# 高中数学讲义

## 必修一

许老师

2025 年 12 月 04 日

# 目 录

# 第一章 集合与常用逻辑用语

**集合论的由来: 从无穷的迷思到数学的基石**

集合论，这个在现代数学中无处不在的基础理论，其诞生本身就是一场深刻的数学革命. 它的由来并非一蹴而就，而是在 19 世纪末期，由德国数学家格奥尔格 • 康托（Georg Cantor）在研究无穷问题时一手创立，并由此引发了一场深远的数学基础危机，最终重塑了整个数学的版图.

**一、无穷集合的幽灵: 康托的开创性工作**

19 世纪 70 年代，康托在研究三角级数（Trigonometric Series）的唯一性问题时，遇到了一个棘手的难题: 如何处理和分类实数轴上点的集合. 为了解决这个问题，他开始深入思考“无穷”这一长期以来被数学家们视为哲学概念而非严格数学对象的领域.

在此之前，数学家们普遍回避对“实际无穷”（Actual Infinity）的直接处理，认为无穷只是一个不断延伸的过程，即“潜在无穷”（Potential Infinity）. 然而，康托大胆地将无穷集合作为一个确定的、完整的数学实体来对待.

他的第一个革命性突破发表于 1874 年的一篇论文中，这篇论文被认为是集合论的诞生日. 在论文中，康托证明了一个惊人的结论: 实数集合比自然数集合“更大”，尽管两者都是无穷的. 他通过“一一对应”的原则来比较无穷集合的大小（即基数）. 他证明了，无法在自然数集和实数集之间建立一一对应关系，从而得出了存在着“不同大小的无穷”这一颠覆性的结论.

康托引入了“可数无穷”和“不可数无穷”的概念. 自然数、整数、有理数都是可数无穷的，而实数、无理数则是不可数无穷的. 他还发明了著名的“对角线论证法”，清晰地证明了实数的不可数性.

**二、天堂与危机: 悖论的出现**

康托的理论如同一把双刃剑. 一方面，它为数学开辟了一个全新的、广阔的研究领域，被伟大的数学家大卫 • 希尔伯特赞誉为“数学家们的天堂”. 另一方面，它也动摇了数学的确定性基础.

随着对集合论研究的深入，一系列逻辑上无法解释的悖论开始浮出水面，其中最著名的是 1901 年由伯特兰 • 罗素（Bertrand Russell）提出的“罗素悖论”. 这个悖论可以通俗地理解为:

设有一个集合 S，它的元素是所有不包含自身的集合. 那么，S 是否包含 S 自身呢?

• 如果 S 包含 S，根据 S 的定义，S 不应该包含自身.

• 如果 S 不包含 S，根据 S 的定义，S 又应该包含自身.

这个看似简单的悖论直接冲击了康托最初的“朴素集合论”（Naive Set Theory），因为它允许任何可以想象的集合都存在. 罗素悖论的出现，表明朴素集合论的定义过于宽泛，会导致逻辑上的自相矛盾. 这场危机被称为“第三次数学危机”，数学家们开始怀疑数学的基础是否牢固.

**三、公理化的重建: 集合论的新生**

为了解决这些悖论，数学家们认识到必须为集合论建立一个更加严格和稳固的基础. 出路在于“公理化”——即不再随意定义集合，而是从一组不证自明的公理出发，通过逻辑推演出整个集合论的体系.

20 世纪初，恩斯特 • 策梅洛（Ernst Zermelo）和亚伯拉罕 • 弗兰克尔（Abraham Fraenkel）等人提出了一系列公理，最终形成了今天被广泛接受的“策梅洛-弗兰克尔集合论”（Zermelo-Fraenkel set theory），通常简写为 ZF 公理系统. 如果再加上选择公理（Axiom of Choice），则称为 ZFC 公理系统.

ZFC 公理系统对集合的构造进行了严格的限制，例如，它不再允许像罗素悖论中那样“过大”的集合存在，从而有效地避免了已知的悖论.

**结论: 从具体问题到抽象基础**

集合论的由来, 始于康托对一个具体分析问题的探索, 却意外地开启了对数学最基本概念——无穷和集合——的深刻反思. 它所引发的悖论危机, 虽然在当时造成了巨大的震动, 但最终推动了数学基础的深刻变革, 促使数学家们以公理化的方式重建了数学大厦.

如今, 集合论已经成为现代数学的通用语言和基础框架. 无论是代数、拓扑还是分析, 几乎所有的数学分支都建立在集合论的语言和概念之上. 从一个数学家对无穷的孤独探索, 到成为整个数学世界的基石, 集合论的诞生故事, 生动地展现了数学理论在解决问题和自我完善中不断演进的壮丽画卷.

# 1.1 集合的概念

## 知识点 1. 集合

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称集）.

表示方法: 通常用大写拉丁字母 $A$, $B$, $C$, ... 表示集合，用小写拉丁字母 $a$, $b$, $c$, ... 表示集合中的元素.

