<u>පටුන</u>		<u>පිටුව</u>

අවකලනය / ප්‍රස්ථාර / යෙදුම්

(1) C නියතයක් වූ විට $f(x) \equiv 3x^5 - 5x^3 + C$ යැයි දී ඇත්නම් $y = f'(x) \equiv 15x^2(x^2 - 1)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. f(x) හි උපරිම හා අවම අගයන් ප්‍රස්තාරයේ පැහැදිලි ව දක්වන්න. ඒ නයින්, f(x) ට ඇත්තේ එකම එක උපරිමයක් හා එකම එක අවමයක් බව අපෝහනය කරන්න. තව ද,

i) x සමඟ f(x) ට වැඩිවන්නේ $|x| > 1$ ම නම් පමණක් බවත්

ii) y f(x) ප්‍රස්තාරයේ ලක්ෂ්‍ය හතරක දී පමණක් ඇඳි ස්පර්ශකය $x + y = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර වන බවත් මේ ලක්ෂ්‍ය සියල්ලම $|x| < 1$ පරාසයේ පවතින බවත් අපෝහනය කරන්න.
[y = f(x) හි ප්‍රස්තාරයේ ඇඳීම අනවශ්‍ය බව සලකන්න.] (1975)

(2) $y = (3x^2 - 3) / (6x - 10)$ වක්‍රය මත උපරිම සහ අවම ලක්ෂ්‍ය (k, k) ද $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ ද ආකාරයෙන් වන බව පෙන්වන්න. මෙම වක්‍රයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. එම රූපයේම $xy = 1$ සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් ද අඳින්න. $3x^3 - 9x + 10 = 0$ සමීකරණයට එක තාත්ත්වික මූලයක් තිබෙන බවත් තාත්ත්වික මූල ඇත්තේ එයම පමණක් ඒ නයින් පෙන්වා එම මූලය -1 ට අඩු බව ද පෙන්වන්න. (1976)

(3) i) $3ay^2 = x^2(x+a)$ වක්‍රයට (2a , 2a) ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ℓ ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. ℓ ට වක්‍රය යළි හමුවන ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයත් ℓ ම බව පෙන්වන්න.

ii) $t \neq 0$ යනු පරාමිතිය ද $a > 0$ ද විට $x = at^2, y = a(t^3 - t^2)$ සමීකරණවලින් වක්‍රයක් අර්ථ දක්වෙයි. වක්‍රය මත ඕනෑම t ලක්ෂ්‍යයෙක දී $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d^2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. ඒ නයින්, වක්‍රය මත එක ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බවත් ඇත්තේ එම ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයම පමණක් බවත් එම ලක්ෂ්‍ය අවම ලක්ෂ්‍යයක් බවත් පෙන්වන්න. (1976)

(4) y = f(x) ශ්‍රිතයට x = a ලක්ෂ්‍යයේ දී i) උපරිමයක් ii) අවමයක් තිබීම සඳහා ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතා කාණ්ඩයක් $\frac{dy}{dx}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. x = 0 ලක්ෂ්‍යයේ දී

i) $y = x^3$ ශ්‍රිතයට හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් නොමැති බවත්

ii) $y = x^4$ ශ්‍රිතයට හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බවත් පෙන්වන්න.
$y = x^3$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්තාරයක් ඇඳ එම ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කරගනිමින් $y = x^4$ ශ්‍රිතයේ දළ මෙබඳු තර්කනයක් යෙදීමෙන් n හි ධන නිඛිල අගය සඳහා $y = x^{2n+1}$ ශ්‍රිතයේත් $y = x^{2n}$ ප්‍රස්තාරවල හැඩ පිළිබඳ අදහස් ඉදිරිපත් කරන්න. (1977)

(5) i) තල වක්‍රයක් මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයෙක ඛණ්ඩාංක $x = t^2$ ද $y = t^3$ පරාමිතික සමීකරණවලින් දෙනු ලැබෙයි. මෙහි t යනු පරාමිතිය ද $t \neq 0$ ද වෙයි. P හි දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයට T හි දී x අක්ෂය හමු වෙයි. T හි දී PT ට ඇඳි ලම්බයට N හි දී y− අක්ෂය හමු වෙයි. $\frac{(ON)^2}{OT}$ යන්න P හි පිහිටීමෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

ii) තල වක්‍රයක් (x, y) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර එම ලක්ෂ්‍යයේ දී එහි අනුක්‍රමණය $\frac{(y+1)x\sin x}{y}$ වෙයි. මේ කුලයේ වක්‍ර අතුරෙන් මූල ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නේ එකම එකක් පමණක් බව පෙන්වන්න. (1977)

(6) $y = \frac{3x^2}{x^2+4}$ ශ්‍රිතය මඟින් දෙනු ලබන වක්‍රය අඳින්න. $y = \frac{3}{4}x$ සරල රේඛාව $(2, \frac{3}{2})$ ලක්ෂ්‍යයේ දී මෙම වක්‍රය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. මෙම සරල රේඛාවෙනුත් වක්‍රයෙනුත් වට කෙරෙන වර්ගඵලය සොයන්න. (1977)

(7) $x = t$ යන්නෙන් අර්ථ දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යයේ දී $y = (x-4)e^x$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. ඉහත වක්‍රය මත කිසියම් ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව පෙන්වන්න. එම ලක්ෂ්‍යයේ දී x හි අගය ද සොයන්න. (1978)

(8) i) $y = \frac{x}{x^2+1}$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න.

ii) ඒකාකාර තුනී ද්‍රව්‍යයක දී තිබෙන ප්‍රමාණයකින් විවෘත සිලින්ඩරාකාර බඳුනක් තැනීමට තිබෙයි. එයට තිබිය හැකි විශාලතම පරිමාව ඇත්තේ එහි ආධාරකයේ අරයට එහි උස සමාන විට බව පෙන්වන්න. (1978)

(9) $f(x) \equiv (x+5)^2(x^3-10)$ යන්නෙහි එකම එක අවම අගය $f(1)$ බවත් එකම එක උපරිම අගය $f(-5)$ බවත් පෙන්වන්න. $-3 < x, < -1$ සඳහා $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් ඇඳ $x = -2$ අසරේ දී $y = -162$ රේඛාව අනුබද්ධයෙන් $f(x)$ හි හැසිරීම විදහා දක්වන්න. (1979)

(10) $t \neq 0$ වූ පරාමිතිය t ද a යනු නියතයක් ද වන $x = at^2, y = at^3$ පරාමිතික සමීකරණ ඇසුරෙන් S වක්‍රයක් දෙනු ලැබෙයි. $p(at^2, at^3)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $3tx - 2y - at^3 = 0$ බව පෙන්වන්න. P හි දී ඇඳි ස්පර්ශකයට වෙනත් Q ලක්ෂ්‍යයක දී S හමුවන බව පෙන්වන්න. Q හි බණ්ඩාංක සොයන්න. ඒ නයින්, S ට අභිලම්බය ද වන සේ වූ S හි ස්පර්ශක දෙකක් තිබෙන බවත් එබඳු ස්පර්ශක ඇත්තේ දෙකක් ම පමණක් බවත් ඒවා පරාමිතිය $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ වන ලක්ෂ්‍යයවල දී ඇඳි ස්පර්ශක බවත් පෙන්වන්න. (1979)

(11) $y = f(x) \equiv \frac{3x-1}{(4x-1)(x+5)}$ නම්, $f(1)$ යනු $f(x)$ හි ස්ථාවර අගයක් බව පෙන්වා අනෙක් ස්ථාවර අගය සොයන්න. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ කටු සටහනක් අඳින්න.(1979 අතුරු)

(12) $y = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}$ නම්,

i) x සමඟ y වැඩි වන්නේ ii) x සමඟ y අඩු වන්නේ

x හි කවර පරාස තුළ දැයි සොයන්න. y හි උපරිම හා අවම අගයන් කවරේ ද? ඉහත සඳහන් වක්‍රයේත් $y = k$ රේඛාවේත් ඡේදනය සැලකීමෙන් $-2(3\sqrt{2}+4) < k < 2(3\sqrt{2}-4)$ නම්, $(k-1)x^2 - 3kx + 2(k-1) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නැති බව අපෝහනය කරන්න. (1980)

(13) i) $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න. $-4 < k < 0$ සඳහා $x - 1 + \frac{1}{x+1} = k$ සමීකරණයට තාත්වික විසඳුම් නැති බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $t \neq 0$ විට, $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 3t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් වක්‍රයක් දෙනු ලැබෙයි. වක්‍රයේ "t ලක්ෂ්‍යයේ" දී $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d^2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. ඒ නයින්, වක්‍රය මත හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයා ඉන් කවරක් උපරිමයක් ද කවරක් අවමයක් ද යන්න නිර්ණය කරන්න. (1981)

(14) i) ව්‍යුත්පන්නය පරීක්ෂා කිරීමෙන්, $\frac{x}{(x-1)(x-4)}$ හි උපරිම හා අවම අගයයන් ලබාගන්න.
$y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$ වක්‍රයේ කටු සටහනක් අඳින්න. $-1 < k < -\frac{1}{2}$ සඳහා $k(x-1)(x-4) - x = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් නැති බව අපෝහනය කරන්න.

ii) t යනු පරාමිතියක් විට $x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{t}{1+t^2}$ සමීකරණය මගින් වක්‍රයට අර්ථ දැක්වෙයි. වක්‍රය මත t ලක්ෂ්‍යයක දී $\frac{dy}{dx}$ ද $\frac{d_2y}{dx^2}$ ද සොයන්න. මේ නයින්, වක්‍රය මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යත් ඒවායේ ස්වාභාවයත් සොයන්න. (1982)

(15) i) පළමු ව්‍යුත්පන්න පමණක් සලකා බැලීමෙන් $f(x) - \frac{(x-5)^3(4x-1)}{x+1}$ ශ්‍රිතයේ උපරිම හා අවම (5,0) ලක්ෂ්‍යය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

ii) $ay^2 = x^3$ වක්‍රය මත $P(at^2, at^3)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකය Q හි දී වක්‍රයට නැවත හමු වේ. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. O යනු මූල ද N යනු P සිට x– අක්ෂයට අඳින ලද ලම්බකයේ අඩිය ද R යනු PQ හා y– අක්ෂයේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය ද නම් OQ හා RN x – අක්ෂයට සමාන ලෙස ආනතව ඇති බව සාධනය කරන්න. (1983)

(16) i) අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක උපරිම හා අවම අගයන් (පවතී නම්) එහි ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සැලකීමෙන් නිර්ණය කරන්නේ කෙසේදැයි පැහැදිලි කරන්න. ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සැලකීමෙන් $\frac{x^3}{1+x^4}$ හි උපරිම හා අවම අගයන් සොයා එහි වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ii) වක්‍රයක් $x = e^{\theta}\cos\theta$, $y = e^{\theta}\sin\theta$ සමීකරණය මගින් පරාමිතික ලෙස දී ඇත. පරාමිතිය θ වන P ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. P වක්‍රය ඔස්සේ විචලනය වන විට OP සහ P හි දී ස්පර්ශකය අතර කෝණය නියතයක්ව පවතින බව පෙන්වන්න. O යනු ඛණ්ඩාංක මූල ලක්ෂ්‍යය වේ. (1984)

(17) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ යැයි ගනිමු. $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරය මගින් ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද ගෙනහැර දක්වමින් ඉහත ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් අඳින්න. තවද,
i) y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද,
ii) හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල (ඒවා ඇත්නම්) ඛණ්ඩාංක ද,
iii) ස්පර්ශෝන්මුඛ ද ගෙන හැර දක්වමින්, $y = \frac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ රූ සටහනක් ද අඳින්න. (1999)

(18) A, B හා C නගර තුනක් $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$, AB = 15 km හා BC = 50 km වන අයුරින් AB හා BC සෘජු මාර්ග දෙකකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A නගරය BC මාර්ගයේ D නම් ස්ථානයකට සම්බන්ධ කරමින් තවත් සෘජු මාර්ගයක් තැනීමට යෝජිත ව්‍යාපෘතියක් ඇත. මෝටර් රථයක් සඳහා DC කොටස මත 50 kmh^{-1} ක හා AD යෝජිත මාර්ගය මත 40 kmh^{-1} ක උපරිම වේගයන්ට අවසර ඇත. A නගරයේ සිට x km දුරින් D පිහිටා ඇත්නම් අවසර ඇති උපරිම වේගයන්ගෙන් මෝටර් රථය ගමන් කරනු ලබන්නේ යයි උපකල්පනය කරමින් D හරහා A සිට C තෙක් මෝටර් රථයක් ගමන් කිරීමට ගන්නා ලද සම්පූර්ණ කාලය T(x) පැය වලින් සොයන්න. 0 සිට 50 km තෙක් x වැඩි වන විට $\frac{dT}{dx}$ හි ලකුණ පරීක්ෂා කරන්න. A සිට C තෙක් කෙටිම කාලයකින් ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට මෝටර් රථයකට හැකිවන අයුරින් D සඳහා වඩා සුදුසුම ස්ථානය සොයන්න. (2000)

(19) A, B සහ C නගර තුන පිහිටා ඇත්තේ A සිට B දක්වා සහ A සිට C දක්වා වූ දුරවල් සමාන වන සේ ඇති සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල ය. B සිට C දක්වා දුර 12 km සහ A ඔස්සේ වූ උච්චය 16 km වේ. අවම නළ ප්‍රමාණයක් උපයෝගී කරගනිමින් A, B සහ C නගර තුනට ම නළ ජලය සැපයීම සඳහා A ඔස්සේ වූ උච්චය මත A සිට කොපමණ දුරකින් ළිඳක් පිහිටිය යුතු ද? (2001)

(20) ඝන ගෝලයකින් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන්නා වූ අක්ෂයක් සහිත සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් කපනු ලැබේ. සිලින්ඩරයේ පරිමාව ගෝලයේ පරිමාව මෙන් $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ට වඩා වැඩි විය නොහැකි බව සාධනය කරන්න. (2002)

(21) $y = \frac{2x}{1+x^2}$ යයි දී ඇත්නම් $\frac{dy}{dx} = 0$ වන සේ වූ x හි අගයයන් සොයන්න. y හි එම ස්ථාවර අගයයන්ගේ ස්වාභාවය ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නයේ හැසිරීම පමණක් සලකා බැලීමෙන් පරීක්ෂා කරන්න. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. (2003)

(22) සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෝස්ටරයක් එහි වමෙන් හා දකුණෙන් එක එකක් 6 cm ක් පළල තීරවලින් ද උඩින් හා යටින් එක එකක් 8 cm ක් පළල තීරවලින් ද වට වූ වර්ගඵලය 972 cm^2 ක සෘජුකෝණාස්‍ර මුද්‍රිත පෙදෙසක් ප්‍රදර්ශනය වන අයුරින් තැනිය යුතු වේ. අඩුතම වර්ගඵලය සහිත පෝස්ටරයේ මාන සොයන්න. (2004)

(23) සමචතුරස්‍ර පතුලක් සහිත එහෙත් පියනක් රහිත ධාරිතාව 256 cm^3 කින් යුත් සෘජුකෝණාස්‍ර පෙට්ටියක් සෑදිය යුතුව ඇත. පතුළ සඳහා අවශ්‍ය ද්‍රව්‍යවල වර්ග සෙන්ටිමීටරයකට මෙන් 8 ගුණයක් සෘජුකෝණාස්‍ර පැති සඳහා අවශ්‍ය ද්‍රව්‍යවල වර්ග සෙන්ටිමීටරයකට වැය වේ නම්, වඩාත්ම ලාභදායි පෙට්ටියේ මාන සොයන්න. (2005)

(24) සංවෘත සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් එහි පරිමාව 1024 π cm^3 වන පරිදි සෑදිය යුතුව ඇත. එහි මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවමයක් කරනු ලබන සිලින්ඩරයේ අරය සොයන්න. (2006)

(25) P (at^2, at^3) ලක්ෂ්‍යයේ දී $ay^2 = x^3$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී නැවතත් වක්‍රයට හමු වේ. මෙහි a යනු නියතයකි. t ඇසුරෙන් Q හි බණ්ඩාංක සොයන්න. (2007)

(26) C යනු $x = \frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ සහ $y = a\left(t-\frac{1}{t}\right)$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන වක්‍රය යැයි ගනිමු. මෙහි a යනු නිශ්ශුන්‍ය නියතයක් ද, t යනු නිශ්ශුන්‍ය පරාමිතියක් ද වේ. C වක්‍රයට t_0 පරාමිතික අගය ඇති ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයෙහි සමීකරණ සොයන්න. $(-13a,\ 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ හතරක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වා අභිලම්බ හතරෙහි අඩිවල පරාමිතික අගයන් සොයන්න. (2008)

(27) $P\left(3, \frac{1}{5}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $y\,(1+x^2) = 2$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය Q හි දී නැවතත් වක්‍රය හමුවෙයි. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. (2009)

(28) දෙන ලද l දිගින් යුත් කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයට නවා ඇති අතර අනෙක් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය වන A(x) යන්න $A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි x, $(0 \le x \le l)$ යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිග වේ. ඒ නයින්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක් වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට, A(x) වර්ගඵලය අවම වන බව පෙන්වන්න. (2010)

(29) වක්‍රයක් $x = 3t$, $y = 3/t$ මගින දෙනු ලැබෙයි. මෙහි t යනු නිශ්ශුන්‍ය පරාමිතියකි. වක්‍රය $(3t,\ 3/t)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x + t^2y = 6t$ බව පෙන්වන්න. t විචලනය වන විට බණ්ඩාංක අක්ෂ හා මෙම ස්පර්ශකය මගින් සපර්යන්ත ත්‍රිකෝණාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න. (2011)

(30) a) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු. මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ යැයි සිතමු. මෙහි f' හා f'' ට සුපුරුදු තේරුම් තිබෙයි. a හා b හි අගයයන් සොයන්න. a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අඳින්න. ඒ නයින්, $2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

b) සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සංවෘත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුනී කාඩ්බෝඩ්වලින් සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පරිමාව $8192\ cm^3$ වෙයි. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලෙහි පැත්තක දිග 4x cm යැයි ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත්කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය වන $A\ cm^2$ යන්න, $A = (32-\pi)x^2 + \frac{8192}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න. (2011)

(31) C නම් වක්‍රයක් $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලැබෙයි. C වක්‍රයට (1, 2) ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය (1, 2) ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ බව පෙන්වන්න. (2012)

(32) a) **පළමු ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සලකමින්** $\frac{x^3}{x^4+27}$ හි අවම හා උපරිම අගයන් සොයන්න.

