්න $\frac{\pi}{2}$ නිඛිල ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න. θ^0 සහ 180^0 අතර විධිමත් ලෙස පවතින සහ $\tan\theta+\tan\phi+3=0, \tan 2\theta+\tan 2\phi=0$ සමීකරණ පද්ධතිය සපුරාලන θ සහ ϕ කෝණ යුගල සියල්ලම සොයන්න.

iii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{x}{2}+\tan^{-1}\frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න. (1987)

(29) ABC ත්‍රිකෝණයත් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක A කෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය D හි දී BC ට හමු වේ.
$AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ බව සාධනය කරන්න. $c>b$ නම් සහ A කෝණයේ බාහිර කෝණ සමච්ඡේදකය E හි දී BC ට හමුවේ නම්. AE සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න. DAE කෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය X හි දී DE ට හමුවේ නම්, $AX=\frac{\sqrt{2}bc\sin A}{c\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)+b\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)}$ බව පෙන්වන්න. $b=c$ නම්, AE හා AX ගැන ඔබට කවරක් කිව හැකි ද? (1987)

(30) i) $a^2+b^2>c^2$ නම් $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ සමීකරණය සපුරාලන ලබන 0හා 2π අතරේ α සහ β නම් ප්‍රභින්න අගයන් දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.
$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $x=\sin\alpha$ යනු $4x^3-3x+\sin 3\alpha=0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව පෙන්වන්න. කෝණයන්ගේ සයින ලෙස ප්‍රකාශ කරමින් අනෙක් මූල ලබා ගන්න. ඉහත ඝනජ සමීකරණයේ මූලවන පරස්පර මූල වන සමීකරණය ලියා $\alpha=10^0$ ලෙස ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ
$\operatorname{cosec}10^\theta+\operatorname{cosec}130^\theta+\operatorname{cosec}250^\theta=6$ බව පෙන්වන්න.
($ax^3+bx^2+cx+d=0$ සමීකරණයේ මූල වන ඓක්‍යය $\frac{-b}{a}$ යයි උපකල්පනය කළ හැක.) (1988)

(31) Δ යනු ABC ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය යයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$ බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක A,B,C කෝණවල අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක ඉදිරිපිට පාද පිළිවෙලින් D,E,F හි දී කපනු ලබන අතර O යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර කේන්ද්‍රය වේ. $AO=\frac{2\Delta}{a+b+c}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න. තව ද DEF ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{2abc\Delta}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ බව පෙන්වන්න.
(1988)

(32) i) $\tan(\theta+\alpha)-(3+2\sqrt{2})\tan\theta=0$ නම් θ සඳහා තාත්වික විසඳුම් තිබීමට $\sin\alpha$ හි පරාසය ප්‍රකාශ කරමින් $\sin(2\theta+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.
එනයින්, $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-(3+2\sqrt{2})\tan\theta=0$ සමීකරණයට සපුරාලනු ලබන θ හි අගයන් සොයන්න.

ii) A,B,C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම් θ හි ඕනෑම අගයක් සඳහා
$\tan A+\tan(B+\theta)+\tan(C-\theta)=\tan A\tan(B+\theta)\tan(C-\theta)$
බව සාධනය කරන්න.

iii) $\tan(\cos^{-1}x)=\sin\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ සමීකරණය විසඳන්න. (1989)

(33) සුපුරුදු අංකනයෙන් $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව අපෝහනය කරන්න. $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ නම්,

අ) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sin B}$

ආ) $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2}{\sin^2\frac{B}{2}}$ බව පෙන්වන්න. (1989)

(34) i) $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

iii) $\sin x \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$ සමීකරණ විසඳන්න. (1990)

(35) ABC ත්‍රිකෝණයෙහි පාදවල දිග a, b, c ද අර්ධ පරිමිතිය s ද උච්ච h_1, h_2, h_3 ද අන්තර් වෘත්තයේ අරය p ද වේ. මේවා සාධනය කරන්න.

i) $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{p}$

ii) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

මෙහි සුපුරුදු අංකනය සහිතව A,B,C කෝණවල අනුපාතය 1: 2: 4 වේ.

iii) $2(PA+PB+PC)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}$ මෙහි p ලක්ෂ්‍යය වූ කලී ත්‍රිකෝණයේ පාද p ලක්ෂ්‍යයේ දී සමාන කෝණ ආපතන කරන පරිදි ත්‍රිකෝණය ඇතුළත ලක්ෂ්‍යයකි. (1990)

(36) i) $5\cos\theta + 12\sin\theta = \frac{13}{2}$

ii) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

iii) $\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{y-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y+1}{y+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න. (1991)

(37) i) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ බව සාධනය කරන්න. $a - b = kc$ නම්, $\sin\frac{A-B}{2} = k\cos\frac{C}{2}$ සහ $\frac{k\sin B}{1-k\cos B} = \tan\frac{A-B}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ සම්බන්ධයෙන් $\theta(>0)$ කෝණය දෙනු ලැබේ. මෙහි a, b, c රාශි ABC ත්‍රිකෝණයක් සම්බන්ධයෙන් භාවිත කරන සාමාන්‍ය අර්ථ ගනී. $a = (b+c)\sin\theta$ බව සාධනය කරන්න. (1991)

(38) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයකින් $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ බව සාධනය කරන්න. D යනු BD : DC = m : n වන පරිදි ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.
$B\hat{A}D = \alpha, C\hat{A}D = \beta$ සහ $C\hat{D}A = \theta$ නම්, $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta = n\cot B - m\,\mathrm{not}\,C$ බව සාධනය කරන්න. F යනු AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද L යනු A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය ද වේ. P හි දී CF සහ AL ඡේදනය වේ. $\tan A\hat{P}F = \frac{2-\cot B(\cot A-\cot B)}{\cot A+\cot B}$ බව සාධනය කරන්න. (1992)

(39) ඇ) $\cos(A+B)$ සඳහා සම්මත සූත්‍රය යොදා $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව පෙන්වන්න. $\cos 2\theta \tan\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කර ඒනයින්, $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} \equiv \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ අපෝහනය කර $\cos\frac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබාගන්න.

ආ) $\tan(A-B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කරන්න. x සඳහා පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

i) $\tan x - \tan(x-\alpha) = \tan\alpha, \alpha \neq 0$

ii) $\tan^{-1} X + \tan^{-1}(2X) = \pi/4$ (1992)

(40) a) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්,
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$ බව සාධනය කරන්න.

b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$ නම්, $\tan B = \frac{1-2\tan A - \tan^2 A}{1+2\tan A - \tan^2 A}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\frac{\pi}{8}$ යන්න $x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් බව ද එහි අගය $\sqrt{2}-1$ බව ද අපෝහනය කරන්න. අනෙක් මූලය $\tan\theta$ නම්, $(0, \pi)$ පරාසයෙහි පිහිටි θ සොයන්න. (1993)

(41) i) $\sqrt{3}(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$ ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
සමීකරණය විසඳන්න.

ii) $2\sin y\sin(x+y) = \cos x\cot x + \sin 2y = \sin 2x$ සමීකරණ x සහ y සපුරාලයි. ඉහත පළමුවැනි සමීකරණය $\sin x\sin 2y = \cos x\cos 2y$ යන ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වා හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ y හි සමීකරණයක් ලබාගන්න. ඒ නයින්, $0 \leq x \leq \pi$ සහ $0 \leq y \leq \pi$ විට x ද y ද සඳහා ඉහත සමගාමී සමීකරණය විසඳන්න. (1993)

(42) ඇ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක Δ වර්ගඵලය, $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$ යනනෙන් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තව ද, $\frac{\Delta}{\tan\frac{A}{2}} + \Delta\tan\frac{A}{2} = bc$ බවත්

$\frac{\Delta}{s\tan\frac{A}{2}} + s = b + c$ බවත් සාධනය කරන්න. මෙහි $2s = a + b + c$ වේ.

ආ) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\tan A\hat{O}H = \frac{|\sin 2B - \sin 2C|}{1+\cos 2B + \cos 2C}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි O සහ H යනු පිළිවෙලින් ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ. (1994)

(43) ඇ) විසඳන්න.

i) $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$

ii) $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3}, x > 1$

ආ) $\sin\frac{x+y}{2} = u$ සහ $\cos\frac{x-y}{2} = v$ නම්, $\sin x + \sin y = \sqrt{2}$ $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}$ යන සමගාමී සමීකරණ $uv = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v^2 - u^2 = \frac{1}{2}$ ලෙස ඌනනය වන බව පෙන්වන්න. ඒනයින් දී ඇති සමගාමී සමීකරණ x සහ y සඳහා විසඳන්න. (1994)

(44) i) සුපුරුදු අංකනයකින් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ බව සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක කුඩාම කෝණය A ද විශාලතම කෝණය C ද වන අතර $C = \frac{\pi}{2} + A$ පොදු අන්තරය d වන සමාන්තර ශ්‍රේණියක a,b,c පාද පිහිටයි. $\sin A = \frac{a}{(2a^2+4ad+4a^2)^{1/2}}$ බව පෙන්වා $\cos A$ සහ $\cos 2A$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශන ලබාගන්න. $\frac{a}{d} = \sqrt{7} - 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) ABC ත්‍රිකෝණයකි. O සහ H පිළිවෙලින් එහි පරිකේන්ද්‍රය සහ ලම්බ කේන්ද්‍රය වේ. OH රේඛාව BC ට $\tan^{-1}\left(\frac{3-\tan B\tan C}{\tan B-\tan C}\right)$ කෝණයකින් ආනත බව පෙන්වන්න. (1995)

(45) x සඳහා විසඳන්න.

i) $3\cos x - 4\sin x = 5\sin kx$; මෙහි k නියතයකි.

ii) $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$

iii) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$; මෙහි $0 < \cos^{-1}x < \pi$ සහ $\frac{-\pi}{2} \le \sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$ වේ. (1995)

(46) i) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{\sin(B-C)}{\sin A} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) ABC ත්‍රිකෝණයක කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය I ද පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදකයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය O වේ. A යනු සුළු කෝණයක් නම් BC ට IO හි ආනතිය $\tan^{-1}\left|\frac{\cos B+\cos C-1}{\sin B-\sin C}\right|$ බව පෙන්වන්න. (1996)

(47) i) 1 සහ 2 අතර $\frac{\cos x-2\sin x+1}{\cos x-\sin x}$ පැවතිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

ii) $A + B + C = \pi$ නම්, $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$ බව පෙන්වන්න.

iii) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ විසඳන්න.

iv) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ බව සාධනය කරන්න. (1996)

(48) a, h සහ b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා විට $f(x) \equiv a\cos^2 x + 2h\sin x\cos x + b\sin^2 x$ යන්න $\cos 2x \sin 2x$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. f(x) සඳහා $A + B\sin(2x+\alpha)$ ආකාරයේ ප්‍රකාශනයක් අපෝහනය කරන්න. මෙහි A,B සහ $\alpha(0 \le \alpha < 2\pi)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. එනයින්, f (x) හි උපරිම හා අවම අගයයන් ද එම අගයයන් ගෙන දෙන $2\pi - \alpha \le x \le 2\pi + \alpha$ හි පිහිටි අනුරූප අගයයන් ද ලබාගන්න. a = 3, b = 1 සහ $h = \sqrt{3}$ විට $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා f(x) හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න. (1997)

(49) ඇ) i) $\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+\beta) = 0$ සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න. මෙහි $0 < \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ වේ.

ii) $x > -\sqrt{3}$ සඳහා $\tan^{-1} x - \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නියමය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ වනනේ C කෝණය $= \frac{\pi}{3}$ නම් හා එනම් ම පමණක් වුවහොත් බව පෙන්වන්න. (1997)

(50) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)\sin 2x + 2\cos 2x$ ලෙස ගනිමු. $f(x) = \frac{5}{2}\sin(2x+\alpha)$ වන පරිදි $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ පරාසය තුළ α අගයන් පවතින බව පෙන්වන්න.

i) $f(x) = 0$ වීමට ii) $f(x)$ ට උපරිමයක් පැවතීමට iii) $f(x)$ ට අවමයක් පැවතීමට

x ගතයුතු අගයයන් සොයන්න.

f හි සහ $g(x) = f(x-\alpha)$ මඟින් අර්ථ දැක්වෙන g හි ප්‍රස්ථාර එකම රූප සටහනේ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ සඳහා කටු සටහන් කරන්න. ඒනයින්, $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)\sin 2x + 2|\cos 2x|$ මඟින් අර්ථ දැක්වෙන h හි ප්‍රස්ථාරය $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ සඳහා කටුසටහන් කරන්න.(1998)

(51) ඇ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "සයින් නීතීය" ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. එම අංකනයෙන්ම

i) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$ ii) $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$ බව සාධනය කරන්න.

ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "කෝසයින නීතීය" අපෝහනය කරන්න.

ආ) $2\tan^{-1}(\sin x) = \tan^{-1}(2\sec x)$ විසඳන්න. (1998)

(52) ඇ) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) $\cos x + \cos 3x = \sin 2x + \sin 4x$ සමීකරණ විසඳන්න.

ඇ) $\cos 3\theta \equiv \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$\alpha = \frac{2\pi}{41}$ විට,

$(2\cos 11\alpha - 1)(2\cos 17\alpha - 1)(2\cos 31\alpha - 1)(2\cos 33\alpha - 1) = 1$ බව පෙන්වන්න. (1999)

53) ඇ) $n \in \mathbb{Z}, \theta \neq n\pi$ හෝ $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\frac{1+\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $8(\cos^6 x + \sin^6 x) = 5 + 3\cos 4x$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = \cos^6 x + \sin^6 x$ හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ තුළ $\cos^6 x + \sin^6 x = k$ සමීකරණයට,

i) විසඳුම් නොමැති වීම ii) විසඳුම් දෙකක් පමණක් තිබීම

iii) විසඳුම් තුනක් පමණක් තිබීම iv) විසඳුම් හතරක් පමණක් තිබීම

සඳහා k හි අගය හෝ අගය පරාසය අපෝහනය කරන්න. (2000)

(54) අ) $0 \le x \le 2\pi$ සඳහා $4\sin^2 x + 12\sin x\cos x - \cos^2 x + 5 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

ආ) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය හා කෝසයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. $\frac{b+c}{2k-1} = \frac{c+a}{2k} = \frac{a+b}{2k+1}$ බව දී ඇත. මෙහි k යනු 2 ට වඩා වැඩි එහෙත් 4 ට සමාන නොවන දෙන ලද නිඛිලයක් ද a, b, c යනු ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන් පාද ද වේ. $\frac{\sin A}{k+1} = \frac{\sin B}{k} = \frac{\sin C}{k-1}$ බව පෙන්වන්න. k ඇසුරෙන් $\cos A$ ද ලබා ගෙන $\frac{\cos A}{(k-4)(k+1)} = \frac{\cos B}{k^2+2} = \frac{\cos C}{(k+4)(k-1)}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි A, B, C ට සුපුරුදු තේරුම් ඇත. (2000)

(55) අ) ඕනෑම x තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා
$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = \frac{3}{4}\sin 8x$ බව පෙන්වන්න.
$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = a$ සමීකරණ විසඳිය හැකි a අගයයන් අපෝහනය කරන්න.

ආ) ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද දිගම පාදය කෙටිතම පාදයේ දිග මෙන් $1\frac{1}{2}$ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න. මධ්‍ය පාදයේ දිග 10 cm බව දී ඇත්නම් අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න. (2001)

(56) ABC යනු b > c පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයකි. D සහ E යනු A හරහා මධ්‍යස්ථය AD වන පරිදි ද AD, AE මගින් A කෝණය ත්‍රිච්ඡේද කරන පරිදි ද BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. සුදුසු ලෙස තෝරාගනු ලැබූ ත්‍රිකෝණ දෙකකට සයින් නියමය යෙදීමෙන්, $\cos\frac{A}{3} = \frac{b}{2c}$ බව සාධනය කරන්න. DE : EB = 1 : k නම් $\cos\frac{A}{3}$ රාශිය $\frac{(2+k)c}{2kb}$ ට ද සමාන බව පෙන්වන්න. k =1 නම්, $A = 90^0$ බව ද k = 2 නම්, $A = 135^0$ බව ද අපෝහනය කරන්න. එක් එක් අවස්ථාවේ දී a ඇසුරෙන් b සහ c නිර්ණය කරන්න. (2002)

(57) a) θ යනු $\frac{\pi}{2}$ හි ගුණාකාරයකට සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් විට, $x = \sin\theta - \cos\theta$ සහ $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම්, $\sin 2\theta$

i) x ඇසුරෙන් පමණක්,

ii) y ඇසුරෙන් පමණක්, ලබාගන්න. ඒනයින්, x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

b) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = (1 + 2\cos 2x)\sin 4x$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\sin x(\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x) = \sin 3x\sin 4x$ බව පෙන්වන්න. $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

c) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a = b + \lambda c$ වේ. මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda\cos\frac{C}{2} = \cos\left(B + \frac{C}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.
(2003)

(58) a) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම්, එවට $\sin\theta\tan\theta > 2(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

b) $\sin(A-B)$ හා $\cos(A-B)$ හි ප්‍රසාරණ උපයෝගී කර ගනිමින්, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ හා $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ බව පෙන්වා $\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව අපෝහනය කරන්න.

c) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$ බව සාධනය කරන්න. (2004)

(59) a) i) සෑම θ සඳහාම
$8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = \cos 4\theta - \cos 3\theta$ බවත්

ii) 7θ යන්න 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නම්, $\cos 4\theta = \cos 3\theta$ බවත් පෙන්වන්න. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. O යනු $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \theta$ වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. OBC හා OAB ත්‍රිකෝණවලට සයින් නීතිය භාවිත කරමින් සම්මත අංකනයෙන්, $OB = \frac{a\sin(C-\theta)}{\sin C} = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$ බව සාධනය කර $\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$ බව අපෝහනය කරන්න. (2005)

(60) a) i) $\sin 3\theta = \cos 2\theta$ සමීකරණය විසඳීමෙන් $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-i}{4}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ සහ $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2}{11}$ බව පෙන්වන්න. $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{2}{11} + 3\tan^{-1}\frac{1}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර **කෝසයින නීතිය** අපෝහනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{b+c}{5} = \frac{c+6}{6} = \frac{a+b}{7}$ බව දී ඇත.

i) $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{2}$ ii) $\frac{\cos A}{-1} = \frac{4\cos B}{11} = \frac{2\cos C}{7}$ බව පෙන්වන්න. (2006)

(61) a) සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න. P යනු $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{abc}{2}\left(\frac{BP}{bc} + \frac{CP}{ac} + \frac{AP}{ab}\right)\sin\varphi$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) i) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$, ii) $2\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)$,

iii) $\tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right) - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න. (2007)

(62) a) සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. P යනු $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A) = \frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C)$ බව සාධනය කරන්න.

b) x, y හා z යනු $x + y + z = \pi, \cos x + \cos y = 1$ සහ $t = \sin x + \sin y$ වන පරිදි වූ සෘණ නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා තුනක් යැයි ගනිමු.

i) $\tan^{-1}(t) = \frac{x+y}{2}$, ii) $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, t එහි උපරිම අගය ගන්නා විට x,y හා z හි අගයන් සොයන්න. (2008)

(63) a) සුපුරුදු අංකනයෙන් සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. A, B සහ C ලක්ෂ්‍යය තුනක් ආරෝහණ පිළිවෙලට තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. AB = x වන අතර D යනු C සිට h උසකින් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. CD මගින් A සහ B හි දී පිළිවෙලින් α හා β කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

i) $h = \dfrac{x \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\cos\theta}$,

ii) $d = \dfrac{x \sin(\alpha+\theta) \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි d යනු A හි මට්ටමේ සිට D හි උස වේ.

b) i) $\sin\theta - \cos\theta = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුමත්,

ii) $\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \sin^{-1}x$ සමීකරණය සපුරාලන x හි අගයත් සොයන්න.

