පටුන | පිටුව

සම්භාවිතාව

(1) මුහුණත්වල 1 සිට 6 තෙක් සංඛ්‍යා ලකුණු කළ නොනැඹුරු දාදු කැටයක් දෙවරක් උඩ විසි කර වැටෙන සංඛ්‍යා නිරීක්ෂනු ලැබෙයි. පළමු වැනි දෙවැනි විසි කිරීම්වල දී වැටෙන සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් a,b නම්, තිබිය හැකි සියලුම (a, b) පටිපාටිගත යුගල ලියා දක්වන්න. A, B යනු, $A = \{(a,b) | a + b$ එෙකාය 9 ට වැඩි$\}$ ද $B = \{(a , b) | ab$ ගුණිතය 4 හි ගුණාකාරයක්$\}$ ද මඟින් අර්ථ දැක්වෙන සිද්ධි නම්, A, B, $A \cup B, A \cap B, A - B$ යන සිද්ධිවල අවයව ලියා දක්වන්න. ඒවාට අනුරූප සම්භාවිතා සොයන්න.

i) $P(A \cap B) + P(A \sim B) = P(A)$ ද

ii) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ ද බව සත්‍යාපනය කරන්න.(1979 අතුරු)

(2) i) A, B යනු හැම අවයවයකටම එක ම සම්භාවිතාව ඇති S නියැදි අවකාශයක වූ සිද්ධි දෙකකි.

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ බව ද $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව ද සාධනය කරන්න. පන්තියක ශිෂ්‍යයෝ 10 ක් භෞතික විද්‍යාව උගනිති. 25 ක් ගණිතය උගනිති. ශිෂ්‍යයෝ 5 ක් භෞතික විද්‍යාවත් ගණිතයත් දෙකම උගන්නා අතර ශිෂ්‍යයෝ 10 ක් භෞතික විද්‍යාව හෝ ගණිතය හෝ ඉගෙන නොගනිති. පන්තියේ සිටින සිසුන් ගණන සොයන්න. සසම්භාවී ලෙස ශිෂ්‍යයකු තෝරාගතහොත් ඔහු,

අ) භෞතික විද්‍යාව ආ) ගණිතය ඉ) භෞතික විද්‍යාවත් ගණිතයත් යන දෙකම උගන්නා අයකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. ඒ නයින්, ඉහතින් සඳහන් කළ සූත්‍ර දෙක භාවිත කරමින් තෝරාගත් ශිෂ්‍යයා

α) භෞතික විද්‍යාව උගන්නා නමුත් ගණිතය ඉගෙන නොගන්නා,

β) ගණිතය උගන්නා නමුත් භෞතික විද්‍යාව ඉගෙන නොගන්නා,

γ) විෂයය දෙකෙන් අඩු වශයෙන් එකක් වත් ඉගෙන ගන්නා අයකු වීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

ii) දෝෂ සහිත විදුලි බුබුළු 4 ක් ඇතුළත් විදුලි බුබුළු 10 ක තොගයකින් විදුලි බුබුළු දෙකක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගනු ලැබෙයි.

අ) විදුලි බුබුළු දෙකම දෝෂ සහිත වීමේ,

ආ) විදුලි බුබුළු දෙකෙන් එකක් වත් දෝෂ සහිත නොවීමේ,

ඉ) අඩු වශයෙන් එක විදුලි බුබුළක් වත් දෝෂ සහිත වීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න. (1980)

i) පරිමිත S නියැදි අවකාශයෙක සමාන භව්‍යතාවෙකින් යුත් සුගම (සරල) සිද්ධි හරියටම n ගණනක් ඇතුළත් වෙයි. E යනු S හි වූ ද සුගම සිද්ධි n_0 පමණක් ඇත්තා වූ ද යම්කිසි සිද්ධියක් නම්, E සිද්ධියේ P(E) සම්භාවිතාව $P(E) = \frac{n_0}{n}$ ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබෙයි. A, B, C යනු S හි වූ ඕනෑම සිද්ධි තුනක් නම්, ඉහත සඳහන් අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ බව පෙන්වන්න. කිසියම් නගරයක X, Y, Z පුවත්පත් තුනක් පළ කෙරෙයි. මෙම නගරයේ ජනගහනයෙන් 60% ක් X කියවති. ජනගහනයෙන් 44% ක් Y ද 34% ක් Z ද 21% ක් X, Y දෙකම ද 13% ක් Y,Z දෙකම ද 19% ක් Z, X දෙකම ද 10% ක් පුවත්පත් තුනම ද කියවති. මෙම නගරයේ වැසියන්ගෙන් අයකු අහඹු (සසම්භාවී) ලෙස තෝරාගත්තොත් ඔහු මේ පුවත්පත් අතුරෙන් අඩු වශයෙන් එකක්වත් කියවන තැනැත්තක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1981)

(4) භාජනයක සුදු බෝල w ද රතු බෝල r ද ඇත. බෝලයත් භාජනයත් සසම්භාවී ලෙස ගනු ලැබේ. මෙම බෝලය සුදු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. භාජනයක සුදු බෝල w_1 ද රතු බෝල r_1 ද ඇත. දෙවැනි භාජනයක සුදු බෝල w_2 ද රතු බෝල r_2 ද ඇත. පළමු භාජනයෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ගෙන දෙවන භාජනයට දමනු ලැබේ. දැන් දෙවන භාජනයෙන් බෝලයක් සසම්භාවී ලෙස ගන්නේ නම් එම බෝලය සුදු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව $\dfrac{w_1+w_2(w_1+r_1)}{(w_1+r_1)(w_2+r_2+1)}$ බව පෙන්වන්න. (1983)

(5) A සහ B එකිනෙකා සමඟ වාර තුනකින් යුතු චෙස් තරඟ පෙලක් ක්‍රීඩා කරති. A තරඟ වාරයක් ජය ගැනීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{2}$ වන අතර B සඳහා එය $\frac{1}{3}$ ක් වේ. ජය පරාජයකින් තොරව (A සහ B දෙදෙනාගෙන් කිසිවෙක් ජය නොගැනීමෙන්) තරඟ වාරයක් අවසන් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
i) තරඟ වාර සියල්ලම A ජය ගැනීමේ,
ii) තරඟ වාර දෙකක් ජය පරාජයකින් තොරව අවසන් වීමේ,
iii) A සහ B මාරුවෙන් මාරුවට ජය ගැනීමේ,
iv) B අඩු වශයෙන් එක් තරඟ වාරයක්වත් ජය ගැනීමේ, සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.
X මගින් B ජයගත් තරඟ වාර සංඛ්‍යාව දක්වයි නම්, X හි මධ්‍යනය සහ විචලතාව සොයන්න. (1984)

(6) එක්තරා අභ්‍යාවකාශ ධාවන සමාගමක් නගර දෙකක් අතර එන්ජින් හතරේ සහ එන්ජින් දෙකේ ගුවන් යානා ධාවනය කරවනු ලැබේ. ගුවන් යානාවල එකම වර්ගයකට අයත් එන්ජින් සවිකර ඇත. ගුවන් ගමන් වල දී එන්ජින් ස්වායත්ත ලෙස ක්‍රියාකරනු ලබන අතර ගුවන් ගමනක් තුල දී එන්ජිමක් ආපදාවකට ලක්වීමේ සම්භාවිතාව θ වේ. මෙහි $0 < \theta < 1$ වේ. එන්ජින් සංඛ්‍යාවෙන් අඩු වශයෙන් අඩක්වත් ක්‍රියා කරවමින් ගුවන් යානයකට ආරක්ෂිත ලෙස ගුවන් ගමනක් සම්පූර්ණ කළ හැක.
i) එන්ජින් හතරේ ගුවන් යානයක් සඳහා,
ii) එන්ජින් දෙකේ ගුවන් යානයක් සඳහා, ගුවන් ගමනක දී ස්වකීය ගමනාන්තය දක්වා ගුවන් යානයකට පැමිණීමට නොහැකි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. θ හි කවර අගයන් සඳහා එන්ජින් දෙකේ ගුවන් යානයකට වඩා එන්ජින් හතරේ ගුවන් යානයක් ආරක්ෂිත ද? (1985)

(7) S නැමැති පරිමිත නියැදි අවකාශය හරියටම සමන්විතව ඇත්තේ සමානව සිදුවිය හැකි මූලික සිද්ධි n වලින් වේ. මූලික සිද්ධි n' ක් අඩංගු සිද්ධියක් E වලින් හැඳින්වේ. $P(E) = \frac{n'}{n}$ මගින් E සිද්ධියේ P(E) සම්භාවිතාව අර්ථ දක්වනු ලැබේ. මෙම අර්ථ දැක්වීම භාවිතා කර හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ S හි ඕනෑම A සහ B සිද්ධි දෙකක් සඳහා,
i) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$
ii) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ බව සාධනය කරන්න.
පුද්ගලයින් 40 කින් යුක්ත සමූහයක වයස වර්ෂ 35 කට අඩු ඉංජිනේරුවන් 20 ක් ද වර්ෂ 35 කට වැඩි ඉංජිනේරුවන් 10 ක් ද වර්ෂ 35 කට අඩු ඉංජිනේරු නොවන අය 4 ක් ද වර්ෂ 35 කට වැඩි ඉංජිනේරුවන් නොවන අය 6 ක් ද ඇත. මෙම සමූහයෙන් යම් කෙනෙක්ව සසම්භාවීම තෝරනු ලැබේ. ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතා කර තෝරාගත් කෙනා
i) වර්ෂ 35 කට අඩු ඉංජිනේරුවෙක්,
ii) වර්ෂ 35 කට වැඩි හෝ ඉංජිනේරුවෙක්, හෝ වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. වෙන ඕනෑම ක්‍රමයක් යොදා ඔබේ ප්‍රතිඵල සත්‍යාපනය කරන්න. (1986)

(8) A සහ B තරඟකරුවන් දෙදෙනෙක් චෙස් ක්‍රීඩාවේ යෙදෙන විට A දිනීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ බව ද B දිනීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{2}$ බව ද දනී. ක්‍රීඩා වාරයක් ජය පරාජයකින් තොරව අවසන් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. වාර තුනක් ක්‍රීඩා කිරීමට ඔවුන් එකඟ විය.

i) ක්‍රීඩා වාර සියල්ලම B දිනීමේ,

ii) ක්‍රීඩා වාර දෙකක් ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් වීමේ,

iii) A සහ B මාරුවෙන් මාරුවට දිනීමේ,

iv) A අඩු වශයෙන් එක් ක්‍රීඩා වාරයක් දිනීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න. (1988)

(9) ස්ත්‍රී පුරුෂ ව්‍යාප්තිය සම ලෙස සම්භාව්‍යයි උපකල්පනය කරමින් ළමයි 4 ක් සිටින පවුලක

ඇ) හරියටම ගැහැණු ළමයි දෙදෙනෙකු,

ආ) අඩු වශයෙන් එක් ගැහැණු ළමයකු සිටීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න. එක්තරා ගමක එක එක ළමයි 4 ක් සිටින පවුල් 64 ක් ඇත. මෙම 64 න් එකක

ඇ) හරියටම ගැහැණු ළමයි දෙදෙනෙකු,

ආ) අඩු වශයෙන් එක් ගැහැණු ළමයකු, සිටින පවුල් r සංඛ්‍යාවක් තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1989)

(10) ඇ) සාධාරණ (නොනැඹුරු) කාසි 3 ක් අනුයාත ලෙස උඩ දමනු ලැබේ. A, B සහ C සිද්ධීන් පහත දැක්වෙන ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත. A = {පළමුවැනි කාසිය හිස වීම} B = {හරියටම හිසවල් දෙකක් ලැබීම} C = {හිසවල් දෙකකට වඩා නොලැබීම} X සිද්ධියෙහි දී සම්භාවිතාව p(X) වලින් දක්වයි නම්,

i) P(A) ii) P(B) iii) P(C) iv) $P(A \cup B)$ සොයන්න.

ආ) 1සිට 16 දක්වා ඇති නිඛිල ඒකක එක බැගින් කාඩ්පත් වල ලියා ඇත. සසම්භාවී ලෙස කාඩ්පත් දෙකක් තෝරාගනු ලැබේ. ඒවායේ ඇති නිඛිලවල ඓක්‍ය 12 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1990)

(11) A, B ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙක් ටෙනිස් තරඟයක යෙදේ. ඔවුන් අතරෙන් ක්‍රීඩා වාර (Sets) දෙකක් දිනන තෙක් තරඟය පැවැත් වේ. ඕනෑම ක්‍රීඩා වාරයක් A දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.40 වේ.

ඇ) i) A තරඟය දිනීමේ,

ii) අනුගාමී ක්‍රීඩා වාර දෙකකින් B පරාජය කිරීමෙන් A තරඟය දිනීමේ, සම්භාවිතාවන් සොයන්න. (1992)

(12) A සහ B සිද්ධීන් දෙකක් ස්වායක්ත යැයි කියනු ලබන්නේ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ම නම් පමණක් වේ. A සහ B යනු ස්වායක්ත සිද්ධි දෙකක් නම් ඒවායේ අනුපූරක සිද්ධීන් ද එකිනෙකට ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. [$(A \cup B)' = A' \cap B'$ බව උපකල්පනය කළ හැකිය. මෙහි (') යන්නෙන් අනුපූරක සිද්ධිය හැඳින් වේ.] කිසියම් ආකාරයක ඕනෑම තරඟ වාරයක් A ක්‍රීඩකයා විසින් දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.70 කි. තරඟ වාර තුනකින් යුත් එවැනි ක්‍රීඩාවකට A ඉදිරිපත් වෙයි. යටත් පිරිසෙයින් ක්‍රීඩාවේ එක තරඟ වාරයක්වත් A විසින් දිනා ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.(1993)

(13) A සහ B යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයක නියැදි අවකාශයක් හා ආශ්‍රිත සිද්ධි අවකාශයට අයත් ඕනෑම සිද්ධි දෙකකි. සුපුරුදු අංකනයෙන්
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ බව පෙන්වන්න. ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වන තෙක්, නිර්දෝශ කාසියක් විසි කරනු ලැබේ. පරික්ෂණයේ නියැදි අවකාශය ලියන්න. එක් එක් අවස්ථාව සඳහා,
i) r වැනි විසිකිරීමේ දී
ii) ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් සහිත විසිකිරීමක දී
iii) 3 න් බෙදෙන විසිකිරීමක දී ප්‍රථම වරට හිස දර්ශනය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1994)

(14) එක්තරා නගරයක A,B,C නම් ප්‍රවෘත්ති පත්‍ර තුනක් ප්‍රසිද්ධ කරනු ලැබේ. වැසියන්ගෙන් 20% ක් A ද 16% ක් B ද 14% ක් C ද 8% ක් A සහ Bද 6% ක් A සහ C ද 4% ක් B සහ C ද 2% ක් පත්‍ර තුනම ද කියවන බව සමීක්ෂණයකින් නිමාණය වේ. සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් කෙනෙකු
a) එකම පත්‍රයක් වත් නොකියවීමේ,
b) C නොකියවීමේ,
c) A කියවන නමුත් B නොකියවීමේ,
d) අඩු වශයෙන් පත්‍ර දෙකක්වත් කියවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1995)

(15) A සහ B සිද්ධීන් දෙක $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ වන පරිදි වේ නම් A සහ B ස්වායත්ත සිද්ධීන් යැයි කියනු ලැබේ. C සහ D ස්වායත්ත සිද්ධීන් ස්වායත්ත සිද්ධීන් දෙකක් යැයි සිතමු. C' සහ D' යනු පිළිවෙලින් C හි සහ D හි අනුපූරක සිද්ධීන් වේ.
a) C සහ D' ස්වායත්ත සිද්ධීන් බව ද
b) C' සහ D' ස්වායත්ත සිද්ධීන් බව ද පෙන්වන්න.
මිනිසකු සහ ඔහුගේ භාර්යාව ඔවුන්ගේ විවාහයෙන් පසු අඩු වශයෙන් වර්ෂ 25 ක් ජීවත් වීමේ සම්භාවිතාවය පිළිවෙලින් 0.70 සහ 0.80 වේ. වර්ෂ 25 කින්,
i) දෙදෙනාම ජීවත් ව සිටීමේ,
ii) එක්කෙනෙක් ජීවත් ව නොසිටීමේ,
iii) අඩු වශයෙන් එක්කෙනෙකුවත් ජීවත් ව සිටීමේ,
iv) හරියටම එක් අයෙකු ජීවත්ව සිටීමේ, සම්භාවිතාවය සොයන්න. (1996)

(16) S නම් පරිමිත නියැදි අවකාශයෙහි එක හා සමානව සිදුවිය හැකි සුමග සිද්ධි හරියටම n තිබෙයි. සුමට සිද්ධි p ඇතුළත් වන්නා වූත් S ට අයත් වන්නා වූත් ඕනෑම සිද්ධියක් E යැයි සිතන්න. E සිද්ධියේ සම්භාවිතාව වන P(E) අර්ථ දක්වන්න. S ට ඇතුළත් A හා B නම් ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයට අනුව,
i) $P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$ බවත්,
ii) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ බවත්, සාධනය කරන්න.
අ) $2p, p^2$ හා $4p-1$ සංසටිත සම්භාවිතා සහිත නියැදි ලක්ෂ්‍ය තුනකින් සමන්විත ව නියැදි අවකාශයක් පිහිටයි. පිළිගත හැකි p හි අගය සොයන්න.
ආ) පුද්ගලයින් 50 දෙනෙකුගේ කණ්ඩායමක 30 දෙනෙකු වයස අවුරුදු 35 ට අඩු වෛද්‍යවරුය. 10 දෙනෙකු වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි වෛද්‍යවරුය. 4 දෙනෙකු වයස අවුරුදු 35 ට අඩු වෛද්‍යවරු නොවන අය වේ. 6 දෙනෙකු වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි වෛද්‍යවරු නොවන අය වේ. මෙම කණ්ඩායමේ වෛද්‍යවරුන්ගෙන් සෑදී කුලකය A ලෙසත් වයස අවුරුදු 35 ට වැඩි පුද්ගලයින්ගෙන් සෑදි කුලකය B ලෙසත් දක්වේ යැයි සිතමු. අර්ථ දක්වීම භාවිත කොට ගෙන P(A), P(B) හා $P(A\cap B)$ සොයන්න. $P(A\cup B)$ හි අගය අපෝහනය කොට ඔබේ ප්‍රතිඵලය වචනවලින් ලියා දක්වන්න. (1997)

(17) අ) A සහ B යනු අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාරව විය හැකි සිද්ධි දෙකක් නම්, ඒවා ස්වායත්ත විය හැකි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

ආ) A,B හා C යනු S නියැදි අවකාශයේ වූ සිද්ධි තුනක් යැයි සිතමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

i) $\mathbf{P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1}$ බවත්,

ii) P (A\C) ≥P (B\C) ද P (A\C') ≥ P (B\C') ද නම් P(A) ≥ $\mathbf{P(B)}$ බවත්,

සාධනය කරන්න.

ඇ) පෙට්ටියක නිල් වීදුරු බෝල 3 ක් සහ රතු වීදුරු බෝල 2 ක් ද තවත් පෙට්ටියක නිල් වීදුරු බෝල 2 ක් සහ රතු වීදුරු බෝල 5 ක් ද තිබෙයි. මේ පෙට්ටි අතුරෙන් එක් පෙට්ටියකින් සසම්භාවී ලෙස ගත් බෝලය නිල් වීදුරු බෝලයක් විය. එය පළමුවැනි පෙට්ටියෙන් ලැබුණු බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව කීය ද? (1998)

(18) අ) S සර්වත්‍ර කුලකයෙහි A සහ B උපකුලක ලෙස ගනිමු. ඔබ භාවිත කරන කුලක වීජයේ නියම ප්‍රකාශ කරමින් (a – B) ∪ (B – A) = (A∪B) – (A∩B) බව සාධනය කරන්න.

f(n) = (n – 1) (n – 2) + 2 මගින් $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ අර්ථ දැක්වේ යැයි ද, $X \subseteq \mathbb{Z}^+$ සඳහා

f(X) = {f(x)/ x ∈ X} යැයි ද ගනිමු

A = {1, 3, 5} සහ B = {2, 4, 5} නම් f(A∪B) = f(A) ∪ f(B) සහ f(A∩B) ≠ f(A) ∩ f(B) බව පෙන්වන්න.

ආ) A, B, C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයේ උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ උපයෝගී කර ගන්නා වූ කුලක වීජයේ නියම සඳහන් කරමින්, සුපුරුදු අංකනයෙන් A–(B–C) = (A∪B) ∪ (A∩C) බව සාධනය කරන්න. (1998)

(19) $P(A_i \backslash D)$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව දෙන්නා වූ බේස් ප්‍රමේයයේ සරල ආකාරය ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි i = 1, 2, 3 සඳහා A_i යනු එක්තරා පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශය මේලය වශයෙන් ඇති අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි තුනක් බවත් D යනු P(D) > 0 වන සේ ඇති S හි අභිමත සිද්ධියක් බවත් දී ඇත. [සූත්‍රය සාධනය අපේක්ෂා නොකෙරේ.]

කර්මාන්තශාලාවක් මගින් A_1, A_2, A_3 යන්ත්‍ර තුනක් යොදා ගනිමින් සමාන භාණ්ඩ නිෂ්පාදනය කරනු ලැබේ. එම යන්ත්‍ර තුනෙන් දිනකට නිපදවන ඒකක ගණන පිළිවෙලින් 200, 175 සහ 125 වේ. දීර්ඝ කාලයක් තුළ සොයා ගෙන ඇති පරිදි නිෂ්පාදනයෙහි දෝෂ සහිත ප්‍රතිශතය A_1, A_2 සහ A_3 යන්ත්‍ර සඳහා පිළිවෙලින් 4%, 4% සහ 6% වේ.

අ) කර්මාන්තශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් ඒකකයක් සසම්භාවී ව තෝරා ගත් විට එය සදොස් එකක් වීමේ සම්භාවිතාව 0.045 බව පෙන්වන්න.

ආ) කර්මාන්තශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් සසම්භාවී ව තෝරාගත් ඒකකයක් සදොස් එකක් බව සොයා ගත්තේ නම්, එය A_1 යන්ත්‍රයෙන් නිපදවා තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. එය නිපදවීමට වඩාත්ම ඉඩ ඇත්තේ කුමන යන්ත්‍රයෙන් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

ඇ) වෙනස් දින තුනක දී එක් එක් දවසේ කර්මාන්ත ශාලාවේ නිෂ්පාදනයෙන් ඒකකයක් බැගින් සසම්භාවී ව තෝරාගනු ලැබේ. ඒවායින් හරියටම එකක් සදොස් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ඈ) එක්තරා දිනක දී එක් එක් යන්ත්‍රයේ නිෂ්පාදනයෙන් එක ඒකකයක් බැගින් සසම්භාවී ව තෝරාගනු ලැබේ නම් ඒවායින් හරියටම එකක් සදොස් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1999)

(20) අ) A සහ B යනු $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$ සහ $P(A) = (A|B') = \frac{5}{12}$ වන පරිදි වූ සසම්භාවී සිද්ධි දෙකකි. මෙහි B' යනු B හි අනුපූරක සිද්ධියයි.
i) P (B\A) ii) P(B), iii) P(A\B) සහ iv) $P(A\cup B)$ යන මේවා සොයන්න.
A සහ B සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ ද? ඒවා ස්වායත්ත වේ ද? එක් එක් අවස්ථාවේ දී ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
ආ) "පිරිමි ළමයකුගේ ඉපදීම" සහ "ගැහැනු ළමයකුගේ ඉපදීම" සමසේ විය හැකි සහ ස්වායත්ත සිද්ධි ලෙස උපකල්පනය කෙරේ. ළමයින් දෙදෙනෙකු සිටිනා පවුලකින් එක් ළමයෙක් පිරිමි ළමයෙක් බව දී ඇත. අනික් ළමයා
i) පිරිමි ළමයකු ම වීමේ, ii) ගැහැනු ළමයකු වීමේ,
සම්භාවිතාව සොයන්න. (2000)

(21) අ) A සහ B සසම්භාවී සිද්ධි දෙකක් සම්බන්ධයෙන් $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$ සහ $P(A|B)$ සම්භාවිතා අර්ථ දක්වන්න. A, B සසම්භාවී සිද්ධි දෙකෙහි සම්භාවිතා $P(A) = 0.6$ සහ $P(B) = 0.2$ වන අතර $P(A|B) = 0.1$ වෙයි. A සහ B සිද්ධි සඳහා පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා ගණනය කරන්න.
i) සිද්ධි දෙකම සිදුවීම
ii) හරියටම එක් සිද්ධියක් පමණක් සිදුවීම සහ
iii) සිද්ධි එකක්වත් සිදු නොවීම.
ආ) කාසි තුනකින් එකක් එක් වරක් උඩ දැමූ විට ශීර්ෂය ලැබීමේ සම්භාවිතාව p වන පරිදි නැඹුරුය; අනික් දෙක නොනැඹුරුය. කාසි තුනෙන් එකක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගෙන එය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබිය හැකි ප්‍රතිදාන පෙන්වීමට රුක් සටහනක් අඳින්න. වාර දෙකේ දීම ශීර්ෂ ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{17}{54}$ වෙයි නම්, p හි අගය සොයන්න. p හි මෙම අගය සඳහා වාර දෙකේ දීම ඇත්ත වශයෙන්ම ශීර්ෂ ලැබුණු බව දී ඇත්නම් තෝරාගන්නා ලද කාසිය නැඹුරු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (2001)

(22) A සහ B සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත නම්, A', B සහ A', B' සිද්ධීන් යුගල ද ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. මෙහි (') යන්නෙන් අනුපූරකය දැක්වේ.
a) එකිනෙකට ස්වායත්තව ක්‍රියා කෙරෙන එන්ජිම් දෙකක් කුඩා ගුවන්යානාවකට සවිකොට ඇත. සාර්ථක ගුවන් ගමනක් සඳහා අඩුවශයෙන් එක් එන්ජිමක් වත් ගමන මුළුල්ලේම ක්‍රියා කළ යුතු ය. එක් එක් එන්ජිමක් සඳහා **එන්ජිම අක්‍රිය වීමේ සම්භාවිතාව** p නම් එන්ජිම අක්‍රිය වීම පමණක් සලකා සාර්ථක ගුවන් ගමනක් සඳහා සම්භාවිතාව p ඇසුරෙන් ලබාගන්න. නිරුපද්‍රිත ගුවන් ගමනක් සඳහා සම්භාවිතාව 0. 999 999 ට වඩා වීම පිණිස p ට ගතහැකි වැඩිතම අගය කුමක් ද?
b) A, B, C (ආවේණික) ලක්ෂණ තුන වැඩිහිටි පිරිමින්ගේත් වැඩිහිටි ගැහැනුන්ගේත් ජානවල තිබිය හැකි නමුත් ඕනෑම එක් පුද්ගලයෙකුට තිබිය හැක්කේ එක් ලක්ෂණයක් පමණකි. අහඹු ලෙස තෝරාගනු ලැබූ වැඩිහිටියෙකුට A, B, C ලක්ෂණ පැවතීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙලින් $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ වේ. තව ද ඉහත ජාන ලක්ෂණ සහිත දෙමව්පියන්ගේ දරුවකුගේ ඇස්වල පාට එක්කෝ දුඹුරු හෝ නැතහොත් කළු හෝ වේ. ඇස්වලට වෙනත් පාටක් ගත නොහැකි ය. දෙන ලද දෙමාපිය යුවලකගේ දරුවකුගේ ඇස්වල පාට **දුඹුරු** වීමේ අනුරූප සම්භාවිතා වගුවෙහි දැක්වේ.

