

Grothendieck Topologies

Guilherme Henrique de Sá

2. Contravariant Functors

2.1 Representable functors and the Yoneda Lemma

Transformação Natural. Dado dois funtores $T, S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, uma **transformação natural** é uma função que associa a cada objeto c em \mathcal{C} uma seta $\tau_c : S(c) \rightarrow T(c)$ em \mathcal{B} .

Esta associação é feita de forma que, para toda seta $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , valha que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & S(X) & \xrightarrow{\tau_X} T(X) \\ \downarrow f & S(f) \downarrow & \downarrow T(f) \\ Y & S(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} T(Y) \end{array}$$

Ou seja, temos que:

$$\tau_Y \circ S(f) = T(f) \circ \tau_X$$

- Transformações naturais podem ser vistas como morfismos (setas) entre funtores.

Seja $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ a categoria cujos elementos (objetos) são funtores contravariantes da categoria \mathcal{C} para a categoria dos conjuntos, e as setas são transformações naturais.

- Para cada x objeto de \mathcal{C} , podemos definir

$$h_x : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

objeto de $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$, de forma que:

- $h_x(U) = \text{Hom}(U, X)$ para cada objeto U de \mathcal{C} ;
- Para cada seta $\alpha : U' \rightarrow U$ em \mathcal{C}^{op} , temos o morfismo $h_X U \rightarrow h_X U'$ dado por composição com α .

- Para cada seta $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , definimos uma transformação natural h_f que associa a cada objeto U de \mathcal{C}^{op} uma seta:

$$h_f(U) : h_X(U) \rightarrow h_Y(U) \quad \text{em } \mathbf{Set}$$

- Seja $\beta \in \text{Hom}(U, X)$, então

$$h_f(U)(\beta) := f \circ \beta \in \text{Hom}(U, Y)$$

Isso define um morfismo $h_f : h_X \rightarrow h_Y$.

Para toda seta $\alpha : U' \rightarrow U$ em \mathcal{C}^{op} , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{h_f(U)} & h_Y(U) \\ h_X(\alpha) \downarrow & & \downarrow h_Y(\alpha) \\ h_X(U') & \xrightarrow{h_f(U')} & h_Y(U') \end{array}$$

- Mandando cada objeto X de \mathcal{C} em h_X e cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} em $h_f : h_X \rightarrow h_Y$, definimos assim um funtor:

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$$

Yoneda Lemma (Versão Fraca). Seja x, y objetos de uma categoria \mathcal{C} . Então a função:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que manda $f \mapsto h_f$ é bijetiva.

(Note que isso nos diz que o funtor definido anteriormente é “plenamente fiel”, ou “cheio e fiel”).

Definição. Um funtor representável de uma categoria \mathcal{C} é um funtor

$$F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

tal que F é isomorfo a h_X para algum X objeto de \mathcal{C} . Dizemos que F é representado por X .

- Se ocorrer de $F \cong h_X$ e $F \cong h_Y$, então $h_X \cong h_Y$ e, pelo lema anterior, vai existir $f : X \rightarrow Y$ tal que $h_f : h_X \rightarrow h_Y$ é uma equivalência. Mas, pela construção de h_f , teremos que f é uma equivalência.

Vamos nos preparar para o lema de Yoneda (versão definitiva).

- Seja $T : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ um funtor e X um objeto de \mathcal{C} . Dado $\tau : h_X \rightarrow T$, temos um morfismo $\tau_X : h_X(X) \rightarrow T(X)$.
- Podemos definir uma função de transformações naturais entre h_X e T para elementos no conjunto $T(X)$ dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(h_X, T) &\rightarrow T(X) \\ \tau &\mapsto \tau_X(\text{id}_X) \end{aligned}$$

- Dado $\xi \in T(x)$, queremos construir uma transformação natural $\tau : h_X \rightarrow T$.
Seja U um objeto de \mathcal{C} , então $h_X(U) = \text{Hom}(U, X)$. Um elemento $f \in h_X(U)$ é um morfismo $f : U \rightarrow X$ em \mathcal{C} .
- Definimos:

$$\begin{aligned} \tau_U : h_X(U) &\rightarrow T(U) \\ f &\mapsto T(f)(\xi) \end{aligned}$$

Assim, temos uma transformação natural τ e podemos fazer $\tau_U(f) = T(f)(\xi)$.