$y = \frac{x^3}{x^4+27}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, k හි කවර අගයන් සඳහා

$kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයට

i) තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබේ දැයි,

ii) තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබේ දැයි,

iii) තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබේ දැයි,

iv) තාත්ත්වික මූල නොතිබේ දැයි සොයන්න. මෙහි k තාත්ත්වික වෙයි.

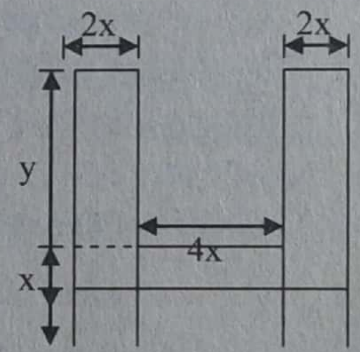
b) $AB = a$ හා $BC = b\ (< a)$ සහිත ABCD සෘජුකෝණාස්‍රායක් සලකමු. P යනු CD මත විචලනය විය හැකි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $AP + PB$ හි දිග $L(x)$ වෙයි. මෙහි $DP = x$ වෙයි.

$L(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$ බව පෙන්වන්න.

$L(x)$ හි අවම දිග හා මෙම අවම දිගට අනුරූප P හි පිහටුම CD මත සොයන්න. $L(x)$ හි උපරිම දිග ද සොයන්න. (2012)

(33) a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ යැයි ගනිමු. $x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = -\frac{x(x^3+2)}{(x^3-1)}$ බව පෙන්වා $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට $(0, 0)$ හා $\left(-2^{\frac{1}{3}}, \frac{4^{\frac{1}{3}}}{3}\right)$ හි දී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පවතින බව අපෝහනය කරන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

b) මායිම සෘජුකෝණික ලෙස හමුවන සරල රේඛා ඛණ්ඩ අටකින් සමන්විත ගෙවත්තක් රූප සටහනෙහි දක් වේ. ගෙවත්තේ මාන මීටරවලින් එහි දක්වා ඇත. ගෙවත්තේ වර්ගඵලය $800\ m^2$ බව දී ඇත. x ඇසුරෙන් y ප්‍රකාශ කර මීටරවලින් මනින ලද ගෙවත්තේ පරිමිතිය P යන්න $P = \frac{800}{x} + 10x$ මඟින් දෙනු ලබන බව ද පරිමිතිය සඳහා වන මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ $0 < x < 10$ සඳහා පමණක් බව ද පෙන්වන්න. ඒ නයින්, ගෙවත්තේ පරිමිතියෙහි අවම අගය සොයන්න. (2013)



(34) $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු. මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සොයා $t = \ln 2$ ට අනුරූප ව C මත වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න. (2014)

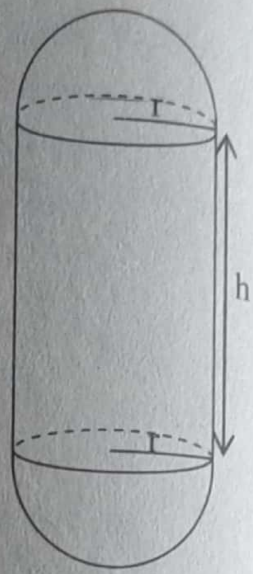
(35) a) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x) = \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන් මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

b) අරය මීටර r වූ කුහර ගෝල දෙකක්, එම අරයම සහිත උස මීටර h වූ ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $36\pi\ m^3$ වේ. $h = \frac{108-4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.

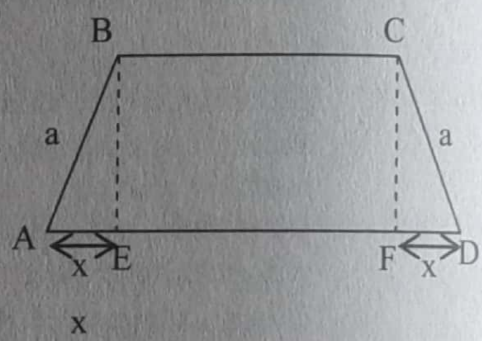


ද්‍රව්‍ය සඳහා යන වියදම සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 300 ක් ද, අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 1 000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් c යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi\left[4r^2 + \frac{27}{r}\right]$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න. (2014)

(36) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. (2015)

(37) දී ඇති රූපයෙහි, ANCD යනු BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග AB = CD = a, BC = b හා AD = b + 2x මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි $0 < x < a$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



ABCD ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය S(x), වර්ග සෙන්ටිමීටර්වලින් $S(x) = (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට S(x) උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි මෙම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න. (2015)

අනුකලනය

(1) i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + \sin x + 1} = -2\int_0^1 \frac{dt}{(t-3)(t+1)}$ බව පෙන්වීම සඳහා ටැන් $\frac{x}{2} = t$ ආදේශය භාවිත කරන්න. ඒ නයින්, මෙම අනුකලනය අගයන්න.

ii) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{3-2(t-1)^2}}$ බව පෙන්වීම සඳහා $x + 1 = \frac{1}{t}$ ආදේශය භාවිත කරන්න. ඒ නයින්, මෙම අනුකලනය අගයන්න.

iii) $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x)(1+x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t\,dt}{\sin t+\cos t}$ බව පෙන්වීම සඳහා x = tan t ආදේශය භාවිත කරන්න.
සයින් $t \equiv \boldsymbol{\lambda}(\sin t + \cos t) + \boldsymbol{\mu}(\cos t - \sin t)$ වන පරිදි $\boldsymbol{\lambda}$ හා $\boldsymbol{\mu}$ නියත සොයන්න. ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ මෙම අනුකලනය අගයන්න.
(1975)

(2) අගයන්න.

i) ඇ) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}$ ආ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^3 t - \cos^3 t)dt$ ඇ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

ii) වක්‍රයක් මත (x, y) ලක්ෂ්‍යයක දී වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය $1/(y\sqrt{1-x^2}$ කොස් y) වෙයි. මෙම වක්‍රය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්, $[\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right), \frac{\pi}{2}]$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ද එය යන බව සාධනය කරන්න. (1976)

(3) ඇ) $I = \int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{x+2}}$ නම්, $I = \int \frac{du}{u^2+\frac{1}{2}}$ බව පෙන්වීම සඳහා 2x + 5 = $\sqrt{x+2} = u$ ආදේශය යොදන්න. තව ද $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(v-\frac{1}{2}\right)^2}}$ බව පෙන්වීම සඳහා $2x+5 = \frac{1}{v}$ ආදේශය යොදන්න. ඒ නයින්,

i) $a \tan^{-1} f + b$ ආකාරයෙන් , ii) $p \sin^{-1} g + q$ ආකාරයෙන් ,
I ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a, b, p, q නියත වන අතර f, g යනු x හි ශ්‍රිත වෙයි.

ආ) $\tan\frac{x}{2} = t$ ආදේශය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int \frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}$ යන්නෙහි අගය සොයන්න. (1977)

(4) i) අගයන්න. ඇ) $\int \frac{dx}{9x^2-4}$ ආ) $\int_0^1 xe^{-2x}dx$

ii) x = සයින්$^2\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන් අගයන්න. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

iii) x = 3 විට y = 2 බව දී ඇති කල්හි $2(x+1)\frac{dy}{dx} = y^2+4$ සමීකරණය විසඳන්න. (1978)

(5) පහත සඳහන් නිශ්චිත අනුකලන අගයන්න.

ඇ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+3\cos x}$ $(t = \tan\frac{x}{2}$ යොදන්න.) ආ) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(x = \frac{1}{t}$ යොදන්න.)

ඇ) $\int_0^2 x\tan^{-1} x\,dx$ (1978)

(6) අ) $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ වන පරිදි A, B, C නියත සොයන්න. ඒ නයින්, $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ සොයන්න.

ආ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ හි අගය සොයන්න. ($t = \tan\frac{x}{2}$ යොදන්න.)

ඇ) $\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$ සොයන්න. මේ නයින් $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$ හි අගය සොයන්න.(1979 අතුරු)

(7) i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = \int_0^2 (ax^2+2x)dx$ නම් a හි අගය සොයන්න.

ii) අ) $\int_0^2 \frac{(3x-1)dx}{x^2-x+1} = \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ බව ද,

ආ) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = 1$ බව ද,

ඇ) $t = e^x$ ආදේශයෙන් $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \log\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ බව ද, පෙන්වන්න. (1980)

(8) i) $\tan\frac{x}{2} = t$ ආදේශය භාවිතයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = 1$ බව පෙන්වන්න. $2\sin x = \lambda(1+\sin x) + \mu$ වන පරිදි λ, μ නියත සොයන්න. ඒනයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 2\sin x}{1+\sin x} dx$ අගයන්න.

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\, dx$ අගයන්න. (1981)

(9) $x^2 = 4y$ ද $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ ද යන සමීකරණ ඇති වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූපයේ අඳින්න. මෙම වක්‍ර දෙකෙනුත් y – අක්ෂයෙනුත් ඇවිරී පළමු වැනි වෘත්ත පාදකයේ වූ S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය $\int_0^2 \sqrt{2-(x-1)^2}\, dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx$ බව පෙන්වන්න. $S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න. (1981)

(10) i) $x = t^2$, $(t > 0)$ යන ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = 2\int_1^{\sqrt{k}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = dt = \int_1^{\sqrt{k}} t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1+t^2)}\right) dt = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{k}}{1+k} + \tan^{-1}(\sqrt{k}) - \frac{\pi}{4}$ $\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x\, dx$ අගයන්න. (1982)

(11) $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y = 2 - x^2$ යන වක්‍රවල කටු සටහන්, එකම රූපයෙහි අඳින්න. මේ වක්‍ර දෙකෙන් මායිම් වන S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය ඒකක $(\pi - 2/3)$ බව පෙන්වන්න.
(1982)

(12) i) α හා β තාත්වික ප්‍රභින්න වන $Q(x) \equiv (x-\alpha)^2 (x-\beta)$

ii) $P(x)$ හි මාත්‍රය තුනට වඩා අඩු හා

iii) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)} + \frac{B_1}{x-\beta}$ නම්,

එවිට $A_1 = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)}$, $A_2 = \frac{P'(\alpha)}{(\alpha-\beta)} - \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$ හා $B_1 = \frac{P(\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $P'(x) = \frac{dP(x)}{dx}$ වේ. $\int_r^k \frac{x}{(x-\alpha)^2(x-\beta)} dx$ අගයන්න. මෙහි $\alpha > 0$, $\beta > 0$ හා $k > r >$ උපරිම (α, β) වේ.

$\lim_{k\to\infty} \int_8^k \frac{x}{(x-2)^2(x-6)} dx$ පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න. (1983)

(13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මඟින් අන්තර්ගත කරන ලද ක්ෂේත්‍රඵලය πab බව පෙන්වන්න.
(1983)

(14) i) $\int_0^1 x \tan^{-1} x dx$ අගයන්න.

ii) $\frac{1}{(x-1)(x^2-1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර $\frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2}$ බව පෙන්වන්න. $\int_2^k \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$, $(k > 2)$ අගයන්න.

$\lim_{k\to\infty} \int_2^k \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$ පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න. (1984)

(15) $y^2 = 4x$ සහ $y^2 = \frac{8}{x} - 4$ යන සමීකරණ ඇති වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූපයේ අඳින්න. මෙම වක්‍ර දෙක මඟින් ආවෘත S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය සොයන්න. (1984)

(16) $\int_0^k \frac{1}{a^2 + b^2t^2} dt$ අනුකලනය අගයන්න. මෙහි a, b හා k ධන නියතයක් වේ. $\lim_{k\to\infty} \int_0^k \frac{1}{a^2 + b^2t^2} dt = \frac{\pi}{2ab}$ බව අපෝහනය කරන්න. $t = \tan x$ යයි ලිවීමෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2ab}$ බව පෙන්වන්න.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{a^2 \cos^2 + b\sin^2 x} dx$ සහ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$ යයි ගනිමු. $a^2 I + b^2 J = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න. මෙය උපයෝගී කරගනිමින් I සහ J අනුකූල a සහ b ඇසුරෙන් ප්‍රකාශිත ලෙස සොයන්න. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} dx$ අනුකලනයෙහි අගය අපෝහනය කරන්න. (1985)

(17) i) $I = \int_0^{a} \frac{x^2}{x^2 + (x-a)^2} dx$ සහ $J = \int_0^{a} \frac{(x-a)^2}{x^2 + (x-a)^2} dx$ යයි ගනිමු. $I = J = \frac{a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $y = e^{-x}$ ආදේශයෙන් $\int_0^{2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$ අනුකලනය අගයන්න. (1986)

(18) $y^2 (2 - x) = 4x$ සහ $y^2 = 4(2 - x)$ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර එකම රූපයක දළ සටහන් කරන්න. වක්‍ර දෙක මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය සොයන්න. (1986)

(19) $\int_0^{a} \sin x \sin(p-x) dx = \frac{1}{2}(\sin P - P\cos P)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි P යනු නියතයක් වේ. $I = \int_0^{p} \phi(x)\, dx$ හා $J = \int_0^{p} \phi(P - x)\, dx$ යයි ගනිමු. මෙහි $\boldsymbol{\phi(x)}$ යනු x හි අනුකලන ශ්‍රිතයක්ද p යනු ධන නියතයක් ද වේ. I = J බව පෙන්වන්න. $f(\mathbf{x})$ යනු x හි සියලු තාත්වික අගයන් සඳහා $f(\mathbf{x}) + f(p - x) = q$ වන අයුරින් වූ x හි අනුකල්‍ය ශ්‍රිතයකි. මෙහි p (> 0) සහ q නියතයක් වේ.
i) $\int_0^{p} f(x) dx = \frac{1}{2} pq$ ii) $\int_0^{p} \sin x \sin(p-x) f(x)\, dx = \frac{1}{4} q (\sin p - p\cos p)$ බව පෙන්වන්න. (1987)

(20) පිළිවෙළින් $y = 1 - \frac{3}{x+3}$, $y = \frac{x}{x^2+1}$ මගින් දෙනු ලබන C_1 සහ C_2 වක්‍ර දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ සහ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පෙන්නුම් කරමින් මෙම වක්‍ර දෙකෙහි ප්‍රස්ථාර එකම රූපයක අඳින්න. ප්‍රථම වෘත්ත පාදය තුළ, C_1 සහ C_2 මගින් අන්තර්ගත කරනු ලබන පරිමිත පෙදෙසේ S වර්ගඵලයේ විශාලත්වය $\frac{7}{2}\log 5 - 3 \log 3 - 2$ බව පෙන්වන්න. (1987)

(21) i) $f(\mathbf{x})$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2(x^2-1)}$ වේ. $\int_0^{k} f(x) dx$, (k > 0) අගයන්න. $\lim_{k \to \infty} \int_0^{k} f(x) dx$, පරිමිත බව අපෝහනය කරන්න.

ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \tan\theta)^2}$ අගයන්න.

ii) $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\log x)\, dx$ සහ $J = \int_{\alpha}^{\beta} \cos(\log x)\, dx$ යයි ගනිමු. $0 < \alpha < \beta$ වේ. $I, J - \beta$ $\sin(\log \beta) - \alpha \sin(\log \alpha)$ බව පෙන්වන්න. මෙය උපයෝගී කර ගනිමින් හා I සහ J හි තවත් රේඛීය සංයෝජනයක් සලකමින් I සහ J අගයන්න. (1988)

(22) පිළිවෙළින් $y^2 = 8x$ සහ $x^2 = 3\sqrt{3y}$ සමීකරණ වන C_1 සහ C_2 වක්‍ර දෙක එකම රූපයේ දළ සටහන් කරන්න. C_1 සහ C_2 මඟින් වට වූ S වර්ගඵලය සොයන්න. (1988)

(23) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින් $\int \sin(\log x)dx$ අගයන්න. r නියතයක් වන $I = \int x^r \sin(\log x)dx$ සහ $J = \int x^r \cos(\log x)dx$ නම් $(1 + \frac{r}{2})\, I - \frac{r}{2}\, J = \frac{x^{r+1}}{2}\, \{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$ + නියතයක් බව සාධනය කරන්න. $x^{r+1} \sin(\log x)$ අවකලනය කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් I සහ J අතර තවත් සම්බන්ධයක් ලබාගෙන $I = \frac{x^{r+1}}{r^2+2r+2}\, \{(r+1)\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$ + නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින් a සහ b නියත වන $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ අගයන්න.
(1989)

(24) $x^2 = 4y$ සහ $x^2 = y^3$ වක්‍රවල කටු සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. ප්‍රථම වෘත්ත පාදය තුළ මෙම වක්‍ර දෙක මඟින් අන්තර්ගත කරනු ලබන S වර්ගඵලය සොයන්න. (1989)

(25) i) $x(1-x)^2 = (1+x)^2(x-2) + 2$ සහ $x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) - 4$ බව සත්‍යාපනය කරන්න. ඉහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵලය භාවිත කිරීමෙන්, $\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\, dx$ සහ $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\, dx$ අගයන්න.
$3 < \pi < \frac{22}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) n ධන නිඛිලයක් වන විට $\int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta = \frac{2}{3+\pi} \int \sin\theta \cos^n\theta d\theta - \frac{\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta}{3+n}$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta$ අගයන්න. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3(1 - x^2)dx$ අනුකලනය සලකා බැලීමෙන් ඔබේ ප්‍රතිඵලය නිවැරදි දැයි සොයා බලන්න. (1990)

(26) i) $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින්, $\int_0^{\pi} x \sin^n x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^n x\, dx$ බව පෙන්වන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි. තවද, $n > 2$ විට, $\int_0^{\pi} x \sin^n x\, dx = (n-1) \int_0^{\pi} x \sin^{n-2} x\, dx$ බව ද පෙන්වන්න. ඒ නයින් $\int_0^{\pi} x \sin^4 x\, dx$ සහ $\int_0^{\pi} x \sin^5 x\, dx$ අගයන්න.

ii) $\frac{d}{d\theta}\log_e(\sec\theta+\tan\theta) = \sec\theta$ බව පෙන්වා $\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ සෙවීමට එය භාවිතා කරන්න. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$ ඇගයීම සඳහා $y=\frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2}$ ආදේශය භාවිතා කරන්න. (1991)

(27) $y^2 = 4x$ පරාවලයේත් $x^2-y^2=1$ බහුවලයේත් $x=4$ රේඛාවෙහිත් දළ සටහන් එකම රූප සටහනෙහි අඳින්න. $x^2-y^2\leq 0$ සහ $y^2-4x\leq 0$ වන සේ වූ S_1 පෙදෙස සටහන් කර S_1 න් පර්යන්තගත වර්ගඵලය නිර්ණය කරන්න. (1991)

(28) අ) $a>0$ නම්, $\frac{d}{dx}(a^x)$ ලබාගෙන c නියතයක් විට, $\int_0^c\frac{a^x}{a^x+1}dx$ අගයන්න. $0<c<\frac{\pi}{2}$ විට, $I=\int_{-c}^{c}\frac{\cos x\,dx}{1+a^x}$ සහ $J=\int_{-c}^{c}\frac{a^x\cos x\,dx}{1+a^x}$ නම්,

i) $t=-x$ ආදේශන යෙදීමෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $I=J$ බව පෙන්වන්න.

ii) $I+J$ ලබාගන්න. ඒනයින් $c=\frac{\pi}{6}$ විට J හි අගය ලියන්න.

ආ) $\int_0^1\frac{dx}{(2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{3}{2}}}$ අගයන්න. (1992)

(29) $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$ නම්, $y=f(x)$ සහ $y=\frac{1}{f(x)}$ වක්‍රවල කටු සටහන් එකම රූප සටහනෙහි අඳින්න. ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ඇතොත් ඒවායේ ඛණ්ඩාංක සඳහන් කරන්න. ඉහත වක්‍ර දෙකෙන් අන්තර්ගත වන R පරිමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න. (1992)

(30) a) $\int\frac{8x+7}{2x^2+8x+10}dx$ සොයන්න.

b) කොටස් වශයේ අනුකලනය කිරීමෙන්, $3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{3}}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}}x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

c) $x=\tan\theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ n ධන නිඛිලයක් විට $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} = \left[\frac{2n-3}{2n-2}\right]\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ බව සාධනය කරන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න. (1993)

31) $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ මගින් C වක්‍රයක් ගෙන දේ.

i) $0\leq y\leq 2$ සහ ii) $x\to\pm\infty$ විට $y\to 1$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ C මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. C වක්‍රය උපයෝගී කර ගැනීමෙන් සහ සමමිතික බව සැලකීමෙන් $y=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}$ මගින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේ දළ සටහනක් ද එම රූ

සටහනෙහිම අඳින්න. තවද C වක්‍රයෙනුත් x = 2, y = 1 රේඛා මගිනුත් අන්තර්ගත වන S පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ x = 2 රේඛාවෙනුත් $0 \leq x \leq 2$ ප්‍රාන්තරයේදී C, C' වක්‍ර මගින් අන්තර්ගත වන S' පෙදෙස් වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න. (1993)

(32) a) $u = \frac{1}{x} - x$ ආදේශය හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int \frac{(1+x^2)}{1+x^4}dx$ අනුකලනය අගයන්න.

b) n ධන නිඛිලයක් යැයි සිතමු. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx = 0$ බව පෙන්වා $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න. තව ද $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2n+1)x}{\sin^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx\, dx}{\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වා $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. (1994)

(33) $y^2 = 3x(1-x)^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ සඳහා, ඉහත වක්‍රයේ ප්‍රථම වෘත්ත පාදයෙහි ඇති කොටස C යැයි සිතමු. x අක්ෂය $x = \frac{1}{3}$ රේඛාව සහ C මගින් අන්තර්ගත වන S පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න. (1994)

(34) i) $\int \frac{5x+3}{(x-1)(x+1)}dx$ සොයන්න.

ii) $x+1 = \frac{1}{t}$ ආදේශයෙන්, $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)(4x+3-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left\{(4t-1)(1-2t)^{\frac{1}{2}}\right\}}$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta$ යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ අනුකලනයේ අගය $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos^4\theta\, d\theta = \frac{8}{315}$ බව පෙන්වන්න. (1995)

(35) පිළිවෙළින් $y^2 = x$ සහ $y = 2 - x^2$ සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වක්‍රයන්හි කටු සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. C_1 හා C_2 වක්‍ර දෙක හා $y = 2$ සරල රේඛාව මගින් සපර්යන්ත S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න. (1995)

(36) i) ආදේශ කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+1}}$ සොයන්න.

ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $\int x^3\tan^{-1}x\,dx$ ලබා ගන්න.

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\tan^3 x\,dx$ අගයන්න. (1996)

(37) පිළිවෙළින් $y = x^3 + x^2 - x$ සහ $y = x^2$ යන්නෙන් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වක්‍රවල දළ සටහන්, එකම රූප සටහනක අඳින්න. C_1 හා C_2 වක්‍රවලින් අන්තර්ගත S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය ලබාගන්න. (1996)

(38) ඇ) f සහ g යනු $[-a, a]$ ප්‍රාන්තරය මත අනුකල්‍ය ශ්‍රිත දෙකක් යැයි සිතමු. $[-a, a]$ හි සියලුම x සඳහා $f(-x) = f(x)$ සහ $g(-x) = -g(x)$ යැයි සිතමු. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ සහ $\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$ බව පෙන්වන්න. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ අගයන්න.

ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්, $\int_{0}^{a} x^2 h'''(x)\, dx = a^2 h''(a) - 2ah'(a) + 2h(a) - 2h(0)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $h'(x) = \frac{dh}{dx}$, $h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2}$ සහ $h'''(x) = \frac{d^3h}{dx^3}$. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} dx$ අගයන්න. (1997)

(39) ඇ) $\frac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ භින්න භාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ සොයන්න.

ආ) $\int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\, dx$ බව පෙන්වා ඒ නයින් $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ බව පෙන්වන්න. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(1998)

(40) $\int \frac{1}{2+\sin x} dx$ සොයන්න. (ඉඟිය : $t = \tan\frac{x}{2}$ යොදා බලන්න.) $\frac{\cos^2 x}{2+\sin x} = A + B\sin x + \frac{C}{2+\sin x}$ වන පරිදි A, B, C නියත නිර්ණය කර ඒ නයින් $\int_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\cos^2 x}{2+\sin x} dx$ අගයන්න. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, \ell n(2+\sin x)\, dx = \ell n\, 2 + \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$ බව අපෝහනය කරන්න. (1999)

(41) සුදුසු ආදේශකයක් උපයෝගී කර ගනිමින්

ඇ) $\int_{1}^{8} \frac{1}{\left[x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right]} dx$ අගයන්න.

ආ) $I = \int_{0}^{\pi} e^{-2x} \cos x\, dx$ හා $J = \int_{0}^{\pi} e^{-2x} \sin x\, dx$ යයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය උපයෝගී කර ගනිමින් $I = 2J$ හා $J = 1 + e^{-2\pi} - 2I$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් I සහ J හි අගයන් ලබාගන්න.

ඇ) $\int \frac{x^2-5x}{(x-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න. (2000)

(42) අ) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන් $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ dx අනුකලනය අගයන්න.

ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int_2^4 x \ln x \, dx = a \ln b + c$ බව පෙන්වන්න; මෙහි a, b සහ c යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිල වේ.

ඇ) $\int_0^1 \frac{(7x-x^2)}{(2-x)(x^2+1)} dx$ සොයන්න. (2001)

(43) a) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන්, $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$ dx අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$ අනුකලනය අගයන්න.

c) $\int_1^2 \frac{5x-4}{(1-x+x^2)(2+x)}$ dx සොයන්න. (2002)

(44) a) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන් $\int_1^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^1 x^2 e^{2x+3} \, dx$ අනුකලනය අගයන්න.

c) $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$ සොයන්න. (2003)

(45) a) සුදුසු ආදේශකයක් යොදාගනිමින් $\int_{11}^{23} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ සොයන්න.

c) $\int \sin^4 2x \, dx$ සොයන්න. (2004)

(46) a) $\tan \frac{x}{2} = t$ ආදේශය යොදාගනිමින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\sin x}$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int_0^1 15x^3\sqrt{1+x^2} \, dx$ අනුකලනය අගයන්න.

c) $\int \frac{x^2-10x+13}{(x-2)(x^2-5x+6)}$ dx සොයන්න. (2005)

(47) a) සුදුසු ආදේශකයක් යෙදීමෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x+\sin x}$ අනුකලනය අගයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int e^{4x} \sin 3x \, dx$ සොයන්න.

c) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{dx}{x^3+1}$ සොයන්න. (2006)

(48) a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින් $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ සොයන්න.

b) $25\cos x + 15 \equiv A(3\cos x + 4\sin x + 5) + B(-3\sin x + 4\cos x) + C$ වන ආකාරයට A, B හා C සොයන්න. ඒ නයින්, $\int \frac{25\cos x+15}{3\cos x+4\sin x+5}\,dx$ සොයන්න.

c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කරගනිමින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{5.3}{6.4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x\,dx$ අගයන්න. (2007)

(49) a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින්, $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ සොයන්න. මෙහි $a \neq 0$ වේ.

b) i) $\frac{d}{dx}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right] = 2^x$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\int 2^x\,dx$ සොයන්න.

iii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}}\,dx$ අගයන්න. (2008)

(50) a) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k}\,dt$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $t > 0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $(k-1)I_k - I_{k-1} + \frac{e^t}{t^{k-1}} = C$ බව පෙන්වන්න; මෙහි C අභිමත නියතයකි. $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$ සොයන්න; මෙහි $x > -1$ වේ.

b) f යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්ත්වික අගයන් ගන්නා ශ්‍රිතයක් වන අතර, $J = \int_0^a f(x)\,dx$ වේ. මෙහි $a > 0$ වේ. $\int_0^a f(a-x)\,dx = J$ බව පෙන්වන්න. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2k} x + \sin^{2k} x}\,dx$ අගයන්න ; මෙහි k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. (2009)

(51) a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින්, $\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}\,dx$ සොයන්න.

b) $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ හා $J = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

i) $bI + aJ = e^{ax}\sin bx$,

ii) $aJ - bJ = e^{ax}\cos bx$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

c) $x^3 t + 1 = 0$ ආදේශ උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \frac{dx}{x(x^3-1)} = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{9}{2}\right]$ බව පෙන්වන්න. (2010)

(52) $\frac{d}{dx} e^{2x}(A\sin 3x + B\cos 3x) = 13e^{2x}\sin 3x$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න. ඒ නයින්, $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ සොයන්න. (2011)

(53) a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int_{1}^{e} x^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx$ අගයන්න.

b) t = tan x යැයි ගනිමු. $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin x + 5} dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

c) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු. $x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න. ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ සොයන්න

(2011)

(54) $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$ වන අයුරින් වූ A හා B නියතයන් සොයන්න. එනයින් $\int \frac{2e^x+3e^{-x}}{2e^x+e^{-x}} dx$ සොයන්න. (2011)

(55) a) $\int_{0}^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x) dx = \frac{4}{3}$ බව පෙන්වන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $\int x^3 \tan^{-1} x \, dx$ සොයන්න.

c) භින්න භාග යොදාගනිමින් $\int \frac{2x^2-3}{(x-2)^2(x^2+1)} dx$ සොයන්න. (2012)

(56) a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx$ සොයන්න.

b) භින්න භාග භාවිතයෙන් $\frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න.

c) $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි ය. $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද, $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + \cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x} dx$ සහ $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b + \sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x} dx$ යැයි ද ගනිමු. $aI + bj = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න. $bI - aJ$ සැලකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න. (2013)

(57) $\frac{d}{dx}\left\{x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right\} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx$ සොයන්න. (2013)

(58) a) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx$ සොයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx = -\frac{1}{2}(e^\pi+1)$ බව පෙන්වන්න.

c) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න. මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,dx$ යැයි ද ගනිමු. ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,dx$ බව පෙන්වන්න. I සඳහා වූ ඉහත අනුකලන දෙක භාවිතයෙන් $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,dx$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින් $I = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(2014)

(59) $y = 2x$ සරල රේඛාවෙන් හා $y = x^2$ වක්‍රයෙන් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(2014)

(60) a) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi-x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

b) සුදුසු ආදේශයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

c) $\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින් $\frac{1}{x^3-1}$ යන්න x විෂයෙන් අනුකලනය කරන්න.

d) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(2015)

(61) එකම රූප සටහනක $y = e^x$ හා $y = e^{-x}$ වක්‍ර දෙකෙහි දළ සටහන් අඳින්න. x අක්ෂයෙන් ද $-1 \le x \le 0$ පරාසය තුළ $y = e^x$ වක්‍රයෙන් හා $0 \le x \le 1$ පරාසය තුළ $y = e^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද ආවෘත වන පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(2015)

සංකරණ හා සංයෝජන

(1) එක ළමයෙකුට අඩු වශයෙන් එක තෑග්ගක්වත් ලැබෙන්නේ නම්, වෙනස් තෑගි හයක් ළමයින් තුන් දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. (1978)

(2) සිසුන් 10 ක් සිටින පන්තියෙක පිරිමි ළමයි 7 දෙනෙක් ගැහැනු ළමයි 3 දෙනෙක් ද වෙති.

අ) සිසුන් 4 දෙනෙකු සිටින කමිටුවක් පන්තියෙන් තෝරාගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

ආ) කමිටු අතුරෙන් කීයෙක අඩුම වශයෙන් එක් ගැහැණු ළමයෙක් වත් සිටියි ද?

ඇ) කමිටු අතුරෙන් කීයෙක එක ගැහැණු ළමයෙක් පමණක් සිටියි ද? (1981)

(3) ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයන් 15 දෙනෙකුගෙන් යුත් සංචාරක ක්‍රිකට් කණ්ඩායමක් පිතිකරුවන් 7 දෙනෙකුගෙන් ද පන්දු යවන්නන් 6 දෙනෙකුගෙන් ද කඩුලු රකින්නන් 2 දෙනෙකුගෙන් ද සමන්විත වේ. ක්‍රීඩකයන් 11දෙනෙකුගෙන් යුත් එක් එක් පිලට යටත් පිරිසෙයින් පිතිකරුවන් 5 දෙනෙකු, පන්දු යවන්නන් 4 දෙනෙකු හා කඩුලු රකින්නන් 1 කෙනෙකු වත් ඇතුළත් විය යුතු වේ.

අ) පිතිකරුවෙකුට හා කඩුලු රකින්නකුට තුවාල සිදු වී ඇත්නම් තෝරාගත හැකි වෙනස් පිල් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ආ) ක්‍රීඩකයන් සියලු දෙනාම සිටින විට ඔවුන් අතුරෙන් වෙනස් පිල් කීයක් තෝරා ගත හැකි ද? (1982)

(4) පිරිමි හත්දෙනෙකුගෙන් හා ගැහැණු පස්දෙනෙකුගෙන් දෙවර්ගයම නියෝජනය වන සේ ද එක් විශේෂ පිරිමියෙක් හා එක් විශේෂ ගැහැණියක් එකම කමිටුවක නොසිටින සේ ද තෝරාගත හැකි සාමාජිකයන් පස් දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කමිටු සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1983)

(5) PREPOSSESSED යන වචනයේ අකුරුවලින් වරකට 4 බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි සංකරණ ගණන සොයන්න. (1984)

(6) වරකට 4 බැගින් ගනිමින් TISSAMAHARAMA යන වචනයේ අකුරු වලින් සෑදිය හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1985)

(7) වරකට 4 බැගින් ගනිමින් KAHATAGASDIGILIYA යන වචනයේ අකුරු වලින් සෑදිය හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1986)

(8) වරකට අකුරු 4 බැගින් ගනිමින් NARRAGGANSETT යන වචනයේ අකුරු වලින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1987)

(9) සංඥා යවන්නෙක් ලඟ කොඩි හයක් ඇති අතර ඒවායින් එකක් නිල් ද, දෙකක් සුදු ද, ඉතිරිවා රතු ද වේ. කොඩි ගසක කොඩි පෙළට එසවීමෙන් ඔහු පණිවුඩ යවනු ලබන අතර කොඩි සකස් කර ඇති අනුපිළිවෙල අනුව පණිවුඩය අඟවනු ලැබේ.