පියා \ මව	A	B	C
A	0	0	0
B	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
C	0	$\frac{1}{2}$	1

දෙමාපියන් අතර A, B, C ලක්ෂණ තිබීම ස්වායත්තව සිදුවන්නේ යැයි ද සුපුරුදු අංකනයෙන් $P(X) = \sum_i P(X|Y_i)P(Y_i)$ යැයි ද උපකල්පනය කිරීමෙන් අහඹු ලෙස තෝරාගනු ලැබූ දරුවකුගේ ඇස්වල පාට දුඹුරු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. තව ද A ලක්ෂණය සහිත වැඩිහිටියෙකුගේ ඇස්වල පාට කළු පමණක් බව ද C ලක්ෂණය සහිත එවැන්නකුගේ ඇස්වල පාට දුඹුරු පමණක් බව ද ද B ලක්ෂණය සහිත වැඩිහිටියෙකුගේ ඇස්වල පාට කළු හෝ දුඹුරු හෝ වීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙලින් $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ බව ද දන්නා ලද කරුණකි. දෙදෙනාගේම ඇස්වල පාට කළු වූ දෙමව්පියන් ඇති දරුවකුගේ ඇස් දුඹුරු පාට වීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න. (2002)

(23) a) A සහ B යනු සසම්භාවී සිද්ධීන් දෙකක් නම්, A සහ B හි ස්වායත්තතාව අර්ථ දක්වන්න. A, B හා $A \cap B$ සිද්ධීන්වල සම්භාවිතා ඇසුරෙන් සම්මත අංකනයට අනුව $P(A \cup B)$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් දෙන්න. X සසම්භාවී විචල්‍යය සමාන සම්භාවිතාව සහිතව 0 හා 1 අගයයන් පමණක් ගනී. Y යනු සමාන සම්භාවිතාව සහිතව 0 හා 1 අගයයන් පමණක් ගන්නා තවත් සසම්භාවී විචල්‍යයකි. A සහ B යන සසම්භාවී සිද්ධීන් දෙක පහත සඳහන් පරිදි අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු. $A : X = 0$ හා $\bar{A} : X = 1$ සහ $B : Y = 0$ හා $\bar{B} : Y = 1$. $U = X + Y$ යැයි ගනිමු. U විසින් 0, 1, 2 අගයන් ගන්නා බව පෙන්වා $U = 0, 1, 2$ සිද්ධීන් $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. A සහ B ස්වායත්ත ලෙස ගනිමින්,

i) $P(U = r)$; $r = 0,1,2$ සොයන්න.

ii) $V = XY$ නම්, V හි අනුරූප සම්භාවිතා සොයන්න.

b) X නමැති යම් රෝගයක් සඳහා A සහ B රෝග ලක්ෂණවලින් එකක් පමණක් පවතී. සම්මත අංකනයට අනුව $P\left(\frac{X}{A}\right) = 0.2$ හා $P\left(\frac{X}{B}\right) = 0.8$ බව දනී. එක්තරා සංගහනයක 40% ක් සඳහා A රෝග ලක්ෂණයද ඉතිරි 60% ක් සඳහා B රෝග ලක්ෂණයද පවතී. සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් පුද්ගලයෙකුට X රෝගය තිබීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න. තව ද රෝගියෙකු X රෝගයෙන් පෙළෙන බව දී ඇත්නම් ඔහු B රෝග ලක්ෂණය පෙනුනම් කිරීමේ සම්භාවිතාව $\frac{6}{7}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න. X රෝගය තිබීමෙන් B රෝග ලක්ෂණය පෙන්වීමේ සම්භාවිතාව අඩු වී ඇත් ද? නැතහොත් වැඩි වී ඇත් ද? හේතු දක්වන්න. (2003)

(24) a) සසම්භාවී ලෙස තෝරාගන්නා ලද අයිතමයක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව P_1 වේ. දෝෂ සහිත අයිතමයක දෝෂයක් ඇති බව අනාවරණය කර ගැනීමේ සම්භාවිතාව P_2 වේ. සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගන්නා ලද අයිතමයක දෝෂයක් ඇති බව අනාවරණය කර ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (හොඳ අයිතමයක දෝෂයක් අනාවරණය කර ගැනීමේ සම්භාවිතාව 0 බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැකිය.) එවැනි අයිතම තුනක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගන්නා ලද්දේ යැයි සිතමු.

i) අයිතම තුන අතරේ දෝෂ කිසවක් අනාවරණය නොවීමේ,

ii) අයිතම දෙකක දෝෂයන් අනාවරණය කර ගැනීමේ,

iii) අඩු වශයෙන් අයිතම දෙකකවත් දෝෂයන් අනාවරණය කර ගැනීමේ, සම්භාවිතාව නිර්ණය කරන්න.

b) X හා Y අනාවැකි පළකරන්නන් දෙදෙනෙක් එකිනෙකට ස්වායත්ත ලෙස කාලගුණය පුරෝකථනය කරති. X අනාවැකි පළකරන්නා කාලගුණය නිවැරදි ලෙස පුරෝකථනය කිරීමේ සම්භාවිතාව α ද Y අනාවැකි පළකරන්නා කාලගුණය නිවැරදි ලෙස පුරෝකථනය කිරීමේ සම්භාවිතාව β ද වෙයි. දෙන ලද දවසක් සඳහා X අනාවැකි පළකරන්නා යහපත් කාලගුණයක් පුරෝකථනය කළ අතර Y අනාවැකි පළකරන්නා අයහපත් කාලගුණයක් පුරෝකථනය කළේ ය. X අනාවැකි පළකරන්නා නිවැරදි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (2004)

(25) එක්තරා රියදුරෙකු ඔහුගේ මෝටර් රථය නගරයක නවත්වා තබන ඕනෑම විටෙක දී නවත්වා තැබීමේ වරදක් තිබීමේ සම්භාවිතාව p වෙයි. ඔහු නවත්වා තැබීමේ වරදක් කරන ඕනෑම විටෙක දී ඔහුට දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව q වෙයි.

a) රියැදුරා එක්තරා දිනක දී ඔහුගේ මෝටර් රථය නගරයේ දෙවරක් නවත්වා තබයි.

i) ඉහත අවස්ථාවට අනුරූප නියැදි අවකාශය ලියා දක්වන්න.

ii) රුක් සටහන ඇඳ ඒ නයින්, එක් එක් විය හැකි ප්‍රතිඵලයේ සම්භාවිතාව ලබාගන්න.

b) රියැදුරා එක්තරා දිනයක දී ඔහුගේ මෝටර් රථය නගරයේ දෙවරක් නවත්වා තබයි.

i) ඉහත අවස්ථාවට අනුරූප රුක් සටහන අඳින්න.

ii) වාර දෙකේ දීම ඔහුට දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

iii) වාර දෙකේ දීම ඔහු නවත්වා තැබීමේ වරද කර ඇතැයි දී ඇති විට ඔහුට එක් වරක් පමණක් දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

iv) එක් අවස්ථාවක දී පමණක් ඔහු නවත්වා තැබීමේ වරදක් කර ඇතැයි දී ඇති විට ඔහුට දඩ ගැසීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (2005)

(26) a) X සහ Y යනු S නියැදි අවකාශයට අයත් ප්‍රභින්න සිද්ධි දෙකකි. පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනයෙන් අදහස් කෙරෙන්නේ කුමක් දැයි පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරන්න.

* X සහ Y නිරවශේෂ (exhaustive) සිද්ධි වෙයි.
* X සහ Y අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි වෙයි.
* X සහ Y ස්වායත්ත සිද්ධි වෙයි.

A සහ B යනු S අවකාශයේ නිරවශේෂ සහ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි දෙකකි. $P(A)=\frac{2}{5}$ වෙයි නම්, P(B) සොයන්න.

C යනු A සහ C ස්වායත්ත වූ සහ $P(C)=\frac{1}{2}$ වන පරිදි වූ S අවකාශයේ තුන්වෙනි සිද්ධියකි. $\bar{A}$ සහ $\bar{C}$ මගින් පිළිවෙලින් A සහ C හි අනුපූරක සිද්ධි දැක්වෙයි.

i) $P(A\cap C)$ ගණනය කරන්න.

ii) $P(A\cup C)$ සොයා $P(\bar{A}\cap \bar{C})$ අපෝහනය කරන්න.

iii) $\bar{A}$ සහ $\bar{C}$ ස්වායත්ත වෙයි ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

D යනු B සහ D අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වූ සහ $P(D)=\frac{1}{5}$ වන පරිදි වූ S අවකාශයේ හතරවෙනි සිද්ධියකි. $\bar{B}$ සහ $\bar{D}$ මගින් පිළිවෙලින් B සහ D හි අනුපූරක සිද්ධි දැක්වෙයි. $\bar{B}$ සහ $\bar{D}$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වෙයි ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

b) රජයේ සේවකයෙක් එක්තරා දිනක දී කාරයෙන්, බස්රියෙන් හෝ දුම්රියෙන් රාජකාරියට යෑමේ සම්භාවිතා පිළිවෙලින් $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$ සහ $\frac{1}{2}$ වෙයි. මෙම ගමනාගමන ක්‍රම මගින් පමා වී වැඩට යෑමේ සම්භාවිතා පිළිවෙලින් $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ සහ $\frac{3}{10}$ වෙයි. මෙම දිනයේ දී ඔහු පමා වූයේ නම්, බේස් ප්‍රමේයය (Bayes' Theorem) භාවිතයෙන් ඔහු දුම්රියෙන් ගමන් කර තිබීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න. (2006)

(27) a) A සහ B යනු සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. B දී ඇති විට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන P(A/B) අර්ථ දක්වන්න.
i) P(A/B) = 0, ii) P(A/B) = P (A)
වන විට A සහ B අතර සම්බන්ධතාව ප්‍රකාශ කරන්න.

b) විමල්, නිමල් හා පියල් නම් යහළුවෝ තිදෙනෙක් දිවා ආහාර පැකැට්ටු මිලට ගැනීම සඳහා ආපන ශාලාවක් වෙත යති. මස් හෝ මාළු හෝ එළවළු සමඟ බත් පැකැට්ටු ආපන ශාලාවේ ඇත. මස් අනුභව නොකරන විමල් මාළු හෝ එළවළු සමඟ බත් පැකට්ටුවක් මිලට ගැනීම තීරණය කිරීම සඳහා සාධාරණ කාසියක් උඩ දමයි. මෙය නිරීක්ෂණය කරන නිමල් ද මස් හා මාළු අතර තීරණය කිරීම සඳහා සාධාරණ කාසියක් උඩ දමයි. පියල් එළවළු පැකැට්ටුවක් හෝ අනෙක් දෙවර්ගයෙන් පැකැට්ටුවක් තීරණය කිරීම සඳහා සාධාරණ කාසියක් උඩ දමයි. දෙවනුවට කියූ අවස්ථාවේ දී ඔහු මස් හෝ මාළු අතර තීරණය කිරීම සඳහා නැවතත් සාධාරණ කාසිය උඩ දමයි.
i) විමල් හා නිමල් එකම වර්ගයේ පැකැට්ටු මිලට ගැනීමේ,
ii) නිමල් හා පියල් එකම වර්ගයේ පැකැට්ටු මිලට ගැනීමේ,
iii) ඔවුන් තිදෙනාම එකම වර්ගයේ පැකැට්ටු මිලට ගැනීමේ,
iv) විමල් නිමල් හා පියල් වෙනස් වර්ගවල පැකැට්ටු මිලට ගැනීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

c) සිසුවකු බහුවරණ පරීක්ෂණයකට පෙනී සිටින අතර එක් එක් ප්‍රශ්නයට නිවැරදි පිළිතුරු එකක් පමණක් සහිත විය හැකි පිළිතුරු 5 ක් තිබේ. සිසුවා පිළිතුර දන්නේ නම් ඔහු නිවැරදි පිළිතුරු තෝරා ගනී. එසේ නොමැති විට ඔහු විය හැකි පිළිතුරු 5 අතුරෙන් එකක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනී. ප්‍රශ්න අතුරෙන් 70% කට නිවැරදි පිළිතුරු සිසුවා දනී යැයි සිතමු.
i) දෙන ලද ප්‍රශ්නයකට සිසුවා නිවැරදි පිළිතුර තෝරාගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
ii) ප්‍රශ්නයකට සිසුවා නිවැරදි පිළිතුර තෝරාගෙන ඇත්නම් ඔහු පිළිතුර දැන සිටීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව සොයන්න. (2007)

(28) a) A සහ B යනු සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශ එක එකක් අර්ථ දක්වන්න.
i) A සහ B සිද්ධි ස්වායත්ත වෙයි.
ii) A සහ B සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වෙයි.
iii) A සහ B සිද්ධි නිරවශේෂ වෙයි.
A සහ B යන සිද්ධි දෙකෙහි අනුපූරක සිද්ධි පිළිවෙලින් A' සහ B' මගින් දක්වමු.
$P(A\cap B) + P(A\cap B') = P(A)$ බව පෙන්වන්න. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ සහ $P(A\cap B') = \frac{1}{2}$ බව දී ඇති විට $P(A'\cap B)$ හි අගය සහ $P(A'\cap B')$ හි අගය සොයන්න.

b) A සහ B යනු $P(B) > 0$ වන සිද්ධි දෙකකි. $P(A|B)$ මගින් දැක්වෙන B දී ඇති විට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව $P(A\cap B)$ සහ $P(B)$ සමඟ ඇති සම්බන්ධය ප්‍රකාශ කරන්න. ශිෂ්‍යයෙක් පාසැලට පාපැදියෙන් හෝ බසයෙන් හෝ යයි. ඔහු නියමිත වේලාවට හෝ ඊට පෙර හෝ පාසැලට පැමිණීමේ සම්භාවිතාව $\frac{19}{28}$ කි. ඔහු පාසැලට පාපැදියෙන් පැමිණි බව දී ඇති විට පමා වී පැමිණීමේ සම්භාවිතාව ඔහු බසයෙන් පැමිණි බව දී ඇති විට පමා වී පැමිණීමේ සම්භාවිතාව මෙන් දෙගුණයක් වෙයි. ඔහු බසයෙන් පාසලට පැමිණි ඕනෑම විටෙක නියමිත වේලාවට හෝ ඊට පෙර හෝ පැමිණීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{4}$ කි. සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් දිනයක
i) ඔහු පාපැදියෙන් පාසලට පැමිණීමේ,
ii) ඔහු පමා වී පැමිණි බව දී ඇති විට ඔහු බසයෙන් ගමන් කර තිබීමේ,
සම්භාවිතාව සොයන්න. (2008)

(29) A සහ B යනු $P(A) > 0$ වන සිද්ධි දෙකකි. A දී ඇති විට B හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(B/A)$ අර්ථ දක්වන්න. A, B සහ C සිද්ධි තුනක් සඳහා $P(A) > 0$ හා $P(A \cap B) > 0$ වෙතොත් $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B/A)\, P(C/A \cap B)$ බව පෙන්වන්න. $\{B_1, B_2, B_3\}$ යනු Ω නියැදි අවකාශයක විභාගනයක් ද A යනු Ω හි ඕනෑම සිද්ධියක් ද යැයි ගනිමු.

$$i = 1, 2, 3 \text{ සඳහා } P(B_1/A) = \frac{P(B_i)P\left(\frac{A}{B_i}\right)}{P(B_1)P\left(\frac{A}{B_1}\right) + P(B_2)\,.\,P\left(\frac{A}{B_1}\right) + P(B_3)\,.\,P\left(\frac{A}{B_3}\right)} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

හරස් මාර්ගයක් වෙත ළඟාවන වාහන වමට, දකුණට හෝ ඍජුව ඉදිරියට යන දිශා තුනකින් එකක් ඔස්සේ යා යුතු ය. බටහිර දෙසින් පැමිණෙන වාහනවලින් 50% ක් වමට හා 20% ක් දකුණට හරවන අතර ඉතිරි වාහන ඍජුව ඉදිරියට ධාවනය කරන බව රථවාහන ඉංජිනේරුවන් නිරීක්ෂණය කර ඇත. එක් එක් වාහනයේ රියැදුරු ස්වායත්ත ලෙස දිශාව තෝරා ගන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින් බටහිර දෙසින් හරස් මාර්ගය වෙත ළඟාවන ඊළඟ වාහන තුනකින්,

i) සියල්ලම ඍජුව ඉදිරියට,
ii) සියල්ලම එකම දිශාවට,
iii) දෙකක් දකුණට හා එකක් වමට හරවා,
iv) සියල්ලම වෙනස් දිශාවලට, ධාවනය කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. අනුයාත වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය කෙරෙයි නම්, බොහෝවිට ඒවා සියල්ලම වමට හරවන බව පෙන්වන්න. (2009)

(30) A හා B යනු ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. A' හා B' යනු පිළිවෙලින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි යැයි ගනිමු. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න. A හා B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි නම්,

i) A හා B'   ii) A' හා B' ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

ජාත්‍යන්තර එක් දින තරගාවලියකට පෙර ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායමේ X නම් නිත්‍ය පිතිකරුවා හෝ Y නම් නිත්‍ය පන්දුයවන්නා ආබාධයකට ලක්වීමට ඉඩප්‍රස්ථාවක් ඇති බව අතීත තොරතුරුවලින් හෙළිදරවු වෙයි. X එවැනි ආබාධයකට ලක්වීමේ සම්භාවිතාව 0.2 ක් වන අතර Y සඳහා 0.1 ක් වේ. ආබාධවලට ලකවීම එකිනෙකින් ස්වායත්ත ලෙස සිදු වේ. N, A, B හා AB සිද්ධි පහත දැක්වෙන ආකාරයට අර්ථ දක්වා ඇත.

N : X හෝ Y යන දෙදෙනාගෙන් කිසිවකුත් ආබාධයකට ලක් නොවීම,
A : X පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම,
B : Y පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම,
AB : X සහ Y දෙදෙනාම ආබාධයකට ලක්වීම,

$P(N) = 0.72$, $P(A) = 0.18$, $P(B) = 0.08$ හා $P(AB) = 0.02$ බව පෙන්වන්න. දෙන ලද N, A, B හෝ AB සිද්ධියක් සඳහා ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම තරගාවලියක් ජය ගැනීමේ, පරාජයවීමේ හෝ ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් කිරීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වගුවේ පෙන්වා ඇත. මෙහි (U, V) කෝෂය U දී ඇති විට V හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(V|U)$ නිරූපණය කරයි.

සිද්ධිය (U)	තරගාවලියක ප්‍රතිඵලය (V)		
	ජයගැනීම	පරාජයවීම	ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් වීම
N	0.9	0.08	0.02
A	0.5	0.4	0.1
B	0.7	0.2	0.1
AB	0.3	0.6	0.1

i) සුදුසු රුක් සටහනක් ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ළඟ එන තරගාවලිය ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ii) ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම තරගාවලියක් පරාජය වී ඇති බව දී ඇති විට එම තරගාවලියට පෙර Y ආබාධයකට ලක්ව තිබීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව සොයන්න. (2010)

(31) ගැටළුවක් විසඳීමට මිතුරන් දෙදෙනෙක් ස්වායත්ත ලෙස උත්සාහ කරති. ඔවුන්ගේ සාර්ථකවීමේ සම්භාවිතා $\frac{1}{3}$ හා $\frac{1}{4}$ වේ. ගැටලුව විසඳීමේ දී

i) ඔවුන් දෙදෙනාම සාර්ථක වීමේ,

ii) කිසිවකු සාර්ථක නොවීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න. (2011)

(32) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක නිරවශේෂ සිද්ධි දෙකක් (එනම් $A \cup B = \Omega$) යැයි ගනිමු. $P(A) = \frac{2}{5}$ හා $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ නම්,

i) $P(B)$ ii) $P(A/B)$

iii) A'හා B' යනු පිළිවෙලින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි වන $P(A'/B')$ සොයන්න.(2011)

(33) a) හිස වැටීමේ සම්භාවිතාව p වූ නැඹරු කාසියකින් නිමල්, සුනිල් හා පියල් ක්‍රීඩාවක යෙදෙති. නිමල්, සුනිල් හා පියල් එම පටිපාටියට මෙම කාසිය උඩ දමති. අගය ලබාගත් පළමුවන තැනැත්තා ක්‍රීඩාව දිනයි. නිමල් ඔහුගේ,

i) දෙවන වාරයේ දී,

ii) තෙවන වාරයේ දී, ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ඒ නයින්, අවසානයේ දී නිමල් ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. කාසියෙන් හිස වැටීමට වඩා අගය වැටීමට වැඩි භව්‍යතාවක් ඇත්නම් නිමල්ට ක්‍රීඩාව දිනීම සඳහා 50% ට වඩා වැඩි ඉඩක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න. (2011)

(34) A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයෙහි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි යැයි ගනිමු. $P(A) = 2p$, $P(B) = p^2$ හා $P(C) = 4p - 1$ නම්, p හි අගය සොයන්න. (2012)

(35) A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයෙහි ස්වායත්ත සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. A හා $(B \cup C)$ යනු ස්වායත්ත සිද්ධි බව පෙන්වන්න. (2012)

(36) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A/B) = P(A/B')$ නම්, A හා B ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. මෙහි B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක් වේ. (2013)

(37) A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයක අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(B \cup C) = \frac{1}{2}$ හා $P(C \cup A) = \frac{2}{3}$ යන සම්භාවිතාවන් එකවිට තිබිය හැකි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. (2013)

(38) a) පාසලක එක්තරා විභාගයකට පෙනී සිටි සිසුන් 100 දෙනෙකු පිළිබඳ සමීක්ෂණයකට අනුව එම සිසුන්ගෙන් 48 දෙනෙකු විභාගය සමත් වී ඇති බව අනාවරණය විය. තව ද මෙම සිසුන් 100 දෙනා අතුරෙන් 50 දෙනෙකු පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගී වී ඇති බව ද 30 දෙනෙකු පාසලේ දී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගී වී ඇති බව ද කිසිම සිසුවෙකු ක්‍රීඩා කටයුතු හා සංගීත කටයුතු යන දෙකටම සහභාගී වී නොමැති බව ද අනාවරණය විය. තවද පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගී වූ සිසුන්ගෙන් 60% ක් විභාගය සමත් වී ඇති අතර පාසලේදී ක්‍රීඩා කටයුතු හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගී නොවූ සිසුන්ගෙන් 30% ක් විභාගය සමත් වී ඇත.

