Afleveringsopgave 4 - Geometri 1

Tim Sehested Poulsen - tpw705

Opgave A4

a)

$\gamma(t) = (t, t^2 + t^3, t^4 - t^2)$ må være regulær da $\gamma'(t) = (1, 2t + 3t^2, 4t^3 - 2t)$ er forskellig fra $(0,0,0)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, ret trivielt da $1 \neq 0$.

Jeg udregner krumningen i $t = 0$:

$$\gamma''(t) = (0, 6t + 2, 12t^2 - 2)$$

$$\|\gamma'(0) \times \gamma''(0)\| = \|(1,0,0) \times (0,2,-2)\| = \|(0,2,-2)\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\frac{\|\gamma'(0) \times \gamma''(0)\|}{\|\gamma'(0)\|^3} = \sqrt{8}$$

Det vil sige at krumningen er $\sqrt{8}$ i $t = 0$.

b)

Jeg bestemmer de t så $\gamma'(t) \in \Sigma$ hvilket er når:

$$2t + 3t^2 + 4t^3 - 2t = 0 \iff 4t^3 + 3t^2 = 0 \iff t^2(4t - 3) = 0 \iff t = 0 \vee t = -\frac{3}{4}$$

Altså er $\gamma'(t)$ indeholdt i planen Σ når $t = 0$ eller $t = -\frac{3}{4}$.

c)

Jeg bestemmer de værdi er af t hvor $\operatorname{span}(\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}) = \Sigma$. Det kan hurtigt ses at $\gamma''(t)$ og $\gamma'(t)$ er lineært uafhængige for alle $t \in \mathbb{R}$. Altså skal jeg undersøge for hvilke t at både $\gamma'(t)$ og $\gamma''(t)$ er indeholdt i Σ. Jeg udregner at $\gamma''(t)$ er indeholdt i Σ når:

$$6t + 2 + 12t^2 - 2 = 0 \iff t(12t + 6) = 0 \iff t = 0 \vee t = -\frac{1}{2}$$

Da $t = 0$ er den eneste værdi hvor både $\gamma'(t)$ og $\gamma''(t)$ er indeholdt i Σ er det den eneste værdi hvor $\operatorname{span}(\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}) = \Sigma$.

d)

Jeg udregner først $\gamma'''(t)$:

$$\gamma'''(t) = (0, 6, 24t)$$

Jeg udregner torsionen τ af γ i $t = 1$:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\det[\gamma'(1), \gamma''(1), \gamma'''(1)]}{\|\gamma'(1) \times \gamma''(1)\|^2} \\
&= \frac{\det[(1,5,2), (0,8,10), (0,6,24)]}{\|(1,5,2) \times (0,8,10)\|^2} \\
&= \frac{\det[(8,10), (6,24)]}{\|(50 - 16, 10, 8)\|^2} \\
&= \frac{192 - 60}{34^2 + 10^2 + 8^2} \\
&= \frac{132}{1320} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Det vil sige at torsionen er $\frac{1}{10}$ i $t = 1$.