Master 2 : STL — Année 2021/2022

AAGA Examen Réparti 1

Appareils électroniques interdits. Seuls documents autorisés : Notes de cours et de TD/TME.

Le sujet comporte 5 exercices indépendants. Le barème est indicatif. L'examen est noté sur 20, il y a donc 7 points en bonus.

Exercice* 1 : *Générateurs congruentiels (8 points)

Générateur linéaire congruentiel

Soit le générateur linéaire congruentiel suivant :

$$X_{n+1} = (2 \times X_n + 3) \mod 13 \qquad\qquad X_0 \text{ fixé, appelé graine.}$$

1. En prenant pour graine $X_0 = 0$, quels sont les entiers générés ? Quelle est la longueur de la période ? Que vaut X_{120} ?
2. Donner la longueur de la période pour chaque valeur de graine $X_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$.
3. Quelle est la période du générateur, c'est-à-dire la plus petite des périodes par rapport à l'ensemble des graines possibles ?

Générateur congruentiel inverse

Soit le générateur linéaire congruentiel *inverse* suivant :
X_0 est fixé dans $\{0, 1, \ldots, 12\}$ et s'appelle la graine.

$$X_{n+1} = \begin{cases} (2 \times X_n^{-1} + 5) \mod 13 & \text{si } X_n \neq 0 \\ 5 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

où X_n^{-1} est l'inverse modulaire de X_n, c'est-à-dire que $X_n^{-1} \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ et $(X_n \times X_n^{-1}) \mod 13 = 1$.

4. Sans aucun calcul, donner la période maximale que l'on puisse avoir pour ce générateur, quelle que soit la graine choisie ? (Justifier la réponse)
5. Quel est l'inverse modulaire de 1 ? et de 2 ? et de 3 ?

Voilà les autres inverses modulaires :

4	10
5	8
6	11
7	2
8	5

et :

9	3
10	4
11	6
12	12

6. Quelle est la période pour la graine $X_0 = 0$? Quelle est sa longueur ?
7. Quelle est la période du générateur (la plus petite des périodes) ?

Exercice* 2 : *Générateur non uniforme d'entiers (4 points)

Soit n un entier supérieur à 1, on a à notre disposition une fonction `RandUnif` *qui, pour le paramètre n, renvoie uniformément un entier entre 0 et $n-1$.*

On souhaite faire de la génération dans un multi-ensemble d'entiers : on a r entiers (de 0 à $r-1$), chacun associé à un poids (qui est un entier positif). Par exemple aux entiers entre 0 et 3, on associe les poids respectifs $1, 2, 3, 1$. C'est-à-dire que l'entier 0 a $1/7$ chance d'apparaître, l'entier 1 a $2/7$ chance d'apparaître, l'entier 2 a $3/7$ chance d'apparaître et l'entier 3 a $1/7$ chance d'apparaître.

On souhaite générer successivement (et indépendamment) k entiers dans $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ suivant la distribution D fournie en paramètre.

1. Proposer une structure de données arborescente permettant d'encoder les différentes données et donner un algorithme permettant de générer k entiers. On s'autorise une complexité temporelle en $O(k \log r)$ comparaisons pour des recherches dans la structure de données, et une complexité spatiale en $O(r)$ pour la structure de données.
2. Justifier les complexités.

Exercice* 3 : *Arbre binaire (6 points)

Un arbre binaire (complet) est un arbre dont les nœuds internes sont d'arité 2 (un enfant gauche et un enfant droit) et les feuilles (nœuds externes) sont d'arité 0. On appelle taille *de l'arbre son nombre de nœuds internes.*

On dispose d'un tableau C, tel que la case $C[n]$ contient le nombre d'arbres binaires de taille n. On rappelle la formule de récurrence :

$$C[n] = \sum_{i=0}^{n-1} C[i] \times C[n-1-i]; \qquad\qquad C[0] = 1. \tag{1}$$

On a à notre disposition `RandUnif` *prenant un entier r en argument et renvoyant un entier uniformément entre 0 et $r-1$.*

1. Donner une interprétation combinatoire de la formule de récurrence (1).
2. Donner le pseudo-code d'un générateur récursif d'arbres binaires de taille n, sachant que C est rempli pour les cases de 0 à n inclus.
3. Donner les complexités spatiale et temporelle de l'algorithme pour générer un arbre de taille n.
4. Donner la complexité en nombre de bits aléatoires consommés par l'algorithme pour générer un arbre de taille n.

Exercice* 4 : *Modèle de Erdös-Rényi (5 points)

1. Énumération des graphes : Dans le modèle A, dessiner tous les graphes à 4 sommets et 4 arêtes. Vérifier la réponse à l'aide de la formule énoncée en cours.
2. Transition de phase :
   a. Dans le modèle A, où l'on fixe le nombre d'arêtes $m(n) = \lceil \frac{n}{\ln n} \rceil$, lorsque $n \to \infty$. Est-ce que le graphe contiendra presque sûrement une composante géante (i.e taille de la plus grande composante connexe $= \Theta(n)$) ? Dans un premier temps, donner une justification informelle puis en donner une plus formelle.
   b. Qu'en est-il de la connexité du graphe ? Est-ce que le graphe sera presque sûrement connexe en gardant le même $m(n) = \lceil \frac{n}{\ln n} \rceil$? Dans un premier temps donner une justification informelle puis en donner une plus formelle.

Exercice* 5 : *Modèle de configuration (4 points)

Énumération des graphes : Soit la séquence de degrés suivantes $[2, 2, 1, 1]$.

1. Combien de sommets et combien d'arêtes contient un graphe respectant cette séquence ?
2. Combien y-t-il de matchings possible pour cette séquence ?
3. Énumérer le nombre de multigraphes différents que peut donner cette séquence. Pour chacun de ses graphes, donner le nombre de matchings lui correspondant. Vérifier la réponse à cette question en la comparant à la question précédente.
4. Si l'on tire un matching uniformément parmi tous les matchings possibles, quelle est la probabilité de produire un graphe simple ?