ඉහත සිසුන් 100 දෙනාගෙන් එක් සිසුවකු සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ. මෙම සිසුවා,

i) පාසලේදී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගී වූ අයෙකු බව දී ඇති විට ඔහු විභාගය සමත් අයකු වීමේ,

ii) විභාගය සමත් අයකු බව දී ඇති විට පාසලේ දී ඔහු ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගී වූ අයකු වීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න. (2013)

(39) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A\cup B)\cap(A'\cup B') = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(40) මල්ලක ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ රතු බෝල 6 ක් ද, සුදු බෝල 4 ක් ද, අඩංගු වේ. බෝල තුනක්, වරකට එක බැගින්, ප්‍රතිස්ථාපනයකින් තොරව, සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. දෙවැනි බෝලය සුදු එකක් බව දී ඇති විට, තුන්වැනි බෝලය රතු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (2014)

(41) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශය $P(B) > 0$ වන සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. B දී අති විට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වූ $P(A/B)$ අර්ථ දක්වන්න.

$P(A) = P(B)\,P(A/B) + P/(B')\,P(A/B')$ බව පෙන්වන්න. $0 < P(B) < 1$ වන අතර B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

විශාල සමාගමක සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 80% ක් පිරිමි වන අතර 20% ක් ගැහැණු වේ. සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 57% කගේ ඉහළම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස (සා.පෙළ) වන අතර 32% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස (උ.පෙළ) වේ. අනික් සියලුම සේවා නියුක්තිකයෝ උපාධිධාරීහු වෙති මෙම සමාගමේ ගැහැණු සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 40% කගේ ඉහළම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස (සා.පෙළ) වන අතර 45% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස (උ.පෙළ) වේ. සමාගමේ සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් එක් අයෙකු සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනු ලැබේ. එසේ තෝරා ගනු ලැබූ සේවා නියුක්තිකයා,

i) ඉහළම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස (සා.පෙළ) වූ ගැහැණු කෙනෙකු වීම.

ii) ඉහළම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස (සා.පෙළ) වූ පිරිමි කෙනෙකු වීම.

iii) පිරිමි කෙනෙකු බව දී ඇති විට, එම සේවා නියුක්තිකයා උපාධිධාරියෙකු වීම.

iv) උපාධිධාරියෙකු නොවන බව දී ඇති විට එම සේවා නියුක්තිකයා ගැහැණු කෙනෙකු වීම

යන සිද්ධීන් එක එකෙහි සම්භාවිතාව සොයන්න. (2014)

(42) A, B හා C යනු S නියැදි අවකාශයක ස්වායත්ත සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A\cup B\cup C)$ සම්භාවිතාව, $P(A)$, $P(B)$ හා $P(C)$ සම්භාවිතා ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ හා $P(A\cup B\cup C) = \frac{3}{4}$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $P(C)$ සම්භාවිතාව සොයන්න. (2015)

(43) සර්වසම පෙනුමැති විදුලි බල්බ 7 ක් පෙට්ටියක අඩංගු වේ. මෙම බල්බවලින් 2 ක් දෝෂ සහිත බවත්, ඉතිරිය පාවිච්චි කළ හැකි බවත් දැනගෙන ඇත. දෝෂ සහිත බල්බ 2 ම හඳුනා ගන්නා තුරු එකකට පසුව අනෙක වශයෙන් බල්බ පරීක්ෂා කරනු ලැබේ.
i) බල්බ දෙකක් පමණක් ii) බල්බ තුනක් පමණක්
පරීක්ෂා කිරීමෙන් පසු දෝෂ සහිත බල්බ දෙක ම හඳුනා ගැනීමට හැකිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. (2015)

(44) මිනිසෙක්, යතුරු පැදිය, පා පැදිය හෝ පයින් යන ගමන් ක්‍රම තුනෙන් එකක් පමණක් යොදා ගනිමින් නිශ්චිත මාර්ගයක් දිගේ අනතුරු සහිත ගමනක් යයි.
මිනිසා මෙම ගමනාගමන ක්‍රම යොදා ගැනීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් p, 2p හා 3p වේ නම්, p හි අගය සොයන්න.
ඔහු මෙම ගමනාගමන ක්‍රම යොදා ගැනීමේ දී අනතුරක් සිදුවීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ සහ $\frac{1}{20}$ වේ නම්, තනි ගමනක දී අනතුරක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.
ගමන අතරතුරේ දී මිනිසාට අනතුරක් සිදුවී ඇති බව දන්නේ නම්, මිනිසා ගමන් කරමින් සිටියේ,
i) යතුරු පැදියෙන් ii) පා පැදියෙන් iii) පයින් වීමේ
සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න. වඩාත් ආරක්ෂිත වූයේ කුමන ගමනාගමන ක්‍රමය ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. (2015)

<u>ද්විපද ප්‍රසාරණය</u>

(1) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්,
i) $C_r = \frac{r!}{n!(n-r)!}$ විට $(1+x)^r = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots\ldots + C_nx^n$ බවත්
ii) $(\cos\theta + i\sin)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ බවත් සාධනය කරන්න. $r > 0$ ද $0 \le \theta < 2\pi$ ද වන, $r(\cos\theta + \sin i^{P}\theta)$ ආකාරයෙන් $1 + i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ප්‍රකාශ කර ඉහත දැක් වූ ප්‍රමේය දෙක භාවිතයෙන්,
$C_0 - C_2 + C_4 - C_6 + C_8 - \ldots\ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ ද, $C_1 - C_3 + C_5 - C_7 + C_9 - \ldots\ldots\ 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$ ද බව සාධනය කරන්න. (1976)

(2) i) $(1+x)^n \equiv C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots\ldots C_nx^n$ නම්,
අ) $C^2_0 + C^2_1 + C^2_2 + \ldots\ldots\ C^2_n = \frac{n!}{n!n!}$ බව සාධනය කරන්න.
ආ) $\frac{(1+x)^n - 1}{x} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots\ldots\ldots C_nx^{n-1}$ යන සම්බන්ධය සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \ldots\ldots\ldots + (n-1)C_n = 1 + (n-2)\,2^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න.
ii) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ ප්‍රසාරණයේ x කෙරෙන් ස්වායත්ත පදය සොයන්න.(1979 අතුරු)

(3) n යනු ධන නිඛිලයක් වූ විට $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1$ යන්න ද්විපද ප්‍රමේයය මගින් සුපුරුදු ලෙස ප්‍රසාරණය කරන්න. මෙම ප්‍රසාරණයේ r වැනි පදය $\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{r!}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. එනයින්, එම පදය $\frac{1}{r!}$ ට වඩා විශාල විය නොහැකි බව ද, පෙන්වන්න. තව ද ඉහත ප්‍රසාරණයේ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{2}$ වූ ද මුල් පදය 1 වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක පද හා සැසඳීමෙන් n හි සියලු ධන නිඛිල අගය සඳහා $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ බව පෙන්වන්න. (1977)

(4) n යනු ධන නිඛිලයක් ද $c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ද වූ විට $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_rx^r + \ldots c_nx^n$

i) c_r යන්න මේ ප්‍රසාරණයේ විශාලතම සංගුණකය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න. n ඉරට්ටේ ද n ඔත්තේ ද වන අවස්ථා වෙන වෙනම සලකන්න.

ii) x ධන නම් මෙම ප්‍රසාරණයේ විශාලතම පදය c_0 වීම සඳහා අවශ්‍යතාව $x < \frac{1}{n}$ බව පෙන්වන්න.

iii) x විෂයයෙන් ශ්‍රේණිය අවකලනය කිරීමෙනුත්, අනුකලනය කිරීමෙනුත්, $n2^{n-1} = c_1 + 2c_2 + \ldots\ldots rc_r + \ldots nc_n$; $\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1) = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \ldots + \frac{c_r}{r+1} + \ldots + \frac{c_n}{n+1}$ බව පෙන්වන්න. (1979)

(5) i) λ යනු තාත්ත්වික නියතක් වන අතර $10x^2 + 4x + 1 = 2\lambda x(2-x)$ වෙයි නම්,

අ) සමීකරණයට තාත්තවික මූල තිබීම සඳහා λ හි අගය පරාසය ද,

ආ) සමීකරණයට සමාන මූල තිබීම සඳහා λ හි අගයන් ද සොයන්න.

ii) $a_0, a_1, \ldots a_2$ යනු නියත වන අතර n යනු ධන නිඛිලයක් ද $(1-x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_1x^r + \ldots + a_{2n}x^{2n}$ ද වෙයි නම්, $a_2 = \frac{n}{2}(n+1)$ බවත්, $a_3 = -\frac{1}{6}$ $n(n-1)(n+4)$ බවත් පෙන්වන්න.

අ) $a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_{2n} = 10$ ද,

ආ) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n} = 3^n$ ද බවත් පෙන්වන්න. (1980)

(6) $|x| < 1$ විට, $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r}x^r + \cdots$ අපරිමිත ශ්‍රේණියේ ඓක්‍ය $(1+x)^n$ ට සමාන බව උපකල්පනය කිරීමෙන්,

අ) $\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}$ හි ප්‍රසාරණයේ x^r හි සංගුණකය 3r බව ද,

ආ) $(217)^{1/3}$ යන්න දශමස්ථාන හතරකට නිවැරදි ලෙස 6.0092 ට සමාන වන බවද පෙන්වන්න. (1982)

(7) i) n ධන නිඛිලයක් වන $(1+x+x^2)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^n හි සංගුණකය a_n මගින් දක්වේ. $a_3 = 2a_2$ නම් $n = 5$ බව සාධනය කරන්න.

ii) ඍණ දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය උපයෝගී කරගනිමින් $\frac{(1-x)^2}{(1+x+x^2)^2}$ හි ප්‍රසාරණයේ x^{3r}, x^{3r+1} හා x^{3r+2} පදයන්ගේ සංගුණක සොයන්න. (1983)

(8) $(1-x)^n$ $\sum_{r=0}^{n} c_r x^n$ නම් එවිට $\sum_{r=0}^{n}(r+1)c_r x^r = \{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ වේ. ඒනයින්, $\sum_{r=0}^{n}(r+1)c_r^2 =$ $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1}$ හි ප්‍රසාරණයේ x^n හි සංගුණකය $= \frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ බව පෙන්වන්න. (1985)

(9) ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. $(3\sqrt{2}x - \frac{5}{\sqrt{2}})^6$ බහු පදයෙහි සංගුණක වල ඓක්‍යය සොයන්න. ඔබගේ උත්තරය හැකි සරලම ආකාරයෙන් දෙන්න. (1986)

(10) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, $(1+x)^n = 1+\sum_{r=1}^{n} c_r x^r$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ වේ. ධන n නිඛිලයක් සඳහා $(5+2\sqrt{5})^n$ හි නිඛිල කොටස සහ භාග කොටස පිළිවෙලින් p සහ f වලින් දක්වයි නම්, $f+(5-2\sqrt{2})^n = 1$ බව සාධනය කර p යනු ඔත්තේ නිඛිලයක් බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින්, $(1-f)(p+f) = 5^n$ බව ද,

$(5-2\sqrt{5})^n = \frac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - 5^n}$ බව ද පෙන්වන්න. (1987)

(11) ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{5}{4}}\right)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම සංගුණකය 9 වෙනි පදය තුළ පමණක් අඩංගු වී ඇති යයි දී තිබේ. n සහ ප්‍රසාරණයෙහි x^4 හි සංගුණකය සොයන්න. (1988)

(12) $(5\sqrt{2}+7)^{\frac{1}{3}} - (5\sqrt{2}-7)^{\frac{1}{3}}$ යන්න 2 ට සමාන බව පෙන්වන්න. ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

අ) $x = \frac{1}{3}$ වන විට $\left(\frac{1}{2}+x\right)^9$ හි x වල ආරෝහණ බලවලින් යුත් ප්‍රසාරණයේ වැඩිතම පදයෙහි අගය සොයන්න.

ආ) $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots c_nx^n$ නම්, c_r/c_{r-1} හි අගය සොයා $r(c_r + c_{r-1}) = (n+1)c_{r-1}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $c_0 + 3c_1 + 5c_2 + \cdots (2n+1)c_n = 2^n(n+1)$ බව සාධනය කරන්න. (1989)

(13) ධන නිඛිල දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

i) $x = 4$ විට $(10+3x)^{15}$ හි ප්‍රසාරණයේ වැඩිතම පදය සොයන්න.

ii) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x}(1+x)^n = -\frac{1}{x^2}(1+x)^n + \frac{n}{x}(1+x)^{n-1}$ භාවිත කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n-1} r^n c_{r+1} = 1+(n-2)2^{n-1}$ බව පෙන්වන්න. (1990)

(14) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්වීපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර එය සාධනය කරන්න.

i) $\sum_{r=1}^{n} r\,{}^{n}c_r x^{r-1} = \mathbf{n(1+x)^{n-1}}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $n(1+x)^{n-1}$ සහ $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණවල ගුණිතය සැලකීමෙන් $\sum_{r=1}^{n} r({}^{n}C_r)^2$ යන්න $n(1+x)^{2n-1}$ ප්‍රසාරණයේ x^{n-1} හි සංගුණකයට සමාන බව පෙන්වන්න.

iii) $\sum_{r=1}^{n} r({}^{n}C_r)^2 = \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$ බව අපෝහනය කරන්න. (1991)

(15) n ධන නිඛිලයක් විට සුපුරුදු අංකනයකින් $(a+x)^n = a^n + {}^{n}C_1\, a^{n-1} x + {}^{n}C_2\, a^{n-2} x^2 + \ldots + {}^{n}C_r a^{n-1} x^r + \ldots + x^n$ බව සාධනය කරන්න. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ හි ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය සොයන්න. $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ හි දෙපැත්තම ප්‍රසාරණය කර $C_0C_r - C_1C_{r-1} + C_2C_{r-2} + \ldots + (-1)^r C_rC_0 = 0$, r ඔත්තේ විට, $= (-1)^{\frac{r}{2}} C_{\frac{r}{2}}$, r ඉරට්ටේ විට, බව පෙන්වන්න. මෙහි $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots + C_nx^n$ වේ. (1992)

(16) සුපුරුදු අංකනයෙන් n ධන නිඛිලයක් විට, $(a+x)^n = a^n + {}^{n}C_1\, a^{n-1} x + {}^{n}C_2\, a^{n-2} x^2 + \ldots {}^{n}C_r\, a^{n-r} x^r + \ldots + x^n$ බව සාධනය කරන්න. හුදෙක් වීජීය ක්‍රම යොදා ගැනීමෙන්,

i) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots\ldots rC_r + \ldots\ldots + nC_n = n2^{n-1}$

ii) $C_0 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \cdots + (-1)^r \frac{C_r}{r+1} + \cdots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_rx^r + \cdots x^n$ වේ. (1993)

(17) n ධන නිඛිලයක් විට, $(1+x)^n$ සඳහා ද්වීපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. ඉහත ප්‍රසාරණය යොදා වීජීය ක්‍රමයකින්, ${}^{n}C_0 + 2.\,{}^{n}C_1x + 3.\,{}^{n}C_2x^2 + \ldots.. + (n+1)\,.\,{}^{n}C_nx^n$ යන්න $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න. මෙහි ${}^{n}C_r$ ට එහි සුපුරුදු අර්ථය ඇත.

i) $[1+(n+1)x](1+x)^{2n+1}$ ප්‍රසාරණය කිරීමෙන් හා x^3 හි සංගුනකය සැලකීමෙන්,
$({}^{n}C_0)^2 + 2.\,({}^{n}C_1)^2 + 3.\,({}^{n}C_2)^2 + \ldots.. + (n+1).\,({}^{n}C_n)^2$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ ට සමාන බව පෙන්වන්න. n යනු ධන නිඛිලයකි.

ii) n ඉරට්ටේ නම්, ${}^{n}C_0 + 3.\,{}^{n}C_2 + 5.\,{}^{n}C_4 + \ldots.. + (n+1)\,.\,{}^{n}C_n$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයන්න. (1995)

(18) i) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක සඳහා ද්වීපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. $(3x+2y)^{20}$ හි ප්‍රසාරණයේ

a) විශාලතම සංඛ්‍යාත්මක සංගුණකය ද?

b) $x = \frac{1}{3}$ සහ $y = \frac{3}{2}$ විට විශාලතම පදය ද සොයන්න.

ii) $(1+x)^n(1+x)^n \equiv (1+x)^{2n}$ සර්වසාම්‍යයෙහි දෙපැත්තේම x^r හි සංගුණකය සැසඳීමෙන් $\sum_{s=0}^{r} {}^nC_s \cdot {}^nC_{r-s} = {}^{2n}C_r$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\sum_{s=0}^{r} \left({}^nC_s\right)^2$ ඓක්‍යය සොයන්න.

iii) $(a+bx)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ

a) x හි ඔත්තේ බලවල b) x හි ඉරට්ටේ බලවල සංගුණකයන්ගේ ඓක්‍යය සොයන්න. (1996)

(19) අ) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r$ යන්න උපකල්පනය කිරීමෙන්, $\sum_{r=0}^{n} c_r$ සහ $\sum_{r=0}^{n} c^2 r$ ලබාගන්න. මෙහි $n \in \mathbf{N}$ ඒනයින්, $C_0, C_1, C_2 \dots C_n$ අතුරෙන් වරකට දෙකක් බැගින් ගත් විට ලැබෙන ගුණිතවල ඓක්‍යය සොයන්න. (ආ) λ නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් විට, $(1+\lambda x)^9 = 1 - px + qx^2 - rx^3 + \cdots$ යැයි දී ඇති විට p හි අගයත් q හි අගයත් r හි අගයත් λ ඇසුරෙන් ලබාගන්න. ඒ නයින්, $(1-x)^9(1-3x)^9$ හි ප්‍රසාරණයේ x^3 හි සංඛ්‍යාත්මක සංගුණකය සොයන්න. (1997)

(20) අ) n සහ k යනු $n \geq k$වන පරිදි වූ ධන නිඛිල ලෙස ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

i) ${}^{n+1}C_k = {}^nC_k + {}^nC_{k-1}$ ii) $n > 1$ සඳහා $\sum_{r=k+1}^{n} {}^rC_k = {}^{n+1}C_{k+1} - 1$ බව පෙන්වන්න.

$$\sum_{r=0}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \text{ සහ } \sum_{r=0}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ බව අපෝහනය කරන්න.

ආ) $\left(2+\sqrt{2}x+x\right)^2(2+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි x^r හි සංගුණකය සොයන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වන අතර r යනු $n+3$ට වඩා අඩු සෘණ නොවන නිඛිලයකි. x^3 හි සංගුණකය $\frac{2^{n-2}}{3}(n^3+6n^2-n)$බව පෙන්වන්න. (1998)

(21) $(1+t)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලියන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.

i) ${}^nC_k + 2\,{}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2} = {}^nC_k$ නම්, k සොයන්න.

ii) ${}^nC_i\,{}^iC_j = {}^nC_j\,{}^{n-j}C_{i-j}$ බව පෙන්වන්න.

$n > 10$ සඳහා $\sum_{i=10}^{n} (-1)^i\,{}^nC_i\,{}^iC_{10} = 10$ බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි (${}^nC_r$ යන්න සුපුරුදු අර්ථය ගනී.) (1999)

(22) $\left(\frac{7}{6x} - \frac{6x}{7}\right)^{13}$ හි ප්‍රසාරණය සලකන්න.

i) x හි ඉරට්ටේ බල හෝ $\frac{1}{x}$ හි ඉරට්ටේ බල හෝ එම ප්‍රසාරණයේ නොමැති බව,

ii) $\frac{1}{x}$ හි සංගුණකය 2002 බව පෙන්වන්න. (2002)

(23) සුපුරුදු අංකනයෙන් $0 \leq r \leq n-1$ සඳහා ${}^nC_{r+1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_{r+1}$ බව පෙන්වන්න. තව ද $0 \leq r \leq 2002$ සඳහා ${}^{2003}C_r + {}^{2004}C_r + \dots + {}^{2013}C_r = {}^{2014}C_{r+1} - {}^{2003}C_{r+1}$ බව අපෝහනය කරන්න. (2003)

(24) x හි ආරෝහණ බල ඇසුරෙන් $(1+7x)^{23}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය සලකන්න.

i) එම ප්‍රසාරණයේ වැඩිතම සංඛ්‍යාත්මක සංගුණකයද එයට අනුරූප ප්‍රසාරණයේ පද ද සොයන්න.

ii) x ධන යැයි දී ඇති විට එම ප්‍රසාරණයේ හතරවන පදය වැඩිතම පදය වන සේ වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න. (2004)

(25) $(1 + 2x + kx^2)^5$ හි ප්‍රසාරණයේ x^3 හි සංගුණකය k ඇසුරෙන් සොයන්න. මෙම සංගුණකය ශූන්‍ය වේ නම් k හි අගය සොයන්න. k හි මෙම අගය සඳහා $(1 + 2x + kx^2)^5$ හි ප්‍රසාරණයේ x^n හි සංගුණකය a_n මඟින් අංකනය කෙරේ නම්,

i) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = -121$ බවත්,

ii) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 122$ බවත්, පෙන්වන්න. (2005)

(26) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. $3(x+y)^n$ ප්‍රකාශනයෙහි x සහ y සඳහා සුදුසු අගයන් තෝරා ගනිමින් 3^{2n+1} යන්න $7k+3(2^n)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි k සහ n ධන නිඛිල වෙයි. ඒනයින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ යන්න 7 න් බෙදෙන බව පෙන්වන්න. (2006)

(27) i) $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි අනුගාමී සංගුණක තුනක් 45,120 සහ 210 වේ. මෙහි n යනු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. n හි අගය සොයන්න.

ii) $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි අනුගාමී සංගුණක තුනක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටිය හැකි ද? මෙහි n යනු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. (2008)

(28) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + \ldots + {}^nC_rx^r + \ldots + {}^nC_nx^n$ යැයි ගනිමු. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වේ. $(1+x)^{n-1}$ හා $(1+x)$ හි ගුණිතය සැලකීමෙන් $r = 1,2,\ldots, n-1$ සඳහා ${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r$ බව පෙන්වන්න. ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n = 0$ බව අපෝහනය කරන්න. වෙනත් ක්‍රමයක් මඟින් ඉහත ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න. n යනු ඉරට්ටේ නිඛිලයක් නම්, ${}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots + {}^nC_n = 2^{n-1}$ බව අපෝහනය කරන්න. (2010)

(29) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්වීපද ප්‍රසාරණය යොදා ගනිමින් $\left(1+\sqrt{3}\right)^6 + \left(1-\sqrt{3}\right)^6 = 416$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය කොටස් සොයන්න. (2011)

(30) p නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් වන $(1+px)^{12}$ හි ද්වීපද ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය හා x^2 හි සංගුණක පිළිවෙලින් $-q$ හා $11q$ නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න. (2012)

(31) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^{20}$ හි ද්වීපද ප්‍රසාරණයෙහි x වලින් ස්වායත්ත පදය $\frac{969}{2}$ වේ. a හි අගය සොයන්න. (2013)

(32) $n \in \mathbb{Z}$ යැයි ගනිමු. $\left(2 + \frac{3}{x}\right)(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයෙහි x^{n-2} හි සංගුණකය 120 වේ. n හි අගය සොයන්න. (2014)

(33) $n \in \mathbb{Z}$ හා $n \geq 5$ යැයි ගනිමු. $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{n-10} හි සංගුණකය 100 ට වඩා අඩු වේ. n හි අගය සොයන්න. (2015)

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

(1) ආගන්ඩ් සටහනේ P ද P' ද යන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z ද Z' යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

i) Q යනු $\frac{PQ}{QP'} = \frac{\lambda}{\mu}$ වන පරිදි PP' සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යය නම්, Q මගින් නිරූපණය කරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ii) $Z - Z'$ සංකීරණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය සෙවීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් ඉදිරිපත් කරන්න.