(2009)

(64) a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් කෝසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

i) $2\left[\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right] = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ බව,

ii) $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ නම්, එවිට C කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි R සහ α තාත්ත්වික වේ. එනයින්,

$\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta - \cos\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

c) $-1 \leq x \leq 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$ බව පෙන්වන්න. (2010)

(65) ත්‍රිකෝණයක පාද P–1, P හා P+1 වෙයි. P යනු P > 1 වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි. ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණය මෙන් දෙගුණයක් නම්, සයින් නියමය හා කෝසයින් නියමය යොදා ගනිමින් P හි අගය සොයන්න.

(2011)

(66) a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න. ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

b) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න. (2011)

(67) $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ යයි ගනිමින් $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. (2012)

(68) a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න.
$a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta-2\tan\left[\theta-\frac{\pi}{4}\right]$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

c) $5\cos^2\theta+18\cos\theta\sin\theta+29\sin^2\theta$ යන්න $a+b\cos(2\theta+\alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි. ඒනයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $8(\cos x+\sin x)^2+2(\cos x+5\sin x)^2=19$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න. (2012)

(69) $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ හා $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ නම්, $\sin 2\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$ හා $\tan 2\theta=\frac{4\sqrt{2}}{7}$ බව පෙන්වන්න. (2013)

(70) $x=2\cos\theta,\ y=\sin\theta$ මඟින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු. මෙහි θ යනු පරාමිතියකි. C වක්‍රයට $\theta=\frac{\pi}{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයට C වකය නැවත $\theta=\alpha$ අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමු වේ. $2\sin\alpha-8\cos\alpha+3\sqrt{2}=0$ බව පෙන්වන්න. (2013)

(71) a) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\equiv 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

b) $f(x)=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. f(x) යන්න $a\sin(x+\theta)+b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a (> 0), b හා $\theta\left[0<\theta<\frac{\pi}{2}\right]$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. $1\leq f(x)\leq 5$ බව අපෝහනය කරන්න. $-\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{11\pi}{6}$ සඳහා $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

c) $P>2q>0$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙලින් $p+q$, p හා $p-q$ වේ. $\sin A-2\sin B+\sin C=0$ බව පෙන්වා $\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න. (2013)

(72) $\tan\alpha=-1$ හා $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ හා $\frac{\pi}{2}<\beta<2\pi$ වේ. $\cos(\alpha+\beta)$ හි අගය සොයන්න. (2014)

(73) a) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. f(x) යන්න $A\cos(2x+\alpha)+B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A (> 0), B හා $\alpha\left[0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right]$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $k = 2 - \sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න. තව ද $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.
ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $a ; b : C = 1 : \lambda : \mu$ බව දී ඇත. මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ. $\mu^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda \sin^3 C$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(74) $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ හා $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha + \beta$ හි අගය සොයන්න. (2015)

(75) a) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta = 1$ බව පෙන්වන්න.

b) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$ යැයි ගනිමු ; $f(x)$ යන්න $k(1 + \cos x) \quad \sin(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\frac{f(x)}{1+\cos x} = \sqrt{2}\{g(x-1)\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

$y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **ඒනයින්**, ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x) = 0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

c) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(2015)

<u>ශේෂ ප්‍රමේය සාධක</u>

(1) i) X හි බහුපදයක් වන P (x) යන්න (x – a) යන්නෙන් බෙදූ විට R ශේෂයක් ලැබෙයි. R = P (a) බව පෙන්වන්න. $a \neq b$ නම් (x – a) (x – b) යන්නෙන් P (x) බෙදූ විට $\frac{P(a)}{a-b}(x-b) - \frac{P(b)}{a-b}(x-a)$ ශේෂයක් ලැබෙන බව, ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ පෙන්වන්න.

ii) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ යන්නෙහි a, b, c රාශිවලින් පළමු වැනි මාත්‍රයේ වූ සාධක හතර සොයන්න. (1978)

(2) i) බහුපද පිළිබඳ ශේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. q යනු නිශ්ශූන්‍ය (ශූන්‍ය නොවන) නිඛිලයක් වන අතර $f(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 - 3x + q$ වෙයි. x – q යන්න f(x) හි සාධකයක් නම් q හි අගය සොයන්න. q ට මෙම අගය ඇති විට f(x) යන්න ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. $f(x) \equiv (x-a)(2x-1)(x+2) + bx + c$ වන පරිදි a, b, c නියත සොයන්න.

ii) n යනු ධන නිඛිලයක් ද $f_1(n) \equiv x^{2n}-1$ ද $f_2(n) \equiv x^{2n-1}-1$ ද වෙයි. $f_1(n+1) - f_1(n)$ හා $f_2(n+1) - f_2(n)$ දෙකම $x^2 - 1$ න් හරියටම බෙදෙන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $f_1(1)$යන්න $x^2 - 1$ න් ද $f_2(1)$ යන්න $x - 1$ න් ද හරියටම බෙදෙන බව අභ්‍යහනයෙන් ඔප්පු කරන්න. $f_2(n)$ යන්න $x + 1$ න් නොබෙදෙන බව ද පෙන්වන්න. (1980)

(3) i) $0 < P < 1$ නම් x හි තාත්වික අගයන් සඳහා $\frac{x-p}{x^2-2x+p}$ ශ්‍රිතයට සියලු තාත්වික අගයන් ගත හැකි බව පෙන්වන්න. $P = \frac{3}{4}$ වන විට ප්‍රස්තාරයක් ඇසුරෙන් ඔබේ පිළිතුරු පැහැදිලි කරන්න.

ii) $x^2 + 1$ න් හරියටම බෙදෙන එහෙත් $(x-1)^2(x+1)$ න් බෙදූ විට $-10x + 6$ ශේෂයක් ඉතිරි වන x හි සිව්වන මාත්‍රයේ බහුපදයක් සොයන්න. (1983)

(4) i) $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 \equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)$ බව පෙන්වන්න. x, y සහ z යනු $a \neq b \neq c \neq$ වෙන තාත්වික a, b, c සඳහා $x + y + z = 0$, $ax + by + cz = 0$ සහ $x^3 + y^3 + z^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$ වන පරිදි වූ තාත්වික විචල්‍ය නම්, $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = 1$ බව පෙන්වන්න.

ii) $f(x) \equiv px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ වේ. $x^2 + a$ මඟින් $f(x)$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $(s - qa)x + a^2 - ra + t$ බව පෙන්වන්න. α සහ α යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් $ps^2 - qrs + q^2t = 0$ සම්බන්ධය p, q, r, s, t මඟින් සපුරාලන බව සාධනය කරන්න. (1984)

(5) i) $f(x, y, z) \equiv (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ යයි ගනිමු. $(x+y)$, $(y+z)$, $(z+x)$ යනු $f(x, y, z)$ හි සාධක බව පෙන්වන්න. ඒනයින් $(x + y + z) - x^5 - y^5 - z^5$ සාධක වලට වෙන් කරන්න.

ii) $(x^2 + px + 1)$ යනු $ax^5 + bx^2 + c$ හි සාධකයක් නම්, එවිට $(a^2 - c^2)(a^2 - c^2 + bc) = a^2b^2$ බව සාධනය කරන්න. මෙම අවශ්‍යතාව සපුරාලයි නම් එවිට, $(x^2 + px + 1)$ යන්න $cx^5 + bx^3 + a$ හි සාධකයක් ද බව පෙන්වන්න. (1985)

(6) $f(x, y, z) \equiv x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ යයි ගනිමු. $(x-y)(y-z)$ සහ $(z-x)$ යනු $f(x, y, z)$ සාධක බව පෙන්වන්න. ඒනයින් $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ සාධකවලට වෙන් කරන්න. (1986)

(7) i) $f(x) = 2x^4 + (3k-4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6$ හි $x^2 - k$ සාධකයක් වන පරිදි k හි අගයන් සොයන්න. k හි එක් එක් අගයට අනුරූප $f(x)$ හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2}\{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\}$ බව පෙන්වන්න. $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$ නම් $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ බව අපෝහනය කරන්න. (1989)

(8) a) $f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b+1)x + a$, මෙහි a සහ b නියත වේ.

i) f(x), වර්ග ප්‍රකාශනයක පරිපූර්ණ වර්ගයක් බව ද

ii) $x + 2$ යනු f(x) හි සාධකයක් බව ද දී ඇත. a සහ b සොයා f(x) හි සාධක සියල්ල සොයන්න.

b) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ හි සාධක සොයන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$(a+b+c)^3 - (b+c+a)^3(c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24\,abc$ බව සාධනය කරන්න. (1990)

(9) i) $f(x, y, z) \equiv x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$ හි සාධකයක් $(x-y)$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින් ප්‍රකාශනය පූර්ණ ලෙස සාධකවලට බිඳින්න. x, y, z වූ කලී ඒවායෙන් ඕනෑම දෙකක් එකිනෙකට සමාන නොවන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම් $f(x, y, z)$ ශූන්‍ය විය නොහැකි බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $ax^3 + bx + c$ ප්‍රකාශනයට $x^2 + px + 1$ ආකාරයේ සාධකයක් ඇත්නම් $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න. මෙම අවස්ථාවෙහි දී $ax^3 + bx + c$ සහ $cx^3 + bx^2 + a$ ප්‍රකාශනවලට පොදු වර්ගජ සාධකයක් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න. (1991)

(10) a) a, b, c සියල්ල ප්‍රභින්න යැයි උපකල්පනය කරමින් $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ප්‍රකාශන $k + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි K, A, B, C යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. $a = b \neq c$ අවස්ථාව සාකාච්ඡා කරන්න. a, b, c, d සියල්ල ප්‍රභින්න විට $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \dfrac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \dfrac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \dfrac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) ඒකජ සාධක දෙකක් ලබා ගැනීමෙන් $(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$ ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න. (1993)

(11) $(b+c)^3(b-c) + (c+a)^3(c-a) + (a+b)^3(a-b)$ සාධක සොයන්න. (1996)

(12) අ) $f(a, b, c) \equiv (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ හි සාධක සොයන්න. $f(a, b, c)$ යන්න $(a+b+c)^{1997} - a^{1997} - b^{1997} - c^{1997}$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

ආ) "විසංවාදයක් මඟින් සාධනය" ක්‍රමය යොදා $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ යන්නට $x + n$ ආකාරයේ සාධකයක් නොතිබෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි. (1997)

(13) අ) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ හි සාධක සොයන්න. ප්‍රභින්න p, q, r සඳහා $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)\ (q-r)(r-p)$ සහ $px + qy + rz = 0$ ද $x + y + z = 0$ නම්, $x = q - r$, $y = r - p$ සහ $z = p - q$ බව පෙන්වන්න.

ආ) $n\ (>1)$ යනු දී ඇති නිඛිලයක් ද $t > 0$ ද ලෙස ගනිමු. t විචලනය වන විට $(n+1)t + \dfrac{n-1}{t}$ හි අඩුතම අගය වන l සොයන්න. $k > l$ විට $(n+1)t + \dfrac{n-1}{t} = k$ සමීකරණයෙහි මූල දෙක ම ධන බව පෙන්වන්න. $(n+1)t + \dfrac{n-1}{t} = \sqrt{8n(n+1)}$ හි වඩා විශාල මූලය n ඇසුරෙන් සොයන්න. (1998)

(14) ඇ) $x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4)$ හි සාධක සොයන්න.

ආ) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ සහ $g(x) = 6x^2 - 16x + 19$ යැයි ගනිමු. $f(x) + \lambda g(x)$ ශ්‍රිතය $a(x + b)^2$ ආකාරයට වනසේ වූ λ හි අගයන් සොයන්න. මෙහි a සහ b තාත්ත්වික නියත වේ. ඒ නයින්, A, B, C හි අගයයන් දෙමින් $A(x - 3)^2 + B(x + c)^2$ ආකාරයට f(x) ප්‍රකාශ කරන්න.

$g(x) = 10A(x - 3)^2 + 5B(x + c)^2$ බව ද පෙන්වන්න. තව ද $\frac{f(x)}{g(x)}$ හි කුඩාතම සහ වැඩිතම අගයයන් ද සොයන්න. (1999)

(15) P(x) වර්ගජ බහුපදයක් පිළිවෙලින් (x – 1), (x – 2) හා (x – 3) යන්නෙන් බෙදූ විට ශේෂයන් 1, $\frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{3}$ වේ. (x – 1), (x – 2) හා (x – 3) යනු $Q(x) = xp(x) - 1$ මගින් දෙනු ලබන Q(x) බහුපදයේ සාධක බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් Q(x) සොයන්න.(2004)

(16) $P(x) = ax^3 + bx + c$ යන්න x + 1න්, x – 1න් හා x – 2 න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ පිළිවෙලින් 4, 0 හා 4 වේ. a, b, c හි අගයන් සොයා P(x) හි ඒකජ සාධක සියල්ල නිර්ණය කරන්න. (2005)

(17) f(x) බහුපදය $(x - \alpha)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. f (x) බහුපදය $(x - \alpha)(x - \beta)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය Ax + B ආකාරය ගනී. මෙහි $\alpha \neq \beta$ වේ. α, β $f(\alpha)$ සහ $f(\beta)$ ඇසුරෙන් A හා Bනියත ප්‍රකාශ කරන්න. ඒනයින්, $x^3 + kx^2 + k$ යන්න (x – 1) (x + 2) න් බෙදූ විට ශේෂයේ නියත පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. (2008)

(18) f (x) බහුපදය $x - \alpha$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න. f(x) බහුපදය $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $A(x - \beta)(x - \gamma) + B(x - \alpha)(x - \gamma) + C(x - \alpha)(x - \beta)$ ආකාරය ගනී. මෙහි α, β සහ γ සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $\alpha, \beta, \gamma, f(\alpha), f(\beta)$ සහ $f(\gamma)$ඇසුරෙන් A, B, C නියත ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $x^5 - kx$ යන්න (x + 1) (x – 1) (x – 2) න් බෙදූ විට ශේෂයේ x හි පදය අඩංගු නොවන ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න. (2009)

(19) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. (x – 1) යන්න f (x) හි සාධකයක් වේ නම් හා f (x) යන්න (x – 4) න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය –6 නම් a හා b වල අගයන් සොයන්න. f (x) හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න.(2013)

(20) $a, b, c \in \mathbb{R}$ සහ $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශුන්‍ය $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda + 1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in |R$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයෙහි මූල γ හා δ යැයි ද, $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එකම අනුපාතයට වන බව දී ඇත. මෙහි $k \in |R$ වේ. k හි අගය සොයන්න. (2014)

සීමාව හා අවකලනය

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම් $\sin 1 < \sin \theta < \tan \theta$ බව ජ්‍යාමිතික ලෙස සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\theta \to +0$ විට $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ බව පෙන්වන්න. $\theta \to -0$ විට ද $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$බව අපෝහනය කරන්න. ප්‍රමුල ධර්මවලින් $\frac{d}{dx}(\sin x)$ සොයන්න. ඒ නයින්, පිළිවෙලින් $\frac{d}{dx}(\cos x)$ හා $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$ සෙවීම සඳහා $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$ හා $\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy}$ සූත්‍ර භාවිත කරන්න. $y = \sin(a \sin^{-1} x)$ නම් $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x\,dy}{dx} + a^2y = 0$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි a නියතයකි. (1975)

(2) i) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ බව ඔප්පු කරන්න.

ඒ නයින් $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ බව ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් සාධනය කරන්න.

ii) උපකල්පනය කරනු ලබන යම් මූලික සීමාවක් වෙයි නම් එය (සාධනය නොමැතිව) සඳහන් කරමින් $\frac{d}{dx}(\sin x)$ = කොස් x බව ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් සාධනය කරන්න.