(1) 对象: 现实生活中我们看到的、听到的、触摸到的、想到的事和物，都可以看做对象. 换句话说，集合的对象具有广泛性，强调的是集合对元素的“不设限”:

① 元素可以是数（如整数、实数）、点、图形、多项式、方程

② 也可以是人、物、抽象概念，甚至其他集合

因此，只要这些对象是明确且可区分的（集合的确定性），就能成为集合的元素.

(2) 元素: 具有共同特征或属性的对象,简单来说就是构成集合的每一个“成员”.

(3) 总体: 集合是一个整体，暗含“所有”“全部”“全体”的含义. 因此，若一些对象组成了一个集合，那么这个集合就是这些对象的全体，而非个别对象.

(4) 集合; 集合是一个原始的不可再分割的概念，类似于几何中的“点”，无法被其他概念“定义”.

如何判断一组对象是否能构成集合: 判断一组对象能否构成集合的关键是该组对象是否唯一确定，即是否能找到一个明确的标准，确定任意一个对象是不是给定集合中的元素.

## 知识点 2. 元素与集合

### 1. 元素与集合的关系

给定一个集合 $A$，如果 $a$ 是集合 $A$ 中的元素，就说 $a$ 属于集合 $A$ ,记作

$$a \in A,$$

如果 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素，就说 $a$ 不属于集合 $A$ ,记作

$$a \notin A.$$

(1) $a \in A$ 属于 $a$ 还是 $a \notin A$ 取决于元素 $a$ 是不是集合 $A$ 中的元素. 这两种情况中有且只有一种成立.

(2) 符号属于和不属于仅表示元素与集合之间的关系. 不能用来表示集合与集合之间的关系，这一点要牢记.

### 2. 集合中元素的三大特性

| 特性 | 含义 | 示例 |
| --- | --- | --- |
| 确定性 | 给定的集合中的元素必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，那么一个元素在或不在这个集合中就确定了 | “大于 3 的整数”可以构成集合,因为任何整数都可以判定其是否符合条件;而“比较高的学生”无法构成集合，因为高的标准不明确 |

| 特性 | 含义 | 示例 |
|---|---|---|
| 互异性 | 一个给定的集合中的元素是互不相同的，也就是说，集合中的元素不能重复出现 | 两个元素 1 构成的集合是 $\{1\}$ ,而不是 $\{1,1\}$ |
| 无序性 | 在一个集合中,元素之间是平等的,他们都充当集合中的一员,无先后次序之说. | 集合 $\{2,3,1\}$ 与集合 $\{1,2,3\}$ 实际上是相同的集合 |

注: 集合的互异性通常用来解决含参问题. 若集合元素含有参数，则求出参数后要把所有元素写出，判断在当前参数下集合是否满足互异性. 如不满足，则舍去.

### 3. 集合相等

只要构成两个集合 $A,B$ 的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的，记做

$$A=B$$

例如集合 $\{a,b,c\}$ 与集合 $\{c,a,b\}$ 是相等集合.

(1) 两个集合相等需要满足: 元素必须完全相同.

(2) 集合相等与集合的形式无关: 形式上不同的两个集合也可能相等，只要满足元素完全相同，就是相等集合. 例如 $0<x<3$ 且 $x$ 为自然数构成的集合与 1，2 构成的集合完全相等.

## 知识点 3. 集合的表示方法与分类

### 1. 常用数集及记法

| 数集 | 符号 |
|---|---|
| 自然数集 | $\mathbb{N}$ |
| 正整数集 | $\mathbb{N}_+$ 或 $\mathbb{N}^*$ |
| 整数集 | $\mathbb{Z}$ |
| 有理数集 | $\mathbb{Q}$ |
| 实数集 | $\mathbb{R}$ |

注意: $\mathbb{N}$ 只比 $\mathbb{N}_+$ 和 $\mathbb{N}^*$ 多一个 0 .

## 2. 集合的表示方法

(1) 自然语言法: 用文字叙述的形式表示集合的方法，如“小于 10 的所有自然数组成的集合”.

(2) 列举法: 把集合的所有元素一一列举出来，并用用花括号“{ }”括起来表示集合的方法: $\{1,2,3\}$

注意: 集合中的元素用“，”隔开；“{ }”代表所有、全部等含义.

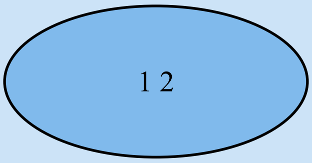
(3) 描述法: 一般的，设 $A$ 是一个集合,我们把集合 $A$ 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 $x$ 所组成的集合表示为:

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

例如,不等式 $4x-5<3$ 的解集用描述法表示为: $\{x \in \mathbb{R} | x<2\}$ .