ආගන්ඩ් සටහනේ P_1, P_2, P_3, P_4 ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 යන සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. $Z_1 - Z_2 = Z_4 - Z_3$ නම් ද එසේම නම් පමණක් ද P_1, P_2, P_3, P_4 සරල රේඛීය රූපය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න. සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකක් අනෙක සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වීමට මෙම ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කරගන්න. (දෛශික ක්‍රම පිළිගනු නො ලැබෙයි.) (1976)

(2) a, b යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා විට $a^3 = b$ නම්, a යනු b හි ඝන මූලයක් යැයි අර්ථ දක්වනු ලැබේ. මේ අර්ථ දැක්වීම අනුව $Z_1 = \cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}$, $Z_2 = \cos\frac{2\pi+\theta}{3} + i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}$, $Z_3 = \cos\frac{4\pi+\theta}{3} + i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}$ යන සංඛ්‍යා එක එකක් $Z = \cos\theta + \sin\theta$ යන්නෙහි ඝන මූලයක් වන බව පෙන්වන්න. ඒනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

i) $1\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ සංඛ්‍යා එක එකක් 1 හි ඝන මූලයක් බව ද

ii) -1, $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$ සංඛ්‍යා එක එකක් -1 හි ඝන මූලයක් වන බව ද පෙන්වන්න. $Z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ආකාරයෙන් ලියන්න. මෙහි $0 < \alpha < \pi$ වෙයි. ඒ නයින් Z' හි ඝන මූල තුන ලියන්න. (1977)

(3) ආගන්ඩ් සටහනේ P, P' ලක්ෂ්‍ය මගින් Z, Z' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබෙයි. $\frac{Z}{Z'}$ ද $Z - Z'$ ද යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබාගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ දෙන්න. ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_1, Z_2 හා Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලබන P_1, P_2 හා P_3 ලක්ෂ්‍යය වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ ය. $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2}$ = කොස් $\frac{\pi}{3}$ + i සයින් $\frac{\pi}{3}$ නම් ද එසේ නම් පමණක් ද P_1, P_2, P_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද බව සාධනය කරන්න. (1977)

(4) i) ආගන්ඩ් සටහනේ P ද Q ද මගින් Z_1, Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි. $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ නම් OQ ට OP ලම්බ බව පෙන්වන්න.

ii) a,b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා විට, $a + ib$ ආකාරයෙන් $(3 + 2i)(7 + 5i)$ ප්‍රකාශ කරන්න. $11^2 + 29^2$ යන්නෙහි සාධක යුගලයන් අපෝහනය කර ඒ නයින්, ධන නිඛිල දෙකක ගුණිතය ලෙස $11 - 29i$ ප්‍රකාශ කරන්න.

iii) $|Z + i| + |Z - i| = 4$ ද විස්තා. $(iz) = \pi$ ද වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1978)

(5) ආගන්ඩ් සටහනේ P_1 P_2 ලක්ෂ්‍යයවලින් පිළිවෙලින් Z_1 Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි. P_1 P_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙන් $\frac{1}{2}(Z_1+Z_2)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න. A ලක්ෂ්‍යයෙන් a සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙයි. $AP_1 = AP_2$ ද $P_1AP_2 \measuredangle = \frac{\pi}{2}$ ද වන්නේ $Z_2 - a = \pm i(Z_1 - a_1)$ විට බවත් එසේ විටම පමණක් බවත් පෙන්වන්න. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් $3 + 4i$, $9 + 12i$, $1 + 18i$ $-5 + 10i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කෙරෙයි. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 යනු සමචතුරස්‍රයක වාමාවර්ත අතට පිළිවෙලින් ගත් ශීර්ෂ බව පෙන්වීමට චතුරස්‍රයක විකර්ණ දෙක දිගෙන් සමාන වී එකක් අනෙක සෘජුකෝණී ලෙස සමච්ඡේදනය කරයි නම් ද එසේ කරන්නේ නම් පමණක් ද එය සමචතුරස්‍රයෙකි යන ජ්‍යාමිතික අවශ්‍යතාව භාවිත කරන්න. සමචතුරස්‍රයක එක් ශීර්ෂයෙකින් $2 - i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි නම්ද සමචතුරස්‍රයේ කේන්ද්‍රයෙන් $1+2i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරපණය කෙරෙයි නම්ද සමචතුරස්‍රයේ අනෙක් ශීර්ෂ තුනෙන් නිරූපණය කෙරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. (1979)

(6) මූල ලක්ෂ්‍යය O ලෙස ඇති ආගන්ඩ් සටහනේ P ලක්ෂ්‍යයෙන් Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරේ. එකම ආගන්ඩ් සටහනක,

i) $Z' = 2z$ (කොස් $\pi/3$ + i සයින් $\pi/3$) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන P' ලක්ෂ්‍යයත්

ii) $Z' - z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන P'' ලක්ෂ්‍යයත් ලබා ගැනීමට සාධන ද සමග නිර්මාණ ඉදිරිපත් කරන්න.

අ) O, P, P', P'' යනු සෘජුකෝණාස්‍රයක පිළිවෙලින් වාමාවර්ත අතට ගත් ශීර්ෂ බවත්

ආ) $Z' - Z = \sqrt{3}\, iz$ බවත්, ආගන්ඩ් සටහනක අපෝහනය කරන්න. ඔබගේ අපෝහනය සඳහා හේතු පැහැදිලි ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. (1980)

(7) ආගන්ඩ් සටහනේ P, P' ලක්ෂ්‍යය මගින් පිළිවෙලින් Z, Z' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි.

අ) $\frac{1}{2}(Z+Z')$ ආ) $Z-Z'$ ඇ) $i(Z-Z')$

නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ලබා ගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ ඉදිරිපත් කරන්න. ආගන් සටහනේ P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍ය මගින් පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3 සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙයි. $i(Z_2-Z_3) = \frac{1}{2}\{(Z_1 - Z_2) + (Z_1 - Z_3)\}$ නම්, P_1, P_2, P_3 ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බවත් එහි වර්ගඵලය $\frac{1}{2}|Z_2 - Z_3|^2$ බවත් සාධනය කරන්න.

(1981)

(8) ω = කොස් $\frac{2\pi}{3}$ + i සයින් $\frac{2\pi}{3}$ විට $x^3-1=0$ සමීකරණයේ මූල

i) $1, \omega, \omega^2$ මඟින් දැක්වෙන බවද

ii) $1+\omega+\omega^2=0$ සමීකරණය සපුරාලන බව ද සත්‍යාපනය කරන්න. Z_1, Z_2, Z_3 යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් නම්, $(Z_1+Z_2\omega+Z_3\omega^2)(Z_1+Z_2\omega^2+Z_3\omega) = Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2-Z_2Z_3-Z_3Z_1-Z_1Z_2$ බව පෙන්වන්න. Z_1, Z_2, Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් ආගන් සටහනෙහි $A_1 A_2 A_3$ ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරයි. $Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2-Z_2Z_3-Z_3Z_1-Z_1Z_2=0$ නම් $A_1 A_2 A_3$ ත්‍රිකෝණය සමපාද බව අපෝහනය කරන්න. (1982)

(9) $z + x + iy$ සංකීරණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රතිබද්ධය, $\bar{z}, \bar{z} = x - iy$ මඟින් දෙනු ලැබේ. α, β යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා හා n යනු ධන නිඛිලයක් වන විට පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල සාධනය කරන්න.

i) $\overline{(\alpha+\beta)} = \bar{\alpha} +$

ii) $\overline{(\alpha-\beta)} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$

iii) $\overline{(\alpha\beta)} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$

iv) $\overline{\alpha^{-1}} = (\bar{\alpha})^{-1}$

v) $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$ තාත්ත්වික සංගුණකය සහිත $\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots\dots\dots + \alpha_{n-1} z + \beta_n$ බහුපදය $z = z_0$ දී අරුදහන් වේ නම් $z = \bar{z}_0$ හිදී ද එය අතුරුදහන් වන බව පෙන්වන්න. (1983)

(10) Z_1, Z_2 හා Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් A_1, A_2 හා A_3 ඒක රේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය වේ. $A_1, A_2\ A_3$ ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය මඟින් $\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. $(Z_1+Z_2+Z_3)(Z_1+Z_2\omega+Z_3\omega^2)(Z_1+Z_2\omega^2+Z_3\omega) = Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3-3Z_1Z_2Z_3$ බව ද පෙන්වන්න. මෙහි $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ වේ. $Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3-3Z_1Z_2Z_3 = 0$ නම් පහත සඳහන් අවස්ථා සිදුවිය හැකි බව අපෝහනය කරන්න.

i) A_1, A_2, A_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද වේ. එහෙත් එහි කේන්ද්‍රකය මූලෙහි නොපිහිටයි.

ii) A_1, A_2, A_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද නොවේ. එහෙත් එහි කේන්ද්‍රකය මූලෙහි පිහිටයි.

iii) A_1, A_2, A_3 ත්‍රිකෝණය සමපාද හා එහි කේන්ද්‍රකය මූලෙහි පිහිටයි. (ත්‍රිකෝණයක කේන්ද්‍රකය යනු මධ්‍යස්ථ තුන ඡේදනය වන පොදු ලක්ෂ්‍යය වේ.) (1983)

(11) Z හා W යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වන අතර $\bar{Z}$ හා $\bar{W}$ පිළිවෙලින් ඒවායේ සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධ දක්වයි.

i) $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\,\mathrm{Re.}\,(z\bar{w})$

ii) $(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + 2\,\mathrm{Re.}\,(z\bar{w})$

iii) $2|\mathrm{Re.}\,z||\mathrm{Im.}\,z| < |z|^2$

iv) $|z| < |\mathrm{Re.} z| + |\mathrm{Im.}\,z| < \sqrt{2}|z|$

v) $|z+w| < |z| + |w$

බව සාධනය කරන්න. මෙහි Re. z සහ Im. z පිළිවෙලින් z හි තාත්වික සංඛ්‍යා හා අතාත්වික කොටස් දක්වයි. (ජ්‍යාමිතික සාධන පිළිගනු නොලැබේ.) (1984)

(12) Z_1, Z_2, Z_3 සහ Z_4 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් A_1, A_2, A_3 හා A_4 ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරයි. $\frac{(Z_1-Z_2)}{(Z_3-Z_4)}$ යන්න හුදෙක් අතාත්ත්වික වීම සඳහා ජ්‍යාමිතික අවශ්‍යතාවයක් සොයන්න. Re. $(Z_1- Z_2)$ Re. $(Z_3- Z_4)$ + Im. $(Z_1- Z_2)$ Im. $(Z_3- Z_4) = 0$ නම් එවිට A_1A_2 යන්න A_3A_4ට ලම්බ බව සාධනය කරන්න. මෙහි Re. (ω) සහ Im. (ω) මගින් ω හි තාත්ත්වික සහ අතාත්වික කොටස් දක්වනු ලැබේ. ලම්බ කේන්ද්‍රයේ පැවැත්ම පිළිබඳ කවර ප්‍රතිඵලයක් උපකල්පනය කර නොගනිමින් A_1 A_2 A_3 ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවල සිට සම්මුඛ පාද වලට අදින ලද ලම්බ, Re. $\frac{(z-z_1)}{(z_2-z_3)}$ = Re. $\frac{(z-z_2)}{(z_3-z_1)}$ = Re. $\frac{(z-z_3)}{(z_1-z_2)} = 0$ සපුරාලනු ලබන z මගින් නිරූපණය කරන ලද ලක්ෂ්‍යයේදී හමුවන බව පෙන්වන්න. (1985)

(13) Z_1, Z_2, Z_3 සහ Z_4 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් A_1, A_2, A_3 හා A_4 ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය නිරූපණය කරයි. Z_1 සහ Z_2, $aZ^2 + 2bz + C = 0$ සමීකරණයෙහි මූල වන අතර Z_3 සහ Z_4, $a'Z^2 + 2b'Z + c' = 0$ සමීකරණයෙහි මූල වේ. $ac' + a'c - 2bb' = 0$ නම් එවිට $(Z_1+ Z_2)$ $(Z_3+ Z_4) = 2(Z_1Z_2 + Z_3Z_4)$ (*) බව පෙන්වන්න. (*) $\{Z_1 - \frac{1}{2}(Z_3+ Z_4)\}\{Z_2- \frac{1}{2}(Z_3+ Z_4)\} = \{\frac{1}{2}(Z_3- Z_4)\}^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කිරීමෙන් E යනු A_3 A_4 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය නම්, එවිට EA_1 සහ EA_2, A_3 A_4 ට සමාන ලෙස ආනත බව අපෝහනය කරන්න. (1986)

(14) z හා z' සංකීරණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ P සහ P' ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලැබේ. $z - z'$ සහ zz' සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගැනීම සඳහා අවශ්‍ය ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ දෙන්න. P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන අතර Q_1, Q_2, Q_3 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් zz_1, zz_2, zz_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. මෙහි z යනු ඕනෑම ශූන්‍ය නොවූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $P_1P_2P_3$ සහ $Q_1Q_2Q_3$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව පෙන්වන්න. (1987)

(15) Z_1, Z_2 සහ Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් P_1, P_2 සහ P_3 ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලැබේ. $(Z_3 - Z_1) = \omega(Z_2 - Z_3)$ නම් එවිට P_1, P_2, P_3 යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න. මෙහි ω යනු එකෙහි අතතාවික ඝන මූලයක් වේ. Q_1, Q_2, Q_3 ත්‍රිකෝණයක පාද මත එයට පිටතින් සමපාද ත්‍රිකෝණ ඇඳ ඇත. විස්තර කරන ලද එක එකක් සමපාද ත්‍රිකෝණවල කේන්ද්‍රිකයන්ට අනුරූප සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. මුල් කොටස උපයෝගී කර ගනිමින් කේන්ද්‍රික සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ සාදනු ලබන බව පෙන්වන්න. (1988)

(16) P_0, P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් z_0, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. $\frac{P_0P_2}{P_0P_1} = \lambda > 0$ නම් හා $< P_1P_0P_2 = \theta$ නම්, $(z_2 - z_0)$ සහ $(z_1 - z_0)$ $(\cos\theta + i\sin\theta)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යය ලබා ගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිරූපණ ඉදිරිපත් කර $z_2 = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි වාමාවර්ත අතට මැන ඇත. A, B, C, D, E, F ශීර්ෂ වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයක A සහ B ශීර්ෂ පිළිවෙලින් $2 + 2i$ සහ $3 + 3i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කර ගනිමින් E සහ F ශීර්ෂ මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. (1989)

(17) Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක " මාපාංකය "$|z|$ සහ " විස්තාරය " Arg.(z) අර්ථ දක්වන්න. $\text{Arg.}\ \bar{z} = -\ \text{Arg.}\ z$ සහ $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\bar{z}$ යනු z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය වේ.

$z = x + iy$ සහ $Z_0 = x_0 + iy_0$ ලෙස ලිවීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $|z - z_0| = R$, අරය සහ කේන්ද්‍රය Z_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි වූ වෘත්තයක ආගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. A,B,C,D,E,F (වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද) සවිධි ෂඩස්‍රයක කේන්ද්‍රය O මූල ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටා ඇති අතර $z = 3$ හි A ශීර්ෂය පිහිටා ඇත.

i) B සහ C ශීර්ෂයන්ට අනුරූප සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

ii) B,O,C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය $|z - z_0| = R$ ආකාරයෙන් සොයන්න.

iii) ෂඩස්‍රය O වටා 45^0 කෝණයකින් දක්ෂිණාවර්තව භ්‍රමණය කරනු ලැබේ නම් B සහ C හි නව පිහිටීම් වලට අනුරූප සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න. (1990)

(18) z_1, z_2, z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් P_1, P_2 සහ P_3 ලක්ෂ්‍ය වලින් නිරූපණය වේ. $\dfrac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි මාපාංකය සහ විස්තාරය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න. තව ද, z_1', z_2', z_3' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ පිළිවෙලින් P_1',P_2' සහ P_3' ලක්ෂ්‍ය වලින් නිරූපණය වේ. $\dfrac{(z_1' - z_3)}{(z_2 - z_3)} = \dfrac{(z_2' - z_1)}{(z_3 - z_1)} = \dfrac{(z_3' - z_2)}{(z_1 - z_2)}$ නම් එවිට $P_2P_3P_1'$, $P_3P_1P_2'$, $P_1P_2P_3'$ ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න. තව ද $P_1P_2P_3$ සහ $P_1'\ P_2'\ P_3'$ ත්‍රිකෝණයන්ට එකම කේන්ද්‍රකයක් ඇති බව ද සාධනය කරන්න. (1991)

(19) ආගන්ඩ් රූ සටහනෙහි Z හා Z' සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P හා P' මඟින්ද $Z - Z'$ සංඛ්‍යාව Q මඟින්ද නිරූපණය වන්නේ නම්, OQ යන්න $P'P$ ට සමාන හා සමාන්තර බව පෙන්වන්න. B හා C කෝණ එක එකක් $\dfrac{(\pi - a)}{2}$ වන සේ වූ ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක A,B,C ශීර්ෂ මඟින් පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3 සංඛ්‍යා නිරූපණය කරනු ලැබේ. $(Z_3 - Z_2)^2 = 4(Z_3 - Z_1)\ (Z_1 - Z_2)\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ බව සාධනය කරන්න. (1992)

(20) $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 1$ සමීකරණය සපුරාලන $-\pi < \theta < \pi$ ප්‍රාන්තරයෙහි පිහිටියා වූ θ හි ප්‍රභින්න අගයන් තුන නිර්ණය කරන්න. එනයින් $\omega^3 = 1$ සමීකරණය සපුරාලන එකිනෙකට වෙනස් ω සංඛ්‍යා $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a සහ b තාත්ත්වික වේ. $\omega \neq 1$ නම්, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න. p සහ q තාත්වික විට, $x^3 - 3pqx - p^3 - q^3$ ප්‍රකාශනය $(x - p - q)\ (x - p\omega - q\omega^2)\ (x - p\omega^2 - q\omega)$ ආකාරයෙන් සාධක වලට බිඳිය හැකි බව පෙන්වන්න. එනයින් $Z^3 - 18z - 35 = 0$ සපුරාලන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල අගයන් සොයන්න. (1993)

(21) ආගන්ඩ් සටහනෙහි Z_1 සහ Z_1 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍යය වලින් නිරූපණය කෙරේ. λ යනු තාත්ත්වික පරාමිතයක් විට $Z_1 + \lambda\,(Z_2 - Z_1)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන් සටහනෙහි නිරූපණය කෙරෙන P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සොයන්න. $Z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ සහ $Z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ යැයි ගනිමු. $\frac{P_1P^{/}}{P_1P_2}$ සහ $\frac{P_1P^{//}}{P_1P_2} = -1$ වන පරිදි සහ P_1P_2 මත ලක්ෂ්‍යය දෙකම පවතින සේ පිහිටියා වූ $P^{/}$ හා $P^{//}$ ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් නිරූපණය කෙරෙන $Z^{'}$ සහ Z'' සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. තව ද $\text{Arg.}\,(z^{/})$ සහ $\text{Arg.}\,(z^{//})$ ලබාගන්න. $(-\pi < \text{Arg. } z \leq \pi)$ එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ P' හා P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් P_1OP_2 කෝණයේ අභ්‍යන්තර සහ බාහිර සමච්ඡේදක මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි O මූලය වේ. (1993)

(22) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය සහ විස්තාරය අර්ථ දක්වන්න. ආගන්ඩ් රූ සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යය Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. Z^2 නිරූපණය කෙරෙන Q ලක්ෂ්‍යය ජ්‍යාමිතික ලෙස නිර්මාණය කරන්නේ කෙසේදැයි පෙන්වන්න. කේන්ද්‍රය (1, 0) සහ ඒකක අරයෙන් යුත් වෘත්තය මත P පිහිටයි නම්,

i) $|Z^2 - Z| = |Z|$

ii) $\text{amp}\,(Z-1)\ \text{amp} = Z^2 = \frac{2}{3}\,\text{amp}\ (Z^2 - Z)$ බව ජ්‍යාමිතික පෙන්වන්න. (1994)

(23) $Z = x + iy$, $x > 0$, $y > 0$ යන්නෙන් දෙනු ලබන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ඩ් සටහනක P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. එම රූප සටහනෙහිම Q ලක්ෂ්‍යයෙන් $i\sqrt{3}z$ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ නම් Q නිර්ණය කළ හැක්කේ කෙසේදැයි පෙන්වන්න. තව ද පිළිවෙලින් $Z + i\sqrt{3}z$ සහ $Z - i\sqrt{3}z$ නිරූපණය කරන R සහ R' ලක්ෂ්‍යයන් ද සටහන් කරන්න. Z හි විස්තාරය θ වේ.

i) R අතාත්වික අක්ෂය මත පිහිටයි නම් θ සොයන්න.

ii) Z^2 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය මූල ලක්ෂ්‍යය සහ R ඒක රේඛීය නම්, $\theta = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

iii) ආගන්ඩ් සටහන භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\left|z + i\sqrt{3}z\right|^2 + \left|z - i\sqrt{3}z\right|^2 = 8\,|z|^2$ බව පෙන්වන්න. (1996)

(24) අ) Z_1 සහ Z_2 යනු $Z_1 + Z_2$ සහ $Z_1 Z_2$ එක එකක් සෘණ තාත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකකි. Z_1 සහ Z_2 තාත්වික සංඛ්‍යා බව පෙන්වන්න.

ආ) Z_1, Z_2 සහ Z_3 යනු $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ සහ $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ වන පරිදි වූ නිශ්ශූන්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ. මෙම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන් සටහනක සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. (1997)

(25) ආගන්ඩ් සටහනෙහි A,B සහ C ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2 සහ Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ. AB සිට වාමාවර්ත අතට මිනුවිට AC හි ආනත කෝණය θ නම්ද AB = AC නම් ද $Z_3 - Z_1 = (Z_2 - Z_1)$ බව පෙන්වන්න. P, Q, R, S යනු ආගන් සටහනේ සමචතුරස්‍රයකි.

i) P සහ Q පිළිවෙලින් Z_1 සහ Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම් R සහ S ට අනුරූප වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z_1, Z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

ii) Q සහ S පිළිවෙලින් Z_1 සහ Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප වේ නම් P සහ R ට අනුරූප වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා Z_1 , Z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

iii) P යනු 1 –i ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ද $PR = 2\sqrt{2}$ වන පරිදි R විචල්‍ය වේද Q යනු Z අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ද නම් Z සඳහා සම්බන්ධතාවයක් ලබා ගන්න. එනයින් Q හි පථය නිර්ණය කරන්න. (1997)

(26) Z_1 සහ Z_2 යනුවෙන් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ගනිමු.

i) $\text{Re}(Z_1\overline{Z_2}) = \text{Re}(\overline{Z_1}Z_2)$

ii) $|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1|^2 - 2\,\text{Re}(Z_1\overline{Z_2}) + |Z_2|^2$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $|1 - Z_1\overline{Z_2}|^2 - |Z_1 - Z_2|^2 = (1 - |Z_1|^2)(1 - |Z_2|^2)$ බව පෙන්වන්න.

$|Z_2| < 1$ සහ $Z_1\overline{Z_2} \neq 1$ ලෙස ගනිමු. 1 ට වඩා $|Z_1|$ අඩුවීම හෝ වැඩිවීම හෝ අනුව 1 ට වඩා $\left|\frac{Z_1 - Z_2}{1 - Z_1 Z_2}\right|$ අඩු හෝ වැඩි හෝ වන බව පෙන්වන්න. α යනු $2Z^5 - iZ^4 - iZ - 2 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් නම් $|\alpha| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

[ඉඟිය : දී තිබෙන සමීකරණය $\frac{1}{Z^4} = \frac{Z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{iZ}{2}}$ ලෙස ලියන්න.] (1998)

(27) අ) ආගන්ඩ් සටහනේ P_1, P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ලබාගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.

i) $|Z_1 - Z_2| = P_1P_2$

ii) $|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$ ද Z_1 සහ Z_2 නිශ්ශුන්‍ය ද නම් $\left|\text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$

iii) $\left|\text{Arg}\left(\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2}\right)\right| = \frac{\pi}{2}$ නම් $|Z_1| = |Z_2|$ බව පෙන්වන්න.

ආ) ආගන් සටහනේ A, B, P ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් a, b, z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. A සහ B යනු අචල ලක්ෂ්‍යයන් ද P යනු $\left|\frac{z - a}{z - b}\right| = k$ (නිශ්ශුන්‍ය නියතයක්) වන පරිදි වූ විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ද නම් $k = 1$ සහ $k \neq 1$ අවස්ථා දෙක වෙන වෙනම සලකමින් P හි පථය සොයන්න. (1998)

(28) Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන්ඩ් රූ සටහනේ P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය ද, w යනු දී ඇති සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් ද යැයි ගනිමු. O වටා ϕ කෝණයකින් වාමාවර්ත අතට OP භ්‍රමණය කළ විට P හි නව පිහිටීම P' යැයි ගනිමු. මෙහි $\phi = \text{Arg } w$ වේ. Q යනු $OQ = |w|OP'$ වන පරිදි OP' මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම් Q මගින් zw සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

$|Z - a| = a$ වෘත්තය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව ද එහි කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටන බව ද සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි a යනු ධන නියතයකි.

$|Z - a| = a$ විට

i) $z \neq 0$ සඳහා, $z - 2a = i\,z\tan\theta$ බව ද,

ii) $\text{Re}\left(\frac{1}{z - 2a}\right)$, z හි අගය මත රඳා නොපවතින බව ද පෙන්වන්න. මෙහි $\theta = \text{Arg } z$ වේ. (1999)

(29) අ) $\frac{(-1+i)^5}{(1+i)^4}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය වීජීය ලෙස සොයන්න.