අ) කොඩි හයම උපයෝගී කර ගනිමින්,

ආ) හරියටම කොඩි පහක් උපයෝගී කර ගනිමින්, ඔහුට යැවිය හැකි වෙනස් පණිවුඩ සංඛ්‍යාව සොයන්න. (1988)

(10) රාක්කයක එකිනෙකින් වෙනස් පොත් 16 ක් තිබෙන අතර 3 ක් වීජ ගණිතය, 4 ක් කලනය, 3 ක් ජ්‍යාමිතිය සහ අනෙක්වා ත්‍රිකෝණමිතිය වේ. කොපමණ ආකාර වලින් පොත් පිළියෙල කර තැබිය හැක ද? එක එකක් විෂයට අයත් පොත් එකට සිටින සේ තබන විට පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව ද සොයන්න. (1989)

(11) a) OBSEQUIOUSNESS යන්නෙහි අකුරු සියල්ල එකවර ගත් කළ,

i) අකුරු පටිපාටිය පිළිබඳ සීමා කිරීමක් නැති විට

ii) Q අකුර ළඟ සැම විටම U තිබිය යුතු විට, අකුරු වල පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

b) පිරිමි ළමයින් 14 දෙනෙකුගෙන් සහ ගැහැණු ළමයින් 12 දෙනෙකුගෙන් යුක්ත වූ පංතියකින් පිරිමි ළමයි 3 දෙනෙක් ගැහැණු ළමයින් 3 දෙනෙකුත් සිටින කොමිටියක්,

i) කවර සීමා කිරීමක්වත් නැති විට,

ii) විශේෂ පිරිමි ළමයෙක් සහ විශේෂ ගැහැණු ළමයෙක් එකට සේවට කිරීමට අකමැති විට, සෑදිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. (1990)

(12) i) ENGINEERING යන වචනයේ අක්ෂර සියල්ල යොදා ගැනීමෙන් ලබාගත හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. ඒවා අතුරෙන් කොපමණ සංඛ්‍යාවක E අක්ෂර තුනම එකට එක්වී පිහිටා තිබේද? කොපමණ සංඛ්‍යාවක ඒවා මුලටම පවතී ද?

ii) පත්‍රිකා 32 කින් සමන්විත කාණ්ඩයක පත්‍රිකා 8 ක් කළු පාටද, 8 ක් රතු පාටද, 8 ක් නිල් පාටද, 8 ක් කොළ පාටද වේ. එකම පාට පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ.

අ) එම කාණ්ඩයෙන් පත්‍රිකා තුනක් සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගත හැකි විවිධ ආකාර ගණන සොයන්න.

ආ) අ) හි වූ තේරීම් අතුරින් පත්‍රිකා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වූ පාට වලින් නොපවතින සේ වූ තේරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න. (සැ.යු. සියලුම ආගණන කාර්ය පැහැදිලි ව දක්විය යුතු වේ.) (1991)

(13) එකිනෙකට වෙනස් පොත් දහයක් (කොළ පාට හතරක්, නිල් පාට හතරක් සහ රතු පාට දෙකක්) රාක්කයක් මත පිළියෙල කර ඇත. එක් එක් අවස්ථාවේ දී සියළුම ආගණන කාර්යය පැහැදිලි ලෙස දක්වමින්,

i) පාට සහ අනුපිළිවෙල නොසලකා හරී නම්,

ii) එකම පාටින් යුත් පොත් සැමවිට එක ළඟ තබා ඇත්නම්,

iii) එකම පාටින් යුත් පොත් සැමවිට එක ළඟ එකම අනුපිළිවෙලට තබා ඇත්නම්,

iv) කොළ පාට පොත් සැමවිටම එක ළඟ එකම අනුපිළිවෙලට සිටින සේ ද රතු පාට පොත් සැමවිටම වෙන් වෙන්ව සිටින සේ ද තබා ඇත්නම්, රාක්කය මත පොත් පිළියෙල කළ හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. (1992)

(14) a) GONAPINUWALA වචනයේ අක්ෂර වලින් සෑදිය හැකි විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව

i) අක්ෂර දොළහෙන් වරකට අක්ෂර සියල්ල ගත් විට

ii) අක්ෂර දොළහෙන් වරකට ඕනෑම අක්ෂර හතරක් ගත් විට සොයන්න.

b) එකිනෙකට වෙනස් රිදී කාසි දහයක් සහ එකිනෙකට වෙනස් තඹ කාසි පහක් අඩංගු මල්ලකින් කාසි අටක් ගත හැකි සංයෝජන සංඛ්‍යාව,

i) තේරීම මත කිසිම සීමා කිරීමක් නොමැති විට,

ii) තෝරාගත් කාසි අතර යටත් පිරිසෙයින් තඹ කාසි දෙකක්වත් තිබිය යුතු විට, සොයන්න. (1993)

(15) a) මුදල් පසුම්බිය රුපියල් පහේ කාසි 1 ක් ද රුපියල් දෙකේ කාසි 2 ක් ද රුපියලේ කාසි 3 ක් ද ශත පනහේ කාසි 4 ක් ද අඩංගු වේ. කාසි 3 ක් තෝරාගත හැකි විවිධ ආකාර කොපමණ ද?

b) HOMOGENEOUS යන වචනයෙහි අක්ෂර (වරකට සියල්ල ගනිමින්) 3 326 400 ආකාරයකින් පිළියෙල කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මේවායින් කොපමණක් ව්‍යාජනාක්ෂරයකින් පටන් ගෙන එවැන්නක් අවසාන වේ ද? (ව්‍යාජනාක්ෂරයක් යනු, A,E,I,O,U හැර ඕනෑම අක්ෂරයකි.)

c) i) සංඛ්‍යාංකයන්හි පුනරාවර්තන වලට ඉඩතිබේ නම්,

ii) සංඛ්‍යාංකයක පුනරාවර්තන දෙකකට වඩා ඉඩ නොමැති නම්, 0, 1, 4, 5, 6, 7 සංඛ්‍යාවලින් (ශුන්‍යයෙන් ආරම්භ වන සංඛ්‍යා නොසැලකූ විට) සංඛ්‍යාංක හතරකින් යුත් සංඛ්‍යා කොපමණ සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න. (1994)

(16) i) වරකට අක්ෂර සියල්ලම ගනිමින් KANAKARAYANKULAM යන වචනයෙහි අක්ෂර දහසයෙන්ම සෑදිය හැකි විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.(උත්තරය සුළු කිරීම අනවශ්‍ය යි.) ඉහත වචනයෙන් (A, U) ස්වාරක්ෂර අතහැර වරකට අක්ෂර හතර බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි සංයෝජන ගණන 41 ක් බව පෙන්වන්න.

ii) ගැහැණු ළමුන් දෙදෙනෙකු එක ළඟ නොසිටින පරිදි පිරිමි ළමුන් හය දෙනෙකු සහ ගැහැණු ළමුන් හතර දෙනෙකු කී ආකාරයකින් වෘත්තාකාරව පිළියෙල කළ හැකි ද? (1995)

(17) i) ප්‍රමූලධර්ම මඟින් වරකට r බැගින් ගත් විට ද්‍රව්‍ය n වල සංයෝජන සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ii) මතු දැක්වෙන අවශ්‍යතා දෙකම සපුරාලන්නා වූ 75, 000 ට වඩා විශාල නිඛිල කොපමණ තිබේද?

a) නිඛිලයෙහි සංඛ්‍යාංක සියල්ල ප්‍රභින්න වේ.

b) 0 සහ1 සංඛ්‍යාංක නිඛිලයෙහි නොපවතී.

iii) නිඛිලයක සංඛ්‍යාංක විය හැක්කේ 1හෝ 2 පමණක් වන අතර ඒවායේ ඓක්‍ය දහය වේ. එවැනි නිඛිල කොපමණ ද? (1996)

(18) අ) "COEFFICIENT" වචනයෙහි අක්ෂර 11 න් සෑදෙන විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

තව ද COEFFICIENT වචනයෙහි අක්ෂර 11 න් සෑදිය හැකි අක්ෂර හතරක් අඩංගු එකිනෙකට වෙනස් තේරීම් සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

ආ) A බෑගයෙහි සුදු බෝල 8 ක් සහ කලු බෝල 6 ක් තිබෙන අතර B බෑගයෙහි සුදු බෝල 6 ක් සහ කලු බෝල 3ක් තිබේ.

i) බෝල 6 ම එකම බෑගයෙන් ලැබේ නම්,

ii) කලු බෝල බෑග් දෙකෙන් ඕනෑම එක් බෑග්යකිනුත් සුදු බෝල අනෙක් බෑගයෙනුත් ලැබේ නම්,

iii) බෝල ලැබෙන බෑග සම්බන්ධයෙන් කිසිම සීමා කිරීමක් නොමැති නම්, එක් එක් අවස්ථාව සඳහා සුදු බෝල 4 ක් සහ කලු බෝල 2 ක් ඇතුලත් වන සේ බෝල 6කින් යුත් කාණ්ඩ කොපමණක් තෝරාගත හැකි ද? (1997)

(19) ආ) 3528 හි ධන භාජක සංඛ්‍යාව සොයන්න. (සටහන : $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$)

ආ) විද්‍යා සමුළුවකට විශ්ව විද්‍යාල 20 ක් සහභාගී වන අතර එක් එක් විශ්ව විද්‍යාලය උද්භිද විද්‍යාඥයෙකු, රසායන විද්‍යාඥයෙකු, ගණිතඥයෙකු, භෞතික විද්‍යාඥයෙකු සහ සත්ත්ව විද්‍යාඥයෙකු අනුග්‍රහ කරයි. සාමාජිකයන් 10 කින් සමන්විත එක් එක් කමිටුව තුළ,

i) එක් එක් විෂය ක්ෂේත්‍රයෙන් පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු බැගින්,

ii) එක් එක් සාමාජිකයා වෙනස් විශ්ව විද්‍යාලයක් නියෝජනය කරන පරිදි එක් එක් විෂය ක්ෂේත්‍රයෙන් පුද්ගලයින් දෙදෙනෙකු බැගින්.

iii) ඕනෑම විශ්ව විද්‍යාල තුනකින් පුද්ගලයින් තිදෙනෙකු බැගින් ද, ඕනෑම තවත් විශ්ව විද්‍යාලයකින් එක් පුද්ගලයෙකු ද බැගින් සිටින පරිදි කමිටුවක් සෑදිය හැකි ආකාර කොපමණ ද? ආ) කොටසේ පිළිතුර සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත. (1998)

(20) සිරස් කුඹ ගසක ධජ අටක් ප්‍රදර්ශනය කිරීමෙන් " 8 – ධජ සංඥාවක් " සෑදේ. කුඹ ගස මත ධජ අට සකස් කළ පටිපාටිය මගින් සංඥාවක් නිර්ණය වේ.

i) සියල්ලම වෙනස් ධජ අටක් මගින්

ii) සියල්ලම වෙනස් ධජ නවයක් මගින්

iii) සර්වසම රතු ධජ හතරක්, සර්වසම නිල් ධජ දෙකක් සහ සර්වසම කොළ ධජ දෙකක් මගින්

iv) සර්වසම රතු ධජ හතරක්, සර්වසම නිල් ධජ තුනක් සහ සර්වසම කොළ ධජ දෙකක් මගින් එකිනෙකට වෙනස් "8 – ධජ සංඥා" කොපමණ සෑදිය හැකි ද? (1999)

(21) ගැහැණු ළමයෙක් පේළියේ මුලින්ම ද ගැහැනු සහ පිරිමි ළමයි පේළියේ මාරුවෙන් මාරුවට සිටින ලෙස ද පිරිමි ළමයි 7 දෙනෙකු සහ ගැහැණු ළමයි 7 දෙනෙකු පෙළගැස්විය හැකි ආකාර ගණන කොපමණ ද? (2001)

(22) හරියටම ශිෂ්‍යයන් හතර දෙනෙකුගෙන් සමන්විත පාසල් විවාද කණ්ඩායමක් සුදුසුකම් ලැබූ ශිෂ්‍යයන් දොළොස් දෙනෙකු අතරෙන් තෝරා ගැනීමට නියමිතය. එම කණ්ඩායම තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. අනුර සහ භවන් සුදුසුකම් ලැබූ ශිෂ්‍යයින් දොළොස් දෙනා අතර වේ.

i) අනුර සහ භවන් දෙදෙනාම කණ්ඩායමේ සිටි,

ii) එක්කෝ අනුර නැතහොත් භවන් කණ්ඩායමේ සිටි,

iii) අනුරවත් භවන්වත් කණ්ඩායමේ නොසිටි, යන එක් එක් අවස්ථාව සඳහා විවාද කණ්ඩායම තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. (2002)

(23) එක්තරා පන්තියක ශිෂ්‍යයන් 8 දෙනෙක් සිටී. තරගයකට සහභාගී වීම සඳහා කණ්ඩායම් හතරකට එම ශිෂ්‍යයන් බෙදීමට පංතියේ ගුරුවරයාට අවශ්‍ය වේ. කණ්ඩායම්වල තරම එක හා සමාන වීම අවශ්‍ය ම නොවන අතර කණ්ඩායමක් එක් තැනැත්තකුගෙන් වුව ද සමන්විත විය හැකිය. අවශ්‍ය කණ්ඩායම් හතර 1701 ආකාරයකින් සෑදිය හැකි බව පෙන්වන්න. (2003)

(24) එක්තරා පරීක්ෂණයක දී ඔබ විසින් ප්‍රශ්න නවයකින් හයකට පිළිතුරු සැපයිය යුතුව ඇත. එම ප්‍රශ්න හය තෝරා ගත හැකි ක්‍රම ගණන සොයන්න. තව ද,

i) පළමු ප්‍රශ්න තුන අනිවාර්ය නම්,

ii) පළමු ප්‍රශ්න පහෙන් අඩු වශයෙන් හතරක් තෝරා ගත යුතු නම්, එම ප්‍රශ්න හය තෝරා ගත හැකි ක්‍රම ගණන සොයන්න. (2004)

(25) පිරිමි ළමයින් 7 කින් හා ගැහැණු ළමයින් 5 කින් යුත් සමූහයකින් පුද්ගලයින් 5 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත විවාද කණ්ඩායමක් තෝරාගත යුතු ව ඇත.
i) සමූහයේ ඕනෑම 5 දෙනෙකු,
ii) යටත් පිරිසෙයින් එක් ගැහැණු ළමයෙකු,
iii) යටත් පිරිසෙයින් එක් ගැහැණු ළමයෙකු හා එක් පිරිමි ළමයෙකු, අඩංගු වන සේ මෙම කණ්ඩායම ආකාර කොපමණ ගණනකට සකස් කළ හැකි ද? (2005)

(26) වෙනස් උස ප්‍රමාණ ඇති ළමයින් 12 ක් කණ්ඩායම් දෙකකට බෙදීමට අවශ්‍යව ඇත.
i) එක් කණ්ඩායමක් ළමයින් 7 කින් ද අනෙක් කණ්ඩායම ළමයින් 5 කින් ද සමන්විත වෙයි නම්,
ii) එක් එක් කණ්ඩායම ළමයින් 6 කින් සමන්විත වෙයි නම්,
iii) එක් එක් කණ්ඩායම ළමයින් 6 කින් සමන්විත වී උසම සහ මිටිම ළමයින් දෙදෙනා එකම කණ්ඩායමකට අයත් විය යුතු නම්, ඉහත බෙදීම කළ හැකි ආකාර ගණන සොයන්න. (2006)

(27) අපේක්ෂකයෙකු විභාගයක දී එක් එක් කොටසක ප්‍රශ්න හතර බැගින් අඩංගු A, B හා C නම් කොටස් තුනක් යටතේ දෙන ලද ප්‍රශ්න දොළහකින් ප්‍රශ්න හයකට පිළිතුරු සැපයිය යුතු වේ.
i) එක් එක් කොටසේ පළමුවන ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය නම්,
ii) ඕනෑම කොටසකින් ප්‍රශ්න තුනකට වඩා වැඩියෙන් ඔහුට පිළිතුරු සැපයිය නොහැකි නම්,
iii) එක් එක් කොටසකින් යටත් පිරිසෙයින් එක් ප්‍රශ්නයකටවත් පිළිතුරු සැපයීම අනිවාර්ය නම්, අපේක්ෂකයාට ප්‍රශ්න හය තෝරාගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න. (2007)

(28) ගැහැණු ළමයින් 7 දෙනෙකු සහ පිරිමි ළමයින් 8 දෙනෙකු අතුරෙන් විවාද කණ්ඩායමක් සැකසීම සඳහා සිසුන් 5 දෙනෙකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත.
i) කණ්ඩායම ගැහැණු ළමයින් දෙදෙනෙකුගෙන් හා පිරිමි ළමයින් තිදෙනෙකුගෙන් සමන්විත විය යුතු නම්,
ii) කණ්ඩායම වැඩි තරමින් පිරිමි ළමයින් තිදෙනෙකුගෙන් සමන්විත විය යුතු නම්,
iii) එක්තරා පිරිමි ළමයෙකු සහ එක්තරා ගැහැණු ළමයෙකු එකම කණ්ඩායමට තෝරා ගත නොහැකි නම්, තෝරා ගත හැකි කණ්ඩායම් සංඛ්‍යාව සොයන්න. (2008)

(29) PHILOSOPHY යන වචනයෙහි අකුරු දහයම ගෙන සෑදිය හැකි වෙනස් පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම් වලින් කොපමණක H, I, S සහ Y යන අකුරු එකට තිබෙයි ද? PHILOSOPHY යන වචනයෙහි අකුරු දහයෙන් 5 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර සංඛ්‍යාව ද සොයන්න. (2009)

(30) 1,2,4,5,6,8 හා 9 සංඛ්‍යාංක හතෙන් ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක්
i) පුනරාවර්තනය සහිතව
ii) පුනරාවර්තනය රහිතව
තෝරාගෙන **සංඛ්‍යාංක හතරේ** වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.
i) **අවස්ථාවේ දී,** සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක් වාර දෙකකට වඩා වැඩියෙන් නොතිබේ දැයි සොයන්න.
ii) **අවස්ථාවේ දී,** සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක , ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් හා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් තිබේ දැයි සොයන්න. ඒවායින් කොපමණ ගණනක් ඉරට්ටේ වේ දැයි සොයන්න. (2010)

(31) 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක යොදාගෙන 2000 ත් 4000 ත් අතර සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනයට

i) ඉඩ නැති විට, (2011)

ii) ඉඩ ඇති විට, සෑදිය හැකිදැයි සොයන්න.