(4) 图示法（Venn 图法）:

画一条封闭的曲线,用它的内部表示集合.集合 $\{1,2\}$ 用图示法表示如图所示:




(1) 使用描述法表示集合时要注意:

① 写清该集合中元素的代表符号，如 $\{x \in \mathbb{R} \mid x>1\}$ 不能写成 $\{x>1\}$ ;

② 用简明、准确的语言进行描述，如方程、不等式等;

③ 不能出现未被说明的字母，如 $\{x \in \mathbb{Z} \mid x=2m\}$ 中 $m$ 未被说明，故元素是不确定的;

④ 所有描述的内容都要写在花括号内，如“ $\{x \in \mathbb{Z} | x=2m\}, m \in \mathbb{N}$. ”不符合要求，应将“ $m \in N$. ”写进“{}”中，即 $\{x \in \mathbb{Z} | x=2m, m \in \mathbb{N}\}$ ;

⑤ 如果从上下文的关系看， $x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}$ 是明确的，那么 $x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}$ 可以省略，只写元素 $x$ ,如集合 $D=\{x \in \mathbb{R} | x<10\}$ 也可表示为 $D=\{x | x<10\}$ .

(2) 如何选择集合的表示方法?

① 如果集合中的元素比较少，或所含元素不易表述，宜用列举法

② 如果集合中的元素比较多，或有无限个元素，宜用描述法

③ 如果集合中元素所具有的属性比较明显，既可以用列举法也可以用描述法. 例如大于等于 1 且小于等于 5 的自然数用列举法表示为 $\{1,2,3,4,5\}$ ,用描述法表示为 $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

(3) 元素与集合的区别

① 元素与集合是相对的.如 $a$ 与 $\{a\}$ 的区别, $\{a\}$ 表示的是一个集合,而 $a$ 是集合 $\{a\}$ 中的一个元素.例如 0 与{0}是不同的,0 表示数字零,{0}表示数字零组成的集合.

② 集合有时也可以作为元素,如集合 $\{\{a\},\{b\}\}$ 中 $a$ 只表示其中的一个元素.

(4) 数集与点集

① 数集:集合 $\{x | y=x^2+1\}$ 与集合 $\{y | y=x^2+1\}$ 截然不同. $\{x | y=x^2+1\}$ 表示使函数 $y=x^2+1$ 有意义的 $x$ 的范围，因此 $\{x | y=x^2+1\}=\mathbb{R}$. $\{y | y=x^2+1\}$ 表示 $y=x^2+1$ 的函数值 $y$ 的范围，因此 $\{y | y=x^2+1\}=\{y | y \geq 1\}$ .这两种表示方法为以后学习函数的定义域与值域提供了条件.

② 点集: $\{(x, y) | y=x^2+1\}$ 表示满足方程 $y=x^2+1$ 的解的集合，即 $y=x^2+1$ 的图像上的点构成的集合，此集合中的元素为二维平面中的点.

### 3. 集合的分类

按集合中元素个数的多少,可以将集合分为有限集合无限集.

(1) 有限集: 含有有限个元素的集合. 例如集合 $A=\{a,b,c\}$ 是有限集.

(2) 无限集: 含有无限个元素的集合. 例如，所有自然数组成的集合是无限集.

## 题型 1——元素与集合关系的判断与应用

### 1. 元素与集合关系的判断

例 1.（多选）若集合 $A=\{x|x^2+2x-8=0\}$ ,则下列关系正确的是（ ）

A. $-2\in A$　　B. $2\in A$　　C. $4\notin A$　　D. $-4\notin A$

解析: 由题可知集合 $A$ 表示的是方程 $x^2+2x-8=0$ 的解，所以集合 $A=\{-4,2\}$ ,因此 $2\in A,-4\in A$.

答案: BC

多选题的解答技巧: 多选题是新高考新增加的题型,比单选题的区分度更大,是数学高考题型中最不易得满分的题型. 因此,突破多选题的解法对于高考的提分至为关键.

除运用直接法一一确定所有选项外,如何更灵活地解答多选题呢？除了掌握扎实的基本功，还应多分析选项之间的关系(是否对应，是否互近或类似,是否有间接关系或递进关系，是否有上下位关系,是否有等价关系等),进而确定选项. 除此之外,还有特例排除法、数形结合法、构造法等.一般地,数学多选题的正确选项为 2 个或 3 个,既然是多选题就不会只有 1 个正确选项，也不会有 4 个正确选项，因为这样会降低试题的区分度和有效率.因此当确定了 3 个正确选项，或排除了 2 个选项,便可确定正确的答案，而无须再判定其他选项了，这样就为解决其他题目提供了时间和精力.

特别强调,宁缺毋滥原则:由于新高考数学的多选题的指导语是“全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分”,因此,解答多选题,尽量把有把握的正确选项选出来,对于其他选项，特别是难以判定的选项放弃选择,这样既可确保得 2 分，避免 0 分.

### 2. 已知元素与集合的关系求参数的值或范围

# 1.2 集合间的基本关系

# 1.3 集合的基本运算

## 1.4 充分条件与必要条件

# 第二章 一元二次函数、方程和不等式

# 2.1 等式性质与不等式性质