ආ) P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යයන් ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනේ $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම ලබාගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් සපයන්න.

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ හා $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ ලකුණු කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $Z_1 + Z_2$ හි පිහිටීම සොයන්න.

$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ බව අපෝහනය කරන්න. (2000)

(30) අ) $\text{Arg}\,(z - a) = \alpha$ නම්, Z හි පථය විස්තර කරන්න. මෙහි $a \in \mathbb{R}$ සහ $0 < \alpha < \pi$ වේ.

$\text{Arg}\,(z + 1) = \frac{\pi}{6}$ සහ $\text{Arg}\,(z - 1) = \frac{2\pi}{3}$ බව දී ඇත. මුල් කොටස උපයෝගී කරගනිමින් Z සොයන්න.

ආ) $\frac{5-i}{2-3i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\lambda\,(1+i)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙහි a තාත්ත්වික වේ. λ හි අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $\left[\frac{5-i}{2-3i}\right]^6$ අතාත්වික බව පෙන්වා එහි අගය නිර්ණය කරන්න. (2001)

(31) Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, $z = x + iy$, $x > 0$, $y > 0$ මඟින් දෙනු ලැබේ. ආගන් සටහනේ z, $2iz$, $z+2iz$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් A,B,C වේ. A,B,C ලක්ෂ්‍ය සළකුණු කර $A\hat{O}B$ සහ $\tan A\hat{O}C$ නිර්ණය කරන්න.

i) C අතාත්වික අක්ෂයේ පිහිටයි නම් x සහ y අතර සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න.

ii) $y = 2x$ නම්, z^2, සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය OC රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

iii) $|z| \leq 4$ සහ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \text{Arg}\,z \leq \tan^{-1}(2)$ වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්ගෙන් සමන්විත පෙදෙස වෙනත් රූප සටහනක අඳුරු කරන්න.

අඳුරු කළ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න. (2002)

(32) $\omega = \sqrt{3} + i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r\,(\cos\theta - i\sin\theta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ වන අතර $0 \leq \theta < 2\pi$ පරිදි වූ θ, රේඩියන වලින් ඇත.

ඉහත ස්වරූපයෙන් $\omega^2, \omega^3, \omega^4$ සහ ω^5 ලබාගන්න.

$6 < |z| < 30$ සහ $\frac{\pi}{6} < \text{Arg}\,z < \frac{5\pi}{6}$ වන සේවූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ් සටහනේ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය වලින් සමන්විත R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

ω^n $(n = 1,2,\ldots,5)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය අතරින් කුමන ලක්ෂ්‍ය R පෙදෙසේ පිහිටන්නේ දැයි නිර්ණය කරන්න. (2003)

(33) Z යනු $\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යැයි ගනිමු. $2Z^2$ හා $\frac{3}{z^2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න.

ආගන්ඩ් සටහනක O මූල ලක්ෂ්‍යය ද A යන්න $2z^2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද B යන්න $\frac{3}{z^2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි.

O හා B හරහා යන රේඛාව මත Z නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යය පිහිටන්නේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
OACB සමාන්තරාස්‍රයක් වන සේ C ලක්ෂ්‍ය තෝරාගෙන ඇත. C මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව p + iq කාටීසීය ආකාරයෙන් නිර්ණය කරන්න.
OACB හි විකර්ණවල දිග සොයන්න. (2004)

(34) a) Z_1 සහ Z_2 යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු. ආගන්ඩ් සටහනෙහි $Z_1 + Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන ලක්ෂ්‍ය නිර්මාණය කරන්න.
$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ වන අවස්ථාව විදහා දක්වෙන රූප සටහනක් අඳින්න.
සාධාරණ වශයෙන් $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ වන්නේ ඇයිදැයි ජ්‍යාමිතිකව පැහැදිලි කරන්න.
$Z_1 = -12+5i$ හා $|Z_2| = 5$ නම්, $|Z_1 + Z_2|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.
$|Z_1 + Z_2|$ට ස්වකීය වැඩිතම අගය ඇත්නම් හා $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z_2 < \pi$ නම්, p +iq ආකාරයෙන් Z_2 ප්‍රකාශ කරන්න.

b) ආගන්ඩ් සටහනේ A,B,C,D ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් Z_1, Z_2, Z_3 හා Z_4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. AB හා CD ලම්බව ඡේදනය වේ නම්, එවිට $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ හුදෙක් අතාත්වික බව පෙන්වන්න. (2005)

(35) a) $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$ බව පෙන්වන්න.
$Z_1 = -1 + i$ සහ $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ හි තාත්ත්වික කොටස සහ අතාත්වික කොටස සොයන්න.
Z_1 සහ Z_2 එක එකක් $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ සහ $0 < \theta < \pi$ වේ.
$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ බව අපෝහනය කරන්න.

b) R යනු, ආගන්ඩ් සටහනෙහි $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ සහ $|Z - 2| \leq 1$ අවශ්‍යතා සපුරාලන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස ලෙස ගනිමු. R පෙදෙස අඳුරු කර, Z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය R පෙදෙස පුරා විචලනය වන විට Z හි ප්‍රධාන විස්තාරය 'Arg z' විශාලතම වන පරිදි Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (2006)

(36) a) $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ හා $Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන් සටහනක පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කෙරෙයි. $\operatorname{Arg} z_1$ හා $\operatorname{Arg} z_2$ සොයන්න.
OACB යනු ආගන් සටහනේ සමචතුරස්‍රයක් යැයි දී ඇත්නම් C මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න. මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

b) i) $\left|Z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leq 2$ අවශ්‍යතාව යටතේ $|Z - 3|$ හි අඩුතම හා වැඩිතම අගයන් සොයන්න.
ii) $\operatorname{Arg}(z-1) = \frac{\pi}{6}$ අවශ්‍යතාව යටතේ $|Z|$ හි අඩුතම අගය සොයන්න. (2007)

(37) $Z^3 - 1$ සාධකවලට බිඳීමෙන් $Z^3 - 1 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.
ඉහත සමීකරණයෙහි එක් සංකීර්ණ මූලයක් ω නම්, අනෙක ω^2 බව පෙන්වන්න.
$r = 1,2,3$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\omega^r}\right) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වා ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.
Z_1 , Z_2 සහ Z_3 යනු $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_1Z_2 - Z_2Z_3 - Z_3Z_1 = 0$ සම්බන්ධය තෘප්ත කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනකි. Z_1 යන්න $Z_1 = -\omega Z_2 - \omega^2 Z_3$ හෝ $Z_1 = -\omega^2 Z_2 - \omega Z_3$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.
Z_1, Z_2 හා Z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව අපෝහනය කරන්න. (2008)

(38) a) $-80 - 18i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි වර්ගමූලය සොයා, $4z^2 + (16i - 4)z + (65 + 10i) = 0$ වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.
b) ආගන්ඩ් සටහනක $\mathrm{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{3}$ සමීකරණය විවරණය කර $|Z|$ හි අවම අගය සොයන්න.
c) ω යනු $z^3 - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි සංකීර්ණ මූලයක් නම්, එවිට ω^2 අනෙක් සංකීර්ණ මූලය බව පෙන්වන්න.
$\omega^{2k} + (1 + \omega)^k = 0$ බව ද පෙන්වන්න. මෙහි k ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.
ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය k සඳහා $x^2 + x + 1$ යන්න $x^{2k} + (1 + x)^k$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න. (2009)

(39) a) $|Z - a| = |Z + a|$ සපුරාලනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිර්ණය කරන්න. මෙහි a යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.
b) z_1 හා $z_2\ (\neq 0)$ යනු $|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.
a) කොටස උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ , $\frac{iz_1}{z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි k තාත්ත්වික වේ.
i) $|\mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)| = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.
ii) ආගන්ඩ් සටහනෙහි P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යය දෙක පිළිවෙලින් $Z_1 + 2Z_2$ හා $Z_1 - 2Z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.
OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නොවේ නම්, $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left[\frac{4|k|}{k^2-4}\right]$ බව පෙන්වන්න. මෙහි O යනු ආගන්ඩ් තලයේ මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.
OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිර්ණය කරන්න. (2010)

(40) a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + \mu I = I$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න. මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාස වේ.
ඒනයින්, A^{-1} සොයන්න.
b) P, Q හා R යනු ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් Z_0, Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.
PQ = PR ද, θ යනු PQ සිට PR ට වාමාවර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්,
$Z_2 - Z_0 = (Z_1 - Z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස ගත්තා ලද A,B,C හා D ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් $1-i$ හා z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z ඇසුරෙන් සොයන්න.
AC = 2 වන අයුරින් C විචලනය වෙයි නම්, B හි පථය ආගන් සටහනෙහි සොයන්න.
(2011)

(41) Z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.
$|Z|^2 = Z\overline{Z}$ හා $|Z| \geq \mathrm{Re}\, z$ බව සාධනය කරන්න.
ඒනයින් ඕනෑම Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$ බව පෙන්වන්න.
$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ බව අපෝහනය කරන්න.
$|Z - i| < \frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2} < |Z| < \frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.
$|Z - i| \leq \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}\, z \leq \frac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න. (2012)

(42) a) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.
$Q^TQ = \lambda I$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න. මෙහි Q^T යනු Q න්‍යාසයෙහිම පෙරළුම වන අතර I යනු 2 x 2 ඒකක න්‍යාසය වේ.
ඒනයින්, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.
A = AP = PD වන පරිදි වූ 2 x 2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. මෙහි $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ වේ.
A සොයන්න.
b) $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. Z හි මාපාංකය $|Z|$ හා Z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\overline{Z}$ අර්ථ දක්වන්න.
$|Z|^2 = Z\overline{Z}$ හා $Z - \overline{Z} = 2i\, \mathrm{Im}\, z$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $|Z - 3i|^2 = |Z|^2 - 6\mathrm{Im}\, Z + 9$ හා $|1 + 3iZ|^2 = 9|Z|^2 - 6\mathrm{Im}\, z + 1$ බව පෙන්වන්න.
$|Z - 3i| > |1 + 3iZ|$ වන්නේ $|Z| < 1$ නම් පමණක් අපෝහනය කරන්න.
$|Z - 3i| > |1 + 3iZ|$ හා $\mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න. (2013)

(43) එකම ආගන්ඩ් සටහනක

i) $\mathrm{Arg}\,(z+1) = \frac{\pi}{3}$ ii) $\mathrm{Arg}\,(z-1) = \frac{3\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (2014)

(44) a) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ හා $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $A^T A = B$ වන පරිදි

a හා b හි අගයන් සොයන්න. මෙහි A^T මගින් A න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ.

$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ හා $X = \begin{bmatrix} u \\ u+1 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $CX = \lambda BX$ යැයි ද

ගනිමු. මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $C - \lambda B$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

b) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

i) $|1-z|^2 = 1 - 2\,\text{Re}\, z + |z|^2$ බව හා

ii) $z \neq 1$ සඳහා $\text{Re}\left[\dfrac{1}{1-z}\right] = \dfrac{1-\text{Re}\, z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\text{Re}\left[\dfrac{1}{1-z}\right] = \dfrac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

S යනු $\text{Re}\left[\dfrac{1}{1-z}\right] = \dfrac{1}{2}$ හා $-\dfrac{\pi}{3} < \text{Arg}\, z < \dfrac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙකම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

z යන්න S තුළ වේ නම් හා $\text{Re}\, z + \text{Im}\, z = = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left[\dfrac{\pi}{12}\right] - i \sin$

$\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$ බව පෙන්වන්න.

අලුත් නිර්දේශයට අනුව විස්. $(\not z\,) = \text{Arg.}\,(\not z\,)$ ද, තා. කො $\not z = \text{Rel.}\not z$ ද, අතා. කො $(\not z\,) = \text{Im}\,(\not z\,)$ ද ලෙස භාවිත කරයි. (2014)

(45) ආගන්ඩ් සටහනක් මත $|z - 3 + 4i| = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. **ඒනයින්**, C මත පිහිටි z සඳහා $|z + 4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න. (2015)

(46) a) A, B හා C න්‍යාස තුනක්,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

i) $\mathbf{AC} = \mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. CA ගුණිතයක් සොයන්න.

ii) $\mathbf{BC} = \mathbf{I_2}$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

iii) $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{I_2}$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, **A** හා **B** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒනයින් **DC** ගුණිතය සොයන්න.

b) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ ; මෙහි θ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ තාත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\frac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \frac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු ; මෙහි z යන්න $z \neq \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

i) $\text{Im}(w) = 0$ හා $\text{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්** හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න. (2015)

සරල අනුවර්තී චලිතය

(1) ස්වාභාවික දිග l හා ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය $\boldsymbol{\lambda}$ වූ ලුහු සර්පිල දුන්නක A හා B දෙකෙළවරට පිළිවෙලින් ස්කන්ධය m_1 හා m_2 වූ අංශු දෙකක් ආදා ඇත. A අචලව තබාගත් විට B, $\mathbf{t_2}$ කාලාවර්තයකින් දෝලනය වේ. B අචලව තබාගත් විට $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}\sqrt{\frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{m_2}}}$ යන්නෙන් ලැබෙන $\mathbf{t_2}$ කාලාවර්තයකින් A දෝලනය වන බව පෙන්වන්න. අංශු දෙකටම චලනය වීමට නිදහස ඇති විට දුන්නේ දෝලන කාලාවර්තය ද සොයන්න. (1976)

(2) සරල රේඛාවක වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට යොමු වූද විශාලත්වය $m\boldsymbol{\omega}^2(OP)$ වූද බලයක ක්‍රියාව යටතේ m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් එම රේඛාව ඔස්සේ චලනය වෙයි. මෙහි $\boldsymbol{\omega}$ යනු නියතයකි. A ලක්ෂ්‍යයක දී අංශුව නිශ්චලතාවයෙහි සිට ගමන් අරඹන අතර O සිට x දුරකින් වන විට අංශුවේ වේගය V නම් $V^2 = \boldsymbol{\omega}^2\ (a^2 - x^2)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි a = OA ස්වාභාවික දිග 6a වන ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත 9a පරතරයකින් පිහිටි A,B ලක්ෂ්‍යය දෙකක් අතර ඇද තබා තන්තුවේ A ට නුදුරු ත්‍රිච්ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට m ස්කන්ධයෙන් යුත් අංශුවක් ගැට ගසනු ලැබෙයි. AB මත A සිට a දුරකින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයට අංශුව විස්ථාපනය කර නිශ්චලතාවයෙන් මුදනු ලැබෙයි. AB මත A සිට $\frac{(9+\sqrt{30})a}{3}$ දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයට අංශුව ළඟා වූ විට අංශුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවට එළැඹෙන බව පෙන්වන්න. (1977)

(3) ස්වාභාවික දිග a ද මාපාංකය mg ද ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවෙක එක් කෙළවරක් තිරස් සුමට මෙසයක O ලක්ෂ්‍යයෙක දී අචල ලෙස සවිකර ඇත. එහි අනෙක් කෙළවරට m ස්කන්ධය ඇති අංශුවක් ඇදනු ලැබෙයි. ආරම්භයේ දී අංශුව මේසය මත O සිට a+b දුරකින් නිශ්චලතාවයෙහි තබාගනු ලැබෙයි. අංශුව මදා හැරියොත් $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{b}\right)\sqrt{a/g}$ කාලයකට පසු එය O කරා එළැඹෙන බව පෙන්වන්න. මේ අංශුව O හරහා යන විට එය O හිදි නිශ්චලතාවයෙහි පිහිටි 2m ස්කන්ධය ඇති අංශුවක් සමඟ හා වෙයි. සංයුක්ත අංශුවට O කරා ආපසු ඒමට කොපමණ කාලයක් ගතවේ දැයි සොයන්න. (1980)

(4) O, A, B, C අචල ලක්ෂ්‍ය හතරක් සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. OA= AB =BC = a වේ. P අංශුවක් මේ සරල රේඛාව ඔස්සේ චලනය වන්නේ එහි ත්වරණය
P අංශුව OA ඛණ්ඩයෙහි පිහිටි විට, $\ddot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\omega}^2 x$ මගින්ද
P අංශුව AB ඛණ්ඩයෙහි පිහිටි විට, $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ මගින්ද
P අංශුව BC ඛණ්ඩයෙහි පිහිටි විට, $\ddot{\mathbf{x}} = -\boldsymbol{\omega}^2 a$ මගින්ද දක්වෙන පරිදිය.
මෙහි $x = OP$ වේ. $\boldsymbol{\omega}$ යනු නියතයකි. අංශුව 0 සිට $\sqrt{3}\, a\boldsymbol{\omega}$ ප්‍රවේගයකින් OABC දිශාව ඔස්සේ ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. C හි දී එහි ප්‍රවේගය ශූන්‍ය බව පෙන්වන්න. O ලක්ෂ්‍යයට ආපසු පැමිණීමට අංශුව ගන්නා මුළු කාලය සොයන්න. (1981)

(5) ගල් අඟුරු පතුලෙක ඇති ඔසොව්වක් 2 h ගැඹුරති AB සිරස් දිශාවක් ඔස්සේ පහලට චලනය වෙයි. A පිහිටා ඇත්තේ පෘථිවි පෘෂ්ඨය මතය. B පිහිටා ඇත්තේ ගල් අඟුරු පතලේ අඩියෙහිය. $\boldsymbol{\omega}$ නියතයක් ද x යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන 0 සිට ඔසොව්වේ බිමට ඇති දුර ද වූ විට ඔසොව්ව 0 දෙසට යොමුව $\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{x}$ ත්වරණයෙකින් චලනය වෙයි. ඔසොව්වේ බිම A හි දීත් B හි දීත් නිශ්චලතාවයට පැමිණෙයි. A සිට B තෙක් චලනය වීමට ඔසොව්වට ගත වන කාලය ප්‍රමූලධර්ම ඇසුරෙන් සොයන්න. m ස්කන්ධයෙන් යුත් පතල් කරුවෙක් ඔසොව්ව තුළ සිට ගෙන සිටියි. ඔහුගේ පාමත බිමෙහි ප්‍රතික්‍රියාවේ වැඩිතම හා අඩුතම අගයයන් සොයන්න. $\boldsymbol{\omega} \leq \sqrt{\frac{g}{h}}$ බව අපෝහනය කරන්න. $\boldsymbol{\omega} > \sqrt{\frac{g}{h}}$ නම් පතල්කරු ගමන ආරම්භයේදී $\frac{1}{\omega}$ කොස්$^{-1}\left(\frac{g}{h\omega^2}\right)$ කාලයක් තුළ ඔසොව්වෙහි ඇති ආරක්ෂක අල්ලු වළලු අල්ලාගෙනම සිටිය යුතු බව පෙන්වන්න. (1982)

(6) ස්වාභාවික දිග a වූද ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය mg වූ ද ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථතා තන්තුවක කෙළවරවල් රළු තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවෙහි පවත්නා M ස්කන්ධයෙන් යුත් A භාරයකටද m ස්කන්ධයෙන් යුත් B අංශුවකටද ඈඳා තිබෙයි. මේසයත් A භාරයත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\boldsymbol{\mu}$ ය. මේසයත් අංශුවත් ඝර්ෂණ සංගුණකය ද $\boldsymbol{\mu}$ ය. ආරම්භයේදී B අංශුව A සිට a දුරක පිහිටි L ලක්ෂ්‍යයක දී අල්ලා තබාගනු ලැබෙයි. ඉක්බිති එය AL දිශාව ඔස්සේ $\sqrt{8\mu^2 ag}$ ප්‍රවේගයෙන් මේසය දිගේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. A භාරය මේසය මත නිශ්චලතාවෙහි පවතින්නේ යැයි උපකල්පනය කර තන්තුවේ උපරිම විතතිය සොයා $M \geq \mathbf{2m}$ බව පෙන්වන්න. අවසානයේ දී B අංශුව $\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{g}}$ කාලයකට පසුව එහි ආරම්භක L ලක්ෂ්‍යයේදී නිත්‍ය වශයෙන් නිශ්චලතාවට පත්වන බව ද පෙන්වන්න. (1983)

(7) ස්කන්ධය m වූ වීදුරු බෝලයක් ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ත තන්තුවකින් අචල A ලක්ෂ්‍යයකට ගැටගසා ඇත. අංශුව Aලක්ෂ්‍යයෙහි නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබ ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට එළඹීමට පෙර $2l$ දුරක් වැටේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය 4mg බවත් වීදුරු බෝලය $\sqrt{\frac{l}{g}}\left[2\sqrt{2} + \pi - \cos^{-1}(t)\right]$ කාලයකට පසු A වෙත ආපසු එන බවත් පෙන්වන්න. (1984)

(8) අංශුවක් විස්තාරය 1m වූ ද කාලාවර්තය 8s වූ ද සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් සරල රේඛාවක් දිගේ චලනය වෙයි. අංශුවේ උපරිම වේගය ms^{-1} වලින් ද උපරිම ත්වරණය ms^{-2} වලින් ද සොයන්න. තව ද කේන්ද්‍රික පිහිටුමේ සිට $\frac{1}{2}$ m ක් දුරක දී අංශුවේ වේගය ms^{-1} වලින් සොයන්න. අංශුවේ වේගය එහි උපරිම වේගයෙන් අඩක් වන මොහොත් දෙකක් අතර කුඩාම කාල අන්තරය $\frac{4}{3}$ s බව පෙන්වන්න. (1986)

(9) m ස්කන්ධයෙන් යුතු P අංශුවක් ස්වාභාවික l වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් O අචල ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තිබෙයි. ආරම්භයේ දී P අංශුව O හිදී නිශ්චලතාවේ සිට වැටෙයි. ඉන් ඇතිවන චලිතයේදී O ට පහළින් P අංශුවේ වැඩිතම ගැඹුර $3l$ නම් තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $\frac{3}{2}$ mg බව පෙන්වන්න. $\sqrt{\frac{2l}{g}}\left[1+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right]$ කාලයකදී වැඩිතම ගැඹුර සහිත ලක්ෂ්‍ය වෙත ළඟා වන බව සාධනය කරන්න. (1987)

(10) ස්වාභාවික දිග a ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg ද වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවෙක එක් කෙළවරක් m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවකට ඇඳා තිබෙයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර O නම් අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකොට ඇත. O සිට පහළට $\frac{a}{2}$ දුරෙක පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයකදී අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(2+\frac{3\pi}{2}\right)$ කාලයකට පසු අංශුව P ලක්ෂ්‍යය වෙතට නැවත පැමිණෙන බව ඔප්පු කරන්න. අංශුව ලබාගත් වැඩිතම වේගය සොයන්න. (1988)

(11) නොඇදි දිග l සහ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය W වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් බර W වන P අංශුවක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. විස්තාරය 2a වන සිරස් දෝලන P විසින් සාදනු ලබයි නම් t කාලයේදී O සිට එහි ඇති දුර $2\left(l+a\sin t\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි කාලය මැන ඇත්තේ P ස්වකීය සමතුලිත පිහිටුමේ ඇති මොහොතේ සිට වේ. ස්වකීය සමතුලිත පිහිටුමේ සිට අංශුව ඉහළ නගින විට එය සමාන බරින් යුත් වෙනත් අංශුවක් අහුලා ගනී නම් දෝලනයේ විස්තාරය $\sqrt{l^2+2a^2}$ වන බව ද පෙන්වන්න. (1989)

(12) ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් ගුරුත්වය යටතේ අචල ලක්ෂ්‍යයකින් අංශුවක් එල්ලා තිබේ. අංශුව සමතුලිතව එල්ලෙමින් පවතින විට තන්තුව එහි ස්වාභාවික දිගේ සිට C දුරකට ඇදී පවතී. සමතුලිත පිහිටීම වටා කුඩා සිරස් දෝලනවල කාලාවර්තය $2\pi\left(\frac{c}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ බව පෙන්වන්න. දැන් සමතුලිත පිහිටුමේ සිට ඊට පහළින් 3c දුරකට යන තෙක් අංශුව පහළට ඇද ඉන්පසු නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුව $\left[\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+2\sqrt{2}\right]\left(\frac{c}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ ඉහළ නගින බව ඔප්පු කරන්න. (1990)

(13) ස්වාභාවික දිග a + b ද මාපාංකය λ ද වන AB ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක දෙකෙළවර සුමට තිරස් මේසයක් මත a + b දුරක පරතරයක් ඇතිව සවිකර තිබෙයි. m ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක් P ලක්ෂ්‍යයේ දි තන්තුවට ඇඳා ඇත්තේ අංශුව සමතුලිතතාවේ පවතින විට AP = a, PB = b වන පරිද්දෙනි. අංශුව AQ = a+c වන පරිදි ඇති Q ලක්ෂ්‍යයේදී නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. එහි $0 < c < b$ එය $\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ මුළු කාලයකට පසුව $\frac{2c}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ මුළු දුරක් ගමන් කර Q ලක්ෂ්‍යයට ආපසු පැමිණෙන බව පෙන්වන්න. (1991)

(14) අ) P ලක්ෂ්‍යයක් xOy තලයේ චලනය වන්නේ කෙසේ ද යත් t කාලයක දී එහි පිහිටුම් දෛශිකය $\overrightarrow{OP} = (a\cos\omega t)\,i + (a\sin\omega t)\,\underline{j}$ වන පරිදිය. මෙහි a, ω යනු පිළිවෙලින් Ox, Oy අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික ද වෙයි. P ගේ පෙත වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න. P ගේ ප්‍රවේගයෙත් ත්වරණයෙත් විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න. තව ද N යනු P සිට Ox අක්ෂයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය නම්, N සරල අනුවර්තී චලිතයෙක යෙදෙන බවත් එහි ආරම්භක පිහිටීමේ (t = 0) සිට $P\hat{O}N$ = රේඩියන් α වන පරිදි වූ පිහිටීම තෙක් ගත වන කාලය $\frac{\alpha}{\omega}$ බවත් පෙන්වන්න.