(32) ADDING යන වචනයේ අකුරු සියල්ලම යොදාගෙන සෑදිය හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණ ගණනක ප්‍රාණාක්ෂර (Vowels) වෙන්ව පවතී දැයි සොයන්න. (2012)

(33) සිසුන් 15 ක ශිෂ්‍ය සභාවක් විද්‍යා සිසුන් 3 දෙනෙකුගෙන්, කලා සිසුන් 5 දෙනෙකුගෙන් හා වාණිජ සිසුන් 7 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත ය. ව්‍යාපෘතියක වැඩ කිරීම සඳහා මෙම ශිෂ්‍ය සභාවෙන් සිසුන් 6 දෙනෙකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

i) සිසුන් 15 දෙනාම තෝරා ගැනීම සඳහා සුදුසු නම්,

ii) කිසියම් සිසුන් දෙදෙනෙකුට එකට වැඩ කිරීම සඳහා අවසර නොමැති නම්,

iii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරීමට අවශ්‍ය නම්, මෙය සිදු කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

ඉහත (iii) යටතේ තෝරාගත් කණ්ඩායමක් එම කණ්ඩායමෙහි විද්‍යා විෂය ධාරාවෙන් වූ සිසුන් දෙදෙනාට එක ළඟ වාඩි වීමට අවසර නොමැති නම්, වෘත්තාකාර මේසයක් වටේට වාඩි කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න. (2013)

(34) පාසල් හයක් තරුණ ක්‍රීඩා සමුළුවකට සහභාගී වන අතර, ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයෙකුගෙන්, පාපන්දු ක්‍රීඩකයෙකුගෙන් හා හොකී ක්‍රීඩකයෙකුගෙන් සමන්විත ක්‍රීඩකයින් තුන් දෙනෙකුගෙන් එක් එක් පාසල නියෝජනය කරනු ලබයි. මෙම ක්‍රීඩකයින් අතුරෙන් සාමාජිකයින් හය දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ව ඇත.

i) එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

ii) පාසල් හයම නියෝජනය වන පරිදි, එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයෙකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනත් ආකාර ගණන සොයන්න. (2014)

(35) නිපුණතා සංදර්ශන තරගයක විනිසුරුවන් ලෙස කටයුතු කිරීම සඳහා සාමාජික සාමාජිකාවන් හතර දෙනෙකුගෙන් සමන්විත විනිසුරු මඩුල්ලක් පිහිටුවා ගත යුතුව ඇත. මෙම විනිසුරු මඩුල්ල තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ ක්‍රීඩිකාවන් තුන් දෙනෙකු, ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු, ගායිකාවන් හය දෙනෙකු, ගායකයින් පස් දෙනෙකු, නිළියන් දෙදෙනෙකු හා නළුවන් හතර දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකිනි. ප්‍රධාන විනිසුරු, ක්‍රීඩකයෙකු හෝ ක්‍රීඩිකාවක හෝ විය යුතු ය. විනිසුරු මඩුල්ලේ අනෙක් තිදෙනා තෝරා ගත යුතු වන්නේ ක්‍රීඩක ක්‍රීඩිකාවන් හැර කණ්ඩායමේ ඉතිරි අයගෙන් ය. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී විනිසුරු මඩුල්ල පිහිටුවා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

i) අඩු තරමින් එක් ගායිකාවක හා එක් ගායකයෙකු මඩුල්ලට ඇතුළත් විය යුතු ම නම්,

ii) ප්‍රධාන විනිසුරු ඇතුළුව පිරිමි දෙදෙනෙකු හා ගැහැනු දෙදෙනෙකු මඩුල්ලේ සිටිය යුතු ම නම්,

iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක විය යුතු ම නම්,

iv) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයෙකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනත් ආකාර ගණන සොයන්න. (2015)

ශ්‍රේණි අභ්‍යාස

(1) $u_r \equiv f(r+1) - f(r)$ නම්, $\sum_{r=1}^{n} U_r \equiv f(n+1) - f(1)$ බව සාධනය කරන්න.

i) සුදුසු λ සඳහා $f(r) \equiv \lambda \frac{4r+1}{r(r+1)}$ ලෙස ගැනීමෙන් $\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ සොයන්න.
මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව ඔප්පු කර අනන්තය දක්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ii) සුදුසු μ සඳහා $f(r) \equiv \mu(r-1)r(r+2)$ ලෙස ගැනීමෙන් $\sum_{r=1}^{n} r(3r+5)$ සොයන්න.
මෙම ඓක්‍යය අභිසාරී නොවන බව ඔප්පු කරන්න. (1976)

(2) i) $n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ නම්, $u_n - u_{n+1}$ සුළු කරන්න. ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ සොයන්න. මෙම ශ්‍රේණියේ අනන්තයට ඓක්‍යය අපෝහනය කරන්න.

ii) $\frac{6-7x}{(1-x)(2-x)}$ භින්න භාග වලින් ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $a_n = 2^{2-n} - 1$ විට $\frac{6-7x}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ බව පෙන්වන්න. මේ ප්‍රසාරණය වලංගු වන්නේ x හි කවර අගය සඳහා දැයි ප්‍රකාශ කරන්න. (1978)

(3) $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ නම්, $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ බව සාධනය කිරීමට ගණිත අභ්‍යුහනය භාවිතා කරන්න. $S_n' = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ නම්, $\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$ ලෙස ලිවීමෙන් S_n' සොයන්න. p ත් q ත් නියත විට, $S_n'' = \sum_{r=1}^{n} \frac{pr+q}{r(r+1)(r+2)}$ නම්, $S_n'' = p\left[S'_{n+1} - \frac{1}{2}\right] + qS_n$ බව අපෝහනය කරන්න.
ඒ නයින්, ඉහත අන්තිමට සඳහන් කළ ශ්‍රේණිය p ත් q හිත් සියලු අගය සඳහා අභිසාරී බව පෙන්වා එහි අන්තයට ඓක්‍යය සොයන්න. (1979)

(4) $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$ බව සාධනය කරන්න. පිළිවෙලින් $(2r+1)^3 - (2r-1)^3 \equiv 24r^2 + 2$ හා $\{r(r+1)\}^2 - \{r(r-1)\}^2 \equiv 4r^3$ සර්වසාම්‍ය උපයෝගී කරගනිමින් $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ බවද $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$ බවද පෙන්වන්න. ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, $S_n \equiv \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$ බව පෙන්වන්න. $u_r = \frac{1}{4S_r}$ නම්, $u_r = \frac{A}{r(r+1)(r+2)} - \frac{B}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ වන පරිදි A,B නියත සොයන්න. ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයා මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වන්න. එහි අන්තයට ඓක්‍යය ද සොයන්න. (1980)

(5) i) ගණිත අභ්‍යුහනය ක්‍රමයෙන් $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2} n(n+1)$ බව සාධනය කරන්න.

$r^3 - (r-1)^3 \equiv 3r^2 - 3r + 1$ සර්වසාම්‍ය භාවිතයෙන් $\sum_{r=1}^{n} r^2$ සොයන්න. ඒ නයින්,

$\sum_{r=1}^{n} r(3r+1)$ සොයන්න.

ii) $\frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)} = \frac{A}{r+2} + \frac{B}{r+3} + \frac{C}{r+4}$ වන පරිදි A, B, C නියත සොයන්න. ඒ නයින්,

$\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$ අගයන්න.

ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර අනන්තයට එහි ඓක්‍යය සොයන්න.(1981)

(6) $k > 1$ නම්, $\frac{(2k-1)}{2k} > \frac{(2k-2)}{(2k-1)}$ බව සාධනය කරන්න.

$u_n = \frac{1,3,5......(2n-1)}{2,4,6......2n}$ ද $v_n = \frac{1,2,4......(2n-2)}{2,3,5......(2n-1)}$,$(n > 1)$ ද නම්, $u_n > v_n$ බව සාධනය කරන්න. $\left\{\frac{1,3,5....(2n-1)}{2,4,6....2n}\right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$,$(n > 1)$ බව අපෝහනය කරන්න. $W_n =$ $\left\{\frac{1,3,5....(2n-1)}{2,4,6....2n}\right\}(2n+1)$නම්, $(W_{n+1} - W_n)$ සොයන්න. $\sum_{r=1}^{n+1} U_r = (W_{n+1} - 1)$ බව ද $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව ද අපෝහනය කරන්න. (1982)

(7) i) n ධන නිඛිලයක් වන $U_n = \sum_{k=1}^{4n-1} \frac{1}{k}$ හා $V_n = \sum_{k=1}^{4n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ලෙස U_n හා V_n අර්ථ දක්වා ඇත. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම මඟින් $U_n = V_n$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියේ ඓක්‍ය සොයන්න. $-1 < r < 1$ නම්, $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ පවතින බව අපෝහනය කරන්න. $r < -2$ නම් හෝ $r > 0$ නම් එවිට $\lim_{n \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r}{(1+r)k}$ පවතින බව පෙන්වන්න. (1983)

(8) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක ඓක්‍ය සොයන්න. $-1 < r < 1$ නම් එවිට $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ පවතින බව අපෝහනය කරන්න. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10}$ සහ $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ යැයි ගනිමු. $(S - S_n) < 10^{-20}$ වීම සඳහා n හි අඩුතම අගය සොයන්න. (1984)

(9) $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ යනු සියලු $n > 1$ සඳහා $S_1 > \sqrt{3}$ සහ $S_{n+1} = \frac{3(1+S_n)}{(3+S_n)}$ වන අයුරින් වූ ධන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයකි. S_n ඇසුරෙන් $(S^2_{n+1}-3)$ ප්‍රකාශ කරන්න. ගණිත අභ්‍යුහණ මූලධර්ම උපයෝගී කරගනිමින් සියලු ධන නිඛිල n සඳහා $S_n > \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. සියලු ධන නිඛිල n සඳහා $S_{n+1} < S_n$ බව අපෝහනය කරන්න. (1985)

(10) i) α සහ $-\beta$ යනු $k > 0$ වූ $x^2 - x - k = 0$ සමීකරණයෙහි ධන සහ සෘණ මූල වේ. $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ යනු සියළු $n \geq 1$ සඳහා $S_1 > \alpha$ සහ $S_{n+1} = \sqrt{(k+S_n)}$ වන අයුරින් වූ ධන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයකි. $S^2_{n+2} - S^2_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ බව පෙන්වන්න. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම උපයෝගී කරගනිමින් සියලු ධන නිඛිල සඳහා $S_{n+1} < S_n$ සහ $S_n > \alpha$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \ldots\ldots$ ශ්‍රේණියෙහි n වන පදය u_n ලියා දක්වන්න. $\upsilon_n - \upsilon_{n+1}$ ආකාරයෙන් u_n ප්‍රකාශ කර (මෙහි υ_n නිර්ණය කළ යුතු ය.) $\sum_{k=1}^{n} U_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k$ පවතින බව අපෝහනය කරන්න.

(1986)

(11) i) $u_r = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ නම් හා $f(r) = \frac{\lambda r+\mu}{(r+1)(r+2)}$ වේ නම්, $f(r) - f(r-1) = u_r$ වන අයුරින් λ හා μ නියත නිර්ණය කරන්න. $\sum_{r=1}^{n} U_r$ අගයන්න. මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව සාධනය කර අනන්තයට එහි ඓක්‍ය සොයන්න.

ii) අනුයාත ධන නිඛිල 4 ක ගුණිතය 24 න් බෙදිය හැකි බව පෙන්වන්න. $n > 2$ නම්, ගුණිත අභ්‍යුහන ක්‍රමය මඟින් $n^5 - 5n^3 - 60n^2 - 56n$ යන්න 120 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න. (1987)

(12) i) $\frac{3}{1.2.4} + \frac{4}{2.3.5} + \frac{5}{3.4.6} + \ldots\ldots\ldots$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය වන u_r ලියා දක්වන්න. $f(r) - f(r-1)$ ආකාරයෙන් u_r ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $f(r)$ යනු r හි ශ්‍රිතයක් වේ. ඒනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයන්න. මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

ii) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම උපයෝගී කරගනිමින් $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ යන්න 54න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වේ. (1988)

(13) i) u_r යනු $\frac{1}{2} + \frac{1.4}{2.5} + \frac{1.4.7}{2.5.8} + \frac{1.4.7.10}{2.5.8.11} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය වේ. u_r ඇසුරෙන් u_{r+1} ප්‍රකාශ කරන්න. $f(r)$ යනු $f(r) - f(r-1) = u_r$ ද A හා B යනු නියතයන් ද වන $f(r) = (Ar+B)u_{r+1}$ වන අයුරින් වූ r හි ශ්‍රිතයකි. A හා B හි අගයන් සොයා ඒනයින්, $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2}\left\{\frac{4.7.10\ldots.(3n+1)}{2.5.8\ldots.(3n-1)} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න.

ii) n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ යන්න 17 න් බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහණයෙන් සාධනය කරන්න. ස්වායත්ත ක්‍රමයක් මඟින් ද ප්‍රතිඵලය ගොඩනගන්න. (1989)

(14) i) $\frac{1}{3!}, \frac{5}{4!}, \frac{11}{5!}, \frac{19}{6!}$ .... අනුක්‍රමයේ n වන පදය $u_n = \frac{\lambda}{n!} + \frac{\mu}{(n+1)!} + \frac{v}{(n+2)!}$ ආකාරයේ සම්බන්ධයක් සපුරාලනු ලැබේ. n = 1, 2 සහ 3 යෙදීමෙන් λ, μ සහ v සොයන්න. n = 4 සඳහා සත්‍යාපනය කරන්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)}{(n+2)!}$ බව පෙන්වන්න. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ ප්‍රතිඵලය සනාථ කරන්න.

ii) $x^{p+1} + y^{p+1} = (x+y)(x^p + y^p) - xy(x^{p-1} + y^{p-1})$ බව සත්‍යාපනය කරන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ n ධන නිඛිලයක් වන විට $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ යන්න 2^n වලින් බෙදෙන බව පෙන්වන්න. $(3+\sqrt{5})^n$ හි නිඛිල කොටස එකකින් වැඩි කළවිට ඵලිත සංඛ්‍යාව 2^n නිඛිල ගුණාකාරයක් බව අපෝහනය කරන්න. (1990)

(15) i) $f(r) = \frac{1}{r^2} (r \neq 0)$නම්, $f(r+1) - f(r) = -\frac{(2r+1)}{r^2(r+1)^2}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\frac{3}{1^2 2^2} + \frac{5}{2^2 3^2} + \frac{7}{3^2 4^2} + \dots\dots\dots$ ශ්‍රේණියේ පළමුවැනි පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න. ඉහත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න.

ii) $|x| < 1$ සඳහා $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots\dots - \frac{x^n}{n}$ ප්‍රතිඵලය උපකල්පනය කිරීමෙන්,

$ln\,2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\dots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots\dots$ බව පෙන්වන්න. $\frac{1}{r(r+1)}$ හින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ බව පෙන්වන්න. $n \to \infty$ විට $S_n \to 1 - ln2$ බව අපෝහනය කරන්න. (1991)

(16) i) $\frac{4}{2.3.4} + \frac{7}{3.4.5} + \dots + \frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \dots$ ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න. ඉහත ශ්‍රේණියේ අභිසාරී බව පෙන්වා අනන්තය තෙක් ඓක්‍යය සොයන්න.

ii) ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් 5m , 5m, $\pm 1, 5m \pm 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි m යනු නිඛිලයකි. ඒනයින්, n^2 ආකාරයේ ඕනෑම නිඛිලයක් 5 න් බෙදූ විට ශේෂය 0, 1, 4 අතුරින් එකක් වන බව අපෝහනය කරන්න. (1992)

