# Afleveringsopgave 2 - Geometri 1

**Tim Sehested Poulsen - tpw705**

## Opgave A2

### (a)

Vi kan se at det er en parametiriseret flade da $\sigma$ både er defineret på en åben mængde og er en funktion fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$. Derudover kan vi se at den er glat da hvor af koordinatfunktionerne er glatte. Det kan rimelig let ses at

$$D\sigma_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2(u+v) & 2(u+v) \end{bmatrix}$$

og hver af disse indgange kan også differentieres uendeligt mange gange. Tangentervektorne er til koordinatkurverne er derfor givet ved søjlerne i $D\sigma$. Altså er $\sigma'_u = (1, 1, 2(u+v))$ og $\sigma'_v = (0, 1, 2(u+v))$.

### (b)

For at vise at $\sigma$ er regulær skal jeg vise at $\sigma'_u$ og $\sigma'_v$ er lineært uafhængige. Det kan ses eftersom

$$\begin{aligned} & t \cdot \sigma'_u + s \cdot \sigma'_v = (t, t+s, 2t+2s) = (0,0,0) \\ \implies & t = t+s = 2t+2s = 0 \\ \implies & t = s = 0 \end{aligned}$$

Altså er tangentvektorerne lineært uafhængige og $\sigma$ er derfor regulær.

En enhedsnormalvektoren for et $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{\sigma'_u \times \sigma'_v}{\|\sigma'_u \times \sigma'_v\|} \\ &= \|(0, -2(u+v), 1)\| \cdot (0, -2(u+v), 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4(u+v)^2+1}} \cdot (0, -2(u+v), 1) \\ &= (0, -\frac{2(u+v)}{\sqrt{4(u+v)^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4(u+v)^2+1}}) \\ &= (0, -\frac{3(u+v)}{4(u+v)^2+1}, \frac{1}{\sqrt{4(u+v)^2+1}}) \end{aligned}$$

### (c)

Eftersom $(2, 1, 0)$ kan skrives som en lineær kombination af $\sigma'_u$ og $\sigma'_v$ for punktet $p = (0, 0)$, hvilket kan ses fra

$$2\sigma'_u - \sigma'_v = 2(1, 1, 0) - (0, 1, 0) = (2, 1, 0)$$

Må det gælde at $(2, 1, 0)$ ligger i tangentrummet $T_{(0,0)}\sigma$. For at finde en kurve $\gamma(t) = (\sigma \circ \mu)(t)$, som har $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ og $\gamma'(0) = (2, 1, 0)$, skal vi finde en funktion $\mu$ sådan at

$$\gamma'(t) = \sigma'_u(\mu(t)) \cdot \mu'_1(t) + \sigma'_v(\mu(t)) \cdot \mu'_2(t) = (2, 1, 0)$$

med inspiration fra beviset til theorem 2.4 kan jeg bestemme at $\mu(t) = (2t, -t)$. Hvorfra det kan ses at $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ og

$$\gamma'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### **(d)** Jeg udregnede $v_0 = \mu'(0) = (2, 1)$ og faktisk også $D\sigma_p \cdot v_0 = (2, 1, 0)$ da dette også er $\gamma'(0)$.

### (e)

Hvis $(1, 0, 2) \in T_p\sigma$ for et $p \in \mathbb{R}^2$ så ville det gælde at den kunne skrives som en linear kombination af række vektorerne i $D\sigma_p$. Altså

$$\begin{aligned} (1, 0, 2) &= t \cdot (1, 1, 2(u + v)) + s \cdot (0, 1, 2(u + v)) \\ &= (t, t + s, 2(u + v) \cdot (s + t)) \end{aligned}$$

De første koordinater bestmmer $t = 1$ og $s = -1$, men da det sidste koordinat så har ligningen:

$$2(u + v)(1 - 1) = 0 \neq 2$$

hvilket er uafhængigt af $p = (u, v)$. Altså tilhører $(1, 0, 2)$ ikke tangentrummet for noget punkt $p \in \mathbb{R}^2$.