ආ) පෘථිවි පෘෂ්ඨය තුළ වූ වස්තුවක් එහි සිට පෘථිවි කේන්ද්‍රයට ඇති දුරට අනුලෝම වශයෙන් සමානුපාතික බලයකින් පෘථිවියේ කේන්ද්‍රය දෙසට ආකර්ෂණය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින් වස්තුවක් පෘථිවි පෘෂ්ඨයේ සිට 32 km ගැඹුරු සිරස් වලක පතුලට වැටීමට ගතවන (පෘථිවියේ අරය = 6400 km ලෙස ද ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10\ ms^{-2}$ ලෙස ද ගන්න.) (1992)

(15) අ) සර්පිල දුන්නක් මගින් අචල ලක්ෂ්‍යයකින් ස්කන්ධයක් එල්ලා ඇත. ස්කන්ධය නිශ්චලතාවේ ඇති විට විතතිය l වේ. ස්කන්ධයට සිරස් චලිතයක් ලබාදුන් විට තත්පරයකට ඇතිවන පූර්ණ දෝලන සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ආ) Oxy තලය මත P නම් ලක්ෂ්‍යයක් චලනය වන්නේ t කාලයේදී එහි පිහිටුම් දෛශිකය $\overrightarrow{OP} = (a\cos\omega t)\,\underline{i} + (b\sin\omega t)\,\underline{j}$ වන ලෙසය. මෙහි a,b සහ ω ධන නියතයක් ද වන අතර $\underline{i}$ සහ $\underline{j}$ පිළිවෙලින් $\overrightarrow{OX}$ සහ $\overrightarrow{OY}$ අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික වේ. P හි පෙත ඉලිප්සියක් බව පෙන්වා P හි ප්‍රවේගයේ සංරචක සහ ත්වරණයේ සංරචක සොයන්න. $\overrightarrow{OX}$ සහ $\overrightarrow{OY}$ මත P හි ප්‍රක්ෂේපණ එකම $\frac{2\pi}{\omega}$ කාලාවර්තය ඇතිව සරල අනුවර්තී චලිත ඇති කරන බව පෙන්වන්න. (1993)

(16) AB ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවේ ස්වාභාවික දිග l ය. එහි A ඉහළ කෙළවර සීලිමකට ඇඳා තන්තුව සිරස්ව තබා ඇත. තන්තුවේ B පහළ කෙළවරින් බර අංශුවක් ගැට ගසා තන්තුව නිශ්චලතාවයේ එල්ලෙන විට e විතතියක් ඇති වෙයි. අංශුව සමතුලිතතා පිහිටීමෙන් තවත් d (> e) දුරක් පහළට ඇද නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහැරිය හොත් අංශුවේ චලිතයෙන් කොටසක් $\sqrt{\frac{g}{e}}$ කෝණික සංඛ්‍යාතය සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වන්න. අංශුව සීලිමේ වදින්නේ නැතිනම් $1 > \left(\frac{d^2-e^2}{2e}\right)$ බව සාධනය කර $2\sqrt{\frac{e}{g}}\left\{\pi + \frac{\sqrt{d^2-e^2}}{e} - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{d^2-e^2}}{e}\right)\right\}$ මුළු කාලයකට පසු අංශුව යළිත් ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙන බව ද සාධනය කරන්න. (1994)

(17) ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යස්ථතා සංගුණකය mg ද වූ ලුහු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකටත් අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකටත් ඇඳා තිබෙයි. අංශුව t = 0 වේලාවේ දී Oහි සිට $\sqrt{(n^2+2)gl}$ ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙසඋඩු අතට ප්‍රක්ෂේපණය කෙරෙයි. මෙහි n යනු ධන නියතයකි. kl යනු අංශුව ළගාවන උපරිම උස ද k යනු 1 ට වැඩි නියතයක් ද විට

i) $0 \le y \le l$ ද

ii) $l < y \leq kl$ ද යන අවස්ථා වෙන්කොට දක්වමින් අංශුව සඳහා 0 ට ඉහළින් අංශුවේ y(t) උස ඇතුළත් චලිතයේ සමීකරණය අවකල සමීකරණයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

ඉහත (ii) අවස්ථාවේ දී $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ද $t \geq t_0$ ද විට $y(t) = A \cos\omega(t - t_n) + B \sin\omega(t - t_0)$ යන්නෙන් ඉහත අවකල සමීකරණය සපුරාලන බව සත්‍යාපනය කර A හා B නියත සොයන්න.

අංශුව $\left[\sqrt{n^2+2} - n + \tan^{-1} n\right]\sqrt{\frac{l}{g}}$ වේලාවකට පසු පහළ බැසීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වා k හි අගය සොයන්න. (1995)

(18) ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ ද වන ලුහු තන්තුවක එක් කෙළවරකට m ස්කන්ධයෙන් යුත් P අංශුවක් ඈඳා ඇති අතර එහි අනෙක් කෙළවර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර තිබෙයි. l දිගින් යුත් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m ම වූ Qඅංශුවක් ද අනෙක් කෙළවරට ද ගැට ගසා ඇත. ආරම්භයේ දී සිරස් සරල රේඛාවක PQ පිහිටන සේ ද OQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වන පරිදි l ස්වාභාවික දිගක් PO ට තිබෙන සේ ද පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ තබා ඉක්බිති එය නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබෙයි. t වේලාවේ දී OP දිග $l + x$ ය. P අංශුවත් Q අංශුවත් සඳහා චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. ඒනයින්, $\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{g}{\omega^2}\right) = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\omega^2 = \frac{\lambda}{2ml}$ t වේලාවේ දී P අංශුවේ පිහිටීම $x = \frac{g}{\omega^2} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ යන්නෙන් දෙනු ලැබෙයි නම්, A හා Bනියතවල අගයයන් නිර්ණය කරන්න. ඒ නයින්,

i) පසුව එළඹෙන චලිතයේදී OP තන්තුවේ දිග කිසිවිටෙක l ට අඩු නොවන බවද,

ii) PQ තන්තුවේ ආතතිය $2mg\sin^2\frac{\omega t}{2}$ බව ද පෙන්වන්න. ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවේ උපරිම විතතිය $2l$ නම්, λ හි අගය සොයා පළමු වැනි වරට උපරිම විතතිය ලබාගන්නා වේලාව $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ බවත් පෙන්වන්න. (1996)

(19) m ස්කන්ධයෙන් යුත් P නම් අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා මේසය මත A, B, Cනම් ලක්ෂ්‍යය තුනකට එය ඈඳා ඇත්තේ ස්වාභාවික දිග පිළිවෙලින් l_1, l_2, l_3 ද මාපාංක පිළිවෙලින් $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ද වන තන්තු තුනක් මඟිනි. ABC යනු පාදයක දිග a සහිත සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නම්ද ත්‍රිකෝණයේ G කේන්ද්‍රකයෙහි අංශුවට සමතුලිතව නිශ්චලතාවේ පිහිටිය හැකි නම් ද,

$a\left(\frac{\lambda_1}{l_1} - \frac{\lambda_2}{l_2}\right) = (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{3}$ බවත්,

$a\left(\frac{\lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_3}{l_3}\right) = (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{3}$ බවත්, පෙන්වන්න.

$\lambda_2 = \lambda_3$ ලෙස ගෙන a හා සැසඳෙන විට x නම් කුඩා දුරකින් අංශුව $\overrightarrow{AG}$ ඔස්සේ BC පාදය වෙතට විස්ථාපනය කොට නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහැරියේ නම්,

මෙවිට $\frac{\lambda_1}{l_1}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + x - l_1\right) + \frac{2\lambda_2}{l_2}(BP - l_2)\cos A\hat{P}B + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{x}{a}$ හි එකකට වඩා වැඩි බලයක් නොසලකා හැරීමෙන් $BP = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2}$ බවත් $\cos A\hat{P}B = \frac{3\sqrt{3}}{4a}x - \frac{1}{2}$ බවත් පෙන්වන්න. එනයින්, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 2\frac{l_1}{l_2} > \frac{3\sqrt{3}}{2a}l_1$ බව දී ඇත්නම් කුඩා x අගයන් සඳහා P අංශුවේ චලිතය සරල අනුවර්තී බව අපෝහනය කරන්න.

(1997)

(20) ස්වාභාවික දිග l ද ස්තබ්ධතාව (දෘඩියාව) k ද, වූ පරිපූර්ණ දුන්නක් සඳහා බල නියමය ප්‍රකාශ කරන්න. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් $4l$ දුරක පරතරයෙන් වූ බිත්ති දෙකකට ලම්බව ඝර්ෂණය රහිත සෘජු තිරස් මගක දෝලනය වෙයි. එම අංශුව ස්වාභාවික දිග l ද ස්තබ්ධතාව k දවූ පරිපූර්ණ දුන්නක් මගින් එක් බිත්තියක වූ A ලක්ෂ්‍යයකටත් සර්වසම දුන්නකින් අනෙක් බිත්තියේ වූ B ලක්ෂ්‍යයකටත් ඈඳා තිබෙයි. එම දුනු මගින් අංශුව මාර්ගය ඔස්සේ තල්ලුවකට හා ඇදිල්ලකට ලක් කෙරෙයි. t වේලාවේ දී $AP = x$ නම්,

i) $x \leq l$ වූ විටත් ii) $l \leq x \leq 3l$ වූ විටත් iii) $3l \leq x \leq 4l$ වූ විටත් අංශුවේ චලිත සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කර ඒවාට එකම ආකාරයක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, චලිතය හැමවිටම කාලාවර්ත බවත් කාලාවර්තය $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ බවත් පෙන්වන්න.

අංශුවට ගතහැකි උපරිම වේගය සොයන්න. (1998)

(21) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l සහ මාපාංකය 2mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනික් කෙළවර O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව සිරස්ව තිබියදී අංශුව එහි සමතුලිත පිහිටීමෙන් d දුරක් පහළට ඇද නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. P අංශුවේ සමතුලිත පිහිටීමේ සිට පහළට සිරස් විස්ථාපනය t කාලයේදී x වෙයි නම්, $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l}x = 0$ බව පෙන්වන්න.

i) $d < \frac{l}{2}$ වෙයි නම් අංශුව එහි සමතුලිත පිහිටීම වටා $\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$ කාලාවර්තය සහිතව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බවත් තන්තුව නොබුරුල්ව තිබෙන බවත් පෙන්වන්න.

ii) $d > \frac{l}{2}$ වෙයි නම් $\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - \sin^{-1}\left(\frac{l}{2d}\right)\right]$ කාලයකට පසු තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න. (1999)

(22) ස්කන්ධය m වූ කොටයක් තිරස් වේදිකාවක් මත සාපේක්ෂ නිශ්චලතාවයේ තිබෙන අතර වේදිකාව විස්තාරය a සහ කාලාවර්තය T වන සිරස් සරල අනුවර්තී දෝලන සිදුකරයි. වේදිකාවේ මධ්‍යන්‍ය පිහිටීමේ සිට සිරස්ව ඉහළට මැන්න විස්ථාපනය x වන විට වේදිකාවෙන් කොටය කෙරෙහි ප්‍රතික්‍රියාව $m\left(g - \frac{4\pi^2 x}{T^2}\right)$ බව පෙන්වන්න. $T = 1s$ නම් කොටය වේදිකාවෙන් ඉවත් නොවන පරිදි තිබිය හැකි විශාලතම විස්තාරය මීටර වලින් අපෝහනය කරන්න. [$\pi^2 \approx 9.8$ බවද ගුරුත්වජ ත්වරණය ms^{-2} වලින් එම අගයම ගන්නා බවද උපකල්පනය කරන්න.] (2000)

(23) ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට සම්බන්ධ කරන ලදුව සමතුලිතතාවේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. අංශුව O ට පහළින් $2l$ විස්ථාපනයකින් වූ C ලක්ෂ්‍යයෙහි ඇත්නම් තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න. අංශුව දැන් C සිට $\sqrt{gl}$ ආරම්භක වේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. t කාලයේ දී එහි O සිට පහළට විස්ථාපනය x වෙයි.

$\ddot{x} + \frac{g}{l}(x - 2l) = 0$ බව පෙන්වා අංශුවේ සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය සහ කාලාවර්තය හඳුන්වා දෙන්න. x හි උපරිම සහ අවම අගයන් ලබාගන්න. (2001)

(24) ස්වාභාවික දිග $2l$ සහ මාපාංකය mg වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ගැට ගසා ඇත. සුමට තිරස් මේසයක එකිනෙකට $4l$ දුරකින් පිහිටි අචල A,B ලක්ෂ්‍ය දෙකකට තන්තුවේ දෙකෙළවර ඈඳා ඇත. ආරම්භයේ දී A,P,B සරල රේඛීයව $AP = 3l$ වන පරිදි P අංශුව නිශ්චලතාවයේ තබා එම පිහිටීමේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. $AP = 2l + x$ වන පරිදි වූ පිහිටීමක P අංශුව තිබෙන විට එහි චලිතයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න. ඒ නයින්, $\omega^2 = \frac{2g}{l}$ වූ, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ සමීකරණය ලබාගන්න. P අංශුවේ සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය. විස්තාරය සහ කාලාවර්තය සොයන්න. තව ද අංශුවේ උපරිම වේගයත් එය ලැබීමට ගතවන අඩුතම කාලයත් සොයන්න. (2002)

(25) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය 4mg ද වන AB ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක A කෙළවරට ගැටගසා ඇති අතර B කෙළවර බිමෙහි සිට $2l$ ට වැඩි උසකින් පිහිටි අචල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. P අංශුව B හි නිසලව තබා මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිතිය පිළිබඳ මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

i) තන්තුවේ උපරිම දිග $2l$ බව පෙන්වා,

ii) තන්තුව යන්තමින් ඇදී ඇති විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න. x (> 1) යනු t කාලයේදී තන්තුවේ දිග යැයි සිතමු. P හි $\dot{x}$ ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණයක් ලියන්න. එම සමීකරණයෙන්, $\ddot{y} + \frac{4g}{l} y = 0; y \geq -\frac{l}{4}$ ආකාරයේ සමීකරණයක් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි $y = x - \frac{5l}{4}$ වේ. y සඳහා $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින් A,B,ω නියත සොයන්න. ඒ නයින්,

iii) y හි උපරිම අගය නිර්ණය කර එමගින් තන්තුවේ උපරිම දිග ලබාගන්න.

iv) P හි වැඩිතම වේගය සොයන්න. (2003)

(26) ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට මුදුවක් තුළින් යන ස්වාභාවික දිග l වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් සීලිමක වූ O ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. මුදුව O ලක්ෂ්‍යයෙහි නිසලව රඳවා තිබියදී තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ඈඳා ඇති ස්කන්ධය M වූ P අංශුවක් සමතුලිතතාවෙන් එල්ලී ඇත. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය 2Mg නම් සමතුලිත පිහිටුමේ දී තන්තුවේ විතතිය $\frac{l}{2}$ බව පෙන්වන්න. දැන් O හි දී නිශ්චලතාවයෙන් මුදනු ලැබූ මුදුව තන්තුව දිගේ ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව යටි අතට සර්පණය වී P සමඟ ගැටී හාවෙයි. මුදුවෙන් හා අංශුවෙන් සමන්විත වූ සංයුත වස්තුව $\frac{m}{M+m}\sqrt{3gl}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව යටි අතට චලනය වීම අරඹන බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ විතතිය x විට සංයුත වස්තුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සංයුත වස්තුව $\sqrt{\frac{2Mg}{(M+m)l}}$ සංඛ්‍යාතය සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව පෙන්වන්න. (2004)

(27) ස්වාභාවික දිග l වූ ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවරින් ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සමතුලිතව එල්ලෙයි. සිරස් සමතුලිත පිහිටීමෙහි තන්තුවේ විතතිය c වෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය සොයන්න.
P

අංශුව සමතුලිතතාවෙන් නිසලව ඇති විට සමාන ස්කන්ධයක් ඇති වෙනත් Q අංශුවක් P ට සිරස්ව ඉහළින් c උසක සිට නිසලව තිබී වැටී P සමඟ ගැටී බද්ධ වෙයි. ගැටුමට පසු t කාලයේ දී තන්තුවේ x විතතිය $\ddot{x} + \omega^2(x - 2c) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.
මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{2c}$ වෙයි. $x = 2c + a\cos\omega t + b\sin\omega t$ වන පරිදි a සහ b නියත සොයන්න. ඒ නයින්, සංයුක්ත අංශුව ගැටුමෙන් $\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{2c}{g}}$ කාලයකට පසුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වා මෙම මොහොතේ තන්තුවේ විතතිය සොයන්න. (2005)

(28) ස්වාභාවික දිග l සහ මාපාංකය mg වූ ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එක් දාරයක සිට $2l$ දුරකින් වූ අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇත. සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මඟින් P අංශුව ස්කන්ධය m වූ දෙවැනි Q අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී $OP = PQ = l$ ලෙස Q අංශුව මේසයේ දාරය අසල තබා සීරුවෙන් ඉවතට තල්ලු කරනු ලබන්නේ පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට චලනය වීමට පටන්ගන්නා පරිදි ය. t කාලයේ දී $OP = l + x$ වන අතර P අංශුව මේසය මත තිබියදී Q අංශුව මේසයේ මට්ටමෙන් x ගැඹුරකින් පිහිටයි. යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\dot{x}^2 = \omega^2[l^2 - (l - x)^2]$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{2l}$ වෙයි. P අංශුවේ ඇතිවන සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය සහ විස්තාරය සොයන්න. P අංශුව මේසයේ දාරයට ළඟාවන්නේ $t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ මොහොතේ දී බව පෙන්වා එවිට එහි වේගය සොයන්න. (2006)

(29) ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. අංශුව සමතුලිතව එල්ලී තිබෙන විට තන්තුවේ දිග $\frac{3l}{2}$ වෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය සොයන්න. අංශුව ස්වකීය සමතුලිත පිහිටීමේ සිට a දුරක් සිරස්ව පහළට ඇද එහි සිට නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබෙයි. සමතුලිත පිහිටීමේ සිට පහළට මනින ලද අංශුවෙහි විස්ථාපනය t කාලයේ දී x වෙයි. තන්තුව ඇදී තිබෙන තාක් $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\omega^2 = \frac{2g}{l}$ වෙයි.

i) $a < \frac{l}{2}$ අවස්ථාවේ දී සිදුවන චලිතයෙහි කාලාවර්තය සහ විස්තාරය සොයන්න.

ii) $a = \frac{l}{2} + b, (b > 0)$ අවස්ථාවේ දී තන්තුව පළමුවරට බුරුල්වීමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{l}{l+2b}\right)\right]$ බව පෙන්වන්න. [$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ සමීකරණයේ විසඳුම $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ බව උපකල්පනය කිරීම මැනවි. මෙහි A සහ B යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත දෙකකි.] (2007)

(30) ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවරෙහි පිළිවෙලින් ස්කන්ධ m සහ 3m වූ P සහ Q අංශු දෙකක් තන්තුව $l + 4a$ දිගකට විස්තීරණය කරමින් සමතුලිතතාවේ එකට එල්ලෙයි. Q අංශුව ක්ෂණිකව ඉවතට වැටෙයි. t කාලයකට පසුව තන්තුවේ දිග $l + x$ වෙයි නම්, $x > 0$ සඳහා $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a) = 0$ සමීකරණය ලබාගන්න. සමීකරණයෙහි විසඳුම $x = a + b \sin \omega x + c \cos \omega t$ බව දී ඇත්නම් b සහ $\underline{c}$ නියතවල අගයන් සොයන්න. මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වෙයි. P අංශුව ආරම්භක පිහිටීමෙන් ඉහළට ළඟාවන උපරිම උස සොයා එම උසට ළඟාවීමට ගතවන කාලය $\sqrt{\frac{a}{g}}\{\pi - \alpha + 2\sqrt{2}\}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි α යනු $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ සුළු කෝණයයි. (2008)

(31) P අංශුවක් $x^2 + y^2 = a^2$ වෘත්තය මත ඒකාකාර $a\omega$ වේගයෙන් චලනය වෙයි. Q යනු P සිට y අක්ෂය මත ලම්බයේ අඩිය නම්, කාලාවර්තය $\frac{2\pi}{\omega}$ වූ සරල අනුවර්තී චලිතයක Q යෙදෙන බව පෙන්වන්න. ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු සර්පිල දුන්නක් ස්වකීය අක්ෂය සිරස්ව ඇති ව පහත කෙළවරෙහි සවිකර ඇත. දුන්නේ උඩු කෙළවර මත තබන ලද ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට නිශ්චලව තිබෙන දුන්න d දුරක් සම්පීඩනය කළ හැකිය. මෙහි $d < l$ වේ. එම අංශුවම h උසක සිට දුන්නේ උඩු කෙළවර මත වැටීමට සැලැස්වූයේ නම්, $l \geq a + d$ බව දී ඇති විට විස්තාරය $a = \sqrt{d^2 + 2dh}$ වන සරල අනුවර්තී චලිතයක අංශුව යෙදෙන බව පෙන්වන්න. මෙම චලිතයේ දී අංශුව අඩු තරමින් $\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$ කාල ප්‍රාන්තරයක් වත් දුන්න මත රැඳී පවතී නම්, $\left(\frac{h}{d}\right)$ හි උපරිම අගය සොයන්න. (2009)

(32) ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l වූ ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර සීලිමක O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය නම්, P අංශුව සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙන විට තන්තුවේ a විතතිය $a = \frac{mgl}{\lambda}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. OP සිරස්වන ලෙස ද එහි දිග $l + a + b$ ට සමාන වන ලෙස ද තන්තුව වැඩි දුරටත් $b(> a)$ දිගකින් අදිනු ලැබේ. P අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරෙයි. තන්තුවේ දිග $l + a + x$ වන විට P අංශුවේ චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $-a \leq x \leq b$ වේ. ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A හා B සොයන්න. $\alpha \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ වන $\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right]$ කාලයක් සඳහා P අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව ද සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් P අංශුව ඉවත්වන මොහොතේ දී එහි ප්‍රවේගය උඩුඅතට $\sqrt{\frac{g}{a}(b^2 - a^2)}$ බව ද පෙන්වන්න. අනතුරුව P අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන බවද $b > a\sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}}$ නම්, එය නිශ්ශුන්‍ය ප්‍රවේගයකින් සීලිමේ ගැටෙන බවද පෙන්වන්න. (2010)

(33) ස්වාභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ ද වන තුනී සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ දුන්නක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇත. එහි කෙළවරක් මේසය මත වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. එහි අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඇඳා ඇත. මේසය දිගේ දුන්න ඇද මුදා හරිනු ලැබෙයි. ආවර්ත කාලය $2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක අංශුව යෙදෙන බව පෙන්වන්න. (2011)

(34) ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ඇඳා ඇත. තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර තිරස් පොළොවක සිට $4l$ උසින් පිහිටි අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. P අංශුව සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙන විට තන්තුවේ විතතිය l වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න. P අංශුව දැන් O හි තබා $\sqrt{gl}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. P අංශුව l දුරක් වැටුණු විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න. තන්තුවෙහි දිග $2l + x$ වන විට P අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $-l \le x \le 2l$ වේ. ඉහත සමීකරණයෙන් $c\ (> 0)$ නියතයක් වන $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(c^2 - x^2)$ දෙනු ලැබේ යැයි උපකල්පනය කරමින් c හි අගය සොයන්න. P අංශුව පොළවට එළඹෙන විට ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වා O සිට පොළොවට එළඹීමට ගතවන කාලය $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi)\sqrt{\frac{l}{g}}$ බව පෙන්වන්න. (2011)

(35) A හා B යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත එකිනෙක අතර දුර $8l$ වන ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. ස්කන්ධය m වූ P නම් සුමට අංශුවක් A හා B අතර AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක තබා ඇත. ස්වාභාවික දිග $3l$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය 4λ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මඟින් A ලක්ෂ්‍යයට ද ස්වාභාවික දිග $2l$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මඟින් B ලක්ෂ්‍යයට ද P අංශුව සම්බන්ධ කෙරේ. P අංශුව C ලක්ෂ්‍යයේදී සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, $AC = \frac{42}{11}l$ බව පෙන්වන්න. P අංශුව AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරේ. P අංශුව AB දිගේ A ලක්ෂ්‍යයේ සිට x දුරින් පිහිටන විට තන්තු දෙකෙහි ආතති ලබාගන්න. $\frac{40}{11}l \le x \le 4l$ සඳහා P අංශුවේ චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}\left(x - \frac{42}{11}l\right) = 0$ බව පෙන්වන්න. $y = x - \frac{42}{11}l$ යැයි ලිවීමෙන් $\ddot{y} = \frac{11\lambda}{6ml}y \times 0$ බව පෙන්වන්න. ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A,B හා ω නියත සොයන්න. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{41}{11}l$ දුරින් පිහිටන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න. (2012)

(36) ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට ඇඳා ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. අංශුව සමතුලිත ව එල්ලෙන විට තන්තුවේ **විතතිය** $\frac{l}{3}$ වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය සොයන්න. අංශුව O ට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සිරස්ව පහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. O සිට l දුරකින් සිරස්ව පහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යය වෙත අංශුව ප්‍රථම වතාවට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න. B යනු අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු.

