

# Grothendieck Topologies

Guilherme Henrique de Sá

## 2. Contravariant Functors

### 2.1 Representable functors and the Yoneda Lemma

**Transformação Natural.** Dado dois funtores  $T, S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , uma **transformação natural** é uma função que associa a cada objeto  $c$  em  $\mathcal{C}$  uma seta  $\tau_c : S(c) \rightarrow T(c)$  em  $\mathcal{B}$ .

Esta associação é feita de forma que, para toda seta  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ , valha que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & S(X) & \xrightarrow{\tau_X} T(X) \\ \downarrow f & S(f) \downarrow & \downarrow T(f) \\ Y & S(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} T(Y) \end{array}$$

Ou seja, temos que:

$$\tau_y \circ S(f) = T(f) \circ \tau_x$$

- Transformações naturais podem ser vistas como morfismos (setas) entre funtores.

Seja  $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$  a categoria cujos elementos (objetos) são funtores contravariantes da categoria  $\mathcal{C}$  para a categoria dos conjuntos, e as setas são transformações naturais.

- Para cada  $x$  objeto de  $\mathcal{C}$ , podemos definir

$$h_x : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

objeto de  $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ , de forma que:

- $h_x(U) = \text{Hom}(U, X)$  para cada objeto  $U$  de  $\mathcal{C}$ ;
- Para cada seta  $\alpha : U' \rightarrow U$  em  $\mathcal{C}^{op}$ , temos o morfismo  $h_X U \rightarrow h_X U'$  dado por composição com  $\alpha$ .

- Para cada seta  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , definimos uma transformação natural  $h_f$  que associa a cada objeto  $U$  de  $\mathcal{C}^{op}$  uma seta:

$$h_f(U) : h_X(U) \rightarrow h_Y(U) \quad \text{em } \mathbf{Set}$$

- Seja  $\beta \in \text{Hom}(U, X)$ , então

$$h_f(U)(\beta) := f \circ \beta \in \text{Hom}(U, Y)$$

Isso define um morfismo  $h_f : h_X \rightarrow h_Y$ .

Para toda seta  $\alpha : U' \rightarrow U$  em  $\mathcal{C}^{op}$ , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{h_f(U)} & h_Y(U) \\ h_X(\alpha) \downarrow & & \downarrow h_Y(\alpha) \\ h_X(U') & \xrightarrow{h_f(U')} & h_Y(U') \end{array}$$

- Mandando cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  em  $h_X$  e cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  em  $h_f : h_X \rightarrow h_Y$ , definimos assim um funtor:

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$$

**Yoneda Lemma (Versão Fraca).** Seja  $x, y$  objetos de uma categoria  $\mathcal{C}$ . Então a função:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que manda  $f \mapsto h_f$  é bijetiva.

(Note que isso nos diz que o funtor definido anteriormente é “plenamente fiel”, ou “cheio e fiel”).

**Definição.** Um funtor representável de uma categoria  $\mathcal{C}$  é um funtor

$$F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

tal que  $F$  é isomorfo a  $h_X$  para algum  $X$  objeto de  $\mathcal{C}$ . Dizemos que  $F$  é representado por  $X$ .

- Se ocorrer de  $F \cong h_X$  e  $F \cong h_Y$ , então  $h_X \cong h_Y$  e, pelo lema anterior, vai existir  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $h_f : h_X \rightarrow h_Y$  é uma equivalência. Mas, pela construção de  $h_f$ , teremos que  $f$  é uma equivalência.

Vamos nos preparar para o lema de Yoneda (versão definitiva).

- Seja  $T : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  um funtor e  $X$  um objeto de  $\mathcal{C}$ . Dado  $\tau : h_X \rightarrow T$ , temos um morfismo  $\tau_X : h_X(X) \rightarrow T(X)$ .
- Podemos definir uma função de transformações naturais entre  $h_X$  e  $T$  para elementos no conjunto  $T(X)$  dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(h_X, T) &\rightarrow T(X) \\ \tau &\mapsto \tau_X(\text{id}_X) \end{aligned}$$

- Dado  $\xi \in T(x)$ , queremos construir uma transformação natural  $\tau : h_X \rightarrow T$ .  
Seja  $U$  um objeto de  $\mathcal{C}$ , então  $h_X(U) = \text{Hom}(U, X)$ . Um elemento  $f \in h_X(U)$  é um morfismo  $f : U \rightarrow X$  em  $\mathcal{C}$ .
- Definimos:

$$\begin{aligned} \tau_U : h_X(U) &\rightarrow T(U) \\ f &\mapsto T(f)(\xi) \end{aligned}$$

Assim, temos uma transformação natural  $\tau$  e podemos fazer  $\tau_U(f) = T(f)(\xi)$ .