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) $f_1(x)$ ද $f_2(x)$ ද x හි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිත වන විට $f(x) = f_1(x) \ f_2(x)$ වෙයි නම් $\frac{d}{dx}\{f_1(x)\}, \frac{d}{dx}\{f_2(x)\}$සහ $f_1(x)$ සහ $f_2(x)$ ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$ සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගන්න. m ද ධන නිඛිලයක් වන විට $y = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = (m + n) \sin^m x \cos^n x - (n-1) \sin^m x \cos^{n-2} x$ බව සාධනය කරන්න.(1976)

(3) i) $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ නම්, $x^4\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii) x, y යනු $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ යන සම්බන්ධවලින් සැබැඳුණු විචල්‍ය නම්, t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d^2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. (1978)

(4) n යනු ධන නිඛිලයක් විට x විෂයයෙන් x^n හි ව්‍යුත්පන්නය (= අවකලන සංගුණකය) ප්‍රමුලධර්මවලින් ලබාගන්න. y = ලඝු x^n විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. $y = n$ ලඝු x ද $e^y = x^n$ ද යනුවෙන් අර්ථ දක්වෙන තුල්‍ය ශ්‍රිත ද එම ව්‍යුත්පන්නයම දෙන බව පෙන්වන්න.(1979)

(5) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ බව උපකල්පනය කිරීමෙන් $\frac{d}{dx}$ (sin x) ද $\frac{d}{dx}$ (cos x) ද සොයන්න. a ද, b ද නියත විට,

i) $\sin(\cos x)$ ii) $\sin^{1}(\cos x)$ $0 < x < \pi$

iii) $\cos ax \sin \frac{b}{x}$ iv) $\frac{a+\sin x}{b+\cos x}$ යන මේවායෙහි

x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්න (ඒවා පවතින විට) සොයන්න. (1979 අතුරු)

(6) u, v යනු x හි අවකලනය කළ හැකි ශ්‍රිත දෙකක් නම්, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ බව සාධනය කරන්න. $y = \sin^{-1} x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ බව සාධනය කරන්න.

i) m නියතයක් වූ y = සයින් (m සයින්$^{-1}$ x) නම්, $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = m\cos(m\sin^{-1} x)$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii) $1 < x < \frac{3}{2}$ වන අතර $u = 2\sin^{-1}\sqrt{x-1}$ ද $v = \sin^{-1} 2\sqrt{(2-x)(x-1)}$ ද නම්, $\frac{d}{dx}(uv) = \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}(u+v)$ බව පෙන්වන්න. (1980)

(7) i) ප්‍රමුලධර්ම ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}$ (sin x) = cos x බව සාධනය කරන්න. $\frac{d}{dx}$ (cos x) = − sin x බව අපෝහනය කරන්න. ඒනයින්, $\frac{d}{dx}$ (cot x) = − cosec^2 x බව පෙන්වන්න. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x$ සොයන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය ලබාගැනීමේ දී ඔබ විසින් භාවිතා කරන්නට යෙදුණු සීමා සහ ව්‍යුත්පන්න පිළිබඳව ප්‍රමේය හෝ සූත්‍ර හෝ කවරේ දැයි සාධන රහිතව ප්‍රකාශ කරන්න.

අ) $\cot(\sin x \cot^{-1}x)$

ආ) $\cot^{-1}$(ලඝු cos x), $0 < x < \frac{\pi}{2}$, x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

ii) $x > a > 0$ විට y = ලඝු $(x+\sqrt{x^2-a^2})$ නම්, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $(x^2-a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 0$ බව සාධනය කරන්න. (1981)

(8) i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ බව ජ්‍යාමිතික ලෙස සාධනය කරන්න. මේ නයින්, ධන අගය ඔස්සේ $\theta \to 0$ විට $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ බව පෙන්වන්න. a නියතයක් විට $\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos(ax)$ බව ප්‍රමුලධර්ම ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $y=\sin^{-1}\frac{x}{b}, \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, -b < x < b$ නම් $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

α) $(x^2+1)^{1/2}\sin^3 2x$ ද, β) $\sin^2(a\sin^{-1}\frac{x}{b})$, $-b < x < b$ ද

x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

ii) $x - a > 0$ විට $y = \{\log(x-a)\}^2$ නම්, $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. $(x-a)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x-a)\frac{dy}{dx} = 2$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(9) $y = \sin^{-1}x$ නම්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ බව සාධනය කරන්න. මේ නයින්, $x = 0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $n = 2, 3, 4, 5$ සඳහා $\frac{d^ny}{dx^n}$ හි අගයයන් සොයන්න. (1982)

(10) i) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ බව ප්‍රමූල ධර්මවලින් සාධනය කර $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

අ) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ ආ) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|$

x විෂයයෙන් අවකලනය කර ලැබෙන ප්‍රතිඵල සුළු කරන්න.

ii) m නියතයක් හා $y = e^{m\tan^{-1}x^2}$ නම්, $(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mxy$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2x^2 - m)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$ බව පෙන්වන්න. (1983)

(11) $y = \sin^{-1}x + (\sin^{-1}x)^2$ නම් එවිට $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$, x වලින් ස්වායත්ත බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $n = 2, 3, 4$ සඳහා $x = 0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $\frac{d^ny}{dx^n}$ හි අගයයන් සොයන්න. (1983)

(12) i) f සහ g යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත නම්, $\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$ බව සාධනය කරන්න.

x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

අ) $e^{x^2}\sin 2x$ ආ) $\sqrt{x}\sin^{-1}(2x-1)$ ඉ) $\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}\right)\log|\sec x + \tan x|$

ii) $(\alpha + \beta x)e^{y/x} = x$ නම්, $x^3 \times \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි α සහ β නියත වේ. (1984)

(13) අ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\sin x < x < \tan x$ බව ජ්‍යාමිතික ක්‍රම මඟින් සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, ධන අගයන් හරහා $x \to 0$ විට $\frac{\sin x}{x} \to 1$ බව පෙන්වන්න. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$ සොයන්න.

ආ) x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

i) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ii) $\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}, x \neq 1$

ඉ) $y_n = \sec x \tan^n x$ නම්, $\frac{dy_n}{dx} = ny_{n-1} + (n+1)y_{n+1}$ බව පෙන්වන්න. n සඳහා සුදුසු අගයක් දෙමින් $\int \sec x \tan x\, dx$ සොයන්න. (1985)

(14) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\sin x < x < \tan x$ බව ජ්‍යාමිතික ක්‍රම මඟින් සාධනය කරන්න. x ධන අගයන් හරහා ශුන්‍යය කරා එළැඹෙන විට $\frac{\sin x}{x}$ හි සීමාව අපෝහනය කරන්න.

අ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x + \tan 7x}{6x}$ ආ) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\cos x}{\sin x}$

$y_n = \sin^n x$ යයි ගනිමු. මෙහි n ඕනෑම පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

$\frac{d^2y_n}{dx^2} = n(n-1)y_{n-2} - n^2y_n$ බව පෙන්වන්න. $I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} y_n dx$ යැයි ලියමු. $(n > 1)$

$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} \frac{d^2y_n}{dx^2} dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$ බව පෙන්වන්න. I_4 හි අගය අපෝහනය කරන්න. (1986)

(15) i) n ධන නිඛිලයක් වන විට $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, ඕනෑම $n(\neq 0)$ නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

ii) ප්‍රමූලධර්ම වලින් $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ බව සාධනය කරන්න. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ සොයන්න. $\{\log|\tan^{-1} x|\}^2$ යන්න x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

iii) $y = x\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ යයි ගනිමු. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ බව සාධනය කරන්න. (1987)

(16) i) අ) $\lim_{x \to 0} \frac{x+\sin 3x}{x-\sin 3x}$ ආ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1-\tan x)\sec 2x$ අගයන්න.

ii) මතු දැක්වෙන දෑ x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

අ) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}$ මෙහි α යනු නියතයකි.

ආ) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$ ඉ) $\sqrt{1+\sin^2(\sqrt{x})}$

iii) $y = e^x \sin 2x$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\frac{dy}{dx} + \mu y = 0$ වන අයුරින් λ සහ μ නියතයන් සොයන්න. (1988)

(17) i) $\frac{\sin x}{x}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් සොයන්න.

ii) පහත දැක්වෙන දෑය x හි විෂයයෙන් අවකලනය කර ඔබේ ප්‍රතිඵලය සරලම ආකාරයෙන් දක්වන්න. $\cos^{-1}\left(\frac{a\cos x+b}{b\cos x+a}\right)$; මෙහි a සහ b යනු නියත වේ.

iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර $x = \tan\theta$ වේ. $\frac{dy}{d\theta}$ සහ $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ ඇසුරෙන් $\frac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$ නම්, $\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$ බව සාධනය කරන්න. (1989)

(18) i) ප්‍රමූලධර්ම වලින් $\frac{\tan x}{x}$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

ii) a සහ b යනු නියතව වන $\tan^{-1}\left(\frac{a-b\sin x}{b+a\sin x}\right)$, x විෂයයෙන් අවකලනය කර පිළිතුර සරලම ආකාරයෙන් දක්වන්න.

iii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් ද, $x = \sin\theta$ ද වේ. $\frac{dy}{d\theta}$ සහ $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ මගින් $\frac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ky = 0$ නම්, $\frac{d^2y}{d\theta^2} + ky = 0$ බව සාධනය කරන්න. (1990)

(19) i) u සහ v යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත නම්, u,v සහ ඒවායේ ව්‍යුත්පන්න ඇසුරෙන් $\frac{d}{dx}(uv)$ සඳහා සූත්‍රයක් ප්‍රමූලධර්ම වලින් ලබාගන්න.

ii) $y = \frac{u}{v}$ නම්, ලඝු ගණක ගෙන අවකලනය කිරීමෙන් $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ බව පෙන්වන්න.

iii) $y = \frac{u_1 u_2 \cdots u_n}{v_1 v_2 \cdots v_n}$ නම්, $\frac{dy}{dx} = y\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} - \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි u, v ආදිය x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත වේ.

iv) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ යන්න $\tan^{-1}x$ විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න. (1991)

(20) i) f යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් ද $f(x) > 0$ ද නම්, x විෂයයෙන් $\sqrt{f(x)}$ හි ව්‍යුත්පන්නය ප්‍රමූලධර්ම වලින් ලබාගන්න.

ii) x විෂයයෙන් $\tan^{-1}x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. $x = \tan\theta$ යැයි ගැනීමෙන් හා x විෂයෙන් $\tan^{-1}x$ හි ව්‍යුත්පන්නය උපයෝගී කර ගනිමින් x විෂයයෙන්, $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ සහ $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නයෙන් සොයන්න. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ විෂයයෙන් $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

iii) $y = \{\sin^{-1}x\}^2$ නම්, $(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ බව පෙන්වන්න.

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ බව අපෝහනය කරන්න. (1992)

(21) a) $-1 < x < 1$ විට x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ සහ

ii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{4+x^4}}\right)$

b) උත්තර දෙකම සමාන වන්නේ මන්දැයි පහදන්න. ප්‍රමූලධර්ම වලින් x විෂයයෙන් $\sec x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සහ $y = (\sec x + \tan x)^{1/2}$ නම්,

i) $2\frac{dy}{dx} = y\sec x$ සහ ii) $2\frac{d^2y}{dx^2} = (\sec x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}$ බව සාධනය කරන්න. (1993)

(22) a) $x \neq 0$ විට ප්‍රමූලධර්ම මගින් $\frac{d}{dx}(\cos\frac{1}{x})$ ලබාගන්න.

b) $y = e^{-x}\sin(x\sqrt{3})$ නම්, $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ λy ආකාරයෙන් $\frac{d^8y}{dx^8}$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

c) $x = \sin\theta$ සහ $y = \sin n\theta$ යැයි ගනිමු. මෙහි n නියතයක් ද $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ද වේ. n සහ θ ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ලබාගෙන එනයින් $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$ බව පෙන්වන්න. (1994)

(23) i) ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීමෙන් පටන් ගෙන $y = -\cot x - x$ ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

ii) y යනු x හි ශ්‍රිතයක් වන අතර ඒවා $x\frac{dy}{dx} = 3(y^2x^6 - y + 4)$ යන්නෙන් සම්බන්ධ වී ඇත.

a) $y = \frac{2}{x^3}\tan(2x^3 - \alpha)$ යන්න ඉහත සම්බන්ධය සපුරාලන බව සෘජු ආදේශයෙන් පෙන්වන්න. මෙහි α නියතයකි.

b) එම සම්බන්ධය $\frac{dy}{dx} = 3x^2(4 + v^2)$ යන්නට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $v = x^3y$ වේ.

iii) $x = 2t^3 + 1$ සහ $y = 4t^4 - 1$ නම්, $\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(1995)

(24) i) a) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - x}{\tan 3x - 2x}$ සොයන්න.

ii) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ බව ප්‍රමූලධර්ම මගින් සාධනය කර, $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) a) $y = \sin(\sin x)$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ බව පෙන්වන්න.

b) k යනු නියතයක් ද $\theta \neq 0, \cos\theta \neq 0$ ද විට $x = k(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = k(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ නම්, θ හි ශ්‍රිත ලෙස $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ සොයන්න.

(1996)

(25) අ) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x^2}$ සොයන්න.

ආ) සුදුසු ශ්‍රිත අවකලනය කිරීමෙන් $0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(1997)

(26) අ) ප්‍රමූලධර්ම මගින් $\frac{d}{dx}(\sin(3x)) = 3\cos(3x)$ බව සාධනය කරන්න.

ආ) $x > 0$ සඳහා $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ නම්, $2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} + \frac{1}{4\sqrt{x(x + \sqrt{x})}}$ බව පෙන්වන්න.

(1997)

(27) අ) f යනු, $\mathbb{R}$ හි එකක් x හි දී $(f(x)^3 - x(f(x))^2 - x^2 f(x) - 2x^3 - 7x^4 + 7x^5 = 0$ අවශ්‍යතාවය තෘප්ත කරන $\mathbb{R}$ මත අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු. ව්‍යුත්පන්නයෙහි අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $f(0) = 2$ බව පෙන්වන්න. $f(1)$ අගයන්න.

ආ) $x > 1$ සඳහා $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^3$ නම්, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ සොයන්න.

ඇ) $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1}x - 9$ නම්, (0, 3) ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ද $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. (1998)

(28) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$ ලෙස ගනිමු.

i) x හි කිසිම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $-7-4\sqrt{3}$ සහ $-7+4\sqrt{3}$ අතර f(x) නොපිහිටින බව පෙන්වන්න.

ii) $A+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x-3}$ ආකාරයෙන් f(x) ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A, B හා C නියත වේ. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ f හි උපරිම සහ අවම සොයන්න.

iii) f හි සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ සොයන්න.

iv) f හි ප්‍රස්තාරයෙහි කටු සටහනක් අඳින්න. (1998)

(29) අ) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ නම්, x = 1 විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

ආ) $y=\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2$ නම්, $(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4y$ බව පෙන්වන්න. (1999)

(30) අ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(2\sin x)}{1-\cos 2x}$ අගයන්න.

ආ) $y=e^{k\sin^{-1}x}$ නම්, $\frac{dy}{dx}(\sqrt{1-x^2})=ky$ බව පෙන්වන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. $x=\frac{1}{2}$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. (2000)

(31) අ) $x=t-\sin t$ හා $y=1-\cos t$ නම්, $t\neq 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ සඳහා $y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ බව පෙන්වන්න. (2001)

(32) $y=e^{4x}\sin 3x$ නම්, $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+25y=0$ බව පෙන්වන්න. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ සහ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2002)

(33) $y=e^{\cos x}$ නම්, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0}$ සහ $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2003)

(34) $y=e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)$ යැයි ගනිමු. $\frac{dy}{dx}+y=2e^{-x}(\cos 2x-\sin 2x)$ බව පෙන්වන්න. $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ වන අයුරින් p හා q සංඛ්‍යා දෙක නිර්ණය කරන්න. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2004)

(35) $y=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ නම්, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-1=0$ බව පෙන්වන්න. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ හා $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2005)

(36) $y=(1+4x^2)\tan^{-1}(2x)$ ලෙස ගනිමු.

i) $(1+4x^2)\frac{dy}{dx}-8xy=2(1+4x^2)$ සහ

ii) $(1+4x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-8y=16x$ බව පෙන්වන්න. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ සොයන්න. (2006)

(37) i) ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d^r}{dx^r}(xe^x) = (x+r)e^x$ බව පෙන්වන්න.

ii) $y = x^2e^x$ නම්, $\frac{dy}{dx} = 2xe^x + y$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{d^ry}{dx^r} - \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} = 2(x+r-1)e^x$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒනයින්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{d^ny}{dx^n} = n(2x+n-1)e^x + y$ බව පෙන්වන්න. (2007)

(38) a) ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන් $f(x) = \tan x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

b) y යනු u හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් සහ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ විට $u = \ln(\cos x)$ නම්, $\sin^3 x \frac{d^2y}{du^2} = \sin x \cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx}$ බව පෙන්වන්න. (2008)

(39) a) ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන් $f(x) = \sin x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න. $g(x) = \cos x$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

i) $\sin(\ln(1+x^2))$ ii) $\cos(\sin x)$ x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

b) $y = \sin k\theta \operatorname{cosec}\theta$ සහ $x = \cos\theta$ යැයි ගනිමු. මෙහි k නියතයකි.

i) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy + k\cos k\theta = 0$,

ii) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (k^2-1)y = 0$ බව සාධනය කරන්න. (2009)

(40) a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$ අගයන්න.

b) i) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ හා $z = \tan^{-1}x$ යැයි ගනිමු. $\frac{dy}{dz}$ සොයන්න.

ii) $y = e^{m\sin^{-1}x}$ යැයි ගනිමු. මෙහි m යනු නියතයකි. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$ බව පෙන්වන්න. $x = 0$ හි දී $\frac{d^3y}{dx^3}$ හි අගය සොයන්න. (2010)

(41) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3\sin x} - \sqrt{4-3\sin x}}{2x} = \frac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න. (2011)

(42) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2\sin^2 3x - x^2\cos x} = \frac{1}{17}$ බව පෙන්වන්න. (2012)

(43) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න. (2013)

(44) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{x[1-\sqrt{1+x}}$ $= -8$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(45) $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\lim_{y\to a} \frac{y^n - a^n}{y-a} = na^{n-1}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෙ

$\lim_{x\to a} \frac{\left(x+\sqrt{2}\right)^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න. (2015)

(46) $x \neq 0$ සඳහා $y = x \sin \frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු

i) $x \frac{dy}{dx} = y - \cos \frac{1}{x}$ හා ii) $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ බව පෙන්වන්න. (2015)

(47) තාත්වික θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන්, xy තලයේ C වක්‍රයක් $x = 2 + \cos 2\theta,\ y = 4 \sin \theta$ යන සමීකරණය මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරෙන් සොයා, $\theta = \frac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x - \sqrt{2}\, y + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න. (2015)

<u>දෛශික</u>

(1) $p\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ හා $q\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ මඟින් නිරූපණය කරන ලද බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය $(p+q)\,\overrightarrow{\mathbf{OC}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි C, $p\overrightarrow{\mathbf{AC}} = q\,\overrightarrow{\mathbf{CB}}$ වන සේ AB හි පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය G වේ. $3\overrightarrow{\mathbf{BG}}, 3\overrightarrow{\mathbf{CG}}, 3\overrightarrow{\mathbf{GA}}, 6\overrightarrow{\mathbf{CB}}$ බල පිළිලෙළින් BG, CG, GA, CB දිගේ ක්‍රියා කරත්. සම්ප්‍රයුක්තය CG ට සමාන්තර බව පෙන්වා එහි ක්‍රියාරේඛාව සොයන්න. (1975)