A සිට B දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා තන්තුවේ **විතතිය** x යන්න $\ddot{x}+\frac{3g}{l}\left(x-\frac{l}{3}\right)=0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $x=\frac{l}{3}+\alpha\cos\omega t+B\sin\omega t$ ආකාරයේ බව උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න. ඒනයින්, අංශුව A සිට B දක්වා යෙදෙන සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය සොයන්න. මුදා හළ මොහොතේ සිට $\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$ කාලයකට පසුව අංශුව B වෙත ළඟා වන බව පෙන්වන්න. අංශුව B හි ඇතිවිට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. (2013)

(37) ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය 4mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. O හි නිශ්චලතාවයේ සිට අංශුව ගුරුත්වය යටතේ මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් පසුව සිදුවන චලිතයේ දී තන්තුවේ උපරිම දිග සොයන්න. (2014)

(38) ස්වභාවික දිග 4a හා ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය 8 mට වූ සිහිල් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ දුන්නක්, එහි පහළ කෙළවර O අචල වන සේ සිරස්ව සිටුවා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එහි ඉහළ කෙළවරට ඈඳා තිබේ. P අංශුව O ට සිරස්ව ඉහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යයක සමතුලිතව ඇත. $OA=\frac{7a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, එම m ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් P ට සීරුවෙන් ඈඳනු ලබන අතර, සංයුක්ත අංශුව A හි නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය ආරම්භ කරයි. සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x}=-\frac{g}{a}x$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි x යනු OB = 3a වන පරිදි O ට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ සිට සංයුක්ත අංශුවේ විස්ථාපනය වේ. සංයුක්ත අංශුව ළඟා වන පහළම ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. OC දිග ද A සිට C දක්වා චලනය වීමට සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය ද සොයන්න.
සංයුක්ත අංශුව C හි ඇති මොහොතේ දී Q අංශුව සීරුවෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. පසුව සිදුවන P අංශුවේ චලිතය සඳහා චලිත සමීකරණය $\ddot{y}=-\frac{2g}{a}y$ බව පෙන්වන්න. මෙහි y යනු A ලක්ෂ්‍යයේ සිට P අංශුවේ විස්තාපනය වේ.
මෙම සමීකරණයට $y=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින්, α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, C සිට D දක්වා චලනය වීමට P අංශුව ගන්නා කාලය $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි D යනු OD = 4a වන පරිදි O ට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. D වෙත ළඟා වන විට P අංශුවේ වේගය ද සොයන්න. (2014)

(39) ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය 2mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල A ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. A හි මට්ටමට ඉහළින් සවි කරන ලද B කුඩා සුමට නාදත්තක් උඩින් තන්තුව යන අතර, තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සම්බන්ධ කර ඇත. AB දුර a වන අතර, BA යටි අත් සිරස සමග සාදන කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වේ.

ආරම්භයේ දී P අංශුව B නාදූත්තට යන්තමින් පහළින් තබා සිරස්ව පහළට $u = \sqrt{\frac{5ga}{g}}$ වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය t වන විට තන්තුවේ විතතිය x යැයි ගනිමු. P අංශුවෙහි සරල අනුවර්තී චලිතය සඳහා සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $X = x - \frac{a}{2}$ හා $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ වේ. මෙම චලිත සමීකරණය සඳහා, $\dot{X}^2 = \omega^2 \left(A^2 - X^2\right)$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින්, සරල අනුවර්තී චලිතයේ විස්තාරය $A = \frac{3a}{4}$ බව පෙන්වා, අංශුව ළඟා වන පහත් ම පිහිටීම වූ E ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

සරල අනුවර්තී චලිතයේ C කේන්ද්‍රය පසුකර අංශුව යන විට එහි වේගය $\frac{3u}{\sqrt{5}}$ බව පෙන්වන්න.

අනුරූප වෘත්ත චලිතය සැලකීමෙන්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P අංශුව පහළට චලනය වීමේ දී, C පසු කර යෑමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, P අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීම වූ E වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලයත්, නාදූත්තක් මත තන්තුවෙන් ඇති කරනු ලබන බලයේ උපරිම විශාලත්වයත් සොයන්න. (2015)

සංඛ්‍යානය

(1) ජීව (B) සහ භෞතික (P) විද්‍යා සිසුන් 100 ක් සිටින මිශ්‍ර පාසලක එක් එක් ශිෂ්‍යා සඳහා T_1 සහ T_2 පත්‍ර වර්ග දෙකකින් එක් වර්ගයක් දෙන ලදී. නියම වර්ගීකරණය පහත වගුවේ දී ඇත.

ප්‍රශ්න පත්‍ර වර්ගය	ස්ත්‍රී / පුරුෂ භාවය	ජීව විද්‍යා (B)	භෞතික විද්‍යා (P)
T_1	ගැහැනු (F)	30	10
	පිරිමි (M)	15	5
T_2	ගැහැනු (F)	20	5
	පිරිමි (M)	10	5

i) ශිෂ්‍යයෙක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගන්නා ලදී. මෙම ශිෂ්‍යයා
   a) ගැහැණු ළමයෙකු වීමේ,
   b) ජීව විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරන්නෙකු වීමේ,
   c) T_1 වර්ගයේ ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙන ලද්දෙකු වීමේ,
   d) ගැහැනු ළමයෙකු යයි දී ඇති විට ජීව විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරන්නෙකු වීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

ii) තෝරාගන්නා ලද ශිෂ්‍යයාගේ පත්‍රය ස්ත්‍රී පුරුෂ සම්භාවිතාව සොයන්න. (1987)

(2) i) එක්තරා නගරයක අනතුරු සිදුවීම පිළිබඳ අධ්‍යනයක් කිරීමට සමීක්ෂණයක් කර ඇත. නගරය තුළ පසුගිය දින 200 තුළ සිදුවන ලද අනතුරු සංඛ්‍යාව පහත සඳහන් වගුවේ දී ඇත.

දිනකට අනතුරු සංඛ්‍යාව	0	1	2	3	4	5
දින සංඛ්‍යාව	48	75	36	26	10	5

දිනකට අනතුරු වල මධ්‍යන්‍යය සංඛ්‍යාව සහ අනතුරුවල විචලතාව ගණනය කරන්න.

ii) එක්තරා පරීක්ෂණයක දී ගණිතය සඳහා සිසුන් 20 දෙනෙකු ලබාගත්තා ලද ලකුණුවල සමානතර මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 45 සහ 15 ලෙස ගණනය කර ඇත. මේවා ගණනය කිරීමේදී එක ශිෂ්‍යයෙකුගේ ලකුණු 80 ලෙස සාවද්‍යව කියවා ඇත. මෙම ශිෂ්‍යයාගේ සත්‍ය ලකුණු 60 නම් නිරවද්‍ය සමාන්තර මධ්‍යන්‍ය සහ සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න. (1989)

(3) A පාසලක සිසුන් 5 දෙනෙකු සඳහා ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙන ලද අතර ඔවුන් විසින් ලබාගත්තා ලද ලකුණු 44, 39, 53, 24 සහ 30 ලෙස වාර්තා ගත කර ඇත.
B පාසලක සිසුන් 10 දෙනෙකු සඳහා එම ප්‍රශ්න පත්‍රයම දෙන ලදුව ඔවුන් විසින් ලබාගත්තා ලද ලකුණු 50, 43, 42, 49, 52, 27, 33, 42 සහ 23 ලෙස වාර්තා ගත කර ඇත.

i) අ) A පාසලෙහි ආ) B පාසලෙහි
සිසුන් විසින් ලබාගත්තා ලද ලකුණු වල මධ්‍යනය සහ විචලතාව සොයන්න.

ii) ප්‍රශ්න පත්‍රය සඳහා සිසුන් විසින් ලබාගත්තා ලද ලකුණුවල මධ්‍යනය සහ විචලතාව ද සොයන්න.
අ) මධ්‍යයන තුන ආ) විචලතා තුන
අතර සම්බන්ධතාවයක් ප්‍රකාශ කරන්න.

[මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබගේ පිළිතුරෙහි සියලු ආගනනයන් පැහැදිලි ලෙස පෙන්විය යුතු ය.] (1990)

(4) කරපටි නිෂ්පාදන කරන්නෙක් තරුණයන්ගේ සිත් ගැනිය හැකි අලුත් මෝස්තරයක් නිපදවීම ගැන සලකා බලනු ලැබේ. ශිෂ්‍යයන් සමූහයකගේ මිණුම් මත පදනම් කරගනු ලැබූ ගෙලෙහි වට ප්‍රමාණය පිළිබඳ මතු දැක්වෙන දත්ත ඔහුට ප්‍රයෝජනයට ගත හැකිය.

මධ්‍යනය අගය (අගල් වලින්)	ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව
12.5	4
13.0	19
13.5	30
14.0	63
14.5	66
15.0	29
15.5	18
16.0	1
16.5	1

කරපටි තරමේ සාමාන්‍යය ද සම්මත අපගමනය ද ගණනය කරන්න. කර පටියේ තරම දළ වශයෙන් ප්‍රමත ලෙස ව්‍යාප්ති වී ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් කර පටි මිලයට ගන්නා අයගෙන් 95% ක අවශ්‍යතා සපුරාලීම සඳහා ඔහු විසින් නිපදවිය යුතු කරපටිවල වැඩිතම සහ අඩුතම තරම ගණනය කරන්න. (1991)

(5) X සහ Y විචල්‍ය $Y = \frac{X-a}{b}$ වන පරිදි වේ. මෙහි a සහ b අඥාත නියත වේ. $\overline{X} = a + b\overline{Y}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි "$\overline{X}, \overline{Y}$" යන්නෙන් සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය හැඳින්වේ. A ගමකින් හා B ගමකින් අහඹු ලෙස තෝරාගත් පවුල් 98 ක මාසික ආදායම් පහත දැක්වෙන වගුවෙන් ගෙන දේ.

රු. 100 ඒකක වලින් මාසික ආදායම	පවුල් සංඛ්‍යාව	
	A ගම	B ගම
5 – 10	1	5
10 – 15	10	6
15 – 20	20	15
20 – 25	8	10
25 – 30	6	5
30 – 35	3	4
35 – 40	1	2
40 – 45	0	2

එක් එක් ගමක් සඳහා මධ්‍යනය, මධ්‍යස්ථය සහ මාතය සොයා ඔබේ ප්‍රතිඵල ගැන විවේචනයක් කරන්න. (1992)

(6) $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ යනු සංගහනයකින් ගත් නිරීක්ෂ්‍ය n වේ. නියැදි මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}$ සහ නියැදි විචල්‍යතාව S_x^2 වේ. $\bar{X} = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ සහ $S^2{}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x^2{}_i - \bar{x})^2$ ආකාරයෙන් S^2 ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. $y_1, y_2 \ldots\ldots\ldots y_m$ යනු දෙවැනි සංගහනයකින් ගත් නිරීක්ෂන m ද $\bar{y}$ සහ S_y^2 යනු පිළිවෙලින් නියැදි මධ්‍යන්‍යය සහ නියැදි විචලතාව ද යැයි ගනිමු. $\bar{z}$ සහ S_z^2 යනු සංයෝජිත සංගහනයේ නියැදි මධ්‍යන්‍යය සහ නියැදි විචලතාව නම්,

i) $\bar{z} = \dfrac{n\bar{x}+m\bar{Y}}{n+m}$

ii) $\dfrac{n(\bar{z}-\bar{x})^2 + m(\bar{z}-\bar{y})^2}{n+m} = \dfrac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n+m} - \bar{z}^2$

iii) $\dfrac{nS_x^2 + mS_y^2}{n+m} = \dfrac{1}{n+m}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\} - \dfrac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n+m}$

iv) $S_z^2 = \dfrac{nS_x^2 + mS_y^2}{n+m} + \dfrac{n(\bar{z}-\bar{x})^2 + m(\bar{z}-\bar{y})^2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් උසස් පෙළ ශිෂ්‍යයන් 100 කට සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් උසස් පෙළ ශිෂ්‍යාවන් 50 කට සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙන ලදී. ඔවුන් ලබාගත් ලකුණු වලින් ගණනය කරන ලද තොරතුරු පහත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

	අපේක්ෂක සංඛ්‍යාව	නියැදි මධ්‍යන්‍යය	නියැදි විචලතාව
ශිෂ්‍යයන්	100	41	9
ශිෂ්‍යාවන්	50	38	4

සංයෝජිත සංගහනයේ නියැදි මධ්‍යන්‍යය සහ නියැදි විචලතාව ගණනය කරන්න. පුද්ගලික ලකුණු වල වැඩි විචලතාවයක් ඇත්තේ ශිෂ්‍යයන් අතරේ ද ශිෂ්‍යාවන් අතරේ ද? (විචලතාව සංගුණකය S_x/x) (1993)

(7) i) පුණ්‍ය කටයුතුවල යෙදෙන සංගමයක් එක්තරා ගමක සිටින වයස අවුරුදු හැටකට වැඩි අයට මාසික දීමනාවක් ගෙවීමට තීරණය කරයි. දීමනා ක්‍රමය පහත දැක්වේ.

වයස් කාණ්ඩය (අවුරුදු වලින්)	මාසික දීමනාව (රුපියල් වලින්)
60 – 65	80.00
65 – 70	85.00
70 – 75	90.00
75 – 80	95.00
80 – 85	100.00

ඉහත කී දීමනාවට සුදුසුකම් හිමි 25 දෙනෙක් එම ගමෙහි සිටිති. ඔවුන්ගේ වයස අවුරුදු වලින් මතු දැක් වේ.

74 62 84 72 61 83 72 81 63 71 63 61 61
67 74 66 64 79 73 78 76 69 68 78 67

ගෙවිය යුතු මධ්‍යක මාසික දීමනාව සහ ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

ii) කිසියම් පන්තියක ශිෂ්‍යයන් 80 ක ගේ X උසෙහි ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 135.3 cm සහ 9.6 cm වේ. $Y = \frac{X-a}{b}$ ආකාරයේ සුදුසු පරිණාමයකින් X පරිණාමනය කළ විට, ශිෂ්‍යයන්ගේ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දැක් වේ. මෙහි a සහ b නියතයන්ය.

Y හි අගය	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
සංඛ්‍යාතය	2	5	8	18	22	13	8	4

තථ්‍ය පන්ති ප්‍රාන්තරය ගණනය කරන්න. (1995)

(8) පහත දැක්වෙන වගුව එක්තරා විදුලි බල්බ නිෂ්පාදනාගාරයක ප්‍රතිදාන අතුරෙන් සසම්භාවී ලෙස ගත් බල්බ 200 කින් සමන්විත නියැදියක ආයු කාලය සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකි.

ආයුකාලය (සති වලින්)	බල්බ ගණන
95 – 99	10
90 – 94	14
85 – 89	16
80 – 84	21
75 – 79	35
70 – 74	41
65 – 69	38
60 – 64	15
55 – 59	7
50 – 54	3

අ) මෙම ආයුකාලවල i) මධ්‍යස්ථය ii) පහළ චතුර්ථකය (Q_1) iii) උඩත් චතුර්ථකය (Q_3)

යන මේවා එක් දශම ස්ථානයකට නිමානය කරන්න.

ආ) මෙම ව්‍යාප්තියෙහි i) මධ්‍යන්‍යය ii) සම්මත අපගමනය iii) කුටිකතා සංගුණකය

යන මේවා එක් දශම ස්ථානයකට නිමානය කරන්න. මෙම ව්‍යාප්තියේ හැඩය කුමක්ද? (2000)

(9) සමුහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක මධ්‍යයන්‍යය, $\bar{x}$ අර්ථ දක්වන්න. a උපකල්පිත මධ්‍යයන්‍යය සහ c ධන නියතයක් වූ $y = \frac{x-a}{c}$ කේතනය ඇසුරෙන් $\bar{x} = a + c\bar{y}$ බව පෙන්වන්න. විචල්‍යතාව සඳහා $\sigma^2 = \frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f}$ අර්ථ දැක්වීමෙන් පටන්ගෙන ඉහත කේතනයම යෙදීමෙන් සම්මත අපගමනය සඳහා $\sigma = c\sqrt{\frac{\sum fy^2}{\sum f} - \bar{y}^2}$ සූත්‍රය ලබාගන්න. පහත දැක්වෙන වයස් පන්ති ව්‍යාප්තියෙන් ශ්‍රී ලංකාවේ 2003 වර්ෂය සඳහා නිමිති මුළු ජනගහනය මිලියන වලින් දැක්වෙයි.

වයස් පන්තිය (අවුරුදු)	සංඛ්‍යාතය (ජන සංඛ්‍යාව මිලියනවලින්)
0 සහ වැඩි, 10 ට අඩු	4.2
10 සහ වැඩි, 20 ට අඩු	3.9
20 සහ වැඩි, 30 ට අඩු	3.4
30 සහ වැඩි, 40 ට අඩු	3.2
40 සහ වැඩි, 50 ට අඩු	2.8
50 සහ වැඩි, 60 ට අඩු	2.8
60 සහ වැඩි, 70 ට අඩු	2.5
70 සහ වැඩි, 80 ට අඩු	1.6
80 සහ වැඩි, 90 ට අඩු	0.6
මුළු ජනගහනය	**25.0**

[සටහන : එක් එක් පන්තියේ පළල අවුරුදු 10 කි. අවුරුදු 90 ට වැඩි වයස් වූ ජන සංඛ්‍යාව නොසලකා හැරිය හැකිය.]

a = අවුරුදු 45 සහ එක් එක් පන්තියේ පළල වූ අවුරුදු 10 = c වශයෙන් ගෙන ඉහත කේතනයම යෙදීමෙන් එක් එක් පන්තිය සඳහා y , fy සහ fy^2 ගණනය කරන්න.

ඒනයින් ජනගහනයේ මධ්‍යයා වයස සහ සම්මත අපගමනය අවුරුදු වලින් එක එකක් නිවැරදිව එක් දශමස්ථානයකට නිමානය කරන්න. (2001)

(10) ගෙඩි දෙසීයක් තිබෙන කෙසෙල් කැනක ඇති කෙසෙල් ගෙඩිවල මුළු බර නිමාණය කිරීම සඳහා එවැනි කැනකින් ගෙඩි විස්සක නියැදියක් අහඹු ලෙස ගන්නා ලදී. එක් එක් කෙසෙල් ගෙඩියක බර, ග්‍රෑම්වලින් සටහන් කර වර්ගීකරන ලද ප්‍රතිඵල පහත වගුවෙන් දැක් වේ.

පන්තිය	පන්ති සීමා (ග්‍රෑම්)	පන්ති ලකුණු (ග්‍රෑම්)	සංඛ්‍යාතය
1	28 – 32	30	7
2	33 – 37	35	6
3	38 – 42	40	4
4	43 – 47	45	2
5	48 – 52	50	1

පන්ති ලකුණු කේතනය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ මධ්‍යන්‍ය මධ්‍යස්ථය සහ මාතය යන මිනුම් සොයන්න. ඉහත ව්‍යාප්තියේ හැඩය කුමක්ද ? තව ද විචල්‍යතාව S_2 ගණනය කර ඒනයින් කුටිකතා සංගුණකය සොයන්න. හරියටම ගෙඩි දෙසීයකින් සමන්විත වෙනත් වර්ගයක කෙසෙල් කැනකින් අහඹු ලෙස ගෙඩි විස්සක තවත් නියැදියක් ගත්තේ යැයි සිතමු. බර කිරීමෙන් පසු කලින් ගත් පන්තිවලට ම වර්ගීකරණය කිරීමෙන් පසු පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල ලැබුණි.

පන්තිය	1	2	3	4	5
සංඛ්‍යාතය	1	2	4	6	7

අලුතින් ගණනය කිරීම නොකර එහෙත් ඔබගේ ප්‍රතිඵලවලට හේතු දක්වමින් දෙවැනි ව්‍යාප්තියේ

i) හැඩය ii) විචලතාව iii) මධ්‍යන්‍ය, මධ්‍යස්ථය සහ මාතය

අපෝහනය කරන්න. සිල්ලර වෙළෙන්දෙකු තොග වෙළෙන්දෙකුගෙන් කෙසෙල් කැන් මිල දී ගැනීමට කැමැත්තේ නම් තොග වෙළෙන්දාටත් සිල්ලර වෙළෙන්දාටත් **එකඟ විය හැකි** ඉතාම සුදුසු මිනුම කුමක්ද? (2002)

(11) අමු දත්ත කුලකයක මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය සහ මාතය අර්ථ දක්වන්න. $x_1, x_2, \ldots\ldots x_N$; $N \geq 2$ නම් වූ අමු දත්ත කුලකයක $S^2 = \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i\right]^2\right\}$ විචලතාවය සලකන්න. x_i නැමැති i වෙනි නිරීක්ෂණයහි $\bar{x}$ වලින් පවතින අපගමනය වන $d_i, d_i = x_i - \bar{x}$, 1 , 2 ,…….. N මඟින් අර්ථ දක්වා ඇත. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = S^2$ බව පෙන්වන්න.

එක්තරා බැංකුවක සේවය කරන කාන්තාවන් පස්දෙනෙකුගේ වයස අවුරුදුවලින් x_1 , x_2 ,x_3 ,x_4 හා x_5 වේ. බාලම කාන්තාව හැරුණු කොට අන් එක් එක් කාන්තාව තමාගේ වයස හෙළි කිරීමට මැළි වේ. එහෙත් මෙම කාන්තාවන් පස්දෙනාගේ ම වයස්වල මධ්‍යන්‍යය සහ මධ්‍යස්ථය පිළිවෙලින් අවුරුදු 35 හා 36 බව අවුරුදු 31 ක් වයසැති බාලම තැනැත්තිය විසින් හෙළිදරව් කරයි. මාතය, මධ්‍යස්ථයට සමාන නොවේ නම් ඉහත දී ඇති අවශ්‍යතා සපුරාලන වයස් යි අගය කුලක දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න. වයස්වල විචල්‍යතාව වන S^2 , 5.2 බව තවදුරටත් හෙළි කළේ නම්, $d_i = x_i - \bar{x}$, i = 1,2,……5 අගයන්ගෙන් S^2 ගණනය කිරීමෙන් ඉහත වයස් කුලක දෙකෙන් නිවැරදි වයස් දෙනු ලබන්නේ කුමන කුලකයෙන් දැයි නිර්ණය කරන්න. තව ද වයස්වල කුටිකතා සංගුණකය ගණනය කරන්න. ඔවුන්ගේ සේවයෙන් විශ්‍රාම යාමේ වයස අවුරුදු 55 වන අතර $y_i = 55 - x_i$, i = 1,2,………5 යනු අවුරුදු වලින් ඉතිරි සේවාකාල යැයි ගනිමු. සම්මත අංකනයට අනුව $\bar{y} = 55 - \bar{x}$ බව පෙන්වන්න. $\bar{y}$ වලින් y_i සඳහා පවතින අපගමනය $-d_i$, (i = 1,2,…..5) ට සමාන වන බව ද පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ වයසෙහි විචලතාවයත් ඉතිරි සේවා කාලයේ විචලතාවයත් සමාන බව පෙන්වන්න. තව ද ඉතිරි සේවාකාලවල කුටිකතා සංගුණකයෙහි අගය ලියන්න. (2003)

(12) a) එක්තරා කර්මාන්ත ශාලාවක සේවකයින් 100 කගේ මාසික වේතනයන් පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දී ඇත.