- Teremos que, para todo morfismo  $\alpha : U' \rightarrow U$  em  $\mathcal{C}^{op}$ , vale que:

$$\tau_{U'}(h_X(\alpha)(f)) = \tau_{U'}(f \circ \alpha) = T(f \circ \alpha)(\xi) \quad (1)$$

$$(T(\alpha) \circ \tau_U)(f) = T(\alpha)(T(f)(\xi)) = T(f \circ \alpha)(\xi) \quad (2)$$

Como  $T$  é contravariante, de (1) e (2) segue:

$$\begin{aligned} (T(\alpha) \circ \tau_U)(f) &= (T(\alpha) \circ T(f))(\xi) = T(f \circ \alpha)(\xi) \\ &= (\tau_{U'} \circ h_X(\alpha))(f) \end{aligned}$$

Fazendo com que o diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} h_X(U) & \xrightarrow{\tau_U} & T(U) \\ h_X(\alpha) \downarrow & & \downarrow T(\alpha) \\ h_X(U') & \xrightarrow{\tau_{U'}} & T(U') \end{array}$$

Logo,  $\tau$  é transformação natural.

A aplicação descrita é uma função:

$$T(X) \rightarrow \text{Hom}(h_X, T)$$

**Lema de Yoneda (Versão Final).** As funções anteriores são inversas uma da outra e vale que:

$$T(X) \cong \text{Hom}(h_X, T)$$

**Observação.** Se considerarmos  $T$  representável por  $Y$ , i.e.  $T \cong h_Y$ , então:

$$h_X(Y) = \text{Hom}(X, Y) \cong \text{Hom}(h_X, h_Y)$$

que é a versão fraca do Lema de Yoneda.

**Def. 2.2.** Seja  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  um funtor. Um objeto universal de  $F$  é um par  $(X, \xi)$ , onde  $X$  é objeto de  $\mathcal{C}$  e  $\xi$  é um elemento de  $FX$  tal que para cada objeto  $U$  de  $\mathcal{C}$  e cada  $\sigma \in FU$ , exista uma única seta  $f : U \rightarrow X$  em  $\mathcal{C}$  satisfazendo:

$$F(f)(\xi) = \sigma$$

Perceba que se  $(X, \xi)$  é objeto universal de  $F$ , então a função  $T$  que define a transformação natural no Lema de Yoneda é bijetiva para todo  $U$ . Assim, o morfismo  $h_X \rightarrow F$  é isomorfismo. Segue a proposição:

**Prop. 2.3.** Um funtor  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  é representável se e somente se possui um objeto universal.

- Se  $(X, \xi)$  é objeto universal de  $F$ , então  $F$  é representado por  $X$ .
- O Lema de Yoneda nos garante que  $\mathcal{C}$  pode ser imerso em  $\text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$  e que todo funtor  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  pode ser estendido a um funtor representável

$$h_F : \text{Hom}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Assim, vamos tratar  $h_X$  como simplesmente  $X$ , e  $\text{Hom}(h_X, F)$  como  $FX$ .

## Exemplos:

1. Seja a categoria **Set**, onde os objetos são conjuntos e as setas são funções entre conjuntos.

Seja  $F : \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  que leva um conjunto  $S$  no conjunto  $\mathcal{P}(S)$  das partes de  $S$ , e leva uma função  $f : S \rightarrow T$  em

$$Ff : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(S), \quad \sigma \mapsto f^{-1}(\sigma).$$

Afirma-se que  $(\{1, 0\}, \{1\})$  é objeto universal de  $F$ . Ora, dado um conjunto  $S$  e um subconjunto  $\sigma \in \mathcal{P}(S)$ , então existe uma única  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $F(f)(\{1\}) = \sigma$ . A função é:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \sigma \\ 1, & \text{se } x \in \sigma \end{cases}$$

2. Seja **HausTop** a categoria de todos os espaços Hausdorff com setas sendo as funções contínuas. O functor  $F : \mathbf{HausTop}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ , que manda um espaço  $S$  no conjunto  $FS$  dos subespaços abertos, não é representável.

Suponha que  $(X, \xi)$  é objeto universal de  $F$ . Isso nos diz que  $\forall \sigma \in FS$ , existe  $f : S \rightarrow X$  tal que  $F(f)(\xi) = f^{-1}(\xi) = \sigma$ .

Tomando  $\sigma = S$ , então  $\xi$  possui um único elemento. Se  $\sigma = \emptyset$ , então  $\#X \setminus \xi = 1$ .

Como  $X$  é Hausdorff, segue que  $X = \{a, b\}$  com a topologia discreta.

Seja  $S$  um espaço Hausdorff tal que existe  $\sigma \in FS$  aberto mas não fechado.

Tem que existir  $f : S \rightarrow X$  contínua tal que  $f^{-1}(\xi) = \sigma \Rightarrow f^{-1}(X \setminus \xi) = S \setminus \sigma \Rightarrow S \setminus \sigma$  é aberto e teríamos que  $\sigma$  é fechado.

Assim,  $(X, \xi)$  não é objeto universal!

## 1 TEST