(2) P, Q ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\overrightarrow{\mathbf{p}}, \overrightarrow{\mathbf{q}}$ වෙයි. PQ රේඛාව $\boldsymbol{\lambda : \mu}$ අනුපාතයෙන් බෙදෙන R ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය හතරක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{c}}, \overrightarrow{\mathbf{d}}$ ය. පහත සඳහන් ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

i) BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන L ලක්ෂ්‍යයේ

ii) AL රේඛාව 2 : 1 අනුපාතයෙන් බෙදෙන M ලක්ෂ්‍යයේ

iii) DM රේඛාව 3:1 අනුපාතයෙන් බෙදෙන G ලක්ෂ්‍යයේ

ඒ නයින්, a) ත්‍රිකෝණයක මධ්‍යස්ථ සංගාමී (ඒක ලක්ෂ්‍යය) බවත්,

b) චතුස්තලයක ශීර්ෂත් සම්මුඛ මුහුණත්වල කේන්ද්‍රකත් යා කරන රේඛා සංගාමී බවත් ඔප්පු කරන්න. (1978)

(3) $\boldsymbol{\lambda}$ අදිශයකත් a දෛශිකයකත් ගුණිතය වන $\boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\mathbf{a}}$ සඳහා අර්ථ දක්වන්න. **a, b, c** ප්‍රභින්න ශූන්‍ය නොවන දෛශික තුනක් පිළිවෙලින් $\overrightarrow{\mathbf{OA}}, \overrightarrow{\mathbf{OB}}, \overrightarrow{\mathbf{OC}}$ මගින් විශාලත්වයෙන් ද දිශාවෙන් ද නිරූපණය කෙරෙයි. A, B, C ඒක රේඛියම නම් පමණක්, $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 0}$, $\boldsymbol{\alpha a + \beta b + \gamma c = 0}$ වන පරිදි ශූන්‍ය නොවන $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ අදිශ පවතින බව පෙන්වන්න. (1980)

(4) ABCD යනු තල චතුරස්‍රයකි. O යනු මේ චතුරස්‍රයේ තලයෙහි පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AB,BC,CD,DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් E,F,G,H ලක්ෂ්‍යය නම් ද $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \mathbf{a}, \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \mathbf{b}, \overrightarrow{\mathbf{OC}} = \mathbf{c}, \overrightarrow{\mathbf{OD}} = \mathbf{d}$ නම් ද **a, b, c, d** ඇසුරෙන් $\overrightarrow{\mathbf{OE}}, \overrightarrow{\mathbf{OF}}, \overrightarrow{\mathbf{OG}}, \overrightarrow{\mathbf{OH}}$ සොයන්න. චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාත් චතුරස්‍රයේ විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාවත් සංගාමී (ඒක ලක්ෂ්‍යය) බව අපෝහනය කරන්න. (1980)

(5) O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a**, **b** වේ. P ලක්ෂ්‍යය m:n අනුපාතයට AB බෙදයි. $\overrightarrow{OP} = \frac{(na+mb)}{(m+n)}$ බව පෙන්වන්න.
OABC යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. M යනු OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයි. OB හා CM එකක් අනෙක ත්‍රිච්ඡේදනය කරන බව දෛශික භාවිතයෙන් පෙන්වන්න. (1981)

(6) O, A, B යනු ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ද වේ.
i) $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0$ නම්, $\alpha = 0$ බවත්, $\beta = 0$ බවත් පෙන්වන්න.
ii) P යනු AB මත ලක්ෂ්‍යයක් නම් ද $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ නම් ද, $0 \leq t \leq 1$ විට $r = (1-t)a + tb$ බව පෙන්වන්න. මේ නයින්, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකක් අනෙක සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න. (1982)

(7) i) **a**, **b** දෛශික මඟින් සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ නිරූපනය කෙරෙයි. මේ සමාන්තරාස්‍රයේ එක් කෝණයක් $\cos^{-1}\{|a^2 - b^2|/|a-b|\ |a+b|\}$ බව පෙන්වන්න.
ii) O, P, O, R යනු ඒකතල නොවන ලක්ෂ්‍ය හතරකි. $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ ද $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$ ද $\overrightarrow{OR} = \mathbf{r}$ ද වේ. S යනු PQR තලය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් නම් ද $\overrightarrow{OS} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} + \mathbf{vr}$ නම් ද $\lambda + \mu + \mathbf{v} = 1$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(8) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ යනු අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්බ වූ ඒකක දෛශික තුනකි. λ ද μ ද අදිශ විට, $\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OC}$ A, B, C හා D ඒකතල බව පෙන්වන්න. $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ බව අපෝහනය කරන්න. මේ නයින් ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න. (1983)

(9) "**u** යනු ඒකක දෛශිකයකි." යන ප්‍රකාශනයෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි පැහැදිලි කරන්න. ඕනෑම **a** දෛශිකයක් සඳහා $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි **u** යනු a හි දිශාව සහ අත ඔස්සේ පිහිටියා වූ ඒකක දෛශිකයක් ද α අදිශකයක් ද වේ. P_1, P_2, P_3, P_4 ලක්ෂ්‍ය හතරේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}, \mathbf{r_4}$ වේ. $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ අභිගුනා නොවන දෛශිකද, $\mathbf{r_3} = \beta\mathbf{r_1}$ හා $\mathbf{r_4} = \mathbf{r_2}/\beta$ ද $\beta = |\mathbf{r_2}|/|\mathbf{r_1}|$ ද නම්, P_1, P_2, P_3, P_4 වෘත්තයක පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1984)

(10) O මූල ලක්ෂ්‍යයට සමුද්දේශයෙන් A,B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a**, **b** වෙයි. R යනු AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. A,B ලක්ෂ්‍ය දෙක OR මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයකට යා කරන රේඛා වලින් OB,OA රේඛා පිළිවෙලින් S හිදී හා T හි දී කැපෙයි. AR/RB = p, BS/SO = q, OT /TA = r නම්, $\overrightarrow{OR} = (\mathbf{a} + p\mathbf{b})/(1+p)$ද, $\overrightarrow{OC} = (qr\mathbf{a} + \mathbf{b})/(1+q+qr)$ද, බව දක්වන්න. pqr = 1 බව අපෝහනය කරන්න. (1985)

(11) **a** හා **b** යනු නිශ්ශූන්‍ය අසමාන්තර දෛශික වන අතර $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = 0$ වෙයි. මෙහි x හා y අදිශ වෙයි. $x = 0$ හා $y = 0$ බව පෙන්වන්න. O,A, B ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය නොවේ. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ද වෙයි. C යනු $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ පරිදි වන ලක්ෂ්‍යයයි. P යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි. එවිට $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න. OP රේඛාවට R හිදී AB හමුවෙයි නම්, $\overrightarrow{RB} = \mathbf{b} - k(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ බව ද පෙන්වන්න. k යනු අදිශයකි. RB ටත් AB ටත් එකම දිශාව ඇතැයි යන කරුණ භාවිත කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ AR : RB = 2 : 1 බව පෙන්වන්න. (1986)

(12) O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P, Q ලක්ෂ්‍ය දෙකේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **p, q** වෙයි. $\boldsymbol{\lambda}$ යනු පරාමිතියක් වන PQ රේඛාව මත වූ ඕනෑම R විචල්‍ය ලක්ෂයෙක පිහිටුම් දෛශිකය **r**, $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. OACB යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. එහි $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ පාද පිළිවෙලින් **a** සහ **b** දෛශික නිරූපණය කෙරෙයි. L,M යනු පිළිවෙලින් AC හිත් CB හිත් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යි. X හි දී OL සහ AM ඡේදනය වෙයි. $\overrightarrow{OX} = \frac{4}{5}\left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right)$ බව පෙන්වන්න.

N හිදී CX ට OA හමුවෙයි. $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}\mathbf{a}$ බව පෙන්වන්න. (1987)

(13) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය වන $\underline{a} \cdot \underline{b}$ හි අර්ථ දක්වන්න. $(\underline{a} + \underline{b}).(\underline{a} - \underline{b}) = 0$ නම්, මෙයින් $\underline{b} = -\underline{a}$ නැතහොත් $\underline{b} = \underline{a}$ යනුවෙන් අනුගමනය වෙයි ද? පහදන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක පරිකේන්ද්‍රය O ද ලම්බ කේන්ද්‍රය H ද වෙයි නම්, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ බව පෙන්වන්න. (1988)

(14) O, A, B යනු $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වන අයුරින් එකම සරල රේඛාවක් මත නොපිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. P සහ Q යනු $\overrightarrow{OQ} = \frac{u}{2}$ සහ $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\frac{|\underline{a}|\underline{b}}{|\underline{b}|}$ වන අයුරින් වූ ලක්ෂ්‍ය වේ. $\overrightarrow{OP}$ සහ $\overrightarrow{PA}$, $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර $a = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}, \underline{b} = \frac{|\underline{b}|(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA})}{|\underline{a}|}$ බව අපෝහනය කරන්න. R යනු AR: RB = $|\underline{a}|: |\underline{b}|$ වන අයුරින් AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යයි දී ඇත්නම් $\overrightarrow{OR}$ සොයන්න. ඒ නයින්,

i) O, P, R එකම සරල රේඛාව මත පිහිටන බවත්,

ii) $2\left|\overrightarrow{OP}\right| > \left|\overrightarrow{OR}\right|$ බවත් පෙන්වන්න. (1989)

(15) i) $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් ඒක ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

ii) $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ යනු නිශ්ශූන්‍ය සමාන්තර නොවන සහ $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = 0$ වන දෛශික දෙකක් නම්, $\alpha = 0, \beta = 0$ බව පෙන්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක B, C කෝණවල අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක O හි දී හමු වේ. O ලක්ෂ්‍යය දෛශිකයන්ගේ මූලය ලෙස ගනිමින් $\overrightarrow{OB}$ සහ $\overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{OB} = \underline{b} = \lambda\left(\frac{(\underline{a}-\underline{b})}{c} + \frac{(\underline{c}-\underline{b})}{a}\right)$ $\overrightarrow{OC} = \underline{c} = \mu\left(\frac{(\underline{b}-\underline{c})}{a} + \frac{(\underline{a}-\underline{c})}{b}\right)$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ, μ යනු අදිශ වන අතර $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ යනු ත්‍රිකෝණයේ පාද වේ. $\lambda^{-1} = -\frac{a+b+c}{ac}$, $\mu^{-1} = -\frac{a+b+c}{ab}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, කෝණ සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න. (1989)

(16) O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a, b** වෙයි. $\lambda : \mu$ අනුපාතයෙන් AB බෙදෙන P නම් ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{\mu a+\lambda b}{\lambda+\mu}$ බව පෙන්වන්න. O යනු ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AO, BO, CO රේඛාවලට BC, CA, AB සම්මුඛ පාද L, M, N ලක්ෂ්‍යවල දී හමුවන්නේ $\frac{BL}{LC} = \lambda, \frac{CM}{MA} = \mu, \frac{AN}{NB} = \upsilon$ වන පරිදිය. දෛශික මූල O ලෙස ගෙන සමමිතිය භාවිත කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයෙකින් හෝ $\lambda\mu\upsilon = 1$ බව පෙන්වන්න. (1990)

(17) **a** හා **b** යනු සමාන්තර නොවන්නා වූත් ශුන්‍ය නොවන්නා වූත් දෛශික දෙකකි. $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0$ නම් මෙවිට $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව පෙන්වන්න. A හා B යනු දී තිබෙන O මූලයට සාපේක්ෂව **a** හා **b** පිහිටුම් දෛශික සහිතව AB රේඛාව මත නොවන්නා වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AOB හා OAB කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක R හි දී හමුවෙයි. $a = |\mathbf{a}|$ ද, $b = |\mathbf{b}|$ ද, $c = |\overrightarrow{AB}|$ ද ලෙස දී තිබෙයි. $\overrightarrow{OR} = \lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right) = \mathbf{a} + \mu\left\{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)(-\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{b}}{c}\right\}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ හා μ අදිශ වේ. λ හා μ නිර්ණය කොට ඒ නයින්, OBA කෝණය BR මඟින් සමච්ඡේදනය කෙරෙන බව පෙන්වන්න. (1990)

(18) O, A, B, C යනු O, A, B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නොවන පරිදි වූ ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හතරකි. α හා βයනු නිශ්ශූන්‍ය සංඛ්‍යා විට $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ වේ.

i) OA රේඛාව මත D නම් ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන ඇත්තේ $\overrightarrow{OD} = \gamma\mathbf{a}$ වන පරිදිය. $\overrightarrow{DC} = \delta\mathbf{b}$ වන අයුරින් γ හිත් δ හිත් අගයන් සොයන්න.

ii) α, β, **a** හා **b** ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\alpha + \beta = 1$නම් A,B,C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න. තව ද, A ත් B ත් අතර C පිහිටන බව දී ඇත්නම් α ඇසුරෙන් පමණක් AC:CB අනුපාතය ප්‍රකාශ කර$0<\alpha<1$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) P, Q යනු $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\mathbf{b}$ ද වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AB හිත් PQ හිත් ඡේදන ලක්ෂ්‍යය R ය. **a** හා **b** ඇසුරෙන් $\overrightarrow{OR}$ ප්‍රකාශ කර AR : RB හා PR : RQ යන අනුපාත සොයන්න. (1991)

(19) අ) **a** හා **b** යන නිශ් - ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ **a, b** අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. පහත සඳහන් ඒවා පිහිටුවන්න.

i) $(-\mathbf{a}) . \mathbf{b} = \mathbf{a} . (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a}. \mathbf{b}$

ii) **a** හා **b** ලම්බ නම් ම පමණක් $\mathbf{a}. \mathbf{b} = 0$, e යනු ඒකක දෛශිකයක් නම්, e. b ජ්‍යාමිතික ලෙස විවිරණය කරන්න. **a**, b හා c යනු ඕනෑම දෛශික තුනක් සඳහා $\mathbf{a}. (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}. \mathbf{b} + \mathbf{a}. \mathbf{c}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) **ABC** යනු ත්‍රිකෝණයකි. අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ ගුණ භාවිත කර **ABC** ත්‍රිකෝණයේ **A, B, C** යන ශීර්ෂවල සිට පිළිවෙලින් BC, CA, AB සම්මුඛ පාද වලට ඇඳි AL, BM, CN ලම්බ ඒකලක්ෂ්‍ය වන බව පෙන්වන්න. (1991)

(20) O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a**, **b** සහ $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{a} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{b}$ වෙයි. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$ ම නම් පමණක් A,B සහ C ඒකරේඛීය බව සාධනය කරන්න. OPQ යනු ත්‍රිකෝණයකි. $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{p}, \overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \mathbf{q}$ වේ. A යනු $\frac{\mathbf{PA}}{\mathbf{QA}} = \boldsymbol{\lambda}(> \mathbf{1})$ වන පරිදි දික්කළ PQ පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයෙකි. B,C යනු $\frac{\mathbf{OB}}{\mathbf{BP}} = \boldsymbol{\gamma}(> \mathbf{0})$ ද $\frac{\mathbf{QC}}{\mathbf{CO}} = \boldsymbol{\mu}(> \mathbf{0})$ ද වන පරිදි පිළිවෙලින් OP ත් OQ ත් පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යි. $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \mathbf{a}$ද $\overrightarrow{\mathbf{OB}} = \mathbf{b}$ද $\overrightarrow{\mathbf{OC}} = \mathbf{c}$ද නම් $\boldsymbol{\mu\gamma}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\gamma})\mathbf{b} + (\mathbf{1} + \boldsymbol{\mu})\mathbf{c} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda\mu\gamma})\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\boldsymbol{\lambda\mu\gamma} = \mathbf{1}$ම නම් පමණක් A, B, C ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කරන්න. (1992)

(21) **a** හා **b** නිශ් - ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ **a. b** අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

අ) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී **a** ත් **b** ත් අතර කෝණය සොයන්න.

i) $\mathbf{a} . (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ සහ $|\mathbf{b}| = \mathbf{2}|\mathbf{a}|$

ii) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

ආ) A,B,C,D යනු චතුස්තලයක ශීර්ෂ වෙයි. AD ට BC ලම්බ නම් ද BD ට CA ලම්බ නම් ද CD ට AB ලම්බ බව පෙන්වන්න. (1992)

(22) P, Q, R යනු ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනකි. ඒවායේ පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{p}, \overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \mathbf{q}, \overrightarrow{\mathbf{OR}} = \mathbf{r}$ වෙයි. $\mathbf{r} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\mathbf{q}$ වන පරිදි වූ α සංඛ්‍යාවක් පවතියි ම නම් පමණක් P, Q, R ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාද මත P, Q, R ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{\mathbf{BP}} = \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\mathbf{PC}}, \overrightarrow{\mathbf{CQ}} = \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\mathbf{QA}}$ හා $\overrightarrow{\mathbf{AR}} = \boldsymbol{\nu}\overrightarrow{\mathbf{RB}}$ වන පරිදිය. මෙහි $\boldsymbol{\lambda\mu\nu} \neq \mathbf{0}$. $\overrightarrow{\mathbf{CA}} = \mathbf{a}$ද $\overrightarrow{\mathbf{CB}} = \mathbf{b}$ ද නම් මූල ලක්ෂ්‍යය ලෙස C ගෙන එය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික සොයන්න. ඒ නයින්, $\boldsymbol{\lambda\mu\nu} = -\mathbf{1}$ ම නම් පමණක් P, Q, R ඒකරේඛීය බව පෙන්වන්න. (1993)

(23) **a** හා **b** යන නිශ්ශූන්‍ය දෛශික දෙකේ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ CA = **a** ද CB = **b** ද යැයි ගනිමු. (**a** − **b**). (**a** − **b**) අදිශ ගුණිතය සැලකීමෙන් $\cos \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a^2+b^2-c^2}}{\mathbf{2ab}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|, \mathbf{b} = |\mathbf{b}|$ හා

$c = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. L ලක්ෂ්‍යය කෙසේ ද යත් ACB කෝණයේ සමච්ඡේදකය CL වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් වෙයි. **a** හා **b** එක එකක් සමග $\overrightarrow{CL} = \boldsymbol{l}$ දෛශිකයේ අදිශ ගුණිතය සැලකීමෙන් $l = \frac{\mathbf{ba+ab}}{\mathbf{a+b}}$ බව පෙන්වන්න. $CL^2 = ab\left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]$ බව අපෝහනය කරන්න. (1993)

