

Grothendieck Topologies

Guilherme Henrique de Sá

2. Contravariant Functors

2.1 Representable functors and the Yoneda Lemma

Transformação Natural. Dado dois funtores $T, S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, uma **transformação natural** é uma função que associa a cada objeto c em \mathcal{C} uma seta $\tau_c : S(c) \rightarrow T(c)$ em \mathcal{B} .

Esta associação é feita de forma que, para toda seta $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , valha que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & S(X) & \xrightarrow{\tau_X} T(X) \\ \downarrow f & S(f) \downarrow & \downarrow T(f) \\ Y & S(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} T(Y) \end{array}$$

Ou seja, temos que:

$$\tau_y \circ S(f) = T(f) \circ \tau_x$$

- Transformações naturais podem ser vistas como morfismos (setas) entre funtores.

Seja $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ a categoria cujos elementos (objetos) são funtores contravariantes da categoria \mathcal{C} para a categoria dos conjuntos, e as setas são transformações naturais.

- Para cada x objeto de \mathcal{C} , podemos definir

$$h_x : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

objeto de $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$, de forma que:

- $h_x(U) = \text{Hom}(U, X)$ para cada objeto U de \mathcal{C} ;
- Para cada seta $\alpha : U' \rightarrow U$ em \mathcal{C}^{op} , temos o morfismo $h_X U \rightarrow h_X U'$ dado por composição com α .

- Para cada seta $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , definimos uma transformação natural h_f que associa a cada objeto U de \mathcal{C}^{op} uma seta:

$$h_f(U) : h_X(U) \rightarrow h_Y(U) \quad \text{em } \mathbf{Set}$$

- Seja $\beta \in \text{Hom}(U, X)$, então

$$h_f(U)(\beta) := f \circ \beta \in \text{Hom}(U, Y)$$

Isso define um morfismo $h_f : h_X \rightarrow h_Y$.

Para toda seta $\alpha : U' \rightarrow U$ em \mathcal{C}^{op} , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{h_f(U)} & h_Y(U) \\ h_X(\alpha) \downarrow & & \downarrow h_Y(\alpha) \\ h_X(U') & \xrightarrow{h_f(U')} & h_Y(U') \end{array}$$

- Mandando cada objeto X de \mathcal{C} em h_X e cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} em $h_f : h_X \rightarrow h_Y$, definimos assim um funtor:

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$$

Yoneda Lemma (Versão Fraca). Seja x, y objetos de uma categoria \mathcal{C} . Então a função:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que manda $f \mapsto h_f$ é bijetiva.

(Note que isso nos diz que o funtor definido anteriormente é “plenamente fiel”, ou “cheio e fiel”).

Definição. Um funtor representável de uma categoria \mathcal{C} é um funtor

$$F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

tal que F é isomorfo a h_X para algum X objeto de \mathcal{C} . Dizemos que F é representado por X .

- Se ocorrer de $F \cong h_X$ e $F \cong h_Y$, então $h_X \cong h_Y$ e, pelo lema anterior, vai existir $f : X \rightarrow Y$ tal que $h_f : h_X \rightarrow h_Y$ é uma equivalência. Mas, pela construção de h_f , teremos que f é uma equivalência.

Vamos nos preparar para o lema de Yoneda (versão definitiva).

- Seja $T : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ um funtor e X um objeto de \mathcal{C} . Dado $\tau : h_X \rightarrow T$, temos um morfismo $\tau_X : h_X(X) \rightarrow T(X)$.
- Podemos definir uma função de transformações naturais entre h_X e T para elementos no conjunto $T(X)$ dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(h_X, T) &\rightarrow T(X) \\ \tau &\mapsto \tau_X(\text{id}_X) \end{aligned}$$

- Dado $\xi \in T(x)$, queremos construir uma transformação natural $\tau : h_X \rightarrow T$.
Seja U um objeto de \mathcal{C} , então $h_X(U) = \text{Hom}(U, X)$. Um elemento $f \in h_X(U)$ é um morfismo $f : U \rightarrow X$ em \mathcal{C} .
- Definimos:

$$\begin{aligned} \tau_U : h_X(U) &\rightarrow T(U) \\ f &\mapsto T(f)(\xi) \end{aligned}$$

Assim, temos uma transformação natural τ e podemos fazer $\tau_U(f) = T(f)(\xi)$.