(17) a) $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ යැයි ගනිමු. මෙහි $u_r = r\,(r+1)\,(r+2)$ වේ. $S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $V_r = \frac{1}{s_r}$ විට $\sum_{r=1}^{n} V_r$ සොයන්න. $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බවද එහෙත් $\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බවද අනන්තය තෙක් එහි ඓක්‍යය $\frac{2}{9}$ බව ද පෙන්වන්න.

b) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ n යනු ධන නිඛිලයක් විට $2^{2n+1} - 6n - 2$ යන්න 18 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.(1993)

(18) a) $u_r = r\ (r+1)$ යැයි සිතමු. $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සහ $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{U^r}$ අභිසාරී වුව ද $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $a_r = \frac{r^2(r^2+1)+2(r^3-1)}{r(r+1)}$ යන්නෙන් දෙනු ලබන a_r වැනි පදය ලෙස ඇති ශ්‍රේණියේ මුල් n පදවල ඓක්‍යය සොයන්න. තව ද $\sum_{r=1}^{n} a_r$ අභිසාරී නොවන බව ද පෙන්වන්න.

b) S_n යනු $\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots$ ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය යැයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය යෙදීමෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $S_n = 1-\frac{1}{(n+1)2^n}$ බව පෙන්වන්න. (1994)

(19) i) $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{3.5.7+}+\ldots$ ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය u_r ද $f(r)=\frac{-1}{4(r+2)(r+4)}$ ද නම් $f(r)-f(r-2)=u_r$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n}U_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}U_r=\frac{11}{96}$ බව අපෝහනය කරන්න.

ii) n නම් ඕනෑම සෘණ නොවූ නිඛිලයක් සඳහා n^7-n යන්න 7 න් බෙදිය හැකි බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදාගනිමින් සාධනය කරන්න. සෘණ නිඛිල සඳහා ප්‍රතිඵලය අපෝහනය කරන්න. n^7-n සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් n නම් ඕනෑම නිඛිලයක් සඳහා එය 3 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න. n නම් ඕනෑම ඔත්තේ නිඛිලයක් සඳහා n^7-n යන්න 168 න් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න. (1995)

(20) i) $V_r - V_{r-1} = 2r\ (r\ge 2)$ සහ $V_1=1$ නම්, $\sum_{r=1}^{n} r=\frac{n}{2}(n+1)$ භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $V_n=n^2+n-1$ බව පෙන්වන්න. $U_r=\frac{V_r}{(r+2)!}$ යැයි දී ඇත්නම් $f(r)-f(r+1)=U_r$ වන සේ f(r) ශ්‍රිතයක් සොයා ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$ බව පෙන්වන්න. $\sum U_r$ අභිසාරී වේද? ඔබේ පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

ii) n යනු ධන නිඛිලයක් නම්, 4.6^n+5^{n+1} යන්න 20 න් බෙදූ විට ශේෂය 9 බව ගණිත අභ්‍යුහනය මඟින් සාධනය කරන්න. (1996)

(21) අ) $r\ge 1$ සඳහා $u_r=\frac{\sqrt{r}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots\ldots(1+\sqrt{r})}$ යැයි දී ඇත. $r>1$ සඳහා $f(r-1)-f(r)=u_r$ වන පරිදි f(r) සොයන්න. $\sum_{r=1}^{n}U_r=2_{U_1}-\frac{U_n}{\sqrt{n}}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ යන්න 1 ට අභිසාරී වන බව පෙන්වීම සඳහා ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදන්න.

ආ) $n \geq 1$ සඳහා $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{r}}$ යැයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය යෙදීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $n \geq 1$ සඳහා $\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{2}$ බව සාධනය කරන්න. $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}$ ශ්‍රේණිය අපසාරී බව අපෝහනය කරන්න. $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots u_n$ යනු $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$ වන පරිදි වූ ධන පදවලින් යුත් අනුක්‍රමයක් නම්, $\sum_{r=1}^{\infty} U_n$ ශ්‍රේණිය අනිවාර්යයෙන්ම අභිසාරී වේ යැයි නිගමනය වේ ද? ඔබගේ උත්තරයට හේතු දක්වන්න. (1997)

(22) අ) $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = \frac{2r+3}{r^2(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}$ සහ $f(r) = \frac{k}{r^2(r+1)^2(r+2)^2}$ ලෙස ගනිමු. මෙහි k යනු නියතයකි. $r \in Z^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි k හි අගය සොයන්න.

i) $r \in Z^+$ සඳහා $g(r)$ ද $U_r = g(r) - g(r+1)$ තෘප්ත කරයි නම්, $r \in Z^+$ සඳහා $g(r) = f(r) + c$ බව පෙන්වන්න. මෙහි c යනු නියතයකි.

ii) $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ සොයා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බව අපෝහනය කරන්න.

ආ) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ සහ $n = 3, 4 \ldots.$ සඳහා $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ ලෙස ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් $n \in Z^+$ සඳහා $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ බව සාධනය කරන්න. (1998)

(23) අ) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිතයෙන් ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $\sum_{r=1}^{\infty} r(r+1)^2(r+2) = \frac{1}{10} n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

ආ) අපරිමිත ශ්‍රේණියක U_r නම් r වැනි පදය $\frac{2(r+4)}{r(r+1)(r+2)}$ වෙයි. ඕනෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා $U_r = A\{f(r) - f(r+1)\}$ වන පරිදි වූ A නියතයක් සහ f ශ්‍රිතයක් සොයන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ ඉහත ශ්‍රේණියේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න. ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න. (1999)

(24) අ) n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $u_n = 1.n + 2.(n-1) + \ldots\ldots. + (n-1).2 + n.1$ යයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය මඟින් $u_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න. n ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා $\frac{1}{u_n} = v_n - v_{n+1}$ වන අයුරින් v_n සොයන්න. ඒ නයින් හෝ අනු අයුරකින් හෝ $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න. $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_n}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න. (2000)

(25) $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+4^2}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය U_r ලියන්න.

i) $U_r=\frac{1}{2}\left[f(r)-\frac{1}{1+r+r^2}\right]$ බව පෙන්වන්න. මෙහි f(r) යනු r හි නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වෙයි.

ii) $f(r+1)$ සොයා $u_r=\frac{1}{2}[f(r)-f(r+1)]$ බව සාධනය කරන්න.

iii) දෙන ලද ශ්‍රේණියෙහි පද n දක්වා ඓක්‍ය $\frac{n(n+1)}{2(1+n+n^2)}$ බව පෙන්වන්න. (2006)

(26) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය U_r යන්න $\frac{(2r+1)}{(3r-2)(3r+1)}\cdot\frac{1}{7^r}$ මඟින් දෙනු ලැබේ. $U_r=f(r-1)-f(r)$ වන පරිදි f(r) සොයන්න. ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n}U_r=S_n$ සොයා $\lim_{n\to\infty}S_n$ හි අගය සොයන්න. (2009)

(27) ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය මඟින් $4n^3-6n^2+4n-1=n^4-(n-1)^4$ බව සාධනය කරන්න. ඒ නයින්, r = 1,2……. සඳහා $u_r - u_{r-1}=4r^3-6r^2+4r-1$ වන ආකාරයට u_r ලියා දක්වන්න. $\sum_{r=1}^{n}r^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ බව අපෝහනය කරන්න. [ඔබට $\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව උපකල්පනය කළ හැකිය.] $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+\ldots\ldots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය v_r ලියා දක්වන්න. $\sum_{r=1}^{n}V_r=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ බව පෙන්වන්න. මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2}+\cdots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය w_r යැයි ගනිමු. $w_r=f(r)-f(r+1)$ වන ආකාරයට f(r) සොයන්න. ඒ නයින්, $S_n=\sum_{r=1}^{n}W_r$ සොයන්න. මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. (2010)

(28) $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=\frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ යැයි ගනිමු. r ඇසුරෙන් $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ සොයන්න. ඒ නයින්, r = 1,2,3,…… සඳහා $(2r-1)u_r-(2r+1)u_{r+1}=4u_{r+1}$ බව පෙන්වන්න. $\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4(2n-1)(2n+3)}$ බව අපෝහනය කරන්න. $\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. (2011)

(29) සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $12x^2+1\equiv A(2x-1)^3+B(2x+1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.
ඒ නයින්, $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=f(r)-f(r+1)$ වන පරිදි f(r) නිර්ණය කරන්න.
මෙහි $u_r=\frac{12r^2+1}{(2r-1)^2(2r+1)^3}$ වෙයි. $\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{1}{12}\quad\frac{1}{2(2n+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{n}U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා $\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ හි අගය සොයන්න. (2012)

(30) සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා අපරිමිත ශ්‍රේණියක පළමු පද n හි එකතුව $6-\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙම ශ්‍රේණියෙහි n වෙනි පදය සොයා ශ්‍රේණිය අභිසාරී ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් බව පෙන්වන්න. (2013)

(31) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ යැයි ගනිමු. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$U_r = \frac{A}{(3r-1)^2} + \frac{B}{(3r+2)^2}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න. ඒනයින්,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(3n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. $\left|S_n - \frac{1}{4}\right| < 10^{-6}$ වන පරිදි වූ $n \in \mathbb{Z}^+$ හි කුඩාතම අගය සොයන්න. (2013)

(32) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ යැයි ගනිමු.

n = 0, 1, 2, 3 සඳහා r^n හි සංගුණකය සැසඳීමෙන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r^2 - r - 5 = A(r^2 - 1)(r+5) - Br^3(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින් $\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r$ සොයන්න. (2014)

(33) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි, A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න. **ඒනයින්**, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \frac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය $\frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව **අපෝහනය** කරන්න. (2015)

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය

(1) අරය a වූ වෘත්තයක පර්යන්ත අරයන්ගෙන් 2θ කෝණයක් වැහෙන වෘත්ත කොටසක කේන්ද්‍රකය කේන්ද්‍රයේ සිට 2a සයින් θ / 3θ දුරකින් බව පෙන්වන්න. අරය a වූ වෘත්ත පාදකයක හැඩය ගත් ඒකාකාර ආස්තරයක් OA හා OB අරයන්ගෙන් පර්යන්ත වේ. කේන්ද්‍රය O හා අරය r වූ OPQ වෘත්ත පාදකයක් ආස්තරයෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. ආස්තරය සිරස් තලයක PA දාරය තිරස් පොළොවේ ස්පර්ශ වන ලෙස නිසලව පිහිටයි. එය ආස්තරයේ සිරස් තලයෙහි ඇද වැටෙන අවස්ථාවේ පිහිටයි නම්, $r = \frac{a}{2}\left\{\frac{\sqrt{9\pi^2+24\pi-48}}{3\pi-4} - 1\right\}$ බව පෙන්වන්න. (1975)

(2) a දිගින් ද w බරින්ද යුත් සිහින් ඒකාකාර කම්බියක් ABC අර්ධවෘත්තාකාර තැටියක (ACB අර්ධ වෘත්ත චාපයෙන් ද AB විෂ්කම්භයෙන් ද සමන්විත) පරිමිතිය සෑදෙන සේ නමා ඇත. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට නැමී කම්බියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ඇති දුර $2a/(2+\pi)^2$ බව පෙන්වන්න. නැමී කම්බියේ A ලක්ෂ්‍යය අචල ආධාරකයකට සුමට ලෙස කුරු ලා ඇත. කම්බිය නිශ්චලතාවයෙන් එල්ලෙයි. AB විෂ්කම්භය සිරසත් සමඟ $\tan\theta = 2/(2+\pi)$ වන පරිදි θ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. AB සිරස් ලෙස ද A ට පහළින් සිටින සේ කම්බිය නිශ්චලතාවෙහි පවත්වා ගැනීම සඳහා දැන් B හිදී තිරස් බලයක් යොදනු ලැබුවොත් මේ බලයේ විශාලත්වයත් A හි දී කුර මත යෙදෙන බලයේ විශාලත්වය හා දිශාවත් ගණනය කරන්න. (1980)

(3) r අරය ඇති ඒකාකාර අර්ධවෘත්ත ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $4r/3\pi$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. උස h ද ආධාරකයේ අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන ඍජුවෘත්ත කේතුවක් එහි අක්ෂය හරහා යන තලයක් ඔස්සේ බාග කැබලි දෙකකට කපනු ලැබේ. මින් එක් බාග කැබැල්ලක් එහි ආධාරකය හරි අඩක් වන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයෙන් නිදැල්ලේ එල්ලනු ලැබේ. එහි ආධාරකය තිරස සමඟ $\tan^{-1}(4a/\pi h)$ කෝණය සාදන බව පෙන්වන්න. (1980)

(4) ඒකාකාර තුනී අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. W බරැති තුනී අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වන සේ නිශ්චලතාවෙහි පවතී. පාත්‍රයේ ගැටිය මත ලක්ෂ්‍යයක දී W බරැති අංශුවක් ඈඳා තිබේ. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී ගැටියේ තලයෙහි තිරසට ආනතිය සොයන්න. පාත්‍රය ඒකාකාරයි. (1981)

(5) කේන්ද්‍රයේ දී $2\theta\ (<\pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයක ආකාරයට නැමූ ඒකාකාර කම්බියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. එකම ඒකාකාර කම්බියෙන් කපාගත් එකක් අර්ධවෘත්තයක් ද අනෙක කේන්ද්‍රයේදී $2\theta\ (<\pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකක් ද වශයෙන් ඇති කැබලි දෙකක් ළසඳේ හැඩයක් සෑදෙන සේ තබා තිබේ. ළසඳේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පිහිටා ඇත්තේ එහි ඇතුළු චාපය මත නම්, θ කෝණය, $2\sin\theta\,(1+\sin\theta) = 2\theta + \pi\sin\theta\,(1-\cos\theta)$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. (1981)

(6) ABC ඒකාකාර කම්බි කැබැල්ලක් AB වෘත්ත පාදකයක හා එහි BC, CA පර්යන්ත අර දෙකක් ආකාරයට තිබෙයි. මේ කම්බි කැබැල්ලේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ABC කම්බි කැබැල්ල A ගෙන් නිදැල්ලේ එල්ලෙයි නම්, සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී CA සිරස සමඟ $\tan^{-1}\{3/(\pi+1)\}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. (1981)

(7) a අරය ඇති වෘත්තයක කේන්ද්‍රක ඛණ්ඩයක හැඩය ඇති ඒකාකාර ආස්තරයක් OA, OB අරවලින් මායිම් වී තිබෙයි. $A\hat{O}B = 2\theta$ නම්, ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට $(2a/3\theta)$ සයින් θ දුරකින් පිහිටා ඇති බව පෙන්වන්න. OA මත C ද OB මත D ද පිහිටන OCD කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් OAB ආස්තරයෙන් ඉවත් කරගනු ලැබෙයි. එහි ඉතිරි CADB කොටස CA ඍජු දාරය තිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ සිරස් තලයක නිශ්චලතාවෙහි පවතියි. $OC \le \frac{a}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4\sin 2\theta}{3\theta-\sin 2\theta}}-1\right\}$ බව පෙන්වන්න. (1982)

(8) ඒකාකාර තුනී අර්ධ ගෝලීය කබොලක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. සෘජුකෝණික ඒකාකාර කුඤ්ඤයක් එක් මුහුණත් සිරස් වන සේ රළු තිරස් තලයක් මත නිශ්චලතාවෙහි තබා තිබෙයි. අරය a වූ ඒකාකාර තුනී බිත්ති සහිත අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය කුඤ්ඤයේ සිරස් මුහුණතට හේත්තු වන සේ ද පාත්‍රයේ ගැටිය ඒ මුහුණතට සමාන්තර සිරස් තලයක පිහිටන සේ ද නිශ්චලතාවෙහි තබනු ලැබෙයි. පාත්‍රයේ බර කුඤ්ඤයේ බරට සමාන නම්ද පාත්‍රයත් කුඤ්ඤයත් අතර ස්පර්ශය සුමට නම්ද කුඤ්ඤය ඇද නොවැටීමට නම් කුඤ්ඤයේ තිරස් මුහුණතක් කොතරම් පළල් විය යුතු දැයි සොයන්න. (1983)

(9) ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටුම සොයන්න. ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සිරස් බිත්තියක් හා තිරස් පොළවක් ස්පර්ශ කරන පරිදි බිත්තිය හා පොළව අතර කෝණයේ නිසලව පවතී. බිත්තියෙහි සහ පොළොවෙහි රළු බව සමාන නම් අර්ධ ගෝලයේ තල ආධාරකයෙහි තිරසට ආනතිය $\sin^{-1}\{8\mu(1+\mu)/3(1+\mu^2)\}$ අගය නොඉක්මවන බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු එක් එක් ස්පර්ශකයේ දී ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ. (1984)

(10) h උසින් යුතු ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයෙහි සිට h/4 උසින් වන බව අනුකලනයෙන් දක්වන්න. තල ආධාරකයක් සහිත කේතු කබොලක බාහිර පෘෂ්ඨයත් අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයත් පොදු අක්ෂයෙකින් යුතු සෘජු වෘත්තාකාර කේතු වේ. බාහිර පෘෂ්ඨයේ උසත් ආධාරකයෙහි අරයත් පිළිවෙලින් 117 cm ද 30 cm ද වෙයි. අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය සඳහා ඒවා පිළිවෙලින් 39 cm ද 10 cm ද වෙයි. O යනු කබොලේ බාහිර පෘෂ්ඨයේ ආධාරකයෙහි AB විෂ්කම්භයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර කබොලේ A ලක්ෂ්‍යයට ද ඈඳීමෙන් කේතුව අවලම්බනය කොට ඇත. එය සමතුලිතතාවෙන් එල්ලී පවතින විට AB තිරස සමඟ 45^0 ක කෝණයක් ඇති කරන බව දක්වන්න. (1985)