(24) O, P, Q යනු ඒකරේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය තුනකි. R ලක්ෂ්‍යය OPQ තලයේ පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{OR} = \alpha\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{OP} + \frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ}\right)$ වන පරිදිය. මෙහි α යනු අදිශයකි. POQ කෝණය OR ගෙන් සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CA} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ B කෝණයේත් C කෝණයේත් අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක L හි දී හමුවෙයි. $\overrightarrow{BL} = \lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි. $a = |\mathbf{a}|, b = |\mathbf{b}|$ හා $c = |\mathbf{c}|$. එබඳුම ආකාරයකින් $\overrightarrow{CL}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\overrightarrow{AL}$ සඳහා ස්වායත්ත ප්‍රකාශන දෙකක් ලියා දක්වා, $\lambda = \frac{ac}{a+b+c}$ බව ද $\overrightarrow{AL} = \frac{\mathbf{bc-cb}}{a+b+c}$ බව ද පෙන්වන්න. ඒ නයින්, ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක තුන ඒකලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න. (1994)

(25) P, Q, R හා S යනු පිළිවෙලින් $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}, \overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}, \overrightarrow{QR} = \mathbf{r}$ හා $\overrightarrow{OS} = \mathbf{s}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හතරකි. P, Q,R, S ඒකරේඛීය වෙයි නම්, $\mathbf{r} = (1-\alpha)\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$ ද, $\mathbf{s} = (1-\beta)\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$ ද වන පරිදි α සහ β යන නිශ් - ශුන්‍ය සංඛ්‍යා දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න. P, Q, R, S ලක්ෂ්‍ය පිළිවලින් ABCD තල චතුරස්‍රයේ DA, AB, CD හා BC පාද මත පිහිටන්නේ $\overrightarrow{DP} = \gamma\,\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AQ} = \lambda\,\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{CR} = \upsilon\,\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{BS} = \mu\,\overrightarrow{SC}$ වන පරිදිය. මෙහි $\lambda\mu\upsilon\gamma \neq 0$ වේ. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ හා $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$ නම්, මූල ලක්ෂ්‍යය A ලෙස ගෙන එය අනුබද්ධයෙන් P, Q, R, S ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික b, c, d, λ, μ, γ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න. ඒ නයින්, P, Q, R, S සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි නම් $\lambda\mu\upsilon\gamma = 1$ බව පෙන්වන්න.(1995)

(26) **a, b** හා **c** යනු ඕනෑම නිශ් - ශුන්‍ය දෛශික තුනක් යැයි සිතමු. $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.\mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. ඒනයින්, $\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$ බව සාධනය කරන්න. OAB ත්‍රිකෝණයේ $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ද යැයි සිතමු. OA > OB යැයි සිතමු. L හා M යනු පිළිවෙලින්, $\overrightarrow{OL} = \boldsymbol{l} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$ ද $\overrightarrow{OM} = \mathbf{m} = \mu\mathbf{a} + (1-\mu)\mathbf{b}$ ද යන පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍ය යි. OL හා OM රේඛා මඟින් පිළිවෙලින් අභ්‍යන්තතර ලෙසත් බාහිර ලෙසත් AOB කෝණය සමච්ඡේදනය වන පරිදි λ හි හා μ හි අගය අදිශ ගුණිතය උපයෝගී කරගෙන $a=|\mathbf{a}|$ හා $b=|\mathbf{b}|$ ඇසුරෙන් නිර්ණය කරන්න.

i) $\frac{AL}{LB} = -\frac{AM}{MB} = \frac{OA}{OB}$ බවත්,

ii) $\overrightarrow{LM} = \frac{2ab}{a^2-b^2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ බවත් අපෝහනය කරන්න. (1995)

(27) O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A,B හා C යන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a**, **b** හා $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ වෙයි. මෙහි α, β යනු අදිශයි. $\alpha+\beta=1$ ම නම් පමණක් A, B හා C ඒක රේඛීය බව සාධනය කරන්න. PQR සහ LMN ත්‍රිකෝණ දෙක කෙසේ ද යත් PL, QM හා RN රේඛා O ලක්ෂ්‍යයෙක දී ඒකලක්ෂ්‍ය වන පරිදිය. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් P, Q හා R ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **p**, **q** හා **r** වෙයි. QR රේඛාවත් MN රේඛාවත් A හි දී ද RP රේඛාවත් NL රේඛාවත් B හි දී ද PQ රේඛාවත් LM රේඛාවත් C හි දී ද හමුවෙයි. $\overrightarrow{OA}=\frac{\mu\mathbf{q}-\upsilon\mathbf{r}}{\mu-\upsilon}$, $\overrightarrow{OB}=\frac{\upsilon\mathbf{r}-\lambda\mathbf{p}}{\upsilon-\lambda}$, $\overrightarrow{OC}=\frac{\lambda\mathbf{p}-\mu\mathbf{q}}{\lambda-\mu}$ වන පරිදි λ, μ හා υ යන ප්‍රභින්න අදිශ තුනක් පවතින බව පෙන්වන්න. A, B හා C ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කරන්න. (1996)

(28) **a** හා **b** නිශ්ශුන්‍ය දෛශික දෙකක **a**. **b** අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.
අ) පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවේ දී **a** හා **b** අතර කෝණය සොයන්න.
i) $\mathbf{a}.(\mathbf{a}+2\mathbf{b})=0$ සහ $|\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|$ ii) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ (1996)

(29) $-2\vec{\mathbf{p}}+5\vec{\mathbf{q}}$, $7\vec{\mathbf{p}}-\vec{\mathbf{q}}$ හා $\vec{\mathbf{p}}+3\vec{\mathbf{q}}$ යනු අචල O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙලින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික යයි ගනිමු. මෙහි $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}$ යනු සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකක් වෙයි. A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය බව පෙන්වා C ලක්ෂ්‍ය AB බෙදන අනුපාතය සොයන්න. (2011)

(30) $\vec{\mathbf{a}}$ හා $\vec{\mathbf{b}}$ දෛශික දෙකක් තිත් ගුණිතය වන $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$ අර්ථ දක්වන්න. $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ හා $\vec{\mathbf{d}}$ ඕනෑම දෛශික හතරක් සඳහා $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).(\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{d}})=\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{d}}+\vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{d}}$ යයි උපකල්පනය කරමින් $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|^2=|\vec{\mathbf{a}}|^2+2\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}+|\vec{\mathbf{b}}|^2$ බව පෙන්වන්න. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ නම් $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමාන නම් එය සෘජුකෝණයක් බව පෙන්වන්න. (2011)

(31) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+6\sqrt{3}\mathbf{j}$ වේ. මෙහි **i** හා **j** ට සුපුරුදු අර්ථය ඇත. **b** යනු විශාලත්වය $\sqrt{3}$ සහිත දෛශිකයකි. **a** හා **b** දෛශික අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ නම්, **b** යන්න $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ ආකාරයෙන් සොයන්න. මෙහි $x\ (<0)$ හා y යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. (2012)

(32) A හා B යනු O ලක්ෂ්‍යයක් සමඟ ඒකරේඛීය නොවන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් **a** හා **b** යැයි ගනිමු. D යනු BD = 2DA වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම්, O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් D ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න. $\overrightarrow{BC}=k\mathbf{a}\ (k>1)$ හා O, D හා C ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය නම්, k හි අගය හා OD:DC අනුපාතය සොයන්න. **a** හා **b** ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. තව ද AC ට සමාන්තරව O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාව E හි දී AB හමුවේ නම්, 6DE = AB බව පෙන්වන්න. (2012)

(33) සුපුරුදු අංකනයෙන් O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු A හරහා OB ට සමාන්තර සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{\mathbf{OC}} = (1+\lambda)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. OB ට BC ලම්බ වන පරිදි වූ λ හි අගය සොයන්න.

(2013)

(34) OABC යනු චතුරශ්‍රයක් යැයි ද D හා E යනු පිළිවෙලින් OB හා AC විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. තව ද DE හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. O අනුබද්ධයෙන් A,B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ යැයි ගනිමින් $\overrightarrow{\mathbf{OF}} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ බව පෙන්වන්න. P හා Q යනු පිළිවෙලින් OA හා BC පැතිවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. P, F හා Q ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛී බව පෙන්වා PF : FQ අනුපාතය සොයන්න.

(2013)

(35) ABCD යනු $\overrightarrow{\mathbf{DC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ වන පරිදි වූ ත්‍රපීසියමක් යැයි ගනිමු. තවද $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{p}$ හා $\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \mathbf{q}$ යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ වන පරිදි BC මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි. AE හා ED වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන F මගින් $\overrightarrow{\mathbf{BF}} = \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{BD}}$ යන්න සපුරාලයි. මෙහි λ $(0 < \lambda < 1)$ නියතයකි. $\overrightarrow{\mathbf{AE}} = \frac{5}{6}\mathbf{p} + \frac{1}{3}\mathbf{q}$ බව හා $\overrightarrow{\mathbf{AE}} = (1-\lambda)\mathbf{p} + \pi\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න. **ඒ නයින්**, λ හි අගය සොයන්න.

(2014)

(36) සුපුරුදු අංකනයෙන් $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු OABC සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{\mathbf{OC}} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න. $\mathbf{A\hat{O}C} = \theta$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OC}}$ සැලකීමෙන් $\cos\theta = \frac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න.

(2014)

(37) සුපුරුදු අංකනයෙන්, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}$ හා $\lambda\mathbf{i}-\mu\mathbf{j}$ වේ; මෙහි λ හා μ යනු $0<\lambda<\mu$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $A\hat{O}B$ සෘජු කෝණයක් බව පෙන්වන්න. AB රේඛා ඛණ්ඩයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය C යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකයේ විශාලත්වය 2 නම් හා එය $\mathbf{i}$ ඒකක දෛශිකය සමග $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදයි නම්, λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.

(2015)

බල සමතුලිතතාව හා සන්ධි කළ දඬු

1) ඒකාකාර සිහින් ද්‍රව්‍යකින් තනා ඇති කුහර වස්තුවක් පොදු වෘත්තාකාර ආධාරකයක් දිගේ අර්ධගෝලයකට යා කරන ලද සිරස් කෝණය 2α වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්වරූපය ගනී. කේතුව හා අර්ධගෝලය පිහිටා ඇත්තේ ආධාරකයේ දෙපසිනි. 6 කොස් $\alpha = \sqrt{37}-1$ නම් සුමට තිරස් තලයක් මත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශ වන සේ වස්තුව සමතුලිතතාවෙහි පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(1976)

(2) එක එකක් දිගෙන් 2a වූද එහෙත් $W_2 < W_1$ වන පරිදි පිළිවෙලින් බරෙන් W_1 ත් W_2ත් වූද AB,BC ඒකාකාර ඉනිමං දෙකක් දෙපසින් නගින තරප්පු ඉනිමගක් සැදෙන පරිදි B හි දී සුමට ලෙස අසවු කර A ත් C ත් රළු තිරස් බිමක් මත සිටින සේ සිරස් තලයක තබා ඇත. AC දෙතැනදිම ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වෙයි. බර W වන මිනිසෙක් A කොණෙන් පටන්ගෙන ඉනිමගදිගේ නගියි. මිනිසා යම්කිසි දුරක් නැගුනු පසු තරප්පු ඉනිමග ලිස්සයි නම් පළමුවෙන් ලිස්සීම සිදුවන්නේ C හිදී බව පෙන්වන්න. $A\hat{B}C = 2\theta$ නම් ලිස්සීම පටන් ගැනීමට පෙර මිනිසා ඉනිමග දිගේ නැගි දුර සොයන්න. (1977)

(3) සමාන බරින් ද සමාන දිගකින් ද, යුත් ඒකාකාර දඬු 4 ක් දඬු දාමයක් සැදෙන සේ ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමටව එකට සන්ධි කර තිබේ. දාමයේ නිදහස් කෙළවරවල් එකම තිරස් රේඛාවේ පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සුමට ලෙස සන්ධි කර තිබේ. මෙම පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතින විට පළමුවැනි 4 වැනි දඬු එක එකක් තිරස සමග α කෝණයක් සාදයි. දෙවැනි තුන්වැනි දඬු එක එකක් $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\alpha\right)$ කෝණයකින් තිරසට ආනත බව පෙන්වන්න. අසව් වල දී ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

(4) එක එකක් 2a දිගින් ද W බරින් ද යුත් සමාන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හි දී සුමට ලෙස එකට සන්ධි කර ඇත. අක්ෂය තිරස්වන සේ අචල ලෙස සවි කළ r අරය ඇති සුමට වෘත්ත සිලින්ඩරයක් උඩින් මේ දඬු දෙක සමමිතික ලෙස නිශ්චලතාවෙහි තබා තිබේ. එක් එක් දණ්ඩෙහි තිරසට ආනතිය θ නම් $a\cos^3\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta = r$ බව පෙන්වන්න. A සන්ධියේදී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. (1980)

(5) එක එකක් W බරැති AB, BC, CD, DA සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක් සුචල ලෙස එකට සන්ධි කර A ගෙන් එල්ලා තිබේ. මේ රාමු සැකිල්ල AD හිත් DC හිත් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යා කරන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සමචතුරස්‍රයක ආකාරයට තිබේ. එක් එක් සන්ධියේ දී ප්‍රතික්‍රියාවත් තන්තුවේ ආතතියත් සොයන්න. (1981)

(6) අඩ සිරස් කෝණය ටැන් $^{-1}(\sqrt{2})$ වූ ඒකාකාර සෘජුවෘත්ත කේතුවක් කුඩා සුමට නැදුත්තකින් එල්ලා තිබෙන්නේ කේතුවේ ශීර්ෂයටත් එහි වෘත්ත ආධාරකයෙහි පරිධිය මත ලක්ෂ්‍යයකටත් සවිකර නාදුත්ත උඩින් යවා ඇති ලුහු අප්‍රත්‍යාස්ත තන්තුවක් මගිනි. කේතුව එහි අක්ෂය තිරස් වන සේ නිශ්චලතාවෙහි පවතියි නම් තන්තුවේ දිග කේතුවේ උස මෙන් තුන් ගුණයක් බව ජ්‍යාමිතික ක්‍රමයක් මගින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ පෙන්වන්න. (1982)

(7) W බරැති ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි කෙළවරවලට ඇඳු තන්තු දෙකක් මගින් රඳවනු ලැබේ. සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙයි. තන්තුවල ආතති T_1, T_2 නම් සිරසට දණ්ඩෙහි ආනති කෝණයේ කෝසයිනය $\left|T_1^2 - T_2^2\right| / W\sqrt{\left\{2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - W^2\right\}}$ බව පෙන්වන්න.

(1983)

(8) AB සහ BC නැමැති සමාන වූත් ඒකාකාර වූත් ඉනිමං දෙකක් B හි දී සුවල ලෙස අසවු කර ඒවායෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ලණුවක් මගින් යාකර ඇත්තේ ලණුව නුබුරුල්ව පවත්නා විට $A\hat{B}C = 2\theta$ වන පරිදිය. A කෙළෙවර සුවල ලෙස විවර්තනය කර ඇති අතර C කෙළෙවර A හරහා යන සුමට ආනත තලයක් මත තබා ඇත්තේ AC රේඛාව තිරස සමඟ පහතට α කෝණයක් සාදන්නා වූ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාවක් වන පරිදිය. ලණුවේ සමතුලිතතා ආතතිය $W(2\sin\alpha + \cos\alpha\tan\theta)$බව පෙන්වන්න. මෙහි W යනු එක් එක් ඉනිමගෙහි බර වේ. (1984)

(9) එක් එක් a දිගින් හා W බරින් යුතු ඒකාකාර දඬු හතරක් ඒවායේ කෙළවරවල්වල දී සුවල ලෙස එකිනෙකට අසව් කිරීමෙන් තැනූ ABCD රොම්බසයක් A ට හා B ට ඇඳූ සිරස් තන්තු දෙකක් මගින් AB තිරස්ව සිටින පරිදි රඳවා තිබෙයි. a දිගින් යුතු ලුහු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A හා C ඇඳා තිබෙයි. A වත් B වත් ඇඳා ඇති තන්තුවල ආතති පිළිවෙලින් 3w ද w ද බව දක්වන්න. AC තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. (1985)

(10) එක් එකක බර 8w ද දිග 5a ද වන AB,BC සමාන ඒකාකාර දඬු දෙකක් සමඟ බර 14w ද දිග 6a ද වන AC තුන්වැනි ඒකාකාර දණ්ඩක් ABC ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන සේ සුවල ලෙස සන්ධි කර ඇත. ත්‍රිකෝණය සිරස් තලයක පිහිටන සේ A හි වන සුමට විවර්තනියකින් එල්ලා ඇති අතර එය AC තිරස් ද B ශීර්ෂය AC ට පහළින් ද වන සේ සමතුලිතතාවේ පිහිටනු පිණිස AC දණ්ඩට යුග්මයක් යොදා ඇත.

i) යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයා එහි අත රූප සටහනක් දක්වන්න.
ii) CA ත් AB ත් මගින් BCමත මෙහෙයවනු ලබන බලවල තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න. (1986)

(11) A හි දී සුවල ලෙස සන්ධි කළ එක එකක බර W වූ සමාන ඒකාකාර AB , AC දඬු දෙකක B හා C දෙකෙළවර ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ඇඳා තිබෙයි. එක එකක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තල දෙකක් මත B හා C සමමිතික ලෙස නිශ්චලතාවේ පවතී. BC තිරස් වන අතර BC ට ඉහළින් A පිහිටා ඇත. B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $2\theta = B\hat{A}C$ විට $\tan\theta > 2\tan\alpha$ නම් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{1}{2}W(\tan\theta - 2\tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. (1987)

(12) පිළිවෙලින් 3a, 4a, 5a දිගැති AB, BC හා CA ඒකාකාර දඬු තුනක් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල දී සුවල ලෙස අසව්කර තිබෙයි. දඬුවල බර ඒවායේ දිගට සමානුපාතික වෙයි. A ට ඇඳූ තන්තුවක් මගින් පද්ධතිය නිශ්චලව එල්ලෙමින් පවතියි. AB දණ්ඩ තිරසට $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ කෝණයකින් ආනතව පිහිටන බව පෙන්වන්න. දඬුවල ඒකක දිග බර ω යැයි උපකල්පනය කරමින් B හා C අසව්වල දී ඇති ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. (1988)

(13) දෘඪ වස්තුවක් සියල්ලම සමාන්තර නොවූ ක්‍රියා රේඛාවක් සහිත ඒකතල බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතී නම් එවිට ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා ඒක ලක්ෂ්‍යය විය යුතු බව පෙන්වන්න. අරය $\sqrt{3}a$ වන සුමට අර්ධ ගෝලාකාර අචල පාත්‍රයක ගැටිය උඩින් යන දිග 4a වන ඒකාකාර බර දණ්ඩක් එක් කෙළවරක් පාත්‍රයේ පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් නිසලව ඇත. පාත්‍රයේ ගැටියේ තිරස්ව පිහිටයි නම්, තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය රේඩියන $\pi/6$ බව පෙන්වන්න. (1989)

(14) එක එකක දිග 2a සහ බර W වන AB, BC සහ CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B සහ C හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. BC තිරස්වද AB හා CD එක එකක් සුමට අචල නාදුත්තක ආධාරය ඇතිවද පද්ධතිය සමතුලිතව නිසලතාවේ ඇත. එකිනෙකට 2c දුරකින් එකම තිරස් මට්ටමක නාදුති පිහිටා ඇත. AB සිරසට α කෝණයකින් ආනත වන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\sin\alpha = \left[\frac{3(c-a)}{2a}\right]^{\frac{1}{3}}$ වේ. B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එය තිරස සමඟ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\alpha\right)$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. (1989)

(15) එක් එක් දණ්ඩෙහි බර W ද දිග 2a ද වන එක සමාන ඒකාකාර දඬු හයක් ABCDEF ෂඩස්‍රය සෑදෙන පරිදි සුමට ලෙස සන්ධි කර තිබෙයි. ඒවා A ශීර්ෂයෙන් එල්ලා සවිධි ෂඩස්‍රයක හැඩයට තබා ඇත්තේ $a\sqrt{3}$ දිගැති LM නම් සැහැල්ලු තිරස් දණ්ඩක ආධාරයෙනි. මෙහි BL = FM = x වන පරිදි BC හා EF මත ලක්ෂ්‍යයන්ට පිළිවෙලින් L හා M කෙළවරවල් සුමට ලෙස අසව් කර තිබෙයි. D ශීර්ෂයෙහි දී ඇති ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. LM දණ්ඩෙහි තෙරපුම $3\sqrt{3}$ W බව පෙන්වන්න. x දුර $\frac{a}{6}$ බවද පෙන්වන්න. (1990)

(16) බර W වූ ද G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ a හා b දිගැති කොටස් දෙකකට බෙදන්නා වූ ද AB දණ්ඩක දෙකෙළවරට $l(>a+b)$ දිග ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ගැට ගසා තිබේ. තන්තුව කුඩා සුමට P නාදුත්තක් උඩින් යවා දණ්ඩ සමතුලිතතාවේ තබා ඇත.