මාසික වේතනය (රුපියල්වලින්)	සේවකයින් ගණන
6 000	35
10 000	30
15 000	25
20 000	10

මෙම වේතන ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය , මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයන්න. සේවකයින් 4 දෙනෙකු අතිකාල වැඩෙහි යෙදෙන්නේ නම් හා එක එකෙකු ඔහුගේ මාසික වේතනය රුපියල් 3750 කින් වැඩි කරගනු ලැබේනම් මෙම අගයන්ගෙන් කවරක් වෙනස් වෙයිද? ඔබගේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

b) මිනිසුන් 200 කගේ බර ආසන්න කිලෝග්‍රෑමයට මනිනු ලැබ ඇත. ලබාගත් ප්‍රතිඵල පහත වගුවේ පෙන්වා ඇත.

බර (kg)	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 104
සංඛ්‍යාතය	24	50	58	35	21	12

i) මාත පන්තිය හඳුනාගෙන ව්‍යාප්තියේ මාතය ආගණනය කරන්න.
ii) මධ්‍යස්ථ පන්තිය හඳුනාගෙන ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය ආගණනය කරන්න.
iii) ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය අගයන්න. (2004)

(13) a) නිරීක්ෂන n අඩංගු කුලකයක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව අර්ථ දක්වන්න. $\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ යනු මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}$ හා විචලතාව σ_1^2 සහිත නිරීක්ෂණ n අඩංගු කුලකයක් යැයි ගනිමු. $\{y_1, y_2, \ldots\ldots y_m\}$ යනු මධ්‍යන්‍යය $\bar{y}$ හා විචලතාව σ_2^2 සහිත නිරීක්ෂණ m අඩංගු කුලකයක් යැයි ගනිමු. $\bar{z}$ හා σ^2 යනු පිළිවෙලින් සංයුක්ත නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව යැයි ගනිමු.

i) $\bar{z} = \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$ බව,

ii) $d_1 = \bar{x} - \bar{z}$ වන, $\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{z})^2 = n(\sigma_1^2 + d_1^2)$ බව, (ඉඟිය : $x_i - \bar{z} = x_i - \bar{x} + \bar{x} - \bar{z}$)

iii) $d_2 = \bar{y} - \bar{z}$ වන, $\sigma^2 = \frac{1}{n+m}\{n(\sigma^2{}_1 + d^2{}_1) + m(\sigma^2{}_2 + d^2{}_2)\}$ බව පෙන්වන්න.

b) සිසුන් 100 ක කණ්ඩායමක් එක්තරා ගණිත පරීක්ෂණ පත්‍රයකට පෙනී සිටියහ. පරීක්ෂණ පත්‍රයෙහි සමත්වීමේ ලකුණ 30 වෙයි. සමත් අපේක්ෂකයින්ගේ ලකුණු ව්‍යාප්තිය පහත වගුවේ දී ඇත.

ලකුණු	ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව
30 – 34	5
35 – 39	10
40 – 44	15
45 – 49	30
50 – 54	5
55 – 59	5

i) සමත් අපේක්ෂකයින්ගේ ලකුණු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.
ii) සියලු සිසුන් 100 දෙනාගේම ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමන පිළිවෙලින් 38 හා 12 වෙයි. අසමත් අපේක්ෂකයින්ගේ ලකුණු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න. (2005)

(14) a) μ සහ σ මගින් $\{x_i ; i ; 1, 2, 3, \ldots\ldots n\}$ අගය කුලකයෙහි පිළිවෙලින් මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය දක්වේ යැයි ගනිමු. පහත දක්වෙන එක් එක් අගය කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.

i) $\{x_i + \alpha ; i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots n\}$ මෙහි α නියතයක් වෙයි.
ii) $\{\beta x_i ; i = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots n\}$ මෙහි β නියතයක් වෙයි.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් , $\{2x_i + 3 ; i = 1,2, \ldots\ldots n\}$ අගය කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මතත අපගමනය සොයන්න.

b) 3, 6, 9, 12, 4, 6, 8, 10, 12, 14, x, y සංඛ්‍යා දොළහේ මාතය 6 ද මධ්‍යනය 8 ද වෙයි.

i) x සහ y හි අගය සහ
ii) ඉහත සංඛ්‍යා දොළහේ මධ්‍යස්ථය සොයන්න. දැන් 8-k , 8, 8 + k අතිරේක සංඛ්‍යා තුනක් ඇතුළත් කළ විට සංඛ්‍යා පහළොවේ විචල්‍යතාව 12 බව පෙනේ. k හි අගයන් සොයන්න. (2006)

(15) a) ගාලු පාර ඔස්සේ කොළඹ දෙසට ධාවනය වන පෞද්ගලික බස්රථවල වේගය පැයට ආසන්න කිලෝමීටරයට කළුතර පාළම අසල දී නිරීක්ෂණය කරන ලදී. රැස්කරන ලද දත්ත පහත දැක්වෙන වගුවේ දී ඇත.

පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මැද අගය	15	30	45	60	75	90
සංඛ්‍යාතය	10	–	25	30	–	10

ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය 49.5 හා මාතය 55 වෙයි නම් දී නොමැති සංඛ්‍යාත දෙක නිමානය කරන්න.
ඒ නයින් ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව සොයන්න.

b) සංඛ්‍යා 12 ක් අඩංගු කුලකයක සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය 4 සහ සම්මත අපගමනය 2 වේ. සංඛ්‍යා 20 ක් අඩංගු දෙවැනි කුලකයක මධ්‍යන්‍යය 5 සහ සම්මත අපගමනය 3 වේ. සංඛ්‍යා 32 ම අඩංගු සංයුක්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න. (2007)

(16) මධ්‍යන්‍යය $\overline{\mathbf{x}}$ ද සම්මත අපගමනය S_x ද වූ $\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_3\}$ යන n සංඛ්‍යා කුලකය $i = 1,2,\ldots\ldots n$ සඳහා $y_i = ax_i + b$ සූත්‍ර මඟින් $\{y_1, y_2, \ldots\ldots y_n\}$ යන n සංඛ්‍යා කුලකයට පරිණාමනය කරනු ලැබේ. මෙහි a සහ b නියත වේ. $\{y_1, y_2, \ldots\ldots y_n\}$ යන n සංඛ්‍යා කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් $\overline{\mathbf{y}}$ සහ S_y යැයි ගනිමු.

i) $\overline{\mathbf{y}} = a\overline{\mathbf{x}} + b$ සහ

ii) $S_y = |a|\, S_x$ බව පෙන්වන්න.

එක්තරා විභාගයක භූගෝල විද්‍යාව සහ ඉතිහාසය යන විෂයවලට පෙනී සිටි අයදුම්කරුවන්ගේ ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පහත වගුවේ දැක්වෙයි.

	මධ්‍යන්‍යය	සම්මත අපගමනය
භූගෝල විද්‍යාව	m	12
ඉතිහාසය	53	s

එක් එක් විෂයයෙහි ලකුණු ඒකජ ලෙස පරිමාණගත කරන ලද්දේ මධ්‍යන්‍යය 50 ක් ද සම්මත අපගමනය 15 ක් ද තිබෙන ලෙස යැයි සිතමු.

එක්තරා අපේක්ෂකයකුගේ මුල් ලකුණු සහ පරිමාණගත ලකුණු පහත දැක්වේ.

	මුල් ලකුණ	පරිමාණගත ලකුණ
භූගෝල විද්‍යාව	40	40
ඉතිහාසය	61	56

m හි අගය සහ s හි අගය සොයන්න. අයදුම්කරුවන්ට ඔවුන්ගේ උත්තර පත්‍ර නැවත සමීක්ෂණය කර ගැනීම සඳහා ඉල්ලුම් කිරීමට ඉඩ දෙන ලදී. නැවත සමීක්ෂණයෙන් පසුව ඉතිහාසය විෂයයට පෙනී සිටි මුළු අයදුම්කරුවන් ගණනින් 0.1% ක ගේ ඉතිහාසය ලකුණු වෙනස් විය. ලකුණු වෙනස් වූ අයදුම්කරුවන්ගේ ඉතිහාසය ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 65 සිට 68 තෙක් වැඩි වී තිබුණි. ඉතිහාසය විෂයයට පෙනී සිටි මුළු අයදුම්කරුවන්ගේ නැවත සමීක්ෂණයට පසු ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සොයන්න. (2008)

(17) a) සංගහණයකින් ගන්නා ලද තරම n වන සසම්භාවී නියැදියක අගයන් $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ යැයි ගනිමු. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\overline{\mathbf{x}}$ යනු නියැදි මධ්‍යන්‍යය වේ. පිටු 250 ක් අඩංගු පොතක පළමු පිටු 200 තුළ එක එකක ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණන වන x නිරීක්ෂණය කරන ලද අතර පහත සඳහන් විස්තර සොයාගන්නා ලදී. මුද්‍රණ දෝෂවල මුළු ගණන 920, මුද්‍රණ දෝෂවල වර්ගවල එකතුව 5032. පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණනෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත

අපගමනය සොයන්න. අවසාන පිටු 50 තුළ පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 4.4 හා 2.2 වේ. ප්‍රමූල ධර්ම උපයෝගී කර ගනිමින් පොතෙහි පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණනෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදිව සොයන්න.

b) පරීක්ෂණයක දී සිසුන් කණ්ඩායමක් ශුද්ධ ගණිතය සඳහා ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 45 වේ. මෙම ලකුණු මධ්‍යන්‍යය 50 හා සම්මත අපගමනය 15 වන ආකාරයට රේඛීය ලෙස පරිමාංකනය කරනු ලැබේ. තව ද පරිමාංකනය කරන ලද 80 ලකුණ 70 මුල් ලකුණකට අනුරූප වන බව දී ඇත.
   i) රේඛීය පරිමාණය
   ii) මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය
   iii) පරිමාංකනය මගින් වෙනස් නොවන ලකුණ ගණනය කරන්න. පරිමාංකනය කරන ලද ලකුණුවල අඩුතම හා වැඩිතම ලකුණු පිළිවෙලින් 2 හා 92 යැයි දී ඇත. ඒවාට අනුරූප මුල් ලකුණු සොයන්න. (2009)

(18) a) $\{x_1, x_2, \ldots x_3\}$ යනු එක්තරා අධ්‍යනයකින් ලබාගන්නා ලද නිරීක්ෂණ n වන කුලකයක් යැයි ගනිමු. මෙම දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය විචලතාව අර්ථ දක්වන්න. එක්තරා පෙති වර්ගයක ඇති ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය මිලිග්‍රෑම් 52 හා මිලිග්‍රෑම් 67 අතර වේ යැයි සැලකෙයි. අඩංගු ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය සඳහා පරීක්ෂා කරන ලද පෙති 40 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙලින් මිලිග්‍රෑම් 58 හා (මිලිග්‍රෑම්)^2 3.2 වේ. දත්ත නැවත පරීක්ෂා කර බැලීමේ දී මිලිග්‍රෑම් 63 හා මිලිග්‍රෑම් 55 අගය දෙක සාවද්‍යව මිලිග්‍රෑම් 65 හා මිලිග්‍රෑම් 53 ලෙස ගෙන ඇති බව සොයාගන්නා ලදී.
   i) මෙම වරද නිසා මධ්‍යන්‍යයට බලපෑමක් නොමැති බව,
   ii) නිවැරදි කිරීම නිසා විචලතාව අඩුවන බව, පෙන්වන්න.

b)

පන්ති ප්‍රාන්තරය (බර කිලෝග්‍රෑම් වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 – 10	10
10 – 20	27
20 – 30	33
30 – 40	35
40 – 50	38
50 – 60	30
60 – 70	19
70 – 80	8

එක්තරා නගරයකදී කැලණි ගඟ හරහා මගීන් ප්‍රවාහනය කිරීමේ බලාපොරොත්තුවෙන් ආසන්න ලෙස කිලෝග්‍රෑම් 1 500 ක උපරිම තාරබරක් සහිත පාලම් පාරුවක් නිර්මාණය කෙරෙයි. මෙම බර සීමාව ඉක්මවා යෑම ආරක්ෂාකාරී නොවන බැවින් ප්‍රදේශයේ පළාත් පාලන අධිකාරියට මෙම පාරු සේවය ප්‍රයෝජනයට ගැනීමට බලාපොරොත්තුවන මගීන්ගේ බරෙහි ව්‍යාප්තිය සොයාගැනීමට සමීක්ෂණයක් පැවැත්වීමට වුවමනා වේ. මෙම මගී සංගහනයෙන් මගීන් 200 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක් ගන්නා ලදී. මෙම මගීන් 200 දෙනාගේ බර සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ දී ඇත.

   i) බරෙහි ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයාන්න. වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන ඇසුරෙන් පාරුවෙහි බර සීමාව ප්‍රකාශ කිරීමට පළාත් පාලන අධිකාරිය බලාපොරොත්තු වේ. ඉහත තොරතුරු පදනම් කරගෙන වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන සොයන්න.

ii) ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය සොයා ව්‍යාප්තියේ හැඩය ලබාගන්න. (2010)

(19) පවුල 1 000 ක දෛනික වියදම් පහත වගුවෙහි දී ඇත.

දෛනික වියදම් රුපියල්වලින්	400 – 600	600 – 800	800 – 1000	1000 – 1200	1200 – 1400
පවුල් ගණන	50	x	500	y	50

ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය රුපියල් 900 නම් x සහ y සංඛ්‍යාත සොයා ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය ද රුපියල් 900 බව පෙන්වන්න. (2011)

(20) පසුගිය මාස 15 තුළ එක්තරා භාණ්ඩයක් සඳහා ලැබුණු ඇනවුම් සංඛ්‍යාවෙහි සාමාන්‍යය, මසකට ඇනවුම් 24 කි. හොඳම මාස තුනට මසකට ඇනවුම් 35 ක සාමාන්‍යයක් ඇත. අඩුම මාස හතරේදී භාණ්ඩ සඳහා ඇනවුම් 11 ක්, 14 ක්, 16 ක් හා 22 ක් ලැබිණි.

i) ඉතිරි මාස 8 හි ලැබුණු ඇනවුම් සංඛ්‍යාතවල සාමාන්‍යය
ii) මාස 15 හි ඇනවුම් සංඛ්‍යාවල පළමුවන චතුර්ථකය සොයන්න. (2011)

(21) $\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයක මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් $\bar{\mathbf{x}}$ හා S_x වේ. a හා b නියත වන $y_i = a + bx_i$ රේඛීය පරිමාණය යොදාගෙන $\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකය $\{y_1, y_2, \ldots\ldots y_n\}$ කුලකයට පරිණාමනය කර ඇතැයි සිතමු. $\bar{\mathbf{y}} = a + b\bar{\mathbf{x}}$ හා $s^2_y = b^2 s_x^2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\bar{\mathbf{y}}$ සහ s_y යනු $\{y_1, y_2, \ldots\ldots y_n\}$ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න. ඒ නයින්,

α) $\{2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය

β) මධ්‍යන්‍යය 5 හා සම්මත අපගමනය 6 වන අගය හතක් සොයන්න.

ii) ලුණු මලුවල අසුරනු ලබන අතර නිෂ්පාදකයා ඒවා එක එකක 25 kg ක් ඇති බව සඳහන් කරයි. නියම බර නොදන්නා එවැනි මලු 80 ක් සඳහා පහත දැක්වෙන තොරතුරු දී ඇත. $\sum_{i=1}^{80}(x_i - 25) = 27.2$ හා $\sum_{i=1}^{80}(x_i - 25)^2 = 85.1$; $\mathbf{x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots\ldots 80)$ මගින් i වන මල්ලේ නියම බර දැක් වේ. සුදුසු රේඛීය පරිමාණයක් යොදාගෙන හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ මලු අසූවෙහි නියම බරෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න. (2011)

(22) ස්වකීය සිසුන්ට දෙන ලද පරීක්ෂණයක් සඳහා A හා B පාසල්වල මධ්‍යන්‍ය ලකුණු පිළිවෙලින් 31හා 45 වෙයි. A පාසලෙහි ලකුණුවල ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය 5 වෙයි. ප්‍රතිඵල සැසඳීම සඳහා B පාසලෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය A පාසලෙහි ඒවාට සමාන ද B පාසලෙහි ලකුණු 85 පරිණාමනය යටතේ ලකුණු 63 ද වන පරිදි රේඛීය පරිණාමනයක් මගින් B පාසලෙහි ලකුණු පරිමාණය කෙරේ. රේඛීය පරිණාමනය සොයා ඒ නයින්, B පාසලෙහි ලකුණුවල ව්‍යාප්තියේ මුල් සම්මත අපගමනය සොයන්න. (2012)

(23) නිරීක්ෂණ 100 ක මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 30 හා 4.1 ලෙස ගණනය කර ඇත. එක් නිරීක්ෂණයක් නිවැරදි අගය 30 වෙනුවට 40 සාවද්‍ය ලෙස ලේඛනගතකර ඇති බව පසුව සොයාගෙන ඇත. නිරීක්ෂණ 100 හි නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ආගණනය කරන්න. (2012)

(24) a) මල්ලක සුදු 5 ක්, කළු 3 ක් හා රතු 7 ක් වශයෙන් සර්වසම බෝල අඩංගු වෙයි. ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල තුනක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ගනු ලැබේ.

i) බෝල තුනම කළු වීමේ,

ii) බෝල තුනෙන් කිසිම බෝලයක් සුදු නොවීමේ,

iii) යටත් පිරිසෙයින් එක බෝලයක් සුදු වීමේ,

iv) බෝල වෙනස් වර්ණවලින් යුක්ත වීමේ,

v) කළු, රතු ඊළඟට සුදු යන පටිපාටියට බෝල තුන ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

b) එක්තරා පන්තියක සිසුන්ට සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙනු ලැබේ. මෙම සිසුන් ලබා ගන්නා ලද ලකුණු පහත දැක්වෙන සමූහිත සංඛ්‍යාත වගුවෙහි දී ඇත.

ලකුණු පරාසය	සිසුන් ගණන
00 – 20	14
20 – 40	f_1
40 – 60	27
60 – 80	f_2
80 – 100	15

20 – 40 හා 60 – 80 ලකුණු පරාසවල සංඛ්‍යාත වගුවෙහි දක්නට නොමැත. කෙසේ නමුත් සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මාතය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙලින් 48 හා 50 බව දනී. වගුවේ දක්නට නොමැති සංඛ්‍යාත දෙක ගණනය කරන්න. ඒනයින්, සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රය සඳහා පෙනී සිටි මුළු සිසුන් ගණන ලබාගන්න. සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න. (2012)

(25) පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ අටෙහි මධ්‍යන්‍යය හා මාතය පිළිවෙලින් 4 හා 6 වේ. 2, 3, 6, 2, 1, x, y, z. මෙහි x, y හා z තාත්වික සංඛ්‍යා වේ. x, y හා z හි අගයන් සොයා නිරීක්ෂණ අටෙහි සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න. (2013)

(26) කුඩා ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයක විෂ්කම්භවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වෙන වගුවේ දී ඇත.

විෂ්කම්භය (cm)	කුඩා බෝල සංඛ්‍යාව
0.80 – 0.81	1
0.81 – 0.82	3
0.82 – 0.83	9
0.83 – 0.84	20
0.84 – 0.85	14
0.85 – 0.86	2
0.86 – 0.87	1

විෂ්කම්භවල ව්‍යාප්තියේ පළමු චතුර්ථකය ගණනය කරන්න. මෙම ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය 0.835 cm සහ 0.01 cm බව දී ඇත. කුඩා ලෝහ බෝල 100 ක තවත් කුලකයක් සඳහා විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය පළමු ලෝහ බෝල 50 හි කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය ම බව ද සම්මත අපගමනය 0.015 cm බව දී ඇත. ලෝහ බෝල 150 හි සංයුක්ත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න. දෙවන ලෝහ බෝල 100 ක කුලකය සඳහා මිනුම් ගැනීමේ දි භාවිත කරනු ලැබූ උපකරණය දෝෂ සහිත බව ද එමගින් එක් එක් බෝලයක විෂ්කම්භය 0.015 cm ප්‍රමාණයකින් අවතක්සේරු වී ඇති බව ද පසු ව සොයා ගනු ලැබිණ. මෙම ලෝහ බෝල 100 හි විෂ්කම්භයන්හි සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය සොයන්න. (2013)

(27) සංඛ්‍යාත වගුවකට පළලින් සමාන පන්ති ප්‍රාන්තර පහක් ඇත. තෙවන ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය 22.5 වේ. පස්වන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ උඩත් පන්ති මායිම 40 වේ. පළමු පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිට අනුපිළිවෙලින් පන්ති ප්‍රාන්තරවල සංඛ්‍යාතයන් 7, 19, 27, 15 හා 2 වේ. ව්‍යාප්තියේ මාතය ගණනය කරන්න. (2013)

(28) නිරීක්ෂණ පහක මධ්‍යන්‍ය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙළින් 7 හා 9 වේ. නිරීක්ෂණවල එකම මාතය 11 වේ. නිරීක්ෂණ සියල්ල ධන නිඛිල වේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, වැඩිතම නිරීක්ෂණය හා අඩුතම නිරීක්ෂණය සොයන්න. (2014)

(29) පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ 100 ක සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය 31.8 වේ.

5 – 15	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55
16	x	30	y	20

x හා y හි අගයන් සොයා, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය නිමානය කරන්න. (2014)

(30) $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ යන දත්ත කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් $\bar{x}$ හා σ_x^2 යැයි ගනිමු.

i) $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ බව පෙන්වන්න.

ii) α හා β තාත්වික නියත යැයි ගනිමු. $\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2 = n\alpha^2\sigma_x^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ බව පෙන්වන්න.

$i = 1, 2, \ldots n$ සඳහා $y_i = \alpha x_1 + \beta$ යැයි ගනිමු. $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ බව පෙන්වා, ඉහත (i) හා (ii) භාවිතයෙන් $\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_x^2$ බව **අපෝහනය** කරන්න. මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y^2 යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \ldots cy_n\}$ කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍ය හා විචලතාව වේ.

එක්තරා විභාගයක දී අපේක්ෂකයින් ලබා ගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍ය 45 ක් වේ. මෙම ලකුණු, මධ්‍යන්‍ය 50 ක් හා සම්මත අපගමනය 15 ක් වන පරිදි ඒකජ ලෙස පරිමාණගත කළ යුතුව ඇත. පරිමාණගත ලකුණ වන 68 යන්නට අනුරූප මුල් ලකුණ 60 බව දී ඇත. මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

අපේක්ෂකයෙකු ලබා ගත් මුල් ලකුණ වූ m, ඉහත පරිමාණගත කිරීමෙන් අඩු නොවන බව තවදුරටත් දී ඇත. $m \geq 20$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(31) **පූර්ණ සංඛ්‍යා** හතක S කුලකයක සංඛ්‍යා පහත දැක්වෙන අයුරු ආරෝහණ පටිපාටියට සකසා ඇත. $S = \{1, 2, 4, x, y, 11, 13\}$ සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍ය y නම්, x හා y හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. එහි සංඛ්‍යාවල විචලතාව $\frac{120}{7}$ බව පෙන්වන්න. (2015)

(32) මුහුණත් 1, 2, 3, 4, 5, 6 ලෙස සලකුණු කරන ලද දාදු කැටයක් 50 වරක් උඩ දැමූ විට දාදු කැටයේ උඩත් මුහුණතේ දක්නට ලැබුණු අංකවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ.

අංකය	1	2	3	4	5	6
සංඛ්‍යාත	α	9	γ	11	8	7

සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍ය 3.66 බව දී ඇත්නම්, α හා γ හි අගයන් නිර්ණය කර, මාතය හා මධ්‍යස්ථය සොයන්න. (2015)

(33) කාර්මික විද්‍යාල සිසුන් 100 ක කණ්ඩායමක් මහා මාර්ගයක එක්තරා කොටසක් මනින ලද අතර, ඔවුන්ගේ මිනුම් පහත සඳහන් සංඛ්‍යාත වගුවේ දක්වා ඇත.

දිග (මීටර) x	99.8	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4
සංඛ්‍යාත f	5	7	12	33	25	15	3

උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}_a = 100.1$ හා $d = 0.1$ සඳහා, $y = \frac{x - \bar{x}_a}{d}$ පරිණාමනය භාවිතයෙන්, අනුරූප y හා y^2 අගයන් ඇතුළත් කෙරෙන පරිදි ඉහත වගුව විස්තීරණය කරන්න. y හි මධ්‍යන්‍ය සොයා, **ඒනයින්** x හි මධ්‍යන්‍ය 100.123 බව පෙන්වන්න. $\sqrt{1.917} \approx 1.385$ බව ගනිමින්, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය, ආසන්න වශයෙන් දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදිව ගණනය කරන්න. (2015)