(11) a අරයක් යුතු ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි තල මුහුණතේ කේන්ද්‍රය වන O සිට 3a/8 දුරකින් පිහිටන බව අනුකලනය මඟින් පෙන්වන්න. මෙම අර්ධ ගෝලය තන්තු දෙකක් මඟින් P නම් ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා ඇත. එම තන්තු එකක් O ලක්ෂ්‍යයටත් අනෙක තල මුහුණතේ ගැටියේ පිහිටි Q ලක්ෂ්‍යයකටත් ගැට ගසා ඇත. PO =PQ = $5\sqrt{2}a/2$ යන්න දී ඇත්නම් OQ තිරස සමඟ $\tan^{-1}$ (4/3 I) කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. (1986)

(12) O කේන්ද්‍රයෙන් ද α කෝණයකින් හා r අරයෙන්ද යුත් වෘත්තයක AOB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක ආකාරයෙන් වූ කඩදාසි කැබැල්ලක OA දාරය OB දාරයත් සමඟ සම්පාත වන සේ ගෙන ඒමෙන් සෘජු වෘත්තාකාර කේතු කබොලක් තනා තිබෙයි. O සිට කබොලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{2}{3}r\cos\theta$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\sin\theta = \frac{\alpha}{2\pi}$ වේ. කබොලේ ස්කන්ධයට සමාන ස්කන්ධයක් ඇති වෘත්තාකාර කඩදාසි කැබැල්ලක් අලවා ඉහත සඳහන් කේතු කබොලේ පතුල වසා තිබෙයි. සංවෘත කබොලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{5}{6}r\cos\theta$ දුරකින් පිහිටන බව සාධනය කරන්න. (1987)

(13) a අරයන් යුතු ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. a අරයෙන් l දිගින් හා අර්ධගෝලයෙහි ඝනත්වය ම සහිත ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක තල මුහුණත්වලින් එකක් අර්ධගෝලයෙහි වෘත්තාකාර ආධාරකයට දෘඪ ලෙස ඇඳා ඇත්තේ සංයුත වස්තුවක් සෑදෙන ආකාරයටය. තල කෙළවරේ සිට සංයුත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. වස්තුවට එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් මේසයක් සමග ස්පර්ශ වෙමින් ඕනෑම පිහිටීමක නිසලව තිබෙන්නට හැකි වෙයි. $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න. (1988)

(14) $y^2 = 4ax$ සහ $x = a$ ප්‍රස්තාර මඟින් සපර්යන්ත පෙදෙස x අක්ෂය වටා පරිභ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඒකාකාර ඝනයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ හි පිහිටන බව පෙන්වන්න. බර 9w වන එවැනි ඝනයක් බර 4w සහ අරය 2a වන ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකට සම්බන්ධ කර ඇත්තේ ඝනයේ තල මුහුණත අර්ධගෝලයේ තල මුහුණත සමග සම්පාත වන අයුරිනි. අර්ධ ගෝලයේ වක්‍රාකාර පෘෂ්ඨය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වන ලෙස තබා ඇත. ඝනයට සමතුලිතව නිසලතාවේ පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න. (1989)

(15) අරය r වන ඒකාකර ඝන අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සොයන්න. ඒකාකර ඝනකයක එක් මුහුණතක් ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ආධාරකයට ඇඳා ඇත්තේ ඝනකයෙහි මෙම මුහුණතේ විකර්ණ අර්ධ ගෝලයෙහි ආධාරකයේ විෂ්කම්භය ලෙස පිහිටන අන්දමටය. අර්ධගෝලය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය ρ_1 ද ඝනකය තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ ඝන්තවය ρ_2 ද වෙයි නම්, සංයුක්ත වස්තුවට අර්ධගෝලයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තලය සමග ස්පර්ශ වෙමින් සමතුලිතව පිහිටිය හැක්කේ $\pi\rho_1 = 8\rho_2$ විට බව පෙන්වන්න. (1990)

(16) ආධාරකයේ අරය r ද අඩ සිරස් කෝණය α ද වන ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4} r \cot\alpha$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ඡින්නකයක වෘත්තාකාර දෙකෙළවරේ අරයන් a හා λa $(\lambda > 1)$ උස h ද වෙයි. කුඩාතම ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{h}{4}\left(\frac{3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}\right)$ බව පෙන්වන්න. කුඩාතම ආධාරකයෙහි පරිධියේ වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ඡින්නකය නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබෙයි. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී අක්ෂය සිරසට $\alpha\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත වෙයි. $\tan\alpha$ සොයන්න. (1991)

(17) අරය a ද O කේන්ද්‍රයේදී රේඩියන් 2θ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද ACB ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මධ්‍ය අරය මත පිහිටන බවත් $OG = a\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ බවත් පෙන්වන්න. එකම ඒකාකාර කම්බියෙන් ලබාගත් එහෙත් වෙනස් අර සහිත වෘත්තාකාර කැබලි දෙකක් අතුරෙන් එකකින් S_1 අර්ධ වෘත්තයක් ද අනෙකින් කේන්ද්‍රයේ දී රේඩියන් 2θ $(< \pi)$ කෝණයක් ආපාතනය කෙරෙන S_2 වෘත්ත චාපයක් ද එකට තබා ඇත්තේ ළසඳක් (crescent) සෑදෙන පරිදිය. θ කෝණය කෙසේ ද යත් ළසඳෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය S_2 ඇතුළු චාපය මත පිහිටන පරිදි වෙයි නම්, $\sin^2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\theta + \frac{\pi}{4}\sin 2\theta = \theta$ සාධනය කරන්න. (1992)

(18) අරය a වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලක් එහි කේන්ද්‍රය වූ O ට $a\cos\alpha$ දුරකින් $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ වූ තලයක් මඟින් කොටස් දෙකකට බෙදනු ලැබේ. වඩා විශාල කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. කබොලේ වඩා විශාල කොටස එම ද්‍රව්‍යයෙන්ම සෑදි අරය $a\sin\alpha$ වූ තැටියකින් වසනු ලැබේ. එසේ සෑදුනු සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{a(1-\cos\alpha)^2}{3-\cos\alpha}$ දුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1993)

(19) i) අරය a ද, පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ ද, වූ ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය කබොලකත්,

ii) උස h ද අඩ – සිරස් කෝණය α ද පෘෂ්ඨික ඝනත්වය $k\sigma$ ද, වූ ඒකාකාර කුහර කේතුවකින් ස්කන්ධය හා ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අනුකලනයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ සොයන්න.

$a = h\tan\alpha$ බවත් පෘෂ්ඨ දෙක පොදු වෘත්තයෙන් දෙපස පිහිටන පරිදි ඒවායේ වෘත්ත දාර දිගේ එකට මූට්ටු වී ඇති බවත් දී තිබෙයි. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{36+k^2}-k}{6}$ නම්, අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් සංයුක්ත වස්තුවට සමතුලිතතාවේ පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න. (1994)

(20) අරය r වූ සිහින් ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය කබොළක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ a අරයෙන් යුත් ඝන ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් එහි සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. සංවෘත බඳුනක් සිහින් ඒකාකාර අර්ධගෝලීය කබොළකින් හා එම සිහින් ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයෙන්ම තැනූ තල වෘත්ත ආධාරකයකින් සමන්විත වෙයි. මේ එක් එක් කොටසේ අරය a ට සමානය. බඳුන සම්පූර්ණයෙන්ම ජලයෙන් පුරවා දාරයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයෙකින් එල්ලූ විට එහි ආධාරකය යටි අත් සිරසට θ කෝණයකින් ආනතව සමතුලිතතාවේ පවතියි. කබොළ තනා ඇති ද්‍රව්‍යයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය කුමක් වුවත් $\frac{1}{3}<\tan\theta<\frac{3}{8}$ බව පෙන්වන්න. බඳුනේ බරේත් ජලයේ බරේත් අනුපාතය θ ඇසුරෙන් සොයන්න. (1995)

(21) i) උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජුවෘත්ත කේතුවක,

ii) උස a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඝනත්වය ρ ද, ආධාරක අරය a ද, උස 4a වූ ද, ඒකාකාර ඝන ඍජුවෘත්ත කේතුවක් සහ ඝනත්වය $\lambda\rho$ ද, ආධාරක අරය a ද, වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක් ඒවායේ ආධාරක සම්පාත වන පරිදි එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක ආකාරයේ කෙළි බඩුවක් තනා තිබෙයි. පොදු ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට කෙළි බඩුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශ වෙමින් කෙළි බඩුව ස්ථායි සමතුලිතතාවේ පැවතිය නොහැකි නම් $\lambda>20$ බව පෙන්වන්න. (1996)

(22) h උසැති ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය r ද උස h ද වන ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක් සිදුරු කර හැරීමෙන් අරය r ද උස $\frac{h}{2}$ ද වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කරනු ලබන්නේ කේතුවේ ආධාරකය සිලින්ඩරයේ එක් කෙළවරක් සමඟ සම්පාත වන පරිදි ය. ඉතිරිවන කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතුවේ ආධාරකයේ සිට අක්ෂය මත $\frac{23}{40}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. හාරන ලද සිලින්ඩරය එහි ආධාරකය තිරස් තලයක් මත පිහිටන සේ තබනු ලැබේ. මෙම තලය ක්‍රමයෙන් උඩු අතට ඇල කෙරෙන විට ලිස්සා යාම වැලැක්වීමට ප්‍රමාණවත් පරිදි තලය රළු නම්, හාරන ලද සිලින්ඩරය ඇද වැටීම සඳහා තිරස සමඟ තලයට තිබිය යුතු අඩු ම ආනතිය සොයන්න. (1997)

(23) අරය 2r වූ කුහර ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක් ආධාරකයේ C කේන්ද්‍රයේ සිට $\sqrt{3}$ දුරකදී එහි අක්ෂයට ලම්බ තලයක් මඟින් කොටස් දෙකකට බෙදා තිබෙයි. වෘත්ත දාර දෙකක් සහිත R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය C හි සිට $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය r ද උස h ද වූ ඒකාකාර කුහර වෘත්ත සිලින්ඩරයක එක් කෙළවරක් වසා තිබෙන අතර අනෙක් කෙළවරට K කොටසේ r අරය සහිත වෘත්ත දාරය මැලියම් යොදා අලවා බඳුනක් සාදා තිබෙයි. අර්ධ ගෝලය සහ සිලින්ඩරය එකම පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය ඇති ද්‍රව්‍යයකින් තනා ඇතැයි උපකල්පනය කර බඳුනේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සිලින්ඩරයේ සංවෘත ආධාරකයේ සිට $\frac{h^2+6r^2+4\sqrt{3}rh}{2h+r+4\sqrt{3}\,r}$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. (1998)

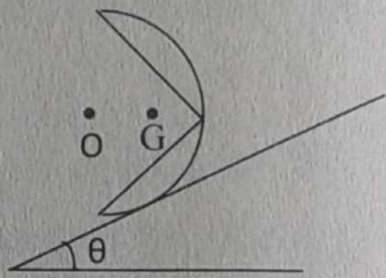
(24) ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වේ. එහි ඍජු දාරය AOB වන අතර සමමිතික අක්ෂය OC වෙයි. පිළිවෙලින් OB සහ OC දිගේ Ox සහ Oy ඍජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ ගනු ලැබේ. මෙම අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(0,\frac{4a}{3\pi}\right)$ බව අනුකලනය මඟින් පෙන්වන්න. ආස්තරය මත අරය r (< a) වූ අර්ධ වෘත්තයක් අඳිනු ලැබේ. එම අර්ධ වෘත්තයේ P කේන්ද්‍රය පිහිටන්නේ AO මත A සිට r දුරකින් ය. මෙම අර්ධ වෘත්තයෙන් ඇතුළත වර්ගඵලය සහිත කොටස කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. ඉහත Oxy අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන්ම ආස්තරයෙන් ඉතිරි වන R කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි $(\bar{x},\bar{y})$ ඛණ්ඩාංක දෙනු ලබන්නේ $\bar{x}=\frac{r^2}{a+r}, \bar{y}=\frac{4(a^2+ar+r^2)}{3\pi(a+r)}$ මඟින් බව පෙන්වන්න. මෙම R කොටස A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇත්නම් සමතුලිත පිහිටීමේ දී AOB දාරයෙහි සිරසට ආනතිය r කෙරෙන් ස්වායත්ත වන බව පෙන්වා මෙම නියත ආනතිය සොයන්න. (1999)

(25) තල ආධාරකයේ අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එම ආධාරකයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මඟින් පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත්තේ අරයන් a වූ සම්පාත තල ආධාරක එකට පෑස්සූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින් සහ අඩ සිරස් කෝණය α වූ ඍජු වෘත්ත කේතුවකිනි. මෙම වස්තුව අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨයෙහි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් මේසයක් මත ස්පර්ශ කරමින් සමතුලිතතාවේ තිබිය හැකි නම් α හි අගය සොයන්න. (2000)

(26) උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි අක්ෂය මත, ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3h}{4}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

එවැනි කේතුවක අඩ – සිරස් කෝණය 15° වන අතර, එහි ආධාරකය රළු තිරස් ගෙබිමක ඇතිව නිශ්චලව තිබේ. එහි ශීර්ෂයට සම්බන්ධිත සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් කේතුව ඇළ කරනු ලැබේ. කේතුවේ අක්ෂය අඩංගු සිරස් තලයක, තිරස සමග 45° කෝණයක් සාදමින් තන්තුව පහළට ඇදී තිබෙයි. කේතුවේ දාරය ගෙබිම මත යම්තම් ලිස්සා යන්නේ, ගෙබිම සහ දාරයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයට සිරස්ව ඉහළින් ශීර්ෂය පිහිටන විටදී ය. තන්තුවේ T ආතතිය, අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සහ ඝර්ෂණ බලය සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. (2001)

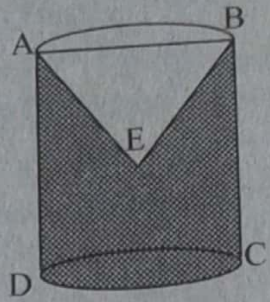
(27) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8a}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් උස a ද ආධාරකයේ අරය a ද වූ ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඉවත් කිරීමෙන් ඝන වස්තුවක් සාදා ඇත. අර්ධගෝලයේත් කේතුවේත් තල ආධාරක සම්පාත වන අතර දෙකෙහිම පොදු කේන්ද්‍රය O වේ. උස h වූ ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4}h$ දුරකින් ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් ඉහත විස්තර කරනු ලැබූ ඝන වස්තුවේ G ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර සොයන්න.



තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් සමඟ ඉහත කී ඝන වස්තුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයක් ස්පර්ශ වෙමින් සමතුලිතතාවේ පිහිටන අවස්ථාවේ දී එම වස්තුවේ සිරස් හරස් කඩක් රූපයෙන් දැක් වේ. තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාවක් සමඟ එකම සිරස් තලයක O සහ G පිහිටයි. OG තිරස් යැයි දී ඇත්නම් $\theta = 30^0$ බව පෙන්වන්න. w යනු අර්ධ ගෝලයේ බර නම්, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඝර්ෂණ බලයත් අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවත් w ඇසුරෙන් ලබාගන්න. ඝන වස්තුවත් තලයත් අතර ඝර්ශණ සංගුණකයට තිබිය හැකි අඩුතම අගය ද සොයන්න. (2002)

(28) ABC ඒකාකාර ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයේ මධ්‍යස්ථයන් හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටන බව පෙන්වන්න. A, B හා C හි පිහිටි සමාන ස්කන්ධ සහිත අංශු තුනක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සමඟ G සමපාත වන බවද පෙන්වන්න. ABC ත්‍රිකෝණාකාර ඒකාකාර ආස්තරයක C කෝණය මහා කෝණයක් වේ. එම ආස්තරය AC පාදය තිරස් මේසයක ගැටෙමින් සිරස් තලයක පවතී. ආස්තරය නොපෙරළෙන පරිදි B ශීර්ෂයෙන් එල්ලිය හැකි විශාලතම බර $\frac{1}{3}W\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි W යනු ආස්තරයේ බර වන අතර a, b, c සුපුරුදු අර්ථ ගනී. (2003)

(29) උස h වූ ඒකාකාර සන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් එහි අක්ෂය මත වන බව පෙන්වන්න.

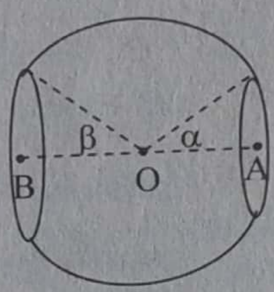


රූප සටහනෙන් උස H හා ආධාරක අරය R වූ ABCD ඒකාකාර සන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් උස h හා ආධාරක අරය R වූ සෘජු වෘත්තාකාර EAB කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් පසුව ඉතුරු කොටස දැක්වෙයි. එසේ හැරීමෙන් ලැබෙන S වස්තුවෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට AB සිට ඇති දුර සොයන්න.