අ) i) $A\hat{P}G = B\hat{P}G$ බව ද

ii) $\cos A\hat{P}G = \frac{a+b}{2l}\left[\frac{l^2-(a+b)^2}{ab}\right]^{\frac{1}{2}}$ බව ද පෙන්වන්න.

ආ) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. (1991)

(17) එක එකක බර W ද දිග 2a ද වන AB සහ AC සමාන ඒකාකාර දඬු දෙකක් A හිදි නිදහස් ලෙස සන්ධි කර B හා C දෙකෙළවර සුමට තිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ සිරස් තලයක තබා ඇත. සමතුලිතතාව පවත්වා ගන්නේ C ලක්ෂ්‍යයත් AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කෙරෙන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමඟ $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි. තන්තුවේ ආතතිය $T = \frac{W}{4}\sqrt{1+9\cot^2\alpha}$ බව පෙන්වන්න. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයත් දිශාවත් සොයන්න. (1991)

(18) බර W වූ AB දණ්ඩක් අරය r ද කේන්ද්‍රය C ද වූ සුමට අචල අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් තුළ සම්පූර්ණයෙන් ම පිහිටන පරිදි නිශ්චලව පිහිටා ඇත. AB දණ්ඩේ G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මගින් දණ්ඩ a හා b කොටස් දෙකට බෙදා තිබෙයි. මෙහි b > a ද $r > \sqrt{ab}$ ද වෙයි. සමතුලිතා පිහිටීමේ දී තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය θ නම් $\sin\theta = \frac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$ බවත් $CG = \sqrt{r^2-ab}$ බවත් පෙන්වන්න. පාත්‍රයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. (1992)

(19) එක එකක බර W වන AB හා BC සමාන ඒකකාර දඬු දෙකක් B හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර තිබෙයි. ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ඈදනු ලැබූ අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවේ දිග කොතෙක් ද යත් එය නොවක් ව ඇති විට ABC කෝණය සෘජුකෝණයක් වන පරිදිය. පද්ධතිය නිදහස් ලෙස A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇති නම් ද එය සමතුලිතතා පිහිටීමෙ තිබෙයි නම් ද සිරසට AB ගේ ආනතිය $\tan^{-1}(1/3)$ බවත් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ බවත් පෙන්වන්න. BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව BC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බව ද පෙන්වන්න. (1992)

(20) බර W ද අරය a ද වූ ඒකාකාර සුමට ඝන ගෝලයක් a දිගැති තන්තුවක් මගින් අචල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබෙයි. බර W ද දිග 4a ද වූ සුමට ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් එම O ලක්ෂ්‍යයට ම නිදහසේ ඈඳා ඇත. දණ්ඩ ගෝලය හා ස්පර්ශ වෙමින් නිසලව තිබෙයි නම් තන්තුවේත් දණ්ඩේත් සිරසට ආනති එක එකක් $\frac{\pi}{12}$ ට සමාන වන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතිය $\frac{W\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ බව ද පෙන්වා ගෝලයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. (1993)

(21) AB, BC, CD, DA සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක් නිදහස් ලෙස සනධි කර ඇත්තේ ABCD සමචතුරස්‍රයක් සෑදෙන පරිදිය. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තිබෙයි. සමචතුරස්‍ර හැඩය පවත්වා ගන්නේ AB හිත් BC හිත් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කෙරෙන අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟිනි. එක් එක් දණ්ඩේ බර W නම්,

i) C හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සිරසට $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත දිශාවකට වූ $\frac{W\sqrt{5}}{2}$ බවත්

ii) D හි දී ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් දිශාවකට වූ $\frac{W}{2}$ බවත්

iii) යා කෙරෙන තන්තුවේ ආතතිය 4W බවත්

iv) B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව සිරසට $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ කෝණයකින් ආනත දිශාවකට වූ $\frac{W\sqrt{17}}{2}$ බවත් සාධනය කරන්න. (1993)

(22) දිග 2a ද බර W ද වූ ඒකාකාර සුමට AB දණ්ඩට එහි අචල A කෙළවර වටා සුචල ලෙස හැසිරෙන්නට පුළුවන. බර 2W වූ කුඩා සුමට C මුදුවකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකිය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම තිරස් මට්ටමෙ පිහිටි D අචල ලක්ෂ්‍යයකට මුදුව ඈඳා ඇත්තේ a/4 දිගෙන් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟිනි. තන්තුවත් දණ්ඩත් එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. AD = $\frac{a}{4}$ සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුදුව අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ තිරස සමඟ $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතියත් A කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න. (1994)

(23) එක එකක දිග a ද බර W ද වූ AB, BC, CD යන සමාන ඒකාකාර දඬු තුනක් දිග 2a ද බර 2W ද වූ ඒකාකාර AD දණ්ඩත් A,B,C,D ලක්ෂ්‍යයවල දී සුචල ලෙස අසවු කර තිබෙයි. BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලූ රාමු සැකිල්ල සමතුලිතතාවේ පවතියි. A හා B සන්ධිවල දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවල විශාලත්ව හා දිශා සොයා ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා BC ට පහළින් $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ගැඹුරක දී හමුවන බව පෙන්වන්න. (1994)

(24) දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක් මඟින් එම වස්තුව සමතුලිතව තබා ගනියි නම් එක්කෝ ඒවා ලක්ෂ්‍යයක දී හමු විය යුතු බව නැතහොත් සමාන්තර විය යුතු බව පෙන්වන්න. බර W ද අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතින්නේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුළේ පිහිටන පරිදිය. තිරසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\frac{\pi}{6}$ වෙයි. තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\theta\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රයේ ගැටියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්, ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන් අයුරකින් හෝ

i) $\theta = \frac{1}{2}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right\}$ බවත්

ii) $l = \frac{1}{2} r \sec\theta$ බවත්

iii) $R = \frac{W}{\left(8+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^{1/2}}$ බවත් සාධනය කරන්න. (1995)

(25) එක එකක් W බරින් යුතු සමාන ඒකාකාර AB,AC දඬු දෙකක් A හි දී සුවල ලෙස සන්ධි කර ඒවායේ B සහ C දෙකෙළවර ලුහු තන්තුවක් මඟින් සම්බන්ධ කර තිබෙයි. B සහ C සමමිතික ලෙස නිශ්චලතාවේ පිහිටා ඇත්තතේ එක එකක් තිරසට $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වූ ද එක සමාන රළු වූ ද ආනත තල දෙකක් මත ය. ආනත තලවල බෑවුම් එකක් අනිකට මුහුණලා ඇති අතර දඬුවල තලය සිරස්ය. BAC කෝණය 2θ ද B හා C දෙකෙළවරේ දීම සර්ෂණ කෝණය β ද විට දඬු සීමාකාරී සමතුලිතතාවෙන් පවතියි. තන්තුවේ T ආතතිය $T = \frac{1}{2}W\tan\theta + W\tan(\beta-\alpha)$ යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. A සන්ධියේ දීත් B කෙළවරේ දීත් AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. තව ද $\frac{BP}{AB} = \frac{\cos\theta}{\cos(\alpha-\beta)}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි P යනු එම ප්‍රතික්‍රියා දෙකේ ක්‍රියාරේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යි. (1995)

(26) දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල සමාන්තර නොවන බල තුනක් මඟින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවෙන් තබා ගනියි නම් ඒ බල ලක්ෂ්‍යයෙක දී හමුවිය යුතු බව පෙන්වන්න. W බරින් යුත් AB දණ්ඩක් C ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ බෙදාලන්නේ පිළිවෙළින් a හා b දිග ඇති AC හා CB කොටස් දෙකටය. දණ්ඩ නිසලව සමතුලිතතාවෙන් තිබෙන්නේ B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තුකර B ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ $l\,(> a+b)$ දිගින් යුත් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් A කෙළවරකට සම්බන්ධ කිරීමෙනි.

අ) $\cos^2(A\hat{B}D) = \frac{a^2}{b(b+2a)}\left[\frac{l^2}{(a+b^2)} - 1\right]$ බව පෙන්වන්න.

ආ) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. (1996)

(27) එක එකක් 2a දිගින් හා W බරින් යුත් සමාන ඒකාකාර AB, AC දඬු දෙකක් A හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර තිබෙයි. a දිගින් යුත් බර රහිත BD දණ්ඩ B හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර AC මත ස්රපණය විය හැකි ලුහු සුමට කුඩා මුදුවකට D හි දී සවිකර ඇත. B සහ C දෙකෙළවර සුමට තිරස් තලයක නිශ්චලතාවේ පිහිටන පරිදි පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත. BD දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය $\frac{W}{12}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$ බව පෙන්වන්න. A සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව ද එහි ක්‍රියා රේඛාවට CB හමුවන ලක්ෂ්‍යය ද සොයන්න. (1996)

(28) දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුවේ සමතුලිතතාවේ පිහිටයි නම් එම බල තුන ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවිය යුතු බව පෙන්වන්න. A සහ B කේන්ද්‍ර සහිතව වෙනස් අරයන් ඇති එක එකෙහි බර W වන සුමට ඒකාකාර ගෝල දෙකක් ශීර්ෂය යටි අතට සිටින සේ අචලව තබා ඇති සුමට සෘජු වෘත්තාකාර කුහර කේතුවක් ඇතුළත සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ එක් එක් ගෝලය එක් ලක්ෂ්‍යයක දී පමණක් කේතුව ස්පර්ශ කරන පරිදිය. කේතුවේ අඩ සිරස් කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වන අතර එහි අක්ෂය සිරස සමඟ $\beta\left(<\frac{\pi}{6}\right)$ කෝණයක් සාදයි. AB රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,
$\theta=\tan^{-1}\left(\cot 2\beta-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2\beta\right)$ බව පෙන්වන්න. කේතුවේ පැතිවල ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. (1997)

(29) ඒකකාර සුමට දණ්ඩක් AB, BC හා CD නම් කෑලි තුනකට කපා ඇත්තේ එවායේ දිග පිළිවෙලින් l, $2l$ හා l වන පරිදිය. මේවා B හි දීත් C හි දීත් සුමට ලෙස සන්ධි කොට කේන්ද්‍රය O හා අරය $2l$ වන අචල සුමට ගෝලයක් මත නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් A හා D අන්ත දෙකත් ගෝලය ස්පර්ශ කෙරෙන පරිදිය. BC දණ්ඩ මත එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ දී ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{91\,W}{100}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි W යනු දණ්ඩෙහි බර වේ. C සන්ධියේ දී CD දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාවත් එහි ක්‍රියා රේඛාවට OD හමුවන ලක්ෂ්‍යයත් සොයන්න. (1997)

(30) දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ තබයි නම් එම බල තුන ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවන බව පෙන්වන්න. අරය r වූ සුමට ඒකාකාර අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් ද පාත්‍රයේ බරට සමාන බරින් ද යුත් සුමට ඒකාකාර දණ්ඩක් නිශ්චලතාවේ ඇත්තේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුලේ තිබෙන පරිදිය. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී තිරසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රය ඇතුළේ වූ දණ්ඩේ කොටස මගින් කේන්ද්‍රයේ දී ආපාතනය කෙරෙන කෝණය $2\beta\left(>\frac{\pi}{2}\right)$ ද වෙයි.

i) $r=l\operatorname{cosec}\alpha\sin(\alpha+\beta)$ බවත්

ii) $\cot\alpha=\tan 2\beta-\frac{1}{2}\sec 2\beta$ බවත් පෙන්වන්න. (1998)

(31) ඒකාකාර සුමට දණ්ඩක් පිළිවෙලින් $2b\sec\alpha$, $2b$ හා $2b\sec\alpha$ දිගින් යුත් AB, BC හා CD කැබලි තුනකට කපා තිබෙයි. ඒවා B හි දීත් C හි දීත් සුමට ලෙස සන්ධි කර අක්ෂය සිරස්ව ද ශීර්ෂය ඉහළින්ම ද තිබෙන අචල පරාවලයික චාපයක් මත සමමිතික ලෙස නිශ්චලතාවේ තබා ඇත්තේ කැබලි තුනම පරාවලයට ස්පර්ශක වන පරිදිය. පරාවලයේ නාභිය ශීර්ෂයට පහළින් $b\tan\alpha$ ගැඹුරකින් වෙයි. දණ්ඩේ ඒකක දිගක බර w නම් CD දණ්ඩ නිසා පරාවලය මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $2wb\tan^2\alpha$ බව පෙන්වන්න. තව ද $\sin\alpha\tan^2\alpha-\sec\alpha=\frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න. (1998)

(32) අ) Ox, Oy සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසීය අක්ෂ දිගේ ඒකක දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}$, $\underline{j}$ වෙයි. අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන P හා Q බල දෙකක් පිළිවෙලින් $4\underline{i} + 3\underline{j}$ සහ $-3\underline{i} - 4\underline{j}$ දෛශික වලට සමාන්තර වෙයි. බල දෙකේ සම්ප්‍රයුක්තය විශාලත්වය 7N වූ i දෛශිකයේ දිශාවට ක්‍රියාකරන බලයකි. P සහ Q හි විශාලත්ව ගණනය කරන්න.

ආ) අරය a සහ බර W වූ ඒකාකාර ගෝලයක් තිරසට ආනතිය α වූ අවල සුමට තලයක නිශ්චලතාවයේ තබා ඇත්තේ ගෝල පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයකට එක් කෙළවරක් ද තලයේ ලක්ෂ්‍යයකට අනිත් කෙළවර ද ඈඳූ දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. තලය සමඟ තන්තුව සාදන θ කෝණය සොයන්න. ගෝලය මත ක්‍රියා කරන බල සඳහා බල ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න. මෙම බල ත්‍රිකෝණය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින්,

i) තන්තුවේ ආතතිය $\frac{W(l+a)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ බව සහ

ii) තලයෙන් ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{W\cos(\alpha-\theta)}{\cos\theta}$ බව පෙන්වන්න. (2000)

(33) එක එකහි අරය a සහ බර W වූ ඒකාකාර සුමට ගෝල දෙකක් එකිනෙක ස්පර්ශ කරමින් අරය b (> 2a) වූ අවල සුමට අර්ධගෝලාකාර පාත්‍රයක ඇතුළත නිශ්චලව තිබේ. එක් ගෝලයක් මත ක්‍රියා කරන බල නිරූපණය කරමින් වෙනම රූප සටහනක බල ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ ගෝල දෙක අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{Wa}{\sqrt{b(b-2a)}}$ බව පෙන්වන්න. (2002)

(34) එක එකක බර W වූ සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක් ABCD සමචතුරස්‍රයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. සමචතුරස්‍රය A සන්ධියෙන් එල්ලා එහි සමචතුරස්‍රාකාර හැඩය සහිතව සමතුලිතතාව පවත්වා ගනු ලබන්නේ BC, CD පහත් දඬු දෙකෙහි මධ්‍යලක්ෂ්‍ය යා කරන සැහැල්ලු දණ්ඩක් මඟිනි. සැහැල්ලු දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලයත් C හිදී ප්‍රතික්‍රියාවත් ගණනය කරන්න. (2002)

(35) අරය a වන සුමට තුනී අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් එහි ගැටිය තිරස්ව සහ ඉහළින්ම පිහිටන පරිදි සවිකොට ඇත. බර W සහ දිග $2l$ (> 2a) වන සුමට ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර පාත්‍රයේ ඇතුළත පෘෂ්ඨයේ පිහිටන පරිදි දණ්ඩේ C ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයේ ගැටිය මත ගැටෙමින් නිසලව ඇත. දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන බල සටහන් කරන්න. A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් C හි දී R ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{Wl}{2a}$ බව පෙන්වන්න. තවද R සහ W අතර තවත් සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න. ඒනයින්, CB හි දිග $\frac{1}{4}\left(7l - \sqrt{l^2 + 32a^2}\right)$ බව පෙන්වන්න. (2003)

(36) එක එකක බර W වූ සමාන ඒකාකාර දඬු පහක් ABCDE සවිධි පංචාස්‍රයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවල දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. CD තිරස් තලයක නිසලව තිබෙන පරිදි පංචාස්‍රය සිරස් තලයක තබා ඇති අතර සවිධි පංචාස්‍රාකාර හැඩය පවත්වාගනු ලබන්නේ BC හා DE දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන සැහැල්ලු දණ්ඩක් මඟිනි. AB හා BC දඬු මත ක්‍රියා කරන බල දක්වන්න.