- Teremos que, para todo morfismo $\alpha : U' \rightarrow U$ em \mathcal{C}^{op} , vale que:

$$\tau_{U'}(h_X(\alpha)(f)) = \tau_{U'}(f \circ \alpha) = T(f \circ \alpha)(\xi) \quad (1)$$

$$(T(\alpha) \circ \tau_U)(f) = T(\alpha)(T(f)(\xi)) = T(f \circ \alpha)(\xi) \quad (2)$$

Como T é contravariante, de (1) e (2) segue:

$$\begin{aligned} (T(\alpha) \circ \tau_U)(f) &= (T(\alpha) \circ T(f))(\xi) = T(f \circ \alpha)(\xi) \\ &= (\tau_{U'} \circ h_X(\alpha))(f) \end{aligned}$$

Fazendo com que o diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{\tau_U} & T(U) \\ h_X(\alpha) \downarrow & & \downarrow T(\alpha) \\ h_X(U') & \xrightarrow{\tau_{U'}} & T(U') \end{array}$$

Logo, τ é transformação natural.

A aplicação descrita é uma função:

$$T(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, T)$$

Lema de Yoneda (Versão Final). As funções anteriores são inversas uma da outra e vale que:

$$T(X) \cong \text{Hom}(h_X, T)$$

Observação. Se considerarmos T representável por Y , i.e. $T \cong h_Y$, então:

$$h_X(Y) = \text{Hom}(X, Y) \cong \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que é a versão fraca do Lema de Yoneda.

Def. 2.2. Seja $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ um funtor. Um objeto universal de F é um par (X, ξ) , onde X é objeto de \mathcal{C} e ξ é um elemento de FX tal que para cada objeto U de \mathcal{C} e cada $\sigma \in FU$, exista uma única seta $f : U \rightarrow X$ em \mathcal{C} satisfazendo:

$$F(f)(\xi) = \sigma$$

Perceba que se (X, ξ) é objeto universal de F , então a função T que define a transformação natural no Lema de Yoneda é bijetiva para todo U . Assim, o morfismo $h_X \rightarrow F$ é isomorfismo. Segue a proposição:

Prop. 2.3. Um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ é representável se e somente se possui um objeto universal.

- Se (X, ξ) é objeto universal de F , então F é representado por X .
- O Lema de Yoneda nos garante que \mathcal{C} pode ser imerso em $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ e que todo funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ pode ser estendido a um funtor representável

$$h_F : \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Assim, vamos tratar h_X como simplesmente X , e $\text{Hom}(h_X, F)$ como FX .

Exemplos:

1. Seja a categoria **Set**, onde os objetos são conjuntos e as setas são funções entre conjuntos.

Seja $F : \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ que leva um conjunto S no conjunto $\mathcal{P}(S)$ das partes de S , e leva uma função $f : S \rightarrow T$ em

$$Ff : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(S), \quad \sigma \mapsto f^{-1}(\sigma).$$

Afirma-se que $(\{1, 0\}, \{1\})$ é objeto universal de F . Ora, dado um conjunto S e um subconjunto $\sigma \in \mathcal{P}(S)$, então existe uma única $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $F(f)(\{1\}) = \sigma$. A função é:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \sigma \\ 1, & \text{se } x \in \sigma \end{cases}$$

2. Seja **HausTop** a categoria de todos os espaços Hausdorff com setas sendo as funções contínuas. O functor $F : \mathbf{HausTop}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, que manda um espaço S no conjunto FS dos subespaços abertos, não é representável.

Suponha que (X, ξ) é objeto universal de F . Isso nos diz que $\forall \sigma \in FS$, existe $f : S \rightarrow X$ tal que $F(f)(\xi) = f^{-1}(\xi) = \sigma$.

Tomando $\sigma = S$, então ξ possui um único elemento. Se $\sigma = \emptyset$, então $\#X \setminus \xi = 1$.

Como X é Hausdorff, segue que $X = \{a, b\}$ com a topologia discreta.

Seja S um espaço Hausdorff tal que existe $\sigma \in FS$ aberto mas não fechado.

Tem que existir $f : S \rightarrow X$ contínua tal que $f^{-1}(\xi) = \sigma \Rightarrow f^{-1}(X \setminus \xi) = S \setminus \sigma \Rightarrow S \setminus \sigma$ é aberto e teríamos que σ é fechado.