- Teremos que, para todo morfismo $\alpha : U' \rightarrow U$ em \mathcal{C}^{op} , vale que:

$$\tau_{U'}(h_X(\alpha)(f)) = \tau_{U'}(f \circ \alpha) = T(f \circ \alpha)(\xi) \quad (1)$$

$$(T(\alpha) \circ \tau_U)(f) = T(\alpha)(T(f)(\xi)) = T(f \circ \alpha)(\xi) \quad (2)$$

Como T é contravariante, de (1) e (2) segue:

$$\begin{aligned} (T(\alpha) \circ \tau_U)(f) &= (T(\alpha) \circ T(f))(\xi) = T(f \circ \alpha)(\xi) \\ &= (\tau_{U'} \circ h_X(\alpha))(f) \end{aligned}$$

Fazendo com que o diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{\tau_U} & T(U) \\ h_X(\alpha) \downarrow & & \downarrow T(\alpha) \\ h_X(U') & \xrightarrow{\tau_{U'}} & T(U') \end{array}$$

Logo, τ é transformação natural.

A aplicação descrita é uma função:

$$T(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, T)$$

Lema de Yoneda (Versão Final). As funções anteriores são inversas uma da outra e vale que:

$$T(X) \cong \text{Hom}(h_X, T)$$

Observação. Se considerarmos T representável por Y , i.e. $T \cong h_Y$, então:

$$h_X(Y) = \text{Hom}(X, Y) \cong \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que é a versão fraca do Lema de Yoneda.

Def. 2.2. Seja $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ um funtor. Um objeto universal de F é um par (X, ξ) , onde X é objeto de \mathcal{C} e ξ é um elemento de FX tal que para cada objeto U de \mathcal{C} e cada $\sigma \in FU$, exista uma única seta $f : U \rightarrow X$ em \mathcal{C} satisfazendo:

$$F(f)(\xi) = \sigma$$

Perceba que se (X, ξ) é objeto universal de F , então a função T que define a transformação natural no Lema de Yoneda é bijetiva para todo U . Assim, o morfismo $h_X \rightarrow F$ é isomorfismo. Segue a proposição:

Prop. 2.3. Um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ é representável se e somente se possui um objeto universal.

- Se (X, ξ) é objeto universal de F , então F é representado por X .
- O Lema de Yoneda nos garante que \mathcal{C} pode ser imerso em $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ e que todo funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ pode ser estendido a um funtor representável

$$h_F : \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Assim, vamos tratar h_X como simplesmente X , e $\text{Hom}(h_X, F)$ como FX .

Exemplos:

1. Seja a categoria **Set**, onde os objetos são conjuntos e as setas são funções entre conjuntos.

Seja $F : \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ que leva um conjunto S no conjunto $\mathcal{P}(S)$ das partes de S , e leva uma função $f : S \rightarrow T$ em

$$Ff : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(S), \quad \sigma \mapsto f^{-1}(\sigma).$$

Afirma-se que $(\{1, 0\}, \{1\})$ é objeto universal de F . Ora, dado um conjunto S e um subconjunto $\sigma \in \mathcal{P}(S)$, então existe uma única $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $F(f)(\{1\}) = \sigma$. A função é:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \sigma \\ 1, & \text{se } x \in \sigma \end{cases}$$

2. Seja **HausTop** a categoria de todos os espaços Hausdorff com setas sendo as funções contínuas. O functor $F : \mathbf{HausTop}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, que manda um espaço S no conjunto FS dos subespaços abertos, não é representável.

Suponha que (X, ξ) é objeto universal de F . Isso nos diz que $\forall \sigma \in FS$, existe $f : S \rightarrow X$ tal que $F(f)(\xi) = f^{-1}(\xi) = \sigma$.

Tomando $\sigma = S$, então ξ possui um único elemento. Se $\sigma = \emptyset$, então $\#X \setminus \xi = 1$.

Como X é Hausdorff, segue que $X = \{a, b\}$ com a topologia discreta.

Seja S um espaço Hausdorff tal que existe $\sigma \in FS$ aberto mas não fechado.

Tem que existir $f : S \rightarrow X$ contínua tal que $f^{-1}(\xi) = \sigma \Rightarrow f^{-1}(X \setminus \xi) = S \setminus \sigma \Rightarrow S \setminus \sigma$ é aberto e teríamos que σ é fechado.

Assim, (X, ξ) não é objeto universal!