තව ද සැහැල්ලු දණ්ඩේ ආතතිය $\left(\cot\frac{\pi}{5} + 3\cot\frac{2\pi}{5}\right)$ W බව ඔප්පු කරන්න. (2003)

(37) AB හා BC යනු සමාන 2a දිග සහ පිළිවෙලින් W හා 2W බර සහිත ඒකාකාර දඬු දෙකකි. ඒවා B හිදී සුමට ලෙස එකට අසව් කර ඇති අතර A සහ C අචල තිරස් බාල්කයකට ද අසව් කර ඇත. දඬු AC ට පහළින් B පිහිටන පරිදි හා $C\hat{A}B = \alpha$ වන පරිදි සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ ඇත.

i) B හි අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකය $\frac{3}{4}W\cot\alpha$ බව පෙන්වා මෙම ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් සංරචකය සොයන්න.

ii) තවදුරටත් A හා C ප්‍රතික්‍රියාවල ක්‍රියා රේඛා එකිනෙකට ලම්බ වෙයි නම්, $\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$ බව පෙන්වන්න. (2005)

(38) ABCD රොම්බසයක් සාදා ඇත්තේ එක එකක දිග 2a සහ බර W වූ සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහස් ලෙස සන්ධි කිරීමෙනි. රොම්බසය A සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර එහි හැඩය පවත්වා ගනු ලබන්නේ දිග $2a\sin\alpha$ වූ සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් BC සහ CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙනි. සැහැල්ලු දණ්ඩෙහි තෙරපුම $4W\tan\alpha$ බව පෙන්වා C සන්ධියෙහි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. (2007)

(39) අරය a වූ H සුමට කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් එහි අක්ෂය තිරස්ව සවිකර ඇත. එක එකක අරය $b\left(<\frac{a}{2}\right)$ සහ බර W වූ A සහ B සමාන සුමට ඒකාකාර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩර දෙකක් සමමිතිකව H ඇතුළත තබා ඇත්තේ ඒවායේ අක්ෂ H හි අක්ෂයට සමාන්තරව සමතුලිතව තිබෙන පරිදි ය. A සහ B අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{bW}{\sqrt{a(a-2b)}}$ බව පෙන්වන්න. A සහ B එක එකකට සමාන C සිලින්ඩරයක් සිය අක්ෂය H හි අක්ෂයට සමාන්තර වන පරිදි ඒ දෙක මත පරෙස්සමින් සමමිතිකව තබනු ලැබේ. $a < b(1 + 2\sqrt{7})$ නම් පමණක් A සහ B ස්පර්ශව සමතුලිතතාවේ පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න. (2008)

(40) සුමට ලෙස සන්ධි කළ සමාන සැහැල්ලු දඬු හතරකින් සැදි පැත්ත දිග 2a වූ ABCD රොම්බසයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. AB දණ්ඩ සවිකර ඇත. BC සහ CD දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර තන්තුව ඇදී පවතින පරිදි ඝූර්ණය M වූ බල යුග්මයක් රොම්බසයේ තලයෙහි DA දණ්ඩට දෙනු ලැබේ. $A\hat{B}C = 2\theta$ වෙයි නම්,

i) C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව තන්තුවට සමාන්තර වන බව සහ

ii) තන්තුවේ ආතතිය $\frac{M}{a\sin\theta}$ බව පෙන්වන්න. (2008)

(41) එක එකක දිග 2a සහ බර W වූ AB,BC සුමට ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී නිදහස් ලෙස අසව්කර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට බැඳි එක එකක දිග 2a වූ AO, CO සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකකින් එල්ලා ඇත. බර W සහ අරය $\frac{a}{3}$ වූ ඒකාකාර ගෝලයක් දඬු සමඟ ස්පර්ශව සහ ඒවායින් ආධාර කරනු ලැබ ඇත. සමතුලිත පිහිටීමේ දී එක් එක් දණ්ඩ සිරස සමඟ සාදන θ කෝණය $\cot^3\theta + \cot\theta - 30 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. $\cot\theta$ සඳහා තිබිය හැකි එකම අගය සොයා ඒ නයින්, B අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව W බව පෙන්වන්න. (2009)

(42) එක එකක දිග 2a වූ AB, BC, CD හා DE ඒකාකාර දඬු හතරක් B,C හා D හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා DE දඬු එකක බර 2W ද BC හා CD දඬු එකක බර W ද වේ. එකම තිරස් මට්ටමක පිහිටි A හා E ලක්ෂ්‍යවලින් දඬු සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර AB හා BC දඬු සිරස සමඟ පිළිවෙලින් α හා β කෝණ සාදන සේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී. $\tan\beta = 4\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න. (2010)

(43) දිග a හා b වන තන්තු දෙකක් මගින් W භාරයක් එකම තිරස් මට්ටමක $\sqrt{a^2+b^2}$ දුරක පරතරයකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකින් එල්ලා ඇත. තන්තුවල ආතති $\frac{Wa}{\sqrt{a^2+b^2}}$ හා $\frac{Wb}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව පෙන්වන්න. (2011)

(44) A, B, C, D, E හා F යනු පැත්තක දිග මීටර 2a වන සවිධි ෂඩස්‍රයක වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ශීර්ෂ වේ. විශාලත්ව නිව්ටන P, 2P, 3P, 4P, 5P, L, M හා N වන බල පිළිවෙලින් AB, CA, FC, DF, ED, BC, FA හා FE දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශා අතට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, P ඇසුරෙන් L, M හා N සොයන්න. (2011)

(45) AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් දිගින් සමාන වේ. AB හි බර 2w වන අතර BC හි බර w වේ. දඬු B හි දී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A හා C සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටින සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයෙහි සිටුවා ඇත. $A\hat{B}C = 2\theta$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}w\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

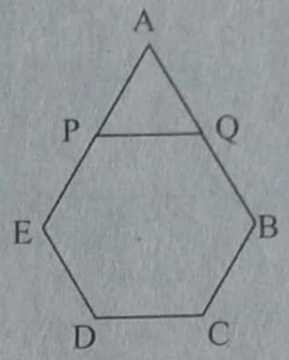
B හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා එය තිරස සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න. (2011)

(46) එක එකක බර W වන AB හා AC ඒකාකාර සමාන දඬු දෙකක් Aහි දී සුවල ලෙස සන්ධි කර ඇති අතර B හා C කෙළවරවල් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධකර ඇත. එක එකක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තල දෙකක් මත B හා C කෙළවරවල් පිහිටන සේ දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ තබා ඇත. BC තිරස් වන අතර BC ට ඉහළින් A වෙයි. B හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $\tan\theta > 2\tan\alpha$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{1}{2}$ W $(\tan\theta - 2\tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $B\hat{A}C = 2\theta$ වේ. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. (2012)

(47) එක එකක දිග 2a සහ බර W වූ AB,BC හා CA ඒකාකාර දඬු තුනක් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. A ශීර්ෂය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත්තේ ත්‍රිකෝණයට සිරස් තලයක නිදහසේ භ්‍රමණය වීමට හැකි වන පරිදි ය. ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි BC ට ලම්බව B හි දී යෙදූ P බලයකින් ත්‍රිකෝණය AB තිරස්වන හා AB ට පහළින් C තිබෙන පරිදි අල්ලා තබා ඇත. P හි අගය සොයන්න. C හිදී AC මගින් BC මත යෙදෙන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචකත් සොයන්න. (2013)

(48) එක එකක බර w බැගින් වූ ද, $AB = AD = l\sqrt{3}$ හා $BC = DC = l$ වූ ද, AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් ABCD රාමු සැකිල්ලක් සාදන පරිදි, ඒවායේ කෙළවරවල්වලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා C සන්ධි සම්බන්ධ කර ඇත. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් එල්ලනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිතව එල්ලෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{wl}{4}\left[5+\sqrt{3}\right]$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(49) AB, BC, CD, DE හා EA ඒකාකාර බර දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර රූපයේ දක්වෙන පරිදි ABCDE පංචාස්‍රයක හැඩයේ රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත. BC, CD හා DE දඬු එක එකක දිග l හා බර W වේ. AB හා EA දඬු එක එකක දිග $2l$ හා බර 2W වේ. දිග l වූ සැහැල්ලු PQ දණ්ඩක P හා Q දෙකෙළවර පිළිවෙළින් AE හා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. A සන්ධියෙන් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇති රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටයි.



B සන්ධියෙහි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක වන (X,Y) ද, PQ සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුම වන T ද නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. **ඒනයින්**, B සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, $T = \frac{7W}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

(2015)

අසමානතා හා මාපාංක ශ්‍රිත

(1) i) a සහ b යනු 1 ට වඩා විශාල නම්, එවිට $2(ab+1) > (a+1)(b+1)$ බව පෙන්වන්න.
c සහ d ද 1 ට වඩා විශාල නම්, එවිට $8(abcd+1) > (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ බව ඒනයින් පෙන්වන්න. (1986)

(2) i) ධන සංඛ්‍යා දෙකක සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය ඒවායේ ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යට වඩා විශාල හෝ සමාන වන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $n > r \geq 0$ නම්, $\frac{(n+1)}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$ බව සාධනය කරන්න. ඕනෑම $n \geq 1$ නිඛිලයක් සඳහා $(n+1)^n \geq 2^n n!$ බව අපෝහනය කරන්න. . (1989)

(3) $x-4 < x(x-4) < 5$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.
$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}n(e^x + e^{-x})$ යයි ගනිමු. මෙහි n (> 2) යනු නියතයකි. $t = e^x$ යැයි ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

අ) y හි අඩුතම අගය $\sqrt{n^2-1}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) $k > \sqrt{n^2-1}$ නම්, y = k සමීකරණයට t සඳහා තාත්ත්වික මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එම මූල සොයන්න.

ඉ) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ විට, ඉහත මූල දෙකෙන් වඩා විශාල මූලය $1+\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ බව පෙන්වා වඩා කුඩා මූලය ලියන්න. ඉහත දක්වූ අවස්ථාවෙහි දී y = k සමීකරණය සපුරාලන x හි තාත්තිවික අගයන් දෙක n (> 2) හි කවර අගයක් සඳහා වූව ද $\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$ සහ $\log_e(\sqrt{2}+1)$ අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

(1991)

(4) අ) x, y, ≠ 0 වන පරිදි වූ x, y, λ, μ තාත්ත්වික රාශි $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2, x+y=\lambda, \frac{y}{x}=\mu$ සම්බන්ධතා මඟින් සැබැඳේ. λ හා μ අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබා ගෙන μ තාත්ත්වික වන පරිදි වූ λ හි අගය කුලකය සොයන්න. ඒ නයින්, $\lambda, -3$ විට $\frac{x}{y}$ නිරණය කරන්න.

ආ) x, a ,b > 0, a > b සහ $x^2 > ab$ විට $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} > 0$ බව පෙන්වන්න.

ඇ) $|2x-1| < 3x+5$ වන පරිදි වූ x හි අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න.

(1992)

(5) a) $\frac{x^2+9x-20}{x^2-11x+30} \geq -1$ ද $x^2 - 11x + 30 \neq 0$ ද වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

b) a,b,c,p,q,r හි සියල්ලම ධන නම්, $\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right) \geq 9$ බව පෙන්වන්න.

(1993)

c) $|5-3x| \geq 2-3x$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

(6) a) $x^2 > |5x+6|$ වන පරිදි වූ x හි අගයන් සොයන්න.

b) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ හි සාධක සොයා ඒනයින්, ඕනෑම සෘණ නොවන x,y,z සඳහා $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ බව පෙන්වන්න.ධන p, q, r සඳහා

i) $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$

ii) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq \frac{9}{p+q+r}$ (iii) $\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(1994)

(7) x සහ k තාත්ත්වික නම්, සියලුම x සඳහා $0 \leq \frac{(x+k)^2}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}(k^2-k+1)$ බව පෙන්වා $\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ප්‍රකාශනය එහි කුඩාතම හා විශාලතම අගයන් ගන්නා x හි අගයන් ලබාගන්න.

(1994)

(8) i) $7-x \geq 2|x^2-4|$ තෘප්ත කරන්නා වූ x හි අගයන් සොයන්න.

ii) ඕනෑම ධන x සඳහා $x+\frac{1}{x} \geq 2$ බව පෙන්වන්න. a, b හා c යනු ධන සංඛ්‍යා වේ. ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කර ගනිමින් $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ බව පෙන්වන්න. a + b + c = 1 නම් 2 – a , 2 - b හා , 2 – c ධන බව පෙන්වා $\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c} \geq \frac{3}{5}$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) $2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 8y + 15 = 0$ නම්, $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ හා $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ අතර x පැවතිය නොහැකි බවද 1 හා 3 අතර y පැවතිය නොහැකි බව ද පෙන්වන්න. මෙහි x හා y තාත්වික වේ.

(1995)

(9) i) a, b, z, x සියල්ල ධන ද $z \geq x$ ද විට $x^2y = az + bz^3$ නම්, එවිට $y \geq 2\sqrt{ab}$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $|3x-4| > 2-5x$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(1996)

(10) i) $(\alpha)\, x^3+3x^2 < x+3$

$(\beta)\, |x+2|+|x-3| < 7$

ඉහත සඳහන් එක් එක් අසමානතාව සඳහා එය තෘප්ත කරන x හි අගයන් කුලකය සොයන්න.

ii) එකම රූ සටහනෙහි $y = x^2 - 4x + 3$ සහ $x^2 + y^2 = 4$ වක්‍රවල දළ රූ සටහන් ඇඳ $y \leq x^2-4x+3$ සහ $x^2+y^2 \leq 4$ අසමානතා දෙකම සපුරාලන පෙදෙස් අඳුරු කරන්න.

(1997)

(11) ආ) i) $\frac{x}{x-1} < \frac{x}{x-2}$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

ii) එකම රූප සටහනක $y = 3 - |x+2|$ සහ $y = |2x - 3x^2 + x^3|$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල කටු සටහන් අඳින්න. $3 - |x+2| \geq y \geq |2x - 3x^2 + x^3|$ අසමානතාවයන් තෘප්ත වන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

ආ) සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $x^2 + 2x + 3 > 0$ බව පෙන්වීමට "විසංවාදයක් මගින් සාධනය" භාවිත කරන්න. (1998)

(12) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| > 4$ අසමානතාව විසඳන්න. (1999)

(13) $y = 2|x+1| - 3$ සහ $y = x + 2|x-1|$ හි ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න.
ඒ නයින්, $x + 2|x-1| > 2|x+1| - 3$ සපුරාලනු ලබන x හි අගය කුලකය සොයන්න.
$x + 2|x-1| = 2|x+1| - 3$ සමීකරණය විසඳන්න. (2001)

(14) $|x+2| + |x-1| > 5$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න. (2003)

(15) $|x-1| - \left|\frac{1}{2}x + 1\right| < 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයයන්ගේ කුලකය සායන්න. විසඳුම් කුලකයේ වැඩිතම නිඛිලමය අගය අපෝහනය කරන්න. (2004)

(16) $y = |2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න. ඒ නයින්, $y = -|2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
$y = 4 - |2x - 8|$ හා $y = |2x - 10|$ හි ප්‍රස්තාරය **එකම රූප සටහනක** අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $|2x - 10| + |2x - 8| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලනු x හි තාත්ත්වික අගය කුලකය සොයන්න. (2011)

(17) a) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

i) $f(x)$ යන්න $(x - a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි. කලනය භාවිතයෙන් තොරව $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින්, $y = f(x)$ වක්‍රය

(α) $-1 < k < 2$ නම්, x – අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටන බව,

(β) $k = -1$ හෝ $k = 2$ හෝ නම්, x – අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව,

(γ) $k < -1$ හෝ $k > 2$ හෝ නම්, x – අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන බව පෙන්වන්න.

ii) $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න. (2012)

(18) $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදාගනිමින් $(x-1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $g(x)$ යන්න $(x-a)^2(x^2 + bx + c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a,b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි. x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \geq 0$ බව අපෝහනය කරන්න. (2012)

(19) එකම රූපයක $y = |2x - 1|$ හා $y = |x| + \frac{5}{3}$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින්, $3|x| \geq |6x - 3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

ඕනෑම $k \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය **එකම රූපයේ සලකමින්** l හි කවර අගයක් සඳහා $3|x| = |6x - 3| + l$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් එකක් පමණක් තිබේ දැයි සොයන්න. (2012)

(20) $\frac{2x+1}{3x-1} \geq 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න. (2013)

(21) $y = |3x - a|$ සහ $y = |bx - 2|$ හි ප්‍රස්තාර එකම දළ රූප සටහනක අඳින්න. මෙහි a හා b ධන සංඛ්‍යා වේ. $y = |3x - a| < y = |bx - 2|$ අසමානතාව සපුරාලන්නා වූ x හි සියලුම අගය කුලකය $\{x ; x > \frac{4}{3})$ නම් ප්‍රස්තාර උපයෝගී කර ගැනීමෙන් හා අන් ක්‍රමයකින් a හා b සොයන්න. (2014)

(22) ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයක් භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $|x + 1| > 3x + 7$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයයන් සොයන්න. (2014)

(23) $|x| < 2 - x^2$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න. (2015)

වර්ග සමීකරණ

(1) a, b, c තාත්ත්වික වූ $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය හැමවිට ම $f(x) \equiv a(x - \alpha)(x - \beta)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව සාධනය කරන්න. මෙහි α, β යනු එක්කෝ
i) දෙකම තාත්ත්වික, නැතිනම්
ii) දෙකම සංකීර්ණ සංඛ්‍යායි.
a යනු ධන නියතයක් යැයි සලකා ඉහත අවස්ථා දෙක විදහා පෑම සඳහා ප්‍රස්තාර අඳින්න. a යනු ඍණ නියතයක් වූ විට මේ ප්‍රස්තාර වල ඇති වන වෙනස කුමක් ද? $x = 5$ වන විට $f(x) > 0$ $x = q$ $(q > p)$ වන විට $f(x) < 0$ ද නම් $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව ද ඉන් එකම එකක් පමණක් p හා q ත් අතර පිහිටන බව ද ඉහත සැලකූ ප්‍රස්තාර මඟින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ පෙන්වන්න. $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ද $x^2 + b_2x + c_2 = 0$ ද සමීකරණ දෙකෙහි මූල පිළිවෙලින් α_1, β_1 ද α_2, β_2 ද වෙයි. $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$ නම්, $f(x) \equiv 2x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න. (1977)

(2) i) $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ ද $bx^2 + b^2x + 1 = 0$ ද යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් තිබෙයි නම්, ඒවායේ අනෙක් මූලවලින් $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණය සපිරෙන බව පෙන්වන්න.
ii) X තාත්ත්වික නම් $\frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ ප්‍රකාශනයට 1ත් 2ත් අතර තාත්ත්වික අගයන් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න. (1978)

(3) a, b, c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද $a \neq 0$ ද විට $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ වෙයි නම් p, q, r යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ $a[(x - p)^2 + q^2]$ හෝ $a[(x - p)^2 - r^2]$ හෝ ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. අවස්ථා දෙක අතර වෙනස පැහැදිලි කරන්න. $b^2 - 4ac = 0$ විට කිමෙක් වන්නේ ද?