එනයින් S හි ගුරුත්වය කේන්ද්‍රය E හි ඇත්නම් එවිට $h=(2-\sqrt{2})H$ බව පෙන්වන්න.

S වස්තුව තිරස සමඟ $\alpha\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන රළු තලයක් මත DC ආධාරකය තලය මත වන පරිදි තබා ඇත. S ලිස්සීමෙන් වැලැක්වීමට තරම් තලය රළු වෙයි. S හි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය E හි ඇතැයි උපකල්පනය කරමින් $R\tan\alpha > (\sqrt{2}-1)H$ නම් S ඇද නොවැටෙන බව පෙන්වන්න. (2004)

(30) රූපයෙහි දැක්වෙන අයුරින් අරය a , කේන්ද්‍රය O හා පෘෂ්ඨ ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර ගෝලීය කබොලකින් O සිට (O හි දෙපැත්තේ) $a\cos\alpha, a\cos\beta$ දුරින් වූ සමාන්තර තල දෙකකින් කලාපයක් කපා වෙන් කෙරෙයි. මෙහි $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ වෙයි.

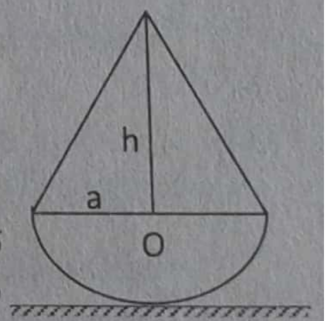


අනුකලනයෙන්,

i) කලාපයේ ස්කන්ධය $2\pi a^2\sigma(\cos\alpha+\cos\beta)$ බව,

ii) කලාපයේ ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත එහි A, B දෙකෙළවර අතර හරි මැද පිහිටන බව පෙන්වන්න. මින් A කෙළවර O සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වෙයි. σ පෘෂ්ඨ ඝනත්වයම සහිත අරය $a\sin\beta$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් සිය කේන්ද්‍රය B හි පිහිටන පරිදි කලාපයේ වඩා විශාල වෘත්තාකාර දාරයට සවිකරනු ලැබෙයි. $\sin\alpha=\sin\beta\sqrt{1-\cos\beta}$ වෙතොත් සංයුක්ත වස්තුවට ගෝලාකාර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් ගෙබිමක් මත ඇති අයුරින් සමතුලිතතාවේ නිසලව පිහිටිය හැකි බව පෙන්වන්න. (2005)

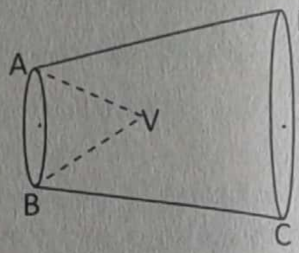
(31) රූපයේ දැක්වෙන වස්තුව කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ ඒකාකාර සන අර්ධ ගෝලයකින් සහ පොදු ආධාරකයෙහි දී දෘඪ ලෙස බද්ධ කරන ලද ආධාරකයේ අරය a සහ උස h වූ එම ඝනත්වයම සහිත ඒකාකාර සන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් සමන්විත වෙයි. කේතුවේ සහ අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රවලට O සිට ඇති දුර අනුකලනය මඟින් සොයන්න. ඒ නයින්, සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{|h^2-3a^2|}{4(h+2a)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



සංයුක්ත වස්තුව ස්වකීය සමමිතික අක්ෂය සිරස් වන පරිදි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. එය සමමිතික අක්ෂය සිරස සමඟ කුඩා කෝණයක් සාදන පරිදි මෙම සමතුලිත පිහිටීමෙන් යම්තම් විස්ථාපනය කරනු ලැබේ. $h>\sqrt{3}a$ වෙයි නම් ඇද වැටෙන බව පෙන්වන්න. i) $h<\sqrt{3}a$, ii) $h=\sqrt{3}a$ නම් කුමක් සිදුවෙයි ද? (2006)

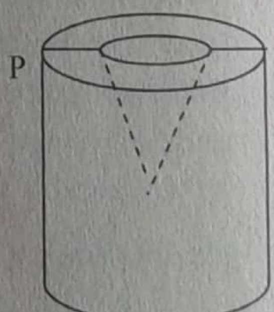
(32) ශීර්ෂය O අඩ සිරස් කෝණය α සහ උස h වූ ආධාරකය රහිත කුහර කේතුවක් ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ වූ ඒකාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් සාදා ඇත. එහි ස්කන්ධය $\pi\sigma h^2 \sec\alpha \tan\alpha$ බව පෙන්වා එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයන්න. එම වර්ගයේ ම ලෝහ තහඩුවකින් සෑදි කේන්ද්‍රය B සහ අරය $h\tan\alpha$ වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් ඉහත කේතුවේ ආධාරකය ලෙස දැන් සවිකරනු ලැබේ. සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\frac{h\left(\frac{2}{3}\sec\alpha+\tan\alpha\right)}{\sec\alpha+\tan\alpha}$ බව පෙන්වන්න. සංයුක්ත වස්තුව ආධාරකයේ දාරයෙහි පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලනු ලැබේ. AO සහ AB යටිඅත් සිරස සමඟ සමාන කෝණ සාදයි නම්, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න. (2007)

(33) පහත රූපයෙහි ABCD මඟින් නිරූපණය වන්නේ සෘජු වෘත්ත කේතුවක උස h වූ ඡින්නකයක ආකාරයේ ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන වස්තුවකි. එහි වෘත්තාකාර තල මුහුණත්වල විෂ්කම්භ $AB = 2\lambda a$ සහ $CD = 2a$ වේ. මෙහි λ පරාමිතයක් සහ $0<\lambda<1$ වෙයි.



එහි ස්කන්ධ $\frac{1}{3}\rho\pi a^2 h(1+\lambda+\lambda^2)$ බවත් එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G කුඩා මුහුණතෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h(3+2\lambda+\lambda^2)}{4(1+\lambda+\lambda^2)}$ දුරකින් පිහිටන බවත් අනුකලනය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.
ආධාරකයේ අරය a සහ උස h වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්ත ඝන කේතුවක ස්කන්ධය සහ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අපෝහනය කරන්න. ABCD ඡින්නකයෙන් ආධාරකයේ අරය λa සහ උස $\frac{h}{2}$ වූ VAB සෘජු වෘත්ත ඝන කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් J ඝන වස්තුව ලැබෙයි. J වස්තුවෙහි G_1 ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයා එය V සමඟ සමපාත විය නොහැකි බව පෙන්වන්න. J වස්තුව වඩා විශාල මුහුණතෙහි පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේ දී J හි සමමිතික අක්ෂය සිරස සමඟ සාදන β සුළු කෝණය $\tan\beta = \frac{8a(2+2\lambda+\lambda^2)}{h(4+8\lambda+5\lambda^2)}$ මඟින් දෙන බව පෙන්වන්න. (2008)

(34) උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි අක්ෂය මත ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

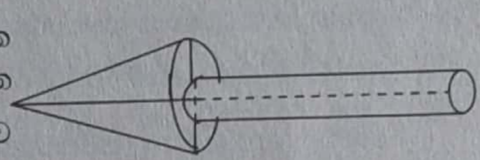


ආධාරකයේ අරය r සහ උස h වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් සඳහා අච්චුවක් අරය $R(>r)$ හා උස $H(>h)$ වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරාකාර කොටයක් තුළ කේතු කුහරයක් තැනීමෙන් නිපදවා ඇත. කේතු කුහරයේ සමමිතික අක්ෂය සිලින්ඩරාකාර කොටයේ සමමිතික අක්ෂය සමඟ සමපාත වේ. තනාගන්නා ලද අච්චුව රූපයේ පෙන්වා ඇති අයුරින් වේ. PQ විෂ්කම්භයේ සිට අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර සොයන්න. $R = 2r$ හා අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතු කුහරයේ ශීර්ෂයේ පිහිටයි නම්, $h = 2(4-\sqrt{14})H$

බව අපෝහනය කරන්න. $R = 2r$ වන සේ වූ අච්චුව P ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තබා ඇති අතර එය නිදහස් ලෙස සමතුලිතතාවේ එල්ලෙමින් ඇත. තව ද, $H = 3r$ නම්, යටිඅත් සිරස සමඟ PQ හි ආනතිය සොයන්න. (2010)

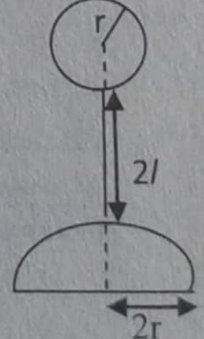
(35) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අක්ෂය මත අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලාකාර කවචයක අභ්‍යන්තර හා බාහිර අරයන් a හා b ($> a$) වේ. කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය දිගේ එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$ බව පෙන්වන්න. ස්වකීය වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් රළු පොළොවක් හා සමාන ලෙස රළු සිරස් බිත්තියක් ස්පර්ශ වන පරිදි මෙම අර්ධගෝලාකාර කවචය සමතුලිතතාවේ පවතී. සමතුලිතතාව සීමාකාරී නම්, තිරසට ආධාරකයේ ආනතිය $\sin^{-1}\left\{\frac{8\mu b(1+\mu)(a^2+ab+b^2)}{3(1+\mu^2)(a+b)(a^2+b^2)}\right\}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු කවචය හා රළු පෘෂ්ඨ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ. (2011)

(36) උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි එකට සවිකර ඇති ආධාරකයේ අරය 3r හා උස h වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් හා අරය r හා උස 2h වන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් ඒකාකාර ඝන සංයුක්ත වස්තුවක් සමන්විත වෙයි. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{5}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. එක් කෙළවරක් සිවිලිමකට හා අනෙක් කෙළවර කේතුවේ වෘත්තාකාර පතුලේ පරිධියෙහි A නම් ලක්ෂ්‍යයකට සවිකොට ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මඟින් සංයුක්ත වස්තුව සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් තිබෙයි. සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය යටිඅත් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්, $\tan\alpha = \frac{12r}{h}$ බව පෙන්වන්න. කේතුවේ ශීර්ෂයේ දී සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය දිගේ P නම් බලයක් යෙදීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය තිරස් වන ආකාරයට සංයුක්ත වස්තුව සමතුලිතතාවේ තැබෙයි. P බලය හා තන්තුවේ ආතතිය W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න. මෙහි W යනු සංයුක්ත වස්තුවේ බර වෙයි. (2012)

(37) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අක්ෂය මත ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



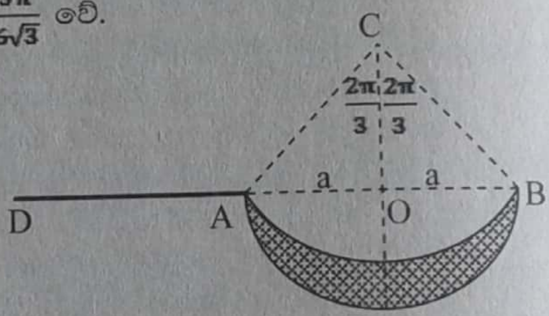
එකම ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සෑදි ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන ගෝලයක් දිග $2l$ සහ ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවරට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අර්ධ ගෝලයේ සමමිතික අක්ෂය දණ්ඩ හා ගෝලයේ කේන්ද්‍රය එකම සරල රේඛාවක් මත පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. ගෝලයේ අරය r ද ස්කන්ධය m ද වන අතර අර්ධ ගෝලයේ අරය 2r වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{6}(8r + 3l)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙම සංයුක්ත වස්තුව තිරසට θ

කෝණයකින් ආනත අචල තලයක් මත අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකය තලය මත ස්පර්ශ කරමින් තබා ඇත. ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් තලය රළු යැයි උපකල්පනය කරමින් $\tan\theta < \frac{12r}{8r+l}$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වන්න. $l = \frac{4r}{3}$ හා $\theta = \frac{\pi}{6}$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වා සංයුක්ත වස්තුව මත ආනත තලය මඟින් යොදන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න. (2013)

(38) කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය r වූ ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්ත ඛණ්ඩයකට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ළසඳ හැඩ ඒකාකාර ආස්තරයක්, රූපයෙහි දැක්වෙන පරිදි. කේන්ද්‍රයධ සහ අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයකින් සහ ස්වකීය C කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{2\pi}{3}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකින් පර්යන්තගත වේ. මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, C සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි $k = \frac{3\sqrt{3}\pi}{\pi+6\sqrt{3}}$ වේ.

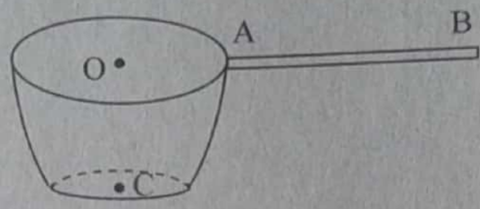


ආස්තරයේ ස්කන්ධය M යැයි ගනිමු. දිග 2a සහ ස්කන්ධය m වන AD සිහින් ඒකාකාර ඍජු දණ්ඩක්, දික් කරන ලද BA රේඛාව දිගේ පිහිටන පරිදි A කෙළවරේ දී දෘඪ ලෙස ළසඳට සවිකර, රූපයෙහි දැක්වෙන පරිදි දැකැත්තක් සාදා ඇත. ආස්තරයේ තලය සිරස්ව, අර්ධ වෘත්තය සහ දණ්ඩේ නිදහස් D කෙළවර, ගෙබිම ස්පර්ශ කරන පරිදි, දැකැත්ත තිරස් ගෙබිමක තබා ඇත. මෙම පිහිටීමේ එය සමතුලිතව පවතී නම්, $M(\sqrt{3}k-1) < 4\sqrt{6}m$ බව පෙන්වන්න. (2009)

(39) අරය a හා පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධ ගෝලීය කබොලක් එහි වෘත්තාකාර ගැටියෙහි තලයට සමාන්තරවූ ද, O කේන්ද්‍රයේ සිට $a\cos\alpha$ දුරකින්වූ ද, තලයක් කැපූ විට ලැබෙන ජින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන බව අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න. මෙහි C යනු කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියෙහි කේන්ද්‍රය වේ.

එම σ පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ම සහිත අරය $a\sin\alpha$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක දාරය ඉහත ජින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියට දෘඪ ලෙස සවි කර භාජනයක් සාදා ඇත. මෙම භාජනයෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, OC මත O සිට $\left[\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right] a\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

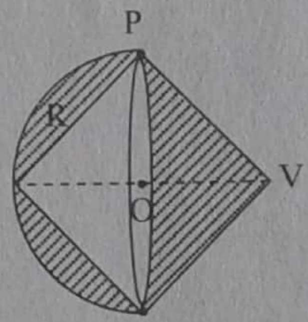
$\alpha = \frac{\pi}{3}$ යැයි ද භාජනයෙහි බර W යැයි ද ගනිමු. දිග b හා බර $\frac{W}{4}$ වූ සිහින් ඒකාකාර AB දණ්ඩක් මිටක් ලෙස, O, A හා B ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය වන පරිදි රූපයේ දැක්වෙන අයුරින් භාජනයේ ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර



සාස්පානක් සාදා ඇත. සාස්පානෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයන්න. සාස්පාන, මිටෙහි B කෙළවරෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර, මිට යටි අත් සිරස සමග $\tan^{-1}\left[\frac{1}{7}\right]$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $3b = 4a$ බව පෙන්වන්න. (2014)

(40) ආධාරකයේ අරය a හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන කේතුවක හා අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රවල පිහිටුම්, **අනුකලනය** භාවිතයෙන් සොයන්න. ස්කන්ධය M, අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින්, ආධාරකයේ අරය a හා උස a වූ C නම් ඍජු වෘත්ත කේතුව ඉවත් කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුව R යැයි ගනිමු. M ඇසුරෙන් R ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධය, හා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඊළඟට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට S සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදෙන පරිදි C ඝන කේතුව R ඝන වස්තුවට සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. මෙහිදී C හි ආධාරකයේ වෘත්තාකාර දාරය R හි ගැටියට දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කරනු ලබන්නේ ගැටියේ O කේන්ද්‍රය C හි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රය සමග සමපාත වන පරිදි ය.



S සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, එහි සමමිතික අක්ෂය u, ආධාරකවල පොදු කේන්ද්‍රය වන O සිට $\frac{a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

a) S සංයුක්ත වස්තුව. දාරයේ P ලක්ෂ්‍යකින් නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබේ.

i) සමමිතික අක්ෂය වන OV හි තිරසට ආනතිය සොයන්න; මෙහි V යනු C හි ශීර්ෂයයි.

ii) සමමිතික අක්ෂය තිරස් ලෙස තබා ගැනීම සඳහා V ශීර්ෂයට ඈඳිය යුතු අංශුවේ m ස්කන්ධය, M ඇසුරෙන් සොයන්න.

b) V හිදී සම්බන්ධ කරන ලද m ස්කන්ධය ද සහිත S සංයුක්ත වස්තුව, එල්ලන ලද ලක්ෂ්‍යයෙන් ඉවත් කර, එහි අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨීය අවල සුමට තිරස් තලයක ඇතිව සමතුලිතව තබනු ලැබේ. OV අක්ෂය හා උඩු අත් සිරස අතර කෝණයේ අගය පරාසය සොයන්න. (2015)