Grothendieck Topologies

Guilherme Henrique de Sá

2. Contravariant Functors

2.1 Representable functors and the Yoneda Lemma

Transformação Natural. Dado dois funtores $T, S : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, uma **transformação natural** é uma função que associa a cada objeto c em $\mathcal{C}$ uma seta $\tau_c : S(c) \to T(c)$ em $\mathcal{B}$.

Esta associação é feita de forma que, para toda seta $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, valha que o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \quad & S(X) & \xrightarrow{\tau_X} & T(X) \\
\Big\downarrow f & & S(f)\Big\downarrow & & \Big\downarrow T(f) \\
Y & & S(Y) & \xrightarrow[\tau_Y]{} & T(Y)
\end{array}
$$

Ou seja, temos que:

$$\tau_y \circ S(f) = T(f) \circ \tau_x$$

- Transformações naturais podem ser vistas como morfismos (setas) entre funtores.

Seja $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ a categoria cujos elementos (objetos) são funtores contravariantes da categoria $\mathcal{C}$ para a categoria dos conjuntos, e as setas são transformações naturais.

- Para cada x objeto de $\mathcal{C}$, podemos definir

  $$h_x : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

  objeto de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$, de forma que:

  - $h_x(U) = \mathrm{Hom}(U, X)$ para cada objeto U de $\mathcal{C}$;
  - Para cada seta $\alpha : U' \to U$ em $\mathcal{C}^{op}$, temos o morfismo $h_X U \to h_X U'$ dado por composição com α.

- Para cada seta $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, definimos uma transformação natural h_f que associa a cada objeto U de $\mathcal{C}^{op}$ uma seta:

$$h_f(U) : h_X(U) \to h_Y(U) \quad \text{em } \mathbf{Set}$$

- Seja $\beta \in \mathrm{Hom}(U, X)$, então

$$h_f(U)(\beta) := f \circ \beta \in \mathrm{Hom}(U, Y)$$

Isso define um morfismo $h_f : h_X \to h_Y$.

Para toda seta $\alpha : U' \to U$ em $\mathcal{C}^{op}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
h_X(U) \arrow[r, "h_f(U)"] \arrow[d, "h_X(\alpha)"'] & h_Y(U) \arrow[d, "h_Y(\alpha)"] \\
h_X(U') \arrow[r, "h_f(U')"'] & h_Y(U')
\end{tikzcd}$$

- Mandando cada objeto X de $\mathcal{C}$ em h_X e cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ em $h_f : h_X \to h_Y$, definimos assim um funtor:

$$\mathcal{C} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$$

Yoneda Lemma (Versão Fraca). Seja x, y objetos de uma categoria $\mathcal{C}$. Então a função:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \to \mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$$

que manda $f \mapsto h_f$ é bijetiva.

(Note que isso nos diz que o funtor definido anteriormente é "plenamente fiel", ou "cheio e fiel").

Definição. Um **funtor representável** de uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor

$$F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

tal que F é isomorfo a h_X para algum X objeto de $\mathcal{C}$. Dizemos que F é *representado por* X.

- Se ocorrer de $F \cong h_X$ e $F \cong h_Y$, então $h_X \cong h_Y$ e, pelo lema anterior, vai existir $f : X \to Y$ tal que $h_f : h_X \to h_Y$ é uma equivalência. Mas, pela construção de h_f, teremos que f é uma equivalência.

Vamos nos preparar para o lema de Yoneda (versão definitiva).

- Seja $T : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ um funtor e X um objeto de $\mathcal{C}$. Dado $\tau : h_X \to T$, temos um morfismo $\tau_X : h_X(X) \to T(X)$.
- Podemos definir uma função de transformações naturais entre h_X e T para elementos no conjunto $T(X)$ dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(h_X, T) &\to T(X) \\ \tau &\mapsto \tau_X(\mathrm{id}_X) \end{aligned}$$

- Dado $\xi \in T(x)$, queremos construir uma transformação natural $\tau : h_X \to T$.