Assim, (X, ξ) não é objeto universal!

1. Categories Functors and Natural Transformations

5. Mônicos, Epis e Zeros

Definição. Uma seta $e : a \rightarrow b$ é dita **invertível** se existe uma seta $e' : b \rightarrow a$ na mesma categoria tal que

$$ee' = 1_b \quad e \quad e'e = 1_a.$$

Neste caso, dizemos que a e b são **isomorfos** ($a \cong b$) e e é dito um **isomorfismo**.

Definição. Um morfismo $m : a \rightarrow b$ é dito **mônico** em \mathcal{C} quando, para quaisquer setas paralelas $f_1, f_2 : d \rightarrow a$, se

$$mf_1 = mf_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2.$$

Definição. Uma seta $h : a \rightarrow b$ em \mathcal{C} é dita **epi** se, para quaisquer setas $g_1, g_2 : b \rightarrow c$, vale

$$g_1h = g_2h \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2.$$

Definição. Dado $h : a \rightarrow b$, um **inverso à direita** de h é uma seta $r : b \rightarrow a$ tal que $hr = 1_b$. r é chamado **seção** de h .

Analogamente, um **inverso à esquerda** é uma seta $p : b \rightarrow a$ tal que $ph = 1_a$. p é dito **retração** de h .

Proposição. *Se uma seta possui inverso à direita, então ela é necessariamente epi. Se possui inverso à esquerda, então é mônico.*

Idempotentes e Splitting

Definição. Se duas setas $g : a \rightarrow b$ e $h : b \rightarrow a$ são tais que $gh = 1_b$, então $f := hg$ está bem definido e é um **idempotente**, isto é, $f^2 = f$.

Definição. Um idempotente f **splita** quando existem setas g, h tais que

$$f = gh \quad \text{e} \quad hg = 1_a.$$

Objetos Especiais

Definição. Um objeto t é **terminal** quando, para todo objeto a , existe um único morfismo $a \rightarrow t$.

Definição. Um objeto i é **inicial** quando, para todo objeto b , existe um único morfismo $i \rightarrow b$.

Definição. Um objeto que é inicial e terminal é dito **nulo**.

Proposição. *Objetos nulos são únicos a menos de isomorfismos e definem, para quaisquer objetos a e b , uma seta*

$$a \rightarrow z \rightarrow b,$$

*chamada **seta zero** (onde z é um objeto nulo).*

Grupoides

Definição. Um **grupoide** é uma categoria onde toda seta é invertível. Um exemplo típico é o **grupoide fundamental** $\pi(X)$ de um espaço topológico X :

- os objetos são pontos $x \in X$;
- as setas $x \rightarrow x'$ são classes de homotopia de caminhos de x para x' .

Proposição. Se G é um grupoide e x é um objeto de G , então $\text{Hom}_G(x, x)$ forma um grupo.

Proposição. Se existe morfismo ligando dois objetos $x \rightarrow x'$ em G , então os grupos $\text{Hom}_G(x, x)$ e $\text{Hom}_G(x', x')$ são isomorfos (pela conjugação).

Definição. Um grupoide é dito **conexo** se existe uma seta ligando quaisquer dois objetos. Um grupoide conectado é caracterizado pelo seu conjunto de objetos e um grupo $\text{Hom}_G(x, x)$.

Observação. No caso do grupoide fundamental $\pi(X)$, o conjunto é X e o grupo $\text{Hom}(x, x)$ é dito **grupo fundamental**.

II. Constructions on Categories

4. Functors Categories

Dado duas categorias \mathcal{B} e \mathcal{C} e funtores $R, S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$.

Se $\sigma : R \Rightarrow S$ e $\tau : S \Rightarrow T$ são transformações naturais, então podemos criar $\tau \circ \sigma$ através da seguinte componente para cada $c \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

$$(\tau \circ \sigma)_c = \tau_c \circ \sigma_c.$$

Para mostrar que $\tau \circ \sigma : R \Rightarrow T$ é de fato natural, tome uma seta $f : c \rightarrow c'$ em \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccc} Rc & \xrightarrow{\sigma_c} & Sc & \xrightarrow{\tau_c} & Tc \\ Rf \downarrow & & Sf \downarrow & & Tf \downarrow \\ Rc' & \xrightarrow{\sigma_{c'}} & Sc' & \xrightarrow{\tau_{c'}} & Tc' \end{array}$$

Este diagrama comuta, pois cada quadrado interno comuta.

