KomAn - Opgavesæt A

Tim Sehested Poulsen - tpw705

Opgave 1

a)

Det ses rimelig hurtigt på figuren at billedkurven går i gennem punktet 1 præcist da kurven skærer x-aksen. Samtidig ligner det at kurver går mod punktet 0, men det kan ikke ses på figuren om den faktisk rammer punktet, og hvis man ved at e^z ikke har nogle 0 punkter så kan man konkludere at den ikke rammer punktet 0.

b)

Jeg kan ved brug af sætning 1.18 [1] konkludere at

$$\begin{aligned} & f(z) - 1 = 0 \\ \iff & e^{-z^2/2} = 1 \\ \iff & \frac{-z^2}{2} = 2\pi i k, \text{ for } k \in \mathbb{Z} \\ \iff & z^2 = -4\pi i k, \text{ for } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Det kan let ses at $|-4\pi i k| = 4\pi|k|$ og

$$\arg(-4\pi i k) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} & \text{k} > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{k} < 0 \\ 0 & \text{k} = 0 \end{cases}$$

Da må vi kunne konkludere at

$$z = \begin{cases} \pm\sqrt{4\pi k} \cdot \left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right) & \text{hvis k} > 0 \\ \pm\sqrt{4\pi k} \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) & \text{hvis k} < 0 \\ 0 & \text{hvis k} = 0 \end{cases}$$

Hvilket udgør samtlige nulpunkter til $f(z) - 1$.

c)

Betragter vi funktionen $g(z) = -z^2/2$, vil vi kunne observere at for ethvert punkt $(a + ib) \in \mathbb{C}$ med $a, b \in \mathbb{R}$ at

$$\begin{aligned} & g(z) = a + ib \\ \iff & -z^2/2 = a + ib \\ \iff & z^2 = -2(a + ib) \end{aligned}$$

Antag at $r = |a + ib|$, så har ved brug af løsningen til opgave S.1.(f) fra supplerende opgaver har vi at

$$z = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{r + a} + i\sqrt{r - a}\right) & \text{hvis b} > 0 \\ \pm\left(\sqrt{r + a} - i\sqrt{r - a}\right) & \text{hvis b} < 0 \end{cases}$$

I begge disse tilfælde vil der være 2 løsninger, men det vil også være sådan at vi i begge har at en af løsningerne har $\mathcal{R}(z) < 0$ hvilket så udelukkes. Altså er der kun 1 løsning til $\frac{-z^2}{2} = a + ib$ så længe den reelle del skal være positiv. Da må vi kunne konkludere at $g(z)$ er injektiv på det højre halvplan. Kigger vi så på normen $|\frac{-z^2}{2}|$ for $z \in \Omega_{\sqrt{2\pi}}$ ser vi

$$|\frac{-z^2}{2}| = \frac{1}{2}|z^2| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}^2 = \pi$$

Specielt må det betyde at $|\mathcal{C}(g(z))| \leq \pi$ for $z \in \Omega_{\sqrt{2\pi}}$. Kigger vi så på $g(z_1) = a + ib$ og $g(z_2) = c + id$ for $z_1, z_2 \in \Omega_{\sqrt{2\pi}}$ hvorom det gælder at $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ og vi antager at $f(z_1) = f_(z_2)$ vil vi se at

$$e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} \iff e^a e^{ib} = e^c e^{id}$$

Hvor vi herfra kan konkludere at $|f(z_1)| = e^a = |f(z_2)| = e^c$ og kan derfor fjerne dem på begge sider af ligheden. Til slut kan vi så løse følgende med brug af sætning 1.18

$$e^{ib-id} = 1 \iff i(b-d) = 2\pi ip \iff b = 2\pi p + d$$

for alle $p \in \mathbb{Z}$. Men da vi lige har kunne konkludere at $|\mathcal{C}(g(z_1))|, |\mathcal{C}(g(z_2))| \leq \pi$ må $b, d \leq \pi$ og vi har da kun tilbage at $p = 0$ er en løsning og derfor er $b = d$ og vi kan så konkludere at $f(z_1) = f(z_2)$ giver at $g(z_1) = g(z_2)$ som vi lige har vist er injektiv altså er $z_1 = z_2$ og f er injektiv.