  Seja U um objeto de $\mathcal{C}$, então $h_X(U) = \mathrm{Hom}(U, X)$. Um elemento $f \in h_X(U)$ é um morfismo $f : U \to X$ em $\mathcal{C}$.
- Definimos:

$$\tau_U : h_X(U) \to T(U)$$

$$f \mapsto T(f)(\xi)$$

  Assim, temos uma transformação natural τ e podemos fazer $\tau_U(f) = T(f)(\xi)$.
- Teremos que, para todo morfismo $\alpha : U' \to U$ em $\mathcal{C}^{op}$, vale que:

$$\tau_{U'}(h_X(\alpha)(f)) = \tau_{U'}(f \circ \alpha) = T(f \circ \alpha)(\xi) \tag{1}$$

$$(T(\alpha) \circ \tau_U)(f) = T(\alpha)(T(f)(\xi)) = T(f \circ \alpha)(\xi) \tag{2}$$

Como T é contravariante, de (1) e (2) segue:

$$(T(\alpha) \circ \tau_U)(f) = (T(\alpha) \circ T(f))(\xi) = T(f \circ \alpha)(\xi)$$

$$= (\tau_{U'} \circ h_X(\alpha))(f)$$

Fazendo com que o diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{\tau_U} & T(U) \\ {\scriptstyle h_X(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\alpha)} \\ h_X(U') & \xrightarrow[\tau_{U'}]{} & T(U') \end{array}$$

Logo, τ é transformação natural.

A aplicação descrita é uma função:

$$T(X) \to \mathrm{Hom}(h_X, T)$$

Lema de Yoneda (Versão Final). As funções anteriores são inversas uma da outra e vale que:

$$T(X) \cong \mathrm{Hom}(h_X, T)$$

Observação. Se considerarmos T representável por Y, i.e. $T \cong h_Y$, então:

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$$

que é a versão fraca do Lema de Yoneda.

Def. 2.2. Seja $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ um funtor. Um objeto universal de F é um par (X, ξ), onde X é objeto de $\mathcal{C}$ e ξ é um elemento de FX tal que para cada objeto U de $\mathcal{C}$ e cada $\sigma \in FU$, exista uma única seta $f : U \to X$ em $\mathcal{C}$ satisfazendo:

$$F(f)(\xi) = \sigma$$

Perceba que se (X, ξ) é objeto universal de F, então a função T que define a transformação natural no Lema de Yoneda é bijetiva para todo U. Assim, o morfismo $h_X \to F$ é isomorfismo. Segue a proposição:

Prop. 2.3. Um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ é representável se e somente se possui um objeto universal.

- Se (X, ξ) é objeto universal de F, então F é representado por X.
- O Lema de Yoneda nos garante que $\mathcal{C}$ pode ser imerso em $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ e que todo funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ pode ser estendido a um funtor representável

$$h_F : \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Set}.$$

Assim, vamos tratar h_X como simplesmente X, e $\mathrm{Hom}(h_X, F)$ como FX.

Exemplos:

1. Seja a categoria **Set**, onde os objetos são conjuntos e as setas são funções entre conjuntos.

   Seja $F : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ que leva um conjunto S no conjunto $\mathcal{P}(S)$ das partes de S, e leva uma função $f : S \to T$ em

   $$Ff : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S), \quad \sigma \mapsto f^{-1}(\sigma).$$

   Afirma-se que $(\{1,0\},\{1\})$ é objeto universal de F. Ora, dado um conjunto S e um subconjunto $\sigma \in \mathcal{P}(S)$, então existe uma única $f : S \to \{0,1\}$ tal que $F(f)(\{1\}) = \sigma$. A função é:

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \sigma \\ 1, & \text{se } x \in \sigma \end{cases}$$

2. Seja **HausTop** a categoria de todos os espaços Hausdorff com setas sendo as funções contínuas. O functor $F : \mathbf{HausTop}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, que manda um espaço S no conjunto FS dos subespaços abertos, não é representável.

   Suponha que (X,ξ) é objeto universal de F. Isso nos diz que $\forall \sigma \in FS$, existe $f : S \to X$ tal que $F(f)(\xi) = f^{-1}(\xi) = \sigma$.