A composição de transformações naturais é associativa e, para cada functor T , existe a transformação natural identidade 1_T dada pelos componentes $(1_T)_c = 1_{Tc}$.

Assim, dadas duas categorias \mathcal{B} e \mathcal{C} , podemos definir a categoria de funtores

$$\mathcal{B}^{\mathcal{C}} = \text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{B}),$$

onde os objetos são os funtores de \mathcal{C} para \mathcal{B} e os morfismos são as transformações naturais.

Exemplos.

1. Se \mathcal{B} e \mathcal{C} são conjuntos (categorias cujas setas são todas identidades), então $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ é o conjunto de funções entre \mathcal{C} e \mathcal{B} . Em particular, se $\mathcal{B} = \mathbf{2} = \{0, 1\}$, então $\mathcal{B}^{\mathcal{C}} \cong \mathcal{P}(\mathcal{C})$.
2. Para toda categoria \mathcal{B} , $\mathcal{B}^{\mathbf{2}}$ é isomorfa a \mathcal{B}^2 e é chamada de *categoria de setas de \mathcal{B}* , onde os objetos são as setas $f : a \rightarrow b$ e os morfismos $f \rightarrow f'$ são dados pelos pares $\langle h, k \rangle$ de setas em \mathcal{B} tais que:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h} & a' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ b & \xrightarrow{k} & b' \end{array}$$

comuta.

3. Se M é um monóide, então $(\mathbf{Set})^M$ é a categoria cujos objetos são as ações de M (em algum conjunto) e as setas são os morfismos entre tais ações.
4. Um objeto da categoria $(\mathbf{Grp})^M$ é um grupo com operadores M (uma ação de M no grupo, de endomorfismos de G , ou algo assim).

5. Se G é um grupo e K um anel comutativo, então $(K\text{-}\mathbf{Mod})^G$ é a categoria de K -lineares representações de G . Cada funtor $T : G \rightarrow K\text{-}\mathbf{Mod}$ atribui o único objeto de G a um K -módulo V e atribui as setas de G a $\text{Aut}(V)$. Isso pode ser visto como um morfismo de grupos $f_T : G \rightarrow \text{Aut}(V)$, onde cada elemento do grupo G pode ser representado por transformações lineares $V \rightarrow V$.

Se T' é outro funtor, então uma transformação natural $\sigma : T \Rightarrow T'$ é dada por um único componente $\sigma : V \rightarrow V'$ de forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma} & V' \\ f_T(g) \downarrow & & \downarrow f_{T'}(g) \\ V & \xrightarrow{\sigma} & V' \end{array}$$

comuta para todo elemento g do grupo G .

Na teoria de representações, este σ é chamado de *operador intertwining*. Logo, $(K\text{-}\mathbf{Mod})^G$ é a categoria onde os objetos são representações de G e os morfismos são operadores intertwining.

Proposição. Vale o seguinte:

1. Se \mathcal{B} e \mathcal{C} são categorias pequenas, então $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ também é.
2. Se \mathcal{B} é uma classe e \mathcal{C} é pequena, $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ é grande.
3. Se \mathcal{B} tem $\text{Mor}(\mathcal{B})$ pequeno e \mathcal{C} é pequena, então $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ possui $\text{Mor}(\mathcal{B}^{\mathcal{C}})$ pequeno.

III. Universal and Limits

1. Seta Universal

Definição. Dado $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor e c um objeto de \mathcal{C} , um par $\langle r, u \rangle$ consiste em um objeto r de \mathcal{D} e uma seta $u : c \rightarrow Sr$ tal que, para todo par (d, f) , existe uma única seta $f' : r \rightarrow d$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{u} & Sr \\ & \searrow f & \downarrow Sf' \\ & & Sd \end{array}$$

comuta. É chamado de *seta universal* de c para S .

3. Coproducts and Colimits

Coproduto. Para qualquer categoria \mathcal{C} , o funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é definido nos objetos por:

$$\Delta(c) = \langle c, c \rangle$$

e nos morfismos por:

$$\Delta(f) = \langle f, f \rangle.$$

Uma seta universal de um objeto $\langle a, b \rangle$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ para o funtor Δ é chamada de *diagrama de coproduto*.