Opgave 2

a)

Starter vi med at observere den geometriske række og differentierer den 2 gange får vi at

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'' &= \left(\frac{1}{1-z}\right)'' \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n\right)' &= \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)z^n &= \frac{2}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

Hvor denne række vil have samme konvergensradius per 4.23 i [2], hvilket er $\rho_f = 1$ da den geometriske række har konvergensradius 1. Jeg kan nu multiplicere med z^2 og bevare konvergensradius ifølge 4.15 i [2]. Jeg får at

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n &= \frac{2z^2}{(1-z)^3} \\
\implies \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n &= \frac{2z^2}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

Hvor implikationen kommer fra at de første 2 led er 0. Altså har vi vist det ønskede.

b)

Jeg definerer først mængden $A = \{k!|k \in \mathbb{N}\}$. Jeg kan dernæst betragte følgen $a_0 := 0$ og dernæst $a_n := 1_A(n)$ for $n \in \mathbb{N}$. Da vil det være sådan at

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Kigger vi på mængden $T_h = \{t \geq 0|\{|a_n|t^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en begrænset følge$\}$. Da a_n kun antager værdierne 1 og 0 kan vi se at $a_n t^n \leq t^n$, hvilket udgør en konvergent følge så længe $t \leq 1$. Ligeledes vil følgen $\{a_n t^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergere for $t > 1$ så derfor må $\sup T_h = 1$. Derfra kan vi konkludere at $h(z)$ har konvergensradius $\rho_h = 1$. Vi bemærker også at $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}n$ ikke eksisterer da a_n enten er 1 eller 0 og $\sqrt[n]{1} = 1$ og $\sqrt[n]{0} = 0$ giver at følgen divergerer da den skifter mellem 0 og 1.

Opgave 3

a)

Jeg vil først vise at f er injektiv. Antag at $f(z_1) = f(z_2)$ så har vi altså at

$$\begin{aligned}
&\frac{z_1+2}{z_1-i} = \frac{z_2+2}{z_2-i} \\
\iff &(z_1+2)(z_2-i) = (z_2+2)(z_1-i) \\
\iff &z_1z_2 - iz_1 + 2z_2 - 2i = z_2z_1 - iz_2 + 2z_1 - 2i \\
\iff &-iz_1 + 2z_2 = -iz_2 + 2z_1 \\
\iff &z_2(2+i) = z_1(2+i) \\
\iff &z_2 = z_1
\end{aligned}$$

Altså er f injektiv. Vi kan se at f er surjektiv ved at se at for et arbitrært $w \in \mathbb{C}$ kan vi løse ligningen $f(z) = w$ og få at

$$\begin{aligned}
&\frac{z+2}{z-i} = w \\
\iff &z + 2 = wz - wi \\
\iff &z(1-w) = -2 - wi \\
\iff &z = \frac{-2-wi}{1-w}
\end{aligned}$$

Hvilket altid er veldefineret da $w \neq 1$ per definition af f. Altså er f surjektiv og injektiv, og den inverse til f er givet ved

$$f^{-1}(w) = \frac{-2-wi}{1-w}$$

b)

For begge kurver kan vi observere at $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$ og da vil $f(\gamma_1(0)) = f(\gamma_2(0)) = \frac{2}{-i} = 2i$. Altså skærer de 2 billedkurver hinanden i punktet $2i$. Da f er sammensat af $z+2$ og $z-i$ hvilket begge er holomorfe funktioner og per 1.3 i [1] må f også være holomorf da den er defineret for $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Eftersom γ_1 og γ_2 er differentiable kurver med afledte $\gamma_1'(t) = 1$ og $\gamma_2'(t) = i$ for alle $t \in \mathbb{R}$ kan vi se at kurvernes skæringsvinkel for $t = 0$ er vinklem mellm $\gamma_1'(0)$ og $\gamma_2'(0)$ som er $\frac{\pi}{2}$. Fra s. 16 i [1] har vi da givet at skæringsvinklen mellem billedkurverne er den samme som for kurverne selv, altså er skæringsvinklen mellem billedkurverne også $\frac{\pi}{2}$.

Referencer

[1] Christian Berg, Complex Analysis. Lecture Notes, 2016, ISBN 9 788770 786195,

[2] Analyse 1 af Matthias Christiandl, 4. udgave ved Søren Eilers og Henrik Schlichtkrull