$f_1(x) \equiv -x^2 + 2x + 3$ යන්න ඉහත ආකාර අතුරෙන් එකෙකින් ප්‍රකාශ කර එනයින් $y = f_1(x)$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. $f_1(x)$ හි විශාලතම අගය පැහැදිලි ලෙස රූපයේ පෙන්නුම් කරන්න.

i) $d > 5$ සඳහාත්

ii) $d < 5$ සඳහාත් $y = f_2(x) \equiv x^2 - 2x + d$ යන්නෙහි දළ ප්‍රස්තාර ඉහත කී රූපයේම අඳින්න.

$f_1(x) = f_2(x)$ වර්ගජ සමීකරණයට $d > 5$ විට තාත්වික මූල නැති බවත් $d < 5$ විට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බවත් අපෝහනය කරන්න. $d = 5$ විට කිමෙක් වන්නේද?

[$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය වනුයේ y – අක්ෂයට සමාන්තර අක්ෂයත් ඇති පරාවලයක් බව උපකල්පනය කිරීම මැනවි.] (1979)

(4) i) a, b, c යනු තාත්ත්වික නියත ද $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ ද $g(x) = 2(ax + b)$ ද නම්, $\boldsymbol{\lambda}$ යනු තාත්ත්වික නියතයක් වන $F(x) = f(x) + \boldsymbol{\lambda g(x)}$ වර්ගජ ප්‍රකාශනයේ විවේචකය ලියන්න. $f(x) = 0$ හි මූල තාත්ත්විකද ප්‍රභින්න ද නම්, $F(x) = 0$ හි මූලත් තාත්ත්වික ද ප්‍රභින්න ද බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $Y = x^2 - x - 2$ ද සහ $y = -2x + 1$ ද යන සමීකරණ ඇති වක්‍රයේත් සරල රේඛාවලත් දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. $x^2 - x - 2 = 0$ හි මූල අතර පිහිටියේ, $x^2 - x - 2 + (2x - 1) = 0$

$x^2 - x - 2 - (2x - 1) = 0$ යන වර්ගජ සමීකරණ එක එකෙහි මූලවලින් එකක් බැගින් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න. (1981)

(5) i) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ යනු a ද නියත වන, $x^2 + ax + b = 0$ වර්ගජ සමීකරණ මූල වේ. $S_0 = 2$ ද $S_n = \boldsymbol{\alpha^n + \beta^n}$ $n = 1, 2 \ldots\ldots$ ද නම්, $S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} = 0, n = 2,3\ldots\ldots$ බව පෙන්වන්න. මෙ නයින්, a ත් b ත් ඇසුරෙන් $\boldsymbol{\alpha^5 + \beta^5}$ ද $\frac{1}{\alpha^5}$ ත් $\frac{1}{\beta^5}$ ත් මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය ද සොයන්න.

ii) n (>2) යනු ඔත්තේ ධන නිබිලයක් නම්, $x^2 - 1$න් $x^n + 2$ බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $x + 2$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(6) වර්ගජ සමීකරණයක මූලවල ඓක්‍ය, සහ ගුණිතය සඳහා ප්‍රකාශන එහි සංගුණක ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $\boldsymbol{\alpha}$ සහ $\boldsymbol{\beta}$ යනු $x^2 + px + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම් $\boldsymbol{\alpha + \lambda}$ සහ $\boldsymbol{\beta + \lambda}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. මෙහි $\boldsymbol{\lambda}$ යනු නියතයක් වේ. තව ද $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ යනු $x^2 + qx + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්,

$\boldsymbol{(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = q^2 - p^2}$ බව සාධනය කරන්න. (1987)

(7) i) වර්ගජ සමීකරණයක මූලවල ඓක්‍ය සහ ගුණිතය සඳහා ප්‍රකාශන එහි සංගුණක ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $\boldsymbol{\alpha}$ සහ $\boldsymbol{\beta}$ යනු $(a + x)(b + x) - c(a + x) - d(b + x) = 0$ හි මූල නම්

$\boldsymbol{(\alpha - \beta)^2 = (a - b + c - d)^2 + 4cd}$ බව පෙන්වන්න. a, b, c, d තාත්ත්වික ද c, d දෙකම ධන හෝ දෙකම සෘණ ද නම් $\boldsymbol{\alpha}$සහ $\boldsymbol{\beta}$ තාත්වික බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $a > 0$ සහ $b^2 < 4ac$ නම් x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශන ධන බව පෙන්වන්න. $(x^2 - x - 2)(x^2 + x + 1)(x - 3)$ ප්‍රකාශනය ධන වන x හි අගය පරාසය සොයන්න. (1988)

(8) i) a, b, c නියත වන $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වන $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ඇසුරෙන් $acx^2 - b(c + a)x + (c + a)^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රකාශ

ii) $\boldsymbol{\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1}$ අසමානතාව සත්‍ය වන x හි අගය පරාසය සොයන්න. (1989)

(9) i) p සහ q යනු $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල වෙයි. මෙහි k නියතයකි.
අ) $(p-q)^2 = 4(k^2 - k - 2)$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින් මූල අතර අන්තරය 4 වූ ඉහත ආකාරයේ සමීකරණය ලියන්න.
ආ) $k \neq -2$ යැයි දී ඇති විට $\frac{p^2}{q}$ සහ $\frac{q^2}{p}$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න.
ii) $\frac{(x+2)(3x-1)}{4x^3-3x+1} > 0$ අසමානතාව සපුරාලන x හි අගයන් හි පරාසය සොයන්න.(1990)

(10) i) $t = x + \frac{1}{x}$ යයි ලියමින් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල සියල්ලම සොයන්න.
ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$ යයි ගනිමු. $y^2 + y + a$ ආකාරයෙන් E ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a නියතයක් ද y යන්න b හා c නියතයන් වන $x^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් ද වේ. එනයින් සියලුම තාත්ත්වික x සඳහා $E > 3$ බව පෙන්වන්න.
iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{x-2} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ වන සේ k නියතයක් සහ x හි ශ්‍රිතයක් වන f සොයන්න. $(x-1)$ හි බහුපදයක් ලෙස f(x) ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ හි භින්න භාග සොයන්න. (1992)

(11) $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූල α සහ β වේ. මෙහි b සහ c තාත්ත්විකය. α^3 සහ β^3 මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න. $b^3 - 6b + 9 = 0$ සහ $c = 2$ නම්, α සහ β තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න. එනයින් $y^3 - 6y + 9 = 0$ හි තාත්ත්වික මූලය සොයන්න. (1994)

(12) $(a + b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න. a හා b $(a \neq b)$ තාත්ත්වික නම් ඉහත සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් ඇති බව සාධනය කරන්න. $x^3 - 6x - 6 = 0$ සමීකරණය ඉහත ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර එයට ඇත්තේ තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් යැයි දී ඇත්නම් එම මූලය සොයන්න. (1995)

(13) i) a, b, c යනු $a \neq 0$ වන සේ වූ තාත්ත්වික නියත විට $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි α, β මූල තාත්ත්වික වීම සඳහා අවශ්‍යතාවක් සොයන්න. $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ සහ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ බව පෙන්වන්න.
තවද $(4\alpha - 3\beta)(4\beta - 3\alpha) = \frac{49ac - 12b^2}{a^2}$ බව ද පෙන්වා $12b^2 < 49ac < \frac{49}{4}b^2$ නම් $\frac{3\alpha}{4}$ සහ $\frac{4\alpha}{3}$ අතර β පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.
ii) p, q, r $(p \neq 0)$ යනු තාත්ත්වික නියත විට $px^4 + qx^3 + rx^2 - qx + p = 0$ සමීකරණය y හි වර්ගජ සමීකරණයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $y = x - \frac{1}{x}$ ඒනයින් ඉහත දක්වා ඇති x සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල තිබීම සඳහා p, q, r මඟින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතාවක් සොයන්න. (1996)

(14) α සහ β යනු $x^2+qx+1=0$ සමීකරණයෙහි මූල යැයිද γ සහ δ යනු $x^2+x+q=0$ සමීකරණයෙහි මූල යැයිද සිතමු.

$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)=(\gamma^2+q\gamma+1)(\delta^2 q\delta+)$ බව පෙන්වන්න. දී ඇති වර්ගජ සමීකරණ දෙකටම පොදු වූ තාත්ත්වික මූල අඩු වශයෙන් එකක්වත් තිබෙන පරිදි වූ q අගය සියල්ල නිර්ණය කරන්න. (1997)

(15) අ) α සහ β යනු $x^2-px+q=0$ සමීකරණයෙහි මූල වේ. $\alpha(\alpha+\beta)$ හා $\beta(\alpha+\beta)$ මූල වන සමීකරණ සොයන්න.

ආ) $f(x,y)=2x^2+\lambda xy+3y^2-5y-2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැකි වීම සඳහා λ හි අගයයන් සොයන්න.

ඇ) $\frac{2x^3-x+3}{x(x-1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. (2000)

(16) අ) α සහ β යනු $x^2+px+1=0$ සමීකරණයෙහි මූල සහ γ සහ δ යනු $x^2+\frac{1}{p}x+1=0$ සමීකරණයේ මූල යයි ද ගනිමු.

$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(a-\delta)(\beta-\delta)=(\gamma^2+p\gamma+1)(\delta^2+p\delta+1)$ බව පෙන්වා

$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\ (a-\delta)(\beta-\delta)=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

ආ) a සහ b යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම්, $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{1}{\log_2 2001}+\frac{1}{\log_3 2001}+\frac{1}{\log_4 2001}+\cdots+\frac{1}{\log_{100} 2001}=\frac{1}{\log_{100!} 2001}$ බව පෙන්වන්න.

(2001)

(17) $f(x)=x^2+2x+9$, $x\in\mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

i) α, β යනු $f(x)=0$ හි මූල නම් α^2-1 සහ β^2-1 මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ii) $f(x)=k$ සමීකරණයට x සඳහා හරියටම එක් තාත්ත්වික මූලයක් පවතින සේ වූ k තාත්ත්වික නියතයක අගය සොයන්න.

iii) $\frac{1}{f(x)}$ හි වැඩිතම අගය සොයා එය ලැබෙන්නා වූ x හි අගය ද දෙන්න.

iv) $f(x)=\lambda x$ සමීකරණයට x සඳහා තාත්ත්වික විසඳුමක් නොමැති වන සේ වූ λ තාත්ත්වික නියතයේ අගය කුලකය නිර්ණය කරන්න. (2002)

(18) $\lambda\in\mathbb{R}$ සහ $p(x)=(\lambda-2)x^2-3(\lambda+2)x+6\lambda$ යැයි ගනිමු.

i) සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා p (x) ධන වන සේ වූ λ හි අඩුතම නිඛිලමය අගය සොයන්න.

ii) $p(x)=0$ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල දෙකක් තිබෙන්නේ λ හි කවර අගයයන් සඳහාද?

iii) $p(x)=0$ හි මූල තාත්ත්වික ද එම මූල දෙකෙහි වෙනස 3 ට සමාන ද නම් λ සොයන්න. (2003)

(19) a) $\lambda\in\mathbb{R}$ හා $p(x)=x^2-2\lambda(x-1)-1$ යැයි ගනිමු. $p(x)=0$ හි මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. $p(x)=0$ හි මූලවල ඓක්‍යය එම මූලවල වර්ගයන්ගේ ඓක්‍යයට සමාන වන සේ වූ λ හි සියලු අගයන් සොයන්න. (2004)

(20) $f(x)=x^2+bx+c$ හා $g(x)=x^2+qx+r$ යැයි ගනිමු. මෙහි $b,c,q,r\in\mathbb{R}$ හා $c\neq r$ වේ. α, β යනු $g(x)=0$ හි මූල යැයි ගනිමු.

$f(\alpha)f(\beta)=(c-r)^2-(b-q)(cq-br)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $f(x) = 0$ ට හා $g(x) = 0$ ට පොදු මූලයක් ඇත්නම් එවිට $b - q$, $c - r$ හා $cq - br$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක පිහිටන බව සාධනය කරන්න. α, γ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම් β, γ වන වර්ගජ සමීකරණය

$x^2 - \frac{(c+r)(q-b)}{(c-r)}x + \frac{cr(q-b)^2}{(c-r)^2} = 0$ බව පෙන්වන්න. (2005)

(21) $px^2 + qx + r = 0$ වර්ගජ සමීකරණයට සමපාත මූල තිබීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න. මෙහි p, q සහ r තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. a, b හා c තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද a $(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$ යන වර්ගජ සමීකරණයට සමපාත මූල තිබෙයි නම් ද එවිට $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ බව පෙන්වන්න. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ ප්‍රකාශනයෙහි සාධක සොයන්න. (2006)

(22) a) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. α^3 හා β^3 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒනයින්, $\alpha^3 + \frac{1}{\beta^5}$ හා $\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

b) f (x) යනු මාත්‍රය 3 ට වැඩි x හි බහු පදයකි. පිළිවෙලින්, $(x-1)(x-2)$ හා $(x-3)$
යන්නෙන් f (x) බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ a, b හා c වේ. ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යෙදීමෙන් $(x-1)(x-2)(x-3)$ යන්නෙන් f (x) බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය
$\lambda\ (x-1,)(x-2) + \mu(x-1) + \upsilon$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ, μ හා υ යනු නියත වේ. a, b හා c ඇසුරෙන් λ, μ හා υ සොයන්න. (2007)

(23) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි $c \neq 0$ වේ. α^4 හා β^4 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින්, $\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1$ හා $\frac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. (2008)

(24) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි $c \neq 0$ වේ. $\alpha^3\beta^2$ හා $\alpha^2\beta^3$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින්, $\alpha^3\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3\beta^2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. (2009)

(25) a) α හා β යනු $f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි p හා q තාත්ත්වික වන අතර $2p^2 + q \neq 0$ වේ. $y(p - x) = p + x$ නම් x සඳහා f(x)= 0 හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ g (y) $\equiv (2p^2 + q)y^2 + 2(q - p^2)y + q = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $y \neq -1$ වේ. ඒ නයින්, g (y) = 0 සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න. p හා q ඇසුරෙන් $\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2$ ප්‍රකාශ කරන්න.

b) a, b, c හා m යනු $a + b + c = 0$ හා $ab + bc + ca + 3m = 0$ වන ආකාරයේ නියත නම්,
$(y + ax)(y + bx)(y + cx) = y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3$ බව සාධනය කරන්න.
$y = x^2 + m$ නම් $(x^2 + ax + m)(x^2 + bx + m)(x^2 + cx + m) = x^6 + abcx^3 + m^3$ බව පෙන්වන්න.

$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට $(x^2 - 2x + m)(x^2 + ax + m)$ හා $(x^2 + bx + m)$ යන සාධක තිබේ නම් m, a හා b හි අගයයන් සොයන්න. ඒ නයින්,

i) සියලු x සඳහා $g(x)$ සෘණ නොවන බව පෙන්වන්න.

ii) $g(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න. (2010)

(27) a) α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු. මෙහි a, b හා c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. α හා β දෙකම

i) $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික

ii) $b = 0$ හා $ac > 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. මූල α^2 හා β^2 වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. එක්කෝ α හා β දෙකම තාත්ත්වික නැත්නම් α හා β දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක ම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

b) $f(x) = x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ යැයි ගනිමු. මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x - a - b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න. ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ a හා b ප්‍රභින්න නම්, $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න. $x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනයකර එය සොයන්න. (2011)

(27) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද γ හා δ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු. මෙහි $b, c, m, n \in \mathbb{R}$ වේ.

i) b හා c ඇසුරෙන් $(\alpha - \beta)^2$ සොයා ඒනයින්, m හා n ඇසුරෙන් $(\gamma - \delta)^2$ ලියා දක්වන්න. $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම් $b^2 - 4c = m^2 - 4n$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) = (c - n)^2 + (b - m)(bn - cm)$ බව පෙන්වන්න.

$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c - n)^2 = (m - b)$ $(bn - cm)$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න. $x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත. මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගයන් සොයන්න. (2013)

(28) $a, b, c \in |R$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍ය $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda + 1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in |R$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයෙහි මූල γ හා δ යැයි ද $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එකම අනුපාතයට වන බව දී ඇත. මෙහි $k \in |R$ වේ. k හි අගය සොයන්න. (2014)

(29) a) x හි මාත්‍රය 4 වූ $F(x)$, $G(x)$ හා $H(x)$ යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) \equiv (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$. මෙහි α හා β තාත්වික නියත වේ;

$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$, $H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$

i) $F(x) = 0$ හා $G(x)$ යන දෙකටම එකම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.
ඒනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලුම මූල සොයන්න.

ii) $F(x) = H(x)$ වෙයි නම්, α හා β ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික **නොවන** බව පෙන්වන්න.

b) i) $f(x) \equiv 2x^4 + yx^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු. මෙහි γ හා δ තාත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

ii) සියලුම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න. (2015)