# Afleveringsopgave 3 - Geometri 1

**Tim Sehested Poulsen - tpw705**

## Opgave A3

### a)

I beviset for sætning 3.3 bliver der givet at den omparametrisering som skal findes er givet ved $l^{-1}(t)$ hvor $l(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| dt$, altså en arbitrær buelængde funktion for $\gamma$. Det gør sig kun gældende for regulære kurver, hvilket vil blive vist senere i opgaven at $\gamma$ er, så for nu vil jeg tage det for givet. Jeg udregner derfor først integralet $l(t)$.

$$
\begin{aligned}
l(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \|(3, 4, -\frac{5t}{\sqrt{1-t^2}})\| dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{3^2 + 4^2 + \left(-\frac{5t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{25 + 25\frac{t^2}{1-t^2}} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{25\left(1 + \frac{t^2}{1-t^2}\right)} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} 5\sqrt{\frac{1}{1-t^2}} dt \\
&= 5\left[\arcsin(t) + C\right]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}
$$

Herfra kan vi bruge at $\arcsin(t)^{-1} = \sin(t)$, og derved kan vi give at $l^{-1}(t) = \frac{1}{5}\sin(t)$, og som er den ompametrisering som vi skal bruge. Så $(\gamma \circ l^{-1})(t)$ har enhedsfart.

### b)

Det kan hurtigt ses at de første to koordinatfunktioner er glatte, og derfor er $\sigma$ glat hvis og kun hvis $\sigma_3(u, v) = 5\sqrt{1-v^2}$ er glat. Da vi kan differentiere til $u$ og få 0, er det let løseligt og hvis vi differentierer med hensyn til $v$ får vi $\frac{\partial u}{\partial v} = -5v\sqrt{1-v^2}$, og generelt som vi differentierer denne funktion med hensyn til $v$ vil vi få et udtryk med $1 - v^2$ i nævneren, og da $\sigma$ er definert for $v \in (-1, 1)$ vil dette ikke være et problem da vi aldrig vil have 0 i nævneren så, altså er $\sigma$ glat. Det kan rimelig let ses at $\gamma = \sigma \circ \mu$ med $\mu(t) = (t, t)$. At $\gamma$ er glat følger af samme argument at $\sigma$ er glat.

$\sigma$ er kun regulære når $\sigma'_u(u, v) = (3, 4, 0)$ og $\sigma'_v(u, v) = (0, 0, -5\frac{v}{\sqrt{1-v^2}})$ er lineært uafhængige, hvilket er tilfældet når $-5\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \neq 0 \iff v \neq 0$. Altså er $\sigma$ regulært for $p \in \{(u,v) \in \mathbb{R} \times (-1,1) \mid v \neq 0\}$.

**c)**

da $\gamma'(t) = (3, 4, -\frac{5t}{\sqrt{1-t^2}})$, må dens koordinater med hensynet til basen $(\sigma'_u(u,v), \sigma'_v(u,v))$ være trivielt givet ved $(1,1)$ da vi bruger det relativt til $\mu(t) = (t,t)$ for $t \neq 0$.

**d)**

Jeg udregner komponent funktionerne for $\sigma$.

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \|\sigma'_u(u,v)\|^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ F(u,v) &= \sigma'_u(u,v) \cdot \sigma'_v(u,v) = 0 \\ G(u,v) &= \|\sigma'_v(u,v)\|^2 = 25\frac{v^2}{1-v^2} \end{aligned}$$

Arealet er derfor givet ved

$$\begin{aligned} A(\sigma, D) &= \int_D \|\sigma'_u \times \sigma'_v\| dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{EG - F^2} dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} 25^2 \frac{v^2}{1-v^2} dv du \\ &= 25^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1-v^2} dv \end{aligned}$$