   Tomando $\sigma = S$, então ξ possui um único elemento. Se $\sigma = \emptyset$, então $\#X \setminus \xi = 1$.

   Como X é Hausdorff, segue que $X = \{a,b\}$ com a topologia discreta.

   Seja S um espaço Hausdorff tal que existe $\sigma \in FS$ aberto mas não fechado.

   Tem que existir $f : S \to X$ contínua tal que $f^{-1}(\xi) = \sigma \Rightarrow f^{-1}(X \setminus \xi) = S \setminus \sigma \Rightarrow S \setminus \sigma$ é aberto e teríamos que σ é fechado.

   Assim, (X,ξ) não é objeto universal!

1. Categories Functors and Natural Transformations

5. Mônicos, Epis e Zeros

Definição. Uma seta $e : a \to b$ é dita **invertível** se existe uma seta $e' : b \to a$ na mesma categoria tal que

$$ee' = 1_b \quad \text{e} \quad e'e = 1_a.$$

Neste caso, dizemos que a e b são **isomorfos** ($a \cong b$) e e é dito um **isomorfismo**.

Definição. Um morfismo $m : a \to b$ é dito **mônico** em $\mathcal{C}$ quando, para quaisquer setas paralelas $f_1, f_2 : d \to a$, se

$$mf_1 = mf_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2.$$

Definição. Uma seta $h : a \to b$ em $\mathcal{C}$ é dita **epi** se, para quaisquer setas $g_1, g_2 : b \to c$, vale

$$g_1 h = g_2 h \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2.$$

Definição. Dado $h : a \to b$, um **inverso à direita** de h é uma seta $r : b \to a$ tal que $hr = 1_b$. r é chamado **seção** de h.
Analogamente, um **inverso à esquerda** é uma seta $p : b \to a$ tal que $ph = 1_a$. p é dito **retração** de h.

Proposição. *Se uma seta possui inverso à direita, então ela é necessariamente epi. Se possui inverso à esquerda, então é mônico.*

Idempotentes e Splitting

Definição. Se duas setas $g : a \to b$ e $h : b \to a$ são tais que $gh = 1_b$, então $f := hg$ está bem definido e é um **idempotente**, isto é, $f^2 = f$.

Definição. Um idempotente f **splita** quando existem setas g, h tais que

$$f = gh \quad \text{e} \quad hg = 1_d.$$

Objetos Especiais

Definição. Um objeto t é **terminal** quando, para todo objeto a, existe um único morfismo $a \to t$.

Definição. Um objeto i é **inicial** quando, para todo objeto b, existe um único morfismo $i \to b$.

Definição. Um objeto que é inicial e terminal é dito **nulo**.

Proposição. *Objetos nulos são únicos a menos de isomorfismos e definem, para quaisquer objetos a e b, uma seta*

$$a \to z \to b,$$

*chamada **seta zero** (onde z é um objeto nulo).*

Grupoides

Definição. Um **grupoide** é uma categoria onde toda seta é invertível. Um exemplo típico é o **grupoide fundamental** $\pi(X)$ de um espaço topológico X:

- os objetos são pontos $x \in X$;
- as setas $x \to x'$ são classes de homotopia de caminhos de x para x'.

Proposição. *Se G é um grupoide e x é um objeto de G, então $Hom_G(x, x)$ forma um grupo.*

Proposição. *Se existe morfismo ligando dois objetos $x \to x'$ em G, então os grupos $Hom_G(x, x)$ e $Hom_G(x', x')$ são isomorfos (pela conjugação).*

Definição. Um grupoide é dito **conexo** se existe uma seta ligando quaisquer dois objetos. Um grupoide conectado é caracterizado pelo seu conjunto de objetos e um grupo $\mathrm{Hom}_G(x, x)$.

Observação. No caso do grupoide fundamental $\pi(X)$, o conjunto é X e o grupo $\mathrm{Hom}(x, x)$ é dito **